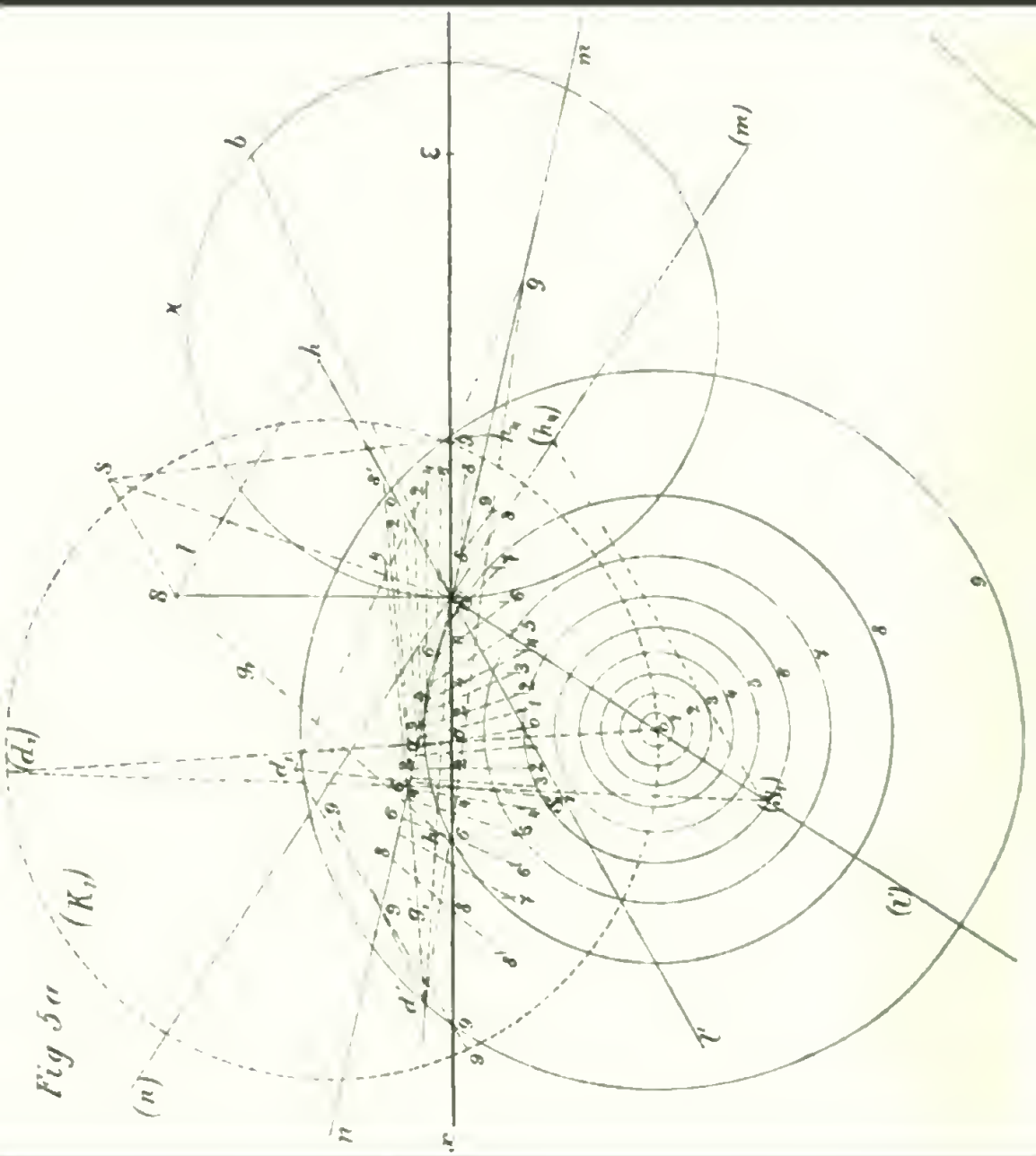


Archiv der Mathematik und Physik

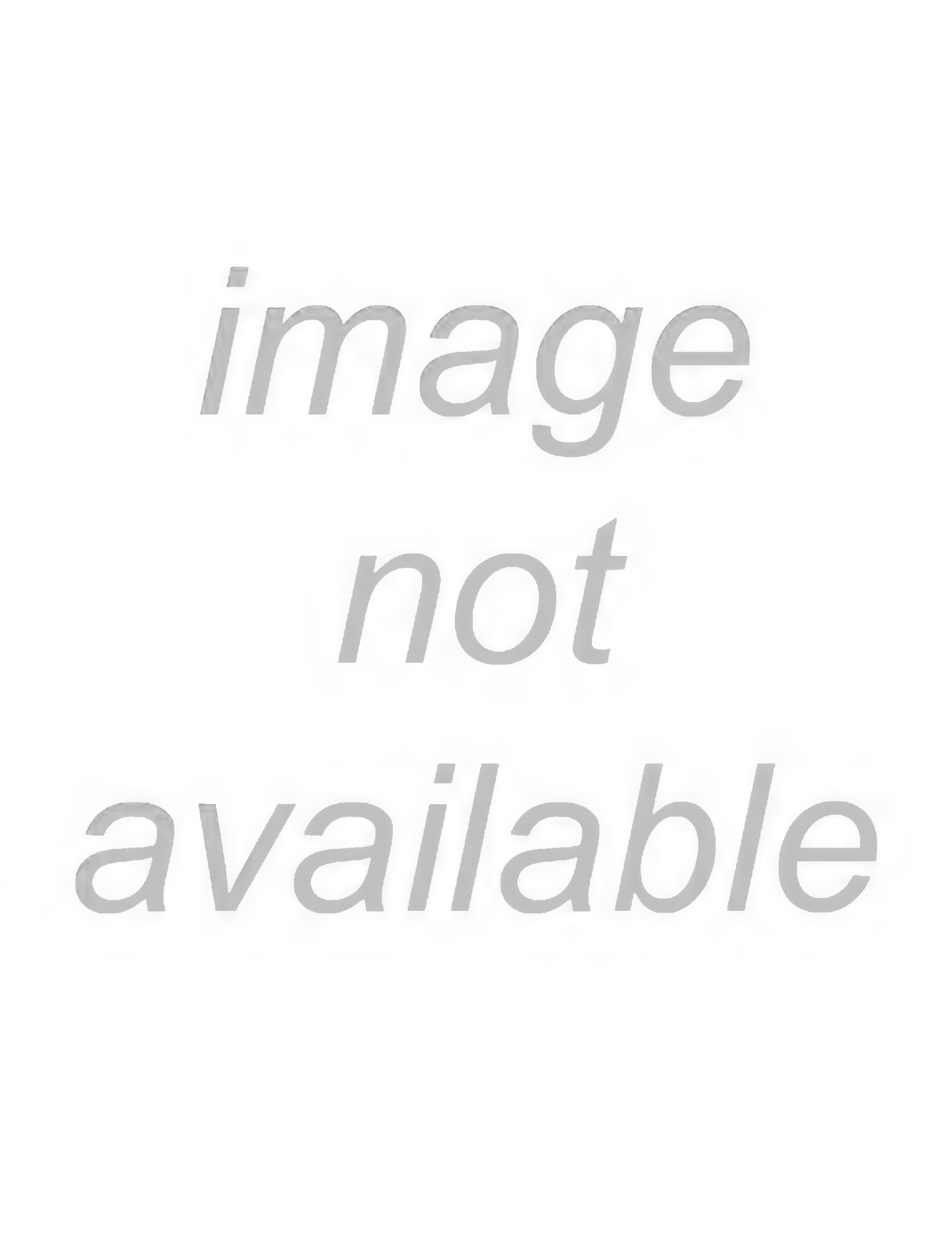


image
not
available

Mathematics
QA
1
.A67

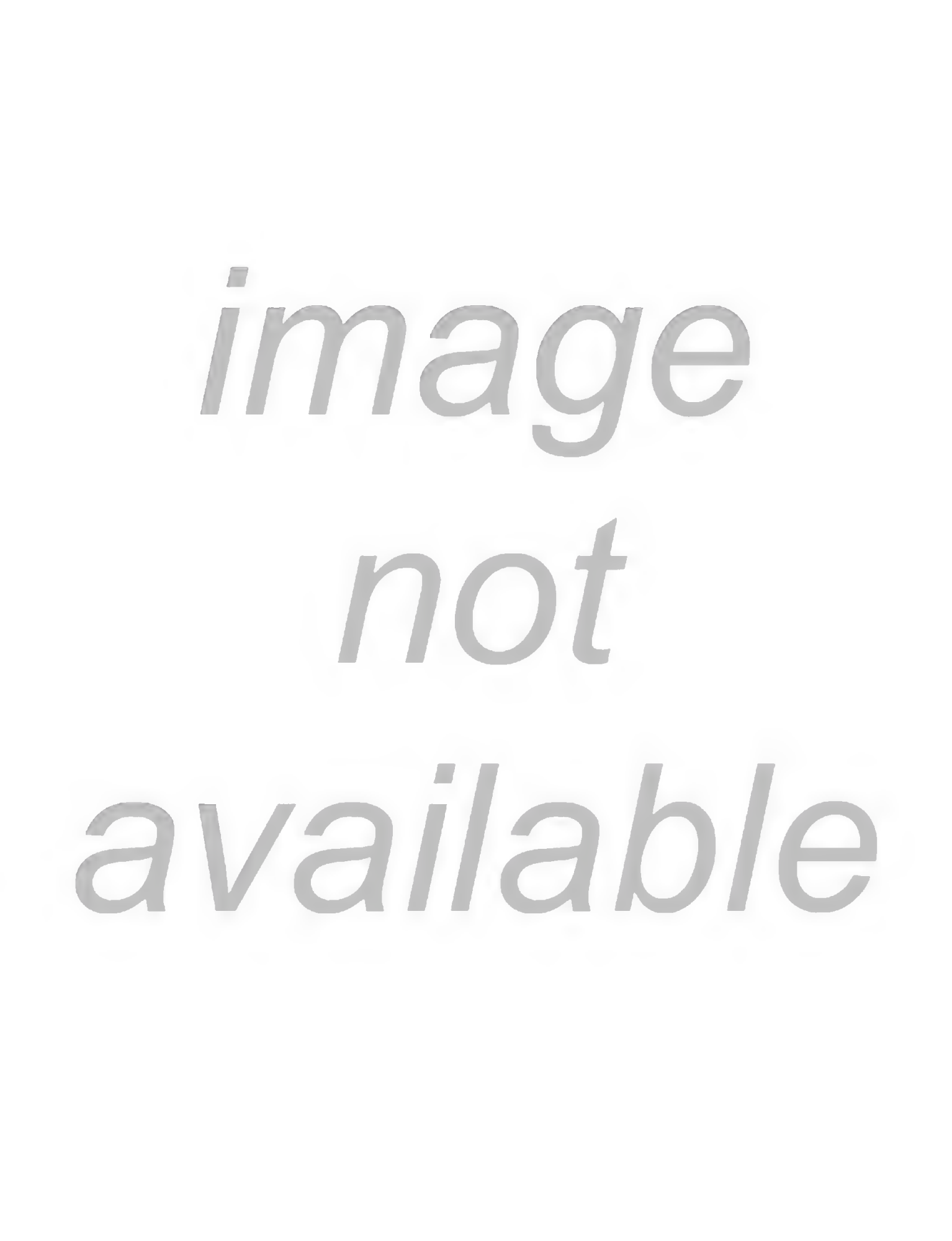


image
not
available

ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe,

Dr. ph. Prof. an d. Univ. Berlin.

Zweite Reihe.

Fünfter Teil.

Leipzig.
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
J. Sangbusch.

1887.

Inhalts-Verzeichnis

des fünften Teils.

№ der Abhandlung.		Heft.	Seite
	Methode und Principien.		
XII.	Ueber Algorithmen und Calculn. Von Ernst Schröder	III.	225
	Arithmetik, Algebra und reine Analysis ohne Integralrechnung.		
III.	Ueber rationale Dreiecke und ihren Zusammenhang mit der Pell'schen Gleichung. Von Rich. Müller	I.	111
IX.	Beweis des quadratischen Reciprocitätsgesetzes durch Umkehrung. Von J. Hermes. . . .	II.	190
X.	Einige Anwendungen der Methode der wiederholten Substitutionen. Von W. Laska	II.	199
XI.	Eine Reihenentwicklung für π. Von E. Oekinghaus	II.	218
XI.	Bemerkung zu einer Reihe. Von E. Oekinghaus	II.	219
XI.	Eine Lösung der gemischten quadratischen Gleichung. Von W. Laska	II.	220
XI.	Untersuchung der Zahl $2^{37}-1$. Von P. Seelhoff	II.	221
XV.	Näherungsausdruck für π. Von Ernst Lakenmacher	III.	352

424966

№ der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	Integralrechnung.		
I.	Ueber Multiplicator-Gleichungen höherer Stufe im Gebiete der elliptischen Functionen. Von Paul Biedermann	I.	1
II.	Ueber die Integrale $\int \frac{\sin z}{z^a} dz$ und $\int \frac{\cos z}{z^a} dz$. Von Ernst Linhardt	I.	91
	Geometrie der Ebene.		
VII.	Ueber Construction von Hyperbeln. Von Heinrich Selpp	II.	172
XI.	Lehrsatz von den Kegelschnitten. Von Theodor Meyer	II.	211
XI.	Darstellung der ersten Gattung elliptischer Integrale durch Curvenbogen zweiten Grades. Von R. Hoppe	II.	215
XI.	Ein merkwürdiges Dreieck. Von Hermann Stade	II.	223
XIV.	Das Viereck in Beziehung auf seine Hauptträgheitsaxen. Von R. Hoppe	III.	345
	Geometrie des Raumes.		
IV.	Allgemeine Theorie der Isophoten-Tangenten und Construction derselben für Flächen zweiten Grades. Von Josef Baasla	II.	113
V.	Ueber die Curve, deren Rotation die kleinste Oberfläche erzeugt. Von Louis Saalschütz.	II.	131
VI.	Die sphärische Schleifenlinie. Von Franz Schiffner	II.	160
XI.	Ueber die Pseudosphäre. E. Oeklughaus . .	II.	217
XVI.	Die synthetischen Grundlagen zur Theorie des Tetraedroid-Complexes. Von Fritz Hoffmann	IV.	359
XVIII.	Das $n$dehnige $(n+1)$eck in Beziehung auf seine Hauptträgheitsaxen. Von R. Hoppe	IV.	418
XX.	Ueber den geometrischen Ort der Mittelpunkte von Kreisen, welche durch 2 Punkte gehen und eine Gerade treffen. Von Franz Schiffner . . .	IV.	442

Nr der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	Mechanik.		
VIII.	Einige Sätze über Massenmittelpunkte. Von Heinrich Selpp	II.	178
XV.	Umkehrung eines Satzes über die Anziehung einer Kugel. Von R. Hoppe	III.	351
XIX.	Ueber die sphärisch elliptische Bewegung. Von Bruno Decker	IV.	430
	Physik.		
XVII.	Ueber die Contractio venae bei spaltförmigen Oeffnungen. Von Fritz Kötter	IV.	392
	Litterarische Berichte.		
XVII.	Heller (Kegelschn.). Gaston Tarry (repr. con. im.). Cran (Krümm.). Lilienthal (Fläch. Strahl. Syst.). Baker (group circl.). Uhlich (mkw. Pkt.) Henrich (Kryst.). Grasho (Masch.). Henneberg u. Smreker (techn. Mech.). Neumayer (Lab. Elektr.). Krüss (elektr. Photom.). Londe (photogr.). Vidal (photogr.). Schwartze (natw. t. Umsch.). Meder (Selbstreg.). Watson (el. magn.). Mascart (El. Magn. — stat. El.). Wildermann (El.). Weinstein (ph. Massb.). L. Meyer (Th. Chem.). Kelling (Zustdsbed.). Lisser u. Benecke (Ztschr. ph. Unt. I. II.). Mansion u. Neuberg (Math. VI.).		
XVIII.	Reichel (Ar. I.). Schubert (Ar. Alg.). Henrich (Ar. Alg.) Kröger (Geom.). Behl (Plan.). Wiegand (Plan.). Fr. Meyer (Plan.). Fuucke (Geom.). Burckhardt (Ster.). Spitz (sph. Trig.). Behse (Phys.). Münch (Phys.). Soc. Math. d. Fr. (Bull. XIV.).		
XIX.	Thieme (ster. Aufg.). Schubert (ar. Anf.). Seelhoff (Auf.). Martus (Aufg.). Mertens (Aufg. — Vorst.). Janisch (Funcke) (Aufg.). Carr (synops.). Gravellus (5st. Log.). Spitzer (Zs. Tab.). Gauss (Börsch u. Simon) (kl. Quadr.).		

Longchamps (alg. — géom.). Weyr (proj. G.). Mittag-Leffler (Act. Math. IX.). Linc. (Rend. II.). Veral. en Meded. (II). Bur. d. Long. (Ann. 1887).

XX. Schlemüller (kosm. Atm.). Hullmann (Gay-L.-F.). Consentins (ns. tyr.). Tischner (astr. th.). Clanssen (Rechn.). Schendel (Alg.). Kerschhanm (Qnadr. Kr.). Ahdank Ahakanowicz (intégraph.). Ketteler (Opt.). Elsas (Schall). Banmgarten (Schallint.). N. Arch. (XIII). Ph. Soc. (Bull. VII. IX.). Klein (Rev. VII. 1. 2.).

Berichtigungen im 5. Teil.

Seite	134	Zeile	1	v. nnt.	statt	wie	setze wenn
	135		5	„ „		$h > b_m$	„ $h > h_m$
	136		15	„ „		bewegter	„ beregter
	140		3	„ „		Differential-	„ Differential- gleicbnng rechnnng
	141		3	„ „		D	setze Θ
	145		5	v. ob.	„	sie	„ für
	149		6	„	„	FG gleich	setze FG gleich CF
	156		10	v. ob.	statt	ans	setze aus 59)
	159		7	v. nnt.	„	15 ten	„ 17 ten
	212		7	v. ob.	„	Kegelscbnitt OP	setze Kegelstrahl $\overline{OP}$
			10	„	„	$\overline{POR}$	setze $\underline{\overline{POR}}$
			13	„	„	$\overline{POS}$	„ $\underline{\overline{POS}}$
			4	v. nnt.	„	b^3	„ b^2
	228		12	v. ob.	„	$O_1'+$	„ $\Delta+$
	230		4	v. nnt.	„	.	„ ,
	232		3	v. ob.	„	bc	„ $b.c$
	242		1	„		ansständig einmal zn streichen	
	243		3	„	statt	bezeichen	setze bezeichnen
	255		12	v. nnt.			
	256		10	„			
	260		2	v. ob.	14 v. nnt.		statt des Punktes setze
	265		2	v. ob.			das Knüpfungszeichen ∘
	266		14	„			
	270		10, 13, 14, 18	v. ob.			
	258		9	v. ob.	vor Prodnct fehlt	„	
			18	„	statt ekrennt		setze erkennt

Seite	262	Zeile	7	v. ob.	statt	ersten	setze	der ersten
	263		4	„	„	$b\Theta'$	„	$b'\Theta$
	264		14	„	„	b	„	b'
	265		6	v. unt.	„	ε.	„	ε,
					„	ξ,	„	ε,
	270		1	„		$+$	„	$-$
	267		6	v. ob.	„	Herrn Thomae's	setze	Riemann', Thomae' und P. Du Bois Reymond's

---

Seite	191	Zeile	2	v. ob.	statt	der	setze	dem
				„	„	Formel	„	formal
			9	„	„	$(z:3)$	„	$(s:s)$
	192		4 u. 2	v. unt.	„	1	„	-1

also über einander:

$$t \equiv 1 \quad t \equiv -1 \quad s \equiv 1 \quad s = -1$$

I.

Ueber Multiplicator-Gleichungen höherer Stufe im Gebiete der elliptischen Functionen.

Von

Paul Biedermann.

Wir verwenden im Folgenden durchweg die Bezeichnungen, welche Herr Klein in seinen neueren Arbeiten über elliptische Functionen und speciell elliptische Modulfunctionen benutzt. Man vergleiche dazu etwa Math. Ann. Band 14 und 17, sowie die Abhandlungen der Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften von 1885. Es mag deshalb genügen, betreffs der hier eingehaltenen Bezeichnungsweise auf diese Arbeiten hingewiesen zu haben.

Das Problem der Transformation $n$ter Ordnung für die $s$te Stufe im Gebiete der elliptischen Functionen besteht in der Aufgabe, den algebraischen Zusammenhang zwischen einer ursprünglichen Modulform $F(\omega_1, \omega_2)$, welche entweder der $s$ten Stufe zugehört oder ihr adjungirt ist, und der Gesamtheit der transformirten Modulformen $F\left(\omega_1', \frac{\omega_2'}{n}\right)$ ausfindig zu machen. Dabei ist gesetzt

$$\omega_1' = (sa+1)\,\omega_1 + sb\,.\,\omega_2, \quad \omega_2' = sc\,.\,\omega_1 + (sd+1)\,\omega_2$$

unter der Bedingung

$$(sa+1)(sd+1) - sb\,.\,sc = 1,$$

und eine Modulform $F(\omega_1, \omega_2)$ heisst dann der $s$ten Stufe zugehörig, resp. ihr adjungirt, wenn sie bei jeder solchen mod s zur Identität congruenten linearen Substitution ungeändert bleibt, resp. sich nur um Einheitswurzeln ändert. Die Anzahl der oben auftretenden in Bezug auf die Untergruppe derjenigen linearen Substitutionen, welche

mod s zur Identität congruent sind, inäquivalenten Zahlenpaare $\omega_1', \frac{\omega_2'}{n}$ sei mit N bezeichnet.

Die algebraischen Gleichungen Nten Grades, welche den gewünschten algebraischen Zusammenhang liefern, zerfallen nun in der Jacobi'schen Darstellung, soweit Jacobi sie betrachtet, in zwei Classen, in Multiplicator- und Modular-Gleichungen. Bei seinen Multiplicator-Gleichungen ist die zu Grunde gelegte Modulform in Weierstrass'scher Bezeichnungsweise $F(\omega_1, \omega_2) = \sqrt{e_i - e_k}$, also eine wirkliche Modulform; bei seinen Modular-Gleichungen ist sie speciell eine Modulfunction, nämlich $F(\omega_1, \omega_2) = F(1, \omega) = \sqrt[4]{k}$[1]). Mit Bezug hierauf wollen wir überhaupt die bezeichneten algebraischen Gleichungen, welche ein System von transformirten Grössen mit nicht-transformirten Grössen verbinden, Multiplicator- resp. Modular-Gleichungen nennen, je nachdem es sich dabei um transformirte Modul-Formen, resp. Functionen handelt. In dem Sinne als die Modulfunctionen einen speciellen Fall der Modulformen repräsentiren, begreifen also auch die Multiplicator-Gleichungen die Modular-Gleichungen in sich.

Von eigentlichen Multiplicator-Gleichungen, also von solchen, bei denen eine wirkliche Modulform zu Grunde gelegt ist, finden sich ausser den Jacobi'schen in der Litteratur noch diejenigen vor, bei denen die Modulformen g_2, g_2[2]) und $\sqrt[12]{\Delta}$ resp. $\sqrt[24]{\Delta}$[3]) zu Grunde gelegt sind. Da diese Modulformen $g_2, g_3, \sqrt[24]{\Delta}$ der Gesammtgruppe der linearen Substitutionen der Perioden ω_1, ω_2 zugehören, resp. ihr adjungirt sind, werden wir die diesbezüglichen Multiplicator-Gleichungen solche 1ter Stufe nennen. Da andrerseits die drei Modulformen $\sqrt{e_i - e_k}$ der Gruppe der linearen Substitutionen der Perioden, welche mod 2 zur Identität congruent sind, adjungirt sind, werden wir die

---

1) Man vergleiche für die Jacobi'schen Multiplicator- und Modular-Gleichungen insbesondere Jonbert, „Sur les équations, qui se rencontrent dans la théorie de la transformation des fonctions elliptiques", Paris 1876 und Koenigsberger, „Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen", sowie „Die Transformation, die Multiplication und die Modular-Gleichungen der elliptischen Functionen."

2) Man vergleiche Felix Müller, „De transformatione functionum ellipticarum" Berlin 1867.

3) Man vergleiche Klein, Math. Ann. Bd. 15, Klepert, Crelle Bd. 87, Hurwitz, Math. Ann. Bd. 18, Weber, Acta mathematica Bd. 6.

Jacobi'schen Multiplicator-Gleichungen als solche 2ter Stufe bezeichnen.

Dies vorausgeschickt liegt es nahe, auch Multiplicator-Gleichungen höherer Stufe zu studiren, indem man fundamentale Modulformen höherer Stufe für die Transformation zu Grunde legt. Als solche empfehlen sich die Teilwerte der σ-Function:

$$\sigma_{\lambda\mu} = -e^{-\frac{(\lambda\eta_1+\mu\eta_2)(\lambda\omega_1+\mu\omega_2)}{2s^2}}\,\sigma\left(\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{s},\ \omega_1,\ \omega_2\right)^{1)}$$

Es gelingt für sie einerseits, eine Theorie der Multiplicator-Gleichungen bei beliebigem s zu entwerfen, d. h. man kann für sie Multiplicator-Gleichungen beliebiger Stufe studiren. Andrerseits ist es möglich, überhaupt alle Multiplicator-Gleichungen, Modular-Gleichungen, Modular-Correspondenzen lediglich von den $\sigma_{\lambda\mu}$ ausgehend zu behandeln. Es hat dies seinen Grund darin, dass die $\sigma_{\lambda\mu}$ in der Tat Modulformen von fundamentalster Bedeutung sind.

Wir beschränken uns auf die Multiplicator-Gleichungen im engeren Sinne und zwar werden wir in einem ersten Abschnitte die Multiplicator-Gleichungen der Teilwerte der σ-Function bei beliebigem s in den allgemeinen Umrissen studiren, um sodann im zweiten Abschnitt die Untersuchung für die niedersten Stufen bis in das Einzelne durchzuführen.

Erster Abschnitt.

Allgemeines über die Multiplicator-Gleichungen für die Teilwerte der σ-Function.

§ 1. *Die Teilwerte der σ-Function.*

Die Haupt-Eigenschaften der $\sigma_{\lambda\mu}$ sind in den beiden eben citirten Abhandlungen des Herrn Klein bereits abgeleitet worden. Wir stellen davon für unsere Zwecke folgendes zusammen:

Die beiden Grössen λ und μ können an sich beliebige ganze Zahlen sein; doch giebt es bei gegebenem s nur eine begrenzte Anzahl ν verschiedener $\sigma_{\lambda\mu}$, da die Relationen bestehen:

---

1) Man vergleiche Klein, Berichte d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wissensch. 1884, sowie die Abhandlungen derselben von 1885.

$$(1)\qquad \sigma_{\lambda+l\,s,\,\mu+m\,s} = (-1)^{lm+l+m}\, e^{-\frac{i\pi}{s}(\lambda m-\mu l)}\,\sigma_{\lambda\mu},$$

$$(2)\qquad e^{(\lambda-\mu)\frac{i\pi}{s}}\,\sigma_{\lambda\mu} = \sigma_{s-\lambda,\,s-\mu}.$$

Bei zusammengesetztem s ist ausserdem noch zu beachten, dass eine gewisse Anzahl von $\sigma_{\lambda\mu}$ als bereits zu den Factoren von s gehörig auszuscheiden sind. Wenn

$$s = t_1^{s_1} t_2^{s_2} t_3^{s_3} \ldots$$

gesetzt wird, so dass

$$S = s^3\left(1-\frac{1}{t_1^2}\right)\left(1-\frac{1}{t_2^2}\right)\left(1-\frac{1}{t_3^2}\right)\ldots$$

die Anzahl der mod s incongruenten homogenen linearen Substitutionen von ω_1, ω_2 bezeichnet, so zählt man für dieses ν ab:

$$(3)\qquad \begin{cases} \nu = \dfrac{S}{s} = 3 \text{ für } s = 2 \\ \text{und} \\ \nu = \dfrac{S}{2s} = \dfrac{s^2}{2}\left(1-\dfrac{1}{t_1^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{t_2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{t_3^2}\right)\ldots \text{ für } s>2\ ^{1}) \end{cases}$$

Das Verhalten der $\sigma_{\lambda\mu}$ bei linearer Substitution der Perioden ω_1, ω_2:

$$\omega_1' = \alpha\omega_1+\beta\omega_2, \quad \omega_2' = \gamma\omega_1+\delta\omega_2, \quad (\alpha\delta-\beta\gamma = 1)$$

anlangend gilt die Formel:

$$(4)\qquad \sigma_{\lambda\mu}(\omega_1', \omega_2') = \sigma_{\lambda\alpha+\mu\gamma,\ \lambda\beta+\mu\delta}(\omega_1, \omega_2).$$

Dies besagt unter Bezugnahme auf (1) und (2), dass die einem bestimmten s zugehörigen verschiedenen $\sigma_{\lambda\mu}$ sich bei linearen Substitutionen der Perioden ω_1, ω_2 bis auf vortretende $2s$ te Einheitswurzeln unter sich permutiren. Es lassen sich daher durch lineare Substitution der Perioden aus irgend einem $\sigma_{\lambda\mu}$ die sämtlichen ν demselben s zugehörigen $\sigma_{\lambda\mu}$ und nur diese ableiten.

Ueben wir weiter insbesondere auf ω_1, ω_2 eine lineare Substitution aus, welche mod s zur Identität congruent ist, also eine Substitution:

---

1) Dieselbe Zahl hat neuerdings auch Herr Kiepert angegeben, indem er die Anzahl der reducirten Teilwerte $n$ten Grades der p-Function bestimmt. Man vergleiche Math. Ann., Bd. 26, pag. 378.

(5) $\omega_1' = (sa+1)\,\omega_1 + sb\,\omega_2, \quad \omega_2' = sc\,\omega_1 + (sd+1)\,\omega_2$

wobei

(6) $$(sa+1)(sd+1) - sb\,.\,sc = 1^{*}$$

ist, so findet sich auf Grund von (4) und (1)

(7) $$\sigma_{\lambda\mu}(\omega'_1, \omega_2') = (-1)^{\lambda^2(ab+a+b)+\mu^2(cd+c+d)+\lambda\mu(ad+bc)} \times e^{\frac{i\pi}{s}[-b\lambda^2+(a-d)\lambda\mu+c\mu^2]}\, \sigma_{\lambda\mu}(\omega_1, \omega_2)$$

Speciell für ungerades s lässt sich (7) noch zusammenziehen. (6) hat dann nämlich die Relationen zur Folge:

$$ab+a \equiv cd+d \equiv 0, \quad ad+bc \equiv a-d \pmod 2$$

und demgemäss lässt sich in diesem Falle für (7) schreiben:

(7b) $$\sigma_{\lambda\mu}(\omega_1', \omega_2') = \varepsilon^{\frac{s-1}{2}[b\lambda^2-(a-d)\lambda\mu-c\mu^2]}\, \sigma_{\lambda\mu}(\omega_1, \omega_2),$$

wobei $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{s}}$ gesetzt ist. Diese Formeln (7) und (7b) lehren, dass sich jedes $\sigma_{\lambda\mu}$ bei linearen Substitutionen von ω_1, ω_2, welche mod s zur Identität congruent sind, um $2s$te resp. $s$te Einheitswurzeln ändert, je nachdem s gerade, resp. ungerade ist. Jedes $\sigma_{\lambda\mu}$ bleibt aber auch erst bei Substitutionen, welche mod s zur Identität congruent sind, bis auf Einheitswurzeln ungeändert. Die Modulformen $\sigma_{\lambda\mu}$ sind somit der $s$ten Stufe adjungirt.

Ersetzt man in (5) und (6) a, b, c, d durch $2sa'$, $2sb'$, $2sc'$, $2sd'$, resp. sa', sb', sc', sd', je nachdem s gerade oder ungerade ist (was man im Folgenden immer mit Leichtigkeit ergänzen wird), so entsteht eine lineare Substitution der Perioden, welche mod $2s^2$, resp. mod s^2 zur Identität congruent ist. Wir bemerken infolge von (7) und (7b) ohne weiteres, dass dann jedes $\sigma_{\lambda\mu}$ ungeändert bleibt. Andrerseits bleibt aber auch das einzelne $\sigma_{\lambda\mu}$ erst bei Substitutionen, welche mod $2s^2$, resp. mod s^2 zur Identität congruent sind, ungeändert, und nicht etwa schon bei Substitutionen, welche mod t zur Identität congruent sind, wo $t < 2s^2$, resp. $t < s^2$ ist. Die $\sigma_{\lambda\mu}$ sind daher Modulformen von der Stufe $2s^2$, resp. s^2.

Für alles Folgende ist das Verhalten der $\sigma_{\lambda\mu}$ bei linearen Substitutionen der Perioden ω_1, ω_2 von fundamentaler Wichtigkeit. Wir bemerken daher in dieser Richtung noch speciell Folgendes:

1) Liegen allgemein zwei lineare Substitutionen U und V (in symbolischer Bezeichnung) der Perioden vor, welche mod ϱ unter sich congruent sind, so lässt sich jede von beiden aus der andern durch eine lineare Substitution W der Perioden herstellen, welche mod ϱ zur Identität congruent ist. In der Tat folgt aus

$$U W = V, \quad W = U^{-1} V,$$

d. h. mit Rücksicht auf $U \equiv V \bmod \varrho$

$$W \equiv 1 \bmod \varrho.$$

Wenden wir diesen Satz auf unsere $\sigma_{\lambda\mu}$ an, so zeigt dies, dass zwei lineare Substitutionen der Perioden, welche mod $2s^2$, resp. mod s^2 unter sich congruent sind, auf ein $\sigma_{\lambda\mu}$ dieselbe Aenderung hervorbringen.

2) Ausser den betrachteten linearen Substitutionen, welche mod s und mod $2s^2$, resp. mod s^2 zur Identität congruent sind, interessiren noch die zwischenliegenden mod (ms) zur Identität congruenten linearen Substitutionen, unter m einen Teiler von s verstanden. Man überzeugt sich auf Grund des pag. 5 angegebenen unmittelbar, dass eine solche lineare Substitution jedes $\sigma_{\lambda\mu}$ um eine $\frac{2s}{m}$te, resp. $\frac{s}{m}$te Einheitswurzel ändert. Dieser Satz schliesst die pag. 5 entwickelten Sätze als specielle Fälle ein.

3) Schliesslich bemerken wir, dass die Coefficienten einer linearen Substitution der Perioden beliebig mod $2s^2$ modificirt werden dürfen, ohne den Einfluss derselben auf ein $\sigma_{\lambda\mu}$ zu beeinträchtigen, gleichviel ob die Substitutions-Determinante dabei gleich 1 bleibt, oder ob sie nur $\equiv 1 \bmod 2s^2$ wird. Das Bemerkenswerte daran liegt darin, dass man auch für ungerades s die Substitutions-Coefficienten nur mod $2s^2$ modificiren darf, wenn man keine Rücksicht auf den Wert der Substitutions-Determinante nimmt. In der Tat ist, wenn man

$$\omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \quad \omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

setzt, bei ungeradem s

$$\sigma_{\lambda\mu}\{(\alpha + As^2)\,\omega_1 + (\beta + Bs^2)\,\omega_2,\ (\gamma + Cs^2)\,\omega_1 + (\delta + Ds^2)\,\omega_2\}$$
$$= (-1)^{(\lambda A+\mu C)(\lambda B+\mu D)+(\lambda A+\mu C)+(\lambda B+\mu D)+\lambda(\lambda B+\mu D)+\mu(\lambda A+\mu C)}$$
$$\cdot\, \sigma_{\lambda\alpha+\mu\gamma,\ \lambda\beta+\mu\delta} = \pm\, \sigma_{\lambda\alpha+\mu\gamma,\ \lambda\beta+\mu\delta}$$

und also erst

$$\sigma_{\lambda\mu}\{(\alpha + A2s^2)\,\omega_1 + (\beta + B2s^2)\,\omega_2,\ (\gamma + C2s^2)\,\omega_1 + (\delta + D2s^2)\,\omega_2\}$$
$$= +\,\sigma_{\lambda\mu}\{\alpha\omega_1 + \beta\omega_2,\ \gamma\omega_1 + \delta\omega_2\}.$$

§ 2. *Transformation nter Ordnung. Wahl der Repräsentanten, die Functionen $x\lambda_\mu^{(i)}$.*

Nachdem wir über die $\sigma_{\lambda\mu}$ orientirt sind, lassen wir nunmehr Transformation $n$ter Ordnung eintreten, wobei n immer relativ prim zu s vorausgesetzt wird. Es heisst dies, wir ersetzen die ursprünglichen Perioden ω_1, ω_2 durch alle möglichen Zahlenpaare

$$(8)\quad \overline{\omega}_1^{(i)} = \alpha_i\omega_1 + \beta_i\omega_2, \quad \overline{\omega}_2^{(i)} = \frac{\gamma_i\omega_1 + \delta_i\omega_2}{n}, \quad \alpha_i\delta_i - \beta_i\gamma_i = 1,$$

welche so beschaffen sind, dass niemals je zwei dieser Zahlenpaare äquivalent, d. h. durch eine lineare Substitution

$$\omega_1^{(i)} = \lambda\overline{\omega}_1^{(i)} + \mu\overline{\omega}_2^{(i)}, \quad \overline{\omega}_2^{(i)}{}_1 = \nu\overline{\omega}_1^{(i)} + \varrho\overline{\omega}_2^{(i)}, \quad \lambda\varrho - \mu\nu = 1$$

mit einander verbunden sind.

Soll zuvörderst das einfachste transformirte Periodenpaar ω_1, $\frac{\omega_2}{n}$ mit

$$\alpha\omega_1 + n\beta\frac{\omega_2}{n}, \quad \frac{\gamma}{n}\omega_1 + \delta\frac{\omega_2}{n}, \quad \alpha\delta - n\beta\frac{\gamma}{n} = 1$$

äquivalent sein, so ist offenbar dazu notwendig und hinreichend

$$(9)\qquad \gamma \equiv 0 \pmod{n}.$$

Dieselbe Betrachtung und dasselbe Resultat gilt, wenn in dieser kleinen Betrachtung ω_1 und ω_2 selbst wieder linear substituirt werden, wenn also

$$a\omega_1 + b\omega_2, \quad \frac{c\omega_1 + b\omega_2}{n}, \quad ab - bc = 1$$

mit

$$\alpha(a\omega_1 + b\omega_2) + \beta b(\omega_1 + b\omega_2), \quad \frac{\gamma(\omega_1 + c\omega_2) + \delta(\omega c_1 + b\omega_2)}{n}$$

äquivalent sein soll. Denken wir, wie dies bereits pag. 6. geschah, symbolisch durch P, Q, U, V je eine lineare Substitution der ursprünglichen Perioden ω_1, ω_2 an, also

$$P \qquad a\omega_1 + b\omega_2, \quad c\omega_1 + b\omega_2, \quad ab - bc = 1$$

ferner durch $P^{(n)}$, $Q^{(n)}$ das daraus gebildete transformirte Periodenpaar, also

$$P^{(n)} \qquad a\omega_1 + b\omega_2, \quad \frac{c\omega_1 + b\omega_2}{n}$$

und schreiben nach einander auszuführende Operationen in der Reihenfolge von links nach rechts, so liegt in dem Bemerkten folgender

Satz: Damit zwei transformirte Periodenpaare $P^{(n)}$ nnd $Q^{(n)}$ äquivalent sind, damit also

$$P^{(n)} = Q^{(n)} V$$

soi, ist notwendig nnd hinreichend, dass in

$$P = Q U$$

die lineare Snbstitntion $U = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, $(\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$ die Bedingnng (9) erfüllt. Und zwar ist dann

$$V = (\alpha, n\beta, \frac{\gamma}{n}, \delta). \tag{10}$$

Als Index N (man vergleicho pag. 2.) dor Untergruppe (9) in Bezug auf dic Gesamtgrnppe der linearen Snbstitntionen ergiht die Abzählnng, wenn sich n in Primfactoren schreibt:

$$n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3} \ldots$$

$$N = n\left(1+\frac{1}{p_1}\right)\left(1+\frac{1}{p_2}\right)\left(1+\frac{1}{p_3}\right)\ldots$$

Die nnendlicho Zahl von Periodenpaaron

$$a\omega_2 + b\omega_2, \quad \frac{c\omega_1 + b\omega_2}{n}, \quad ad - bc = 1$$

zerfällt also in N Classen, welche so beschaffen sind, dass Periodenpaaro derselben Classo äquivalent sind, nnd das Periodenpaare verschiedener Classen inäqnivalent sind. Irgend welche N Periodenpaare aus je einor dieser N Classen geben daher ein vollständiges System von transformirten Periodenpaaren ah, oder hilden ein vollständigos „Repräsentantensystem" der genannten N Classen. Dio noch vorhandene Willkür in der Answahl der Repräsentanten ans jeder Classe, wird man benutzen. nm das Repräsentantensystem von vorn herein so zweckmässig als möglich zu gestalten. Da wir die $\sigma_{\lambda\mu}$ transformiren wollen, welche von der Stufe $2s^2$, resp. s^2 sind, erscheint es als angemessen, jedem Repräsentanten eine Bedingung $\bmod 2s^2$, resp. $\bmod s^2$ aufznerlegen. Es ist dies znlässig. da dio einzige dio völlig willkürlicho Answahl der Repräsentanten beschränkendo Bedingnng (9) eine Congrnenz $\bmod n$ ist, beide Bedingungen also verträglich sind, indem n nnd s relativ prim sind [1]). Am einfachsten ist es, die Repräsentanten

$$\bar{\omega}_1^{(i)} = \alpha_i\omega_1 + \beta_i\omega_2, \quad \bar{\omega}_2^{(i)} = \frac{\gamma_i\omega_1 + \delta_i\omega_2}{n}, \tag{8}$$

1) Das allgemeine diesbez. gruppentheoretische Princip findet man bei Klein, Math. Ann. Bd. 17., pag. 67.

$$\alpha_i \delta_i - \beta_i \gamma_i = 1, \quad i = 1, 2, \ldots N$$

so zu wählen, dass die Grössen

$$\alpha_i \omega_1 + \beta_i \omega_2, \quad \gamma_i \omega_1 + \delta_i \omega_2$$

mod $2s^2$, resp. mod s^2 zur Identität congruent sind. Wir setzen also

$$\bar{\omega}_1^{(i)} = (2s^2 a_i' + 1)\omega_1 + 2s^2 b_i' \omega_2, \quad \bar{\omega}_2^{(i)} = \frac{2s^2 c_i' \omega_1 + (2s^2 d_i' + 1)\omega_2}{n},$$

resp.

$$\bar{\omega}_1^{(i)} = (s^2 a_i' + 1)\omega_1 + s^2 b_i' \omega_2, \quad \bar{\omega}_2^{(i)} = \frac{s^2 c_i' \omega_1 + (s^2 d_i' + 1)\omega_2}{n}.$$

Es wird sich zeigen, dass unter dieser Voraussetzung die Grössen

$$(11) \qquad x_{\lambda\mu}^{(i)} = \sigma_{\lambda\mu}\{\bar{\omega}_1^{(i)}, \quad \bar{\omega}_2^{(i)}\}, \quad i = 1, 2, \ldots N$$

direct ohne vortretende Einheitswurzeln die Wurzeln der zu betrachtenden Multiplicator-Gleichungen sind. Um späterhin in den Fällen der 2ten bis 5ten Stufe einfach mit den Hauptmoduln und für die höheren Stufen mit vollen Systemen von Modulfunctionen operiren zu können, und nicht mit vollen Systemen von Modulformen operiren zu müssen, werden wir die $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ durch eine nicht-transformirte Modulform als Zusatzfactor in Modulfunctionen überführen und als Wurzeln unserer Gleichungen zu Grunde legen:

$$(11^b) \quad x_{\lambda\mu}^{(i)} = \frac{x_{\lambda\mu}^{(i)}}{\sigma_{\lambda\mu}} = \frac{\sigma_{\lambda\mu}\{\bar{\omega}_1^{(i)}, \bar{\omega}_2^{(i)}\}}{\sigma_{\lambda\mu}}, \quad i = 1, 2, \ldots N.$$

Dadurch wird der Charakter unserer Gleichungen als Multiplicator-Gleichungen in keiner Weise geändert.

Die benutzten Repräsentanten (8) erweisen sich jedoch als ungeeignet, wenn es gilt, die $x_{\lambda\mu}$ functionentheoretisch zu discutiren, denn das zugehörige q ist

$$q = e^{ix \frac{1}{n} \frac{\gamma_i \omega_1 + \delta_i \omega_2}{\alpha_i \omega_1 + \beta_i \omega_2}}$$

und somit vermitteln jene Repräsentanten keine Reihen- und Product-Entwicklungen nach q. Dies leistet das folgende, schon von Jacobi benutzte vollständige Repräsentantensystem

$$(12) \qquad \frac{a_i \omega_1}{n}, \quad \frac{c_i \omega_1 + d_i \omega_2}{n}, \quad i = 1, 2, \ldots N$$

worin

$$a_i d_i = n, \quad c_i < a_i$$

ist, und a_i, c_i, d_i nicht-negative ganze Zahlen ohne einen allen dreien gemeinsamen Teiler sind. (Nach dem pag. 7) und 8) Bemerkten ist jeder der N Repräsentanten (11) aus dem entsprechenden, mit gleichem Index versehenen Repräsentanten (12) und nur aus diesem durch eine lineare Substitution A_i, B_i, C_i, D_i, $A_iD_i - B_iC_i = 1$, ableitbar. D. h. es bestehen die Relationen:

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{\omega}_1^{(i)} = A_i \dfrac{a_i\omega_1}{n} + B_i \dfrac{c_i\omega_1 + d_i\omega_2}{n} \\ \\ \overline{\omega}_2^{(i)} = C_i \dfrac{a_i\omega_2}{n} + D_i \dfrac{c_i\omega_1 + d_i\omega_2}{n} \end{array}\right. \qquad A_iD_i - B_iC_i = 1$$

Bestimmen wir diese N linearen Substitutionen und deren Einfluss auf die $\sigma_{\lambda\mu}$, so können wir die Wurzeln $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ unter Berücksichtigung der vortretenden $2s$ten Einheitswurzeln $E_{\lambda\mu}^{(i)}$ in den Repräsentanten (12) schreiben, was beabsichtigt wurde. So ergiebt sich:

$$(13)\quad x_{\lambda\mu}^{(i)} = E_{\lambda\mu}^{(i)} \frac{\sigma_{\lambda'\mu'}\left\{\frac{a_i\omega_1}{n},\ \frac{a_i\omega_1 + d_i\omega_2}{n}\right\}}{\sigma_{\lambda\mu}}$$

Es verdient besonders hervorgehoben zu werden, dass im allgemeinen nicht für jedes i

$$\lambda' = \lambda, \quad \mu' = \mu$$

sein wird. In den Fällen $s = 2, 3, 4$ lässt sich dies jedoch erreichen, wenn c_i in (12) etwas modificirt wird [1]). Benutzen wir aus diesem Grunde an Stelle von (12) das Repräsentantensystem

$$(12^b)\qquad \frac{a_i\omega_1}{n},\ \frac{2s^2c_i\omega_1 + d_i\omega_2}{n},\ \text{resp.}\ \frac{a_i\omega_1}{n},\ \frac{s^2c_i\omega_1 + d_i\omega_2}{n},$$

wobei a_i, c_i, d_i den alten unter (12) angegebenen Bedingungen genügen, so wird die Ausführung der angedeuteten Schritte im Einzelnen folgende.

---

1) Dieser Umstand, dass beim Uebergang vom Repräsentantensystem (8) zum Repräsentantensystem (12) eine zu transformirende Modulform oder Modulfunction 2ter und höherer Stufe nicht ausnahmslos erhalten bleibt, sondern zum Teil durch die andern gleichberechtigten Modulformen und Modulfunctionen derselben Stufe ersetzt wird, ist schliesslich wol der Grund, aus dem in der Litteratur gewöhnlich nicht am Repräsentantensystem (12) festgehalten wird. So benutzt beispielsweise Koenigsberger nach dem Vorgange von Hermite:

$$\frac{a_i\omega_1}{n},\ \frac{16c_i\omega_1 + d_i\omega_2}{n},\quad a_id_i = n,\quad c_i < a_i.$$

Wir setzen an:

$$\left\{\begin{array}{l}(2s^2a_i'+1)\omega_1+2s^2b_i'\omega_2=A_i\dfrac{a_i\omega_1}{n}+B_i\dfrac{2s^2c_i\omega_1+d_i\omega_2}{n}\\ \dfrac{2s^2c_i'\omega_1+(2s^2d_i'+1)\omega_2}{n}=C_i\dfrac{a_i\omega_1}{n}+D_i\dfrac{2s^2c_i\omega_1+d_i\omega_2}{n}\end{array}\right.$$

(13) resp.

$$\left\{\begin{array}{l}(s^2a_i'+1)\omega_1+s^2b_i'\omega_2=A_i\dfrac{a_i\omega_1}{n}+B_i\dfrac{s^2c_i\omega_1+d_i\omega_2}{n}\\ \dfrac{s^2c_i'\omega_1+(s^2d_i'+1)\omega_2}{n}=C_i\dfrac{a_i\omega_1}{n}+D_i\dfrac{s^2c_i\omega_1+d_i\omega_2}{n}\end{array}\right.$$

Dies führt nach ω_1, ω_2 getrennt zu:

$$\left\{\begin{array}{ll}n(2s^2a_i'+1)=A_ia_i+B_i2s^2c_i, & n2s^2b_i'=B_id_i\\ 2s^2c_i'=C_ia_i+D_i2s^2c_i, & 2s^2d_i'+1=D_id_i\end{array}\right.$$

resp.

$$\left\{\begin{array}{ll}n(s^2a_i'+1)=A_ia_i+B_is^2c_i, & ns^2b_i'=B_id_i\\ s^2c_i'=C_ia_i+D_is^2c_i, & s^2d_i'+1=D_id_i\end{array}\right.$$

und deren Auflösung nach A_i, B_i, C_i, D_i mod $2s^2$, resp. mod s^2 ergiebt:

(14) $A_i\equiv d_i$, $B_i\equiv 0$, $C_i\equiv 0$, $D_i\equiv d_i^{-1}$ mod $2s^2$. resp. mod s^2.

Darin ist $D_i\equiv d_i$ durch $D_id_i\equiv 1$ definirt und für ungerades s ist nach pag. 6) Nr. 3) die Substitutions-Determinante $(A_iD_i-B_iC_i$ durch Modification der Substitutions-Coefficienten mod s^2 gleich 1 zu machen. Somit kommt, wenn wir die neuen Repräsentanten in (11) einführen:

$$z_{i\mu}=\sigma_{i\mu}\left\{A_i\frac{a_i\omega_1}{n}+B_i\frac{2s^2c_i\omega_1+d_i\omega_2}{n},\quad C_i\frac{a_i\omega_1}{n}+D_i\frac{2s^2c_i\omega_1+d_i\omega_2}{n}\right\}$$

$$=\sigma_{\lambda A_i+\mu B_i,\ \lambda C_i+\mu D_i}\left\{\frac{a_i\omega_1}{n},\ \frac{2s^2c_i\omega_1+d_i\omega_2}{n}\right\}$$

d. h.

$$z_{\lambda\mu}^{(i)}=\sigma_{\lambda d_i,\ \mu d_i^{-1}}\left\{\frac{a_i\omega_1}{n},\ \frac{2s^2c_i\omega_1+d_i\omega_2}{n}\right\}\tag{15}$$

resp.

$$=\sigma_{\lambda A_i+\mu C_i,\ \lambda B_i+\mu D_i}\left\{\frac{a_i\omega_1}{n},\ \frac{s^2c_i\omega_1+d_i\omega_2}{n}\right\}$$

und folglich

$$(15\,\mathrm{h})\quad x_{\lambda\mu}^{(s)} = \frac{\sigma_{\lambda a_i,\ \mu d_i - 1}\left\{\frac{a_i\omega_1}{n},\ \frac{2s^2 c_i\omega_1 + d_i\omega_2}{n}\right\}}{\sigma_{\lambda\mu}} - E_{\lambda\mu}^{(s)}\frac{\sigma_{\lambda'\mu'}\left\{\frac{a_i\omega_1}{n},\ \frac{2s^2 c_i\omega_1 + d_i\omega_2}{n}\right\}}{\sigma_{\lambda\mu}}$$

resp.

$$-\frac{\sigma_{\lambda A_i+\mu C_i\lambda B_i+\mu D_i}\left\{\frac{a_i\omega_1}{n},\ \frac{s^2 c_i\omega_1 + d_i\omega_2}{v}\right\}}{\sigma_{\lambda\mu}} - E_{\lambda\mu}^{(s)}\frac{\sigma_{\lambda'\mu'}\left\{\frac{a_i\omega_1}{n},\ \frac{s^2 c_i^2\omega_1 + d_i\omega_2}{n}\right\}}{\sigma_{\lambda\mu}}$$

§ 4. *Verhalten der $x_{\lambda\mu}^{(s)}$ bei linearer Substitution der Perioden ω_1, ω_2.*

Für die jetzt anzustellende gruppentheoretische Betrachtung benutzen wir die schon pag. 6. erklärte Symbolik und schreiben die $x_{\lambda\mu}^{(s)}$ folgendermassen:

$$x_{\lambda\mu}^{(s)} = \frac{\sigma_{\lambda\mu}\{\bar{\omega}_1^{(s)},\ \bar{\omega}_2^{(s)}\}}{\sigma_{\lambda\mu}} = \frac{\sigma_{\lambda\mu}\{R_i^{(n)}\}}{\sigma_{\lambda\mu}(1)}$$

Die Ausübung einer linearen Substitution P der Perioden ω_1, ω_2 führt dies in

$$(x_{\lambda\mu}^{(s)})' = \frac{\sigma_{\lambda\mu}\{(R_i P)^{(n)}\}}{\sigma_{\lambda\mu}(P)}$$

über. Die Auswertung des Nenners dieses Bruches erledigt sich direct nach der Formel (4); es ist aber noch der Zähler zu behandeln.

Da die $R_i^{(n)}$, $i = 1, 2, \ldots N$, ein volles System von Repräsentanten bilden, ist $(R_i P)^{(n)}$ bis auf eine durch die Formel (10) definirte lineare Substitution V_i mit einem andern der N Repräsentanten $R_i^{(n)}$ identisch; es ist also:

$$(16)\qquad (R_i P)^{(n)} = R_j^{(n)} V_i,$$

worin j wie i ebenfalls von 1 bis N läuft, abgesehen von der Reihenfolge, welche für das Folgende gleichgiltig ist. Diese Gleichung formen wir um in

$$(R_i P)^{(n)} = (R_j U_i)^{(n)},$$

worin U_i die jedem V_i in der pag. 8. angegebenen Weise eindeutig zugeordnete lineare Substitution ist, und daraus folgt:

(16b) $$R_i P = R_j U_i.$$

Da infolge der von uns getroffenen Repräsentantenwahl

$$R_i \equiv R_j \mod 2s^2, \text{ resp. } \mod s^2$$

ist, erfahren wir aus (16b), dass

(17) $$U_i \equiv P \mod 2s^2, \text{ resp. } \mod s^2$$

ist. D. h. zunächst, alle U_i sind $\mod 2s^2$, resp. $\mod s^2$ unter sich congruent. Dann sind aber auch sämtliche V_i $\mod 2s^2$, resp. $\mod s^2$ unter sich congruent und solche Substitutionen bringen auf ein $\sigma_{\lambda\mu}$ angewendet dieselbe Aenderung hervor. Die Aenderung des Zählers jedes der N $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ besteht demgemäss nach (16) einfach darin, dass auf alle N verschiedene transformirte Periodenpaare ein und dieselbe durch Combination von (17) und (10) zu bestimmende lineare Substitution V_i auszuüben ist. Schreiben wir die vorgegebene lineare Substitution $P = (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d})$, $(\mathfrak{a}\mathfrak{d} - \mathfrak{b}\mathfrak{c} = 1)$ in der Form

(18) $$P \equiv (\alpha, \beta, n\gamma, \delta) \mod 2s^2, \text{ resp. } \mod s^2,$$
$$\alpha\delta - \beta n\gamma \equiv 1 \mod 2s^2, \text{ resp. } = 1,$$

wodurch $\sigma_{\lambda\mu}$ in $\sigma_{\lambda\alpha+\mu n\gamma,\ n\beta+\mu\delta}$ übergeht, so wird

$$V_i \equiv (\alpha, n\beta, \gamma, \delta) \mod 2s^2, \text{ resp. } \mod s^2$$

und diese verwandelt $\sigma_{\lambda\mu}$ in $\sigma_{\lambda\alpha+\mu\gamma,\ \lambda n\beta+\mu\delta}$. Damit haben wir folgendes Resultat gewonnen: Um die $(x_{\lambda\mu}^{(i)})'$ zu bestimmen, in welche eine lineare Substitution von ω_1, ω_2 die N $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ überführt, bringe man P auf die Form (18); dann ist:

(19) $$(x_{\lambda\mu}^{(i)})' = \frac{\sigma_{\lambda\alpha+\mu\gamma,\ \lambda n\beta+\mu\delta}\{\overline{\omega}_1^{(i)}, \overline{\omega}_2^{(i)}\}}{\sigma_{\lambda\alpha+\mu n\gamma,\ \lambda\beta+\mu\gamma}(\omega_1, \omega_2)} = E_{\lambda\mu}^{(i)} x_{lm}^{(j)} \frac{\sigma_{lm}}{\sigma_{l'm'}},$$

worin j mit i, von der Reihenfolge abgesehen, von 1 bis N läuft. Es geht also ein System von N Grössen $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ bis auf eine vortretende Einheitswurzel und einen Factor $\frac{\sigma_{lm}}{\sigma_{l'm'}}$ in eins der ν Systeme von N Grössen $x_{lm}^{(j)}$ über. Darin liegt folgende wichtige Eigenschaft der Multiplicator-Gleichungen für die $\sigma_{\lambda\mu}$ begründet. Die den ν verschiedenen $\sigma_{\lambda\mu}$ entsprechenden ν simultanen Multiplicator-Gleichungen sind von einem höheren Standpunkte aus nicht wesentlich von einander verschieden, sondern ebenso wie sich aus einem $\sigma_{\lambda\mu}$ alle anderen durch lineare Substitutionen der Perioden ergeben, lassen sich aus einer dieser ν Gleichungen die sämtlichen

anderen durch lineare Substitution der Perioden ω_1, ω_2 ableiten. Von demselben höheren Standpunkte aus, von dem es nur ein $\sigma_{\lambda\mu}$ giebt, existirt also auch nur eine Multiplicator-Gleichung der betrachteten Art, welche aber wie ein $\sigma_{\lambda\mu}$ ν gleichberechtigte Formen annehmen kann.

Es ist evident, dass der Satz überhaupt für alle Multiplicator-Gleichungen 2ter und höherer Stufe gilt, und das Interessante daran liegt im wesentlichen nur in der einfachen (hier durch die Formel (19) markirten) Art und Weise, wie man diesen Uebergang von irgend einer der Gleichungen zu den übrigen simultanen bewerkstelligen kann.[1])

§ 4. *Stufe einer Multiplicator- oder Modular-Gleichung. Existenz der Multiplicator-Gleichungen für die $x_{\lambda\mu}^{(s)}$.*

Im Anschluss an die bereits eingangs gebrauchte Benennung der Multiplicator-Gleichungen für $\sqrt[12]{\Delta}$, g_2, g_3 als solcher erster Stufe und der Jacobi'schen Multiplicator-Gleichungen als solcher zweiter Stufe (man vergleiche pag. 2) wird es sich empfehlen, allgemein folgende Definition der Stufe einer Multiplicator-Gleichung (und damit auch einer Modular-Gleichung) zu geben: Wir bezeichnen eine solche Gleichung als eine solche $t$ter Stufe, wenn die zu Grunde gelegte Modulform (oder Modulfunction) der $t$ten Stufe adjungirt ist oder zugehört, unter t die kleinst-mögliche Zahl verstanden.[2])

Da die $\sigma_{\lambda\mu}$ der $s$ten Stufe adjungirt sind, sind die Multiplicator-Gleichungen für die $z_{\lambda\mu}^{(s)}$, resp. $x_{\lambda\mu}^{(s)}$ von der $s$ten Stufe.

Geeignete Combinationen der ν zu einem s gehörigen verschiedenen $\sigma_{\lambda\mu}$ sind sichtlich schon einer Stufe t adjungirt, wo t irgend ein Teiler von s ist. Legen wir derartige Combinationen zu Grunde, so erhalten wir also Multiplicator-Gleichungen resp. Modular-Gleichungen von einer Stufe, die irgend ein Teiler von s ist. Z. B. ist das

---

1) Betreffs der drei simultanen Jacobi'schen Multiplicator-Gleichungen, welche den Modulformen $\sqrt{e_1 - e_2}$, $\sqrt{e_2 - e_3}$, $\sqrt{e_3 - e_1}$ entsprechend existiren, ist in der Litteratur gewöhnlich nur von der letzteren die Rede.

2) Hiermit weiche ich von der Darstellung in meiner Note in den Berichten der Kgl. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. von 1885 ab. Die jetzt zu Grunde gelegte Definition dürfte wesentlich dazu beitragen, die Darstellung einheitlicher zu gestalten; man vergleiche diesbezüglich etwa die beiderseitige Darstellung des speciellen Falles $s = 2$.

Product der ν verschiedenen $\sigma_{\lambda\mu}$ der Gesamtgruppe der linearen Substitutionen adjungirt; diese Combination führt sonach auf Multiplicator-Gleichungen erster Stufe. Zwischen diese beiden extremen Fälle der Multiplicator-Gleichungen erster und $s$ter Stufe schalten sich weiter Multiplicator-Gleichungen von Stufen ein, welche den Teilern von s entsprechen.

Da wir im Vorausgehenden allgemein die Gesamtgruppe der linearen Substitutionen von ω_1, ω_2 in Betracht gezogen haben und nach den Formeln (19), (1), (2) das Verhalten der $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ bei beliebigen linearen Substitutionen dieser Gesamtgruppe kennen, sind wir in den Stand gesetzt, den verschiedenen Congruenz-Untergruppen der Gesamtgruppe entsprechend, nunmehr die Existenz aller dieser Multiplicator- und Modular-Gleichungen der verschiedenen Stufen für die $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ und ihre Combinationen zu erschliessen. Dies will sagen, wir können die Stufe der Coefficienten dieser Gleichungen angeben. Dabei sind diese Coefficienten stets rationale Functionen des vollen Modul-Systems der betreffenden Stufe, da die $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ algebraisch von demselben abhangen.[1])

Uns interessiren hier vorzugsweise die Multiplicator-Gleichungen $s$ter Stufe für die $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ selbst; wir behaupten, für sie gilt in der bezeichneten Richtung folgender Satz: Je N Grössen $x_{\lambda\mu}^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots N$, genügen einer Gleichung Nten Grades, deren Coefficienten der $s$ten Stufe adjungirt sind und zwar in Bezug auf $s$te Einheitswurzeln.

Um dies zu beweisen, wenden wir auf ein System von $x_{\lambda\mu}^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots N$, irgend eine lineare Substitution an, welche mod s zur Identität congruent ist, also:

$$P \equiv (sa+1,\ sb,\ sc,\ sb+1),\quad (sa+1)(sb+1) - sb\,sc \equiv 1,$$

oder, wie wir mit Rücksicht auf pag. 13 besser schreiben:

$$P \equiv U \equiv (sa+1,\ sb,\ nsc,\ sd+1) \bmod 2s^2, \text{ resp. } \bmod s^2,$$
$$(sa+1)(sd+1) - sb\,nsc \equiv 1 \bmod 2s^2.$$

Das zugehörige V ist nach (10):

$$V \equiv (sa+1,\ nsb,\ sc,\ sd+1) \bmod 2s^2, \text{ resp. } \bmod s^2.$$

Die Aenderung von $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ bei Ausübung von P auf ω_1, ω_2 ist nun nach pag. 13 so beschaffen, dass man auf das $\sigma_{\lambda\mu}$ des Zählers

1) Man vergleiche Klein, „Ueber die elliptischen Normalcurven der $n$ten Ordnung etc.“, Abhandl. der math.-phys. Classe der Kgl. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch., Bd. 13, pag. 345.

die Substitution V, auf das $\sigma_{\lambda\mu}$ des Nenners die Substitution U auszuüben hat. Da sichtlich

$$U \equiv V \equiv (1, 0, 0, 1) \bmod 2s, \text{ resp. } \bmod s$$

ist, so geht $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ in $x_{\lambda\mu}^{(j)}$ über, multiplicirt mit einer $s$ten Einheitswurzel. Die homogenen symmetrischen Functionen eines Systems von $x_{\lambda\mu}^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots N$ ändern sich also bei linearen Substitutionen der Perioden ω_1, ω_2, welche mod s zur Identität congruent sind, nur um $s$te Einheitswurzeln, d. h. sie sind in der Tat Modulfunctionen, welche der $s$ten Stufe in Bezug auf $s$te Einheitswurzeln adjungirt sind.[1]) Ihre Stufe ist jedoch s^2.

Dies ist nur der allgemeine Typus der Coefficienten. Je nach dem speciellen Verhalten einerseits des Grades m der homogenen symmetrischen Function in den $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ und andrerseits der Zahl n zu s nehmen auch die Coefficienten speciellere Eigenschaften an.

Das erstere betreffend leuchtet ein, dass wenn der Grad m der homogenen symmetrischen Function ein Teiler von s ist, sie sich bei Substitutionen, welche mod s zur Identität congruent sind, nur um $\frac{s}{m}$te Einheitswurzeln ändert und nur die Stufe $\frac{s^2}{m}$ hat.

Das zweite anlangend ist zu beachten, dass wenn $n \equiv 1 \bmod 2m$, resp. mod m ist, unter m wieder einen Teiler von s verstanden, $U \equiv V \equiv (1, 0, 0, 1) \bmod 2ms$, resp. mod ms ist. Es tritt also ebenfalls eine Reduction der Höhe der vortretenden Einheitswurzeln und der Stufe der Coefficienten durch Division mit m ein.

Betrachten wir beispielsweise den äussersten Fall $n \equiv 1 \bmod 2s$ resp. mod s, so ist bei dieser Voraussetzung $U \equiv V \equiv (1, 0, 0, 1) \bmod 2s^2$, resp. mod s^2, d. h. die homogenen symmetrischen Functionen der $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ oder die Coefficienten der betrachteten Multiplicator-Gleichungen bleiben in diesem Fall bei Substitutionen, welche mod s zur Identität congruent sind, ungeändert, gehören also der $s$ten Stufe selbst an.

Der pag. 15 abgeleitete allgemeine Satz postulirt die Darstellung von Modulfunctionen $\psi(\omega)$ der Stufe s^2, welche der $s$ten Stufe adjungirt sind. Diese lässt sich leisten, wenn ein volles Modulsystem

---

1) Da ausserdem ein System von N Grössen $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ nicht schon bei Substitutionen, welche nach einem niedrigeren Modul als s zur Identität congruent sind, bis auf Einheitswurzeln in sich übergeht, so sind die homogenen symmetrischen Functionen eines solchen Systems auch nicht bereits einer niedrigeren Stufe adjungirt.

$s$ter Stufe $M_1, M_2, \ldots M_a$ und das Fundamental-Polygon $s$ter Stufe[1]) als gegeben erachtet werden. Um dies zu erörtern, bezeichnen wir dieses Fundamental-Polygon, welches zur Gruppe der linearen Substitutionen gehört, die mod s zur Identität congruent sind, kurz als das der Multiplicator-Gleichung „zugehörige Fundamental-Polygon". Für alles Folgende kommen nur die Eckpunkte desselben in Betracht, welche auf der reellen Axe der ω-Halb-Ebene liegen und in Bezug auf die genannte Untergruppe inäquivalent sind; wir nennen sie die Ecken des Fundamental-Polygons. Da sich die darzustellenden Modulfunctionen $\psi(\omega)$ bei Substitutionen, welche mod s zur Identität congruent sind, um $s$te Einheitswurzeln ändern, so ist

$$[\psi(\omega)]^s = R(M_1, M_2, \ldots M_a),$$

unter R eine rationale Function verstanden. Irrationale Functionen eines vollen Modulsystems $s$ter Stufe, welche eindeutige Functionen von ω sind, können nur in den Ecken des Fundamental-Polygons $s$ter Stufe verzweigt sein.[2]) Dies heisst, es ist zur Darstellung von $\psi(\omega)$ notwendig und hinreichend, in

$$(20) \qquad \psi(\omega) = \sqrt[s]{R_1(M_1, M_2, \ldots M_a)}\, R_2(M_1, M_2, \ldots M_a)$$

$\sqrt[s]{R_1(M_1, M_2, \ldots M_a)}$ so zu construiren, dass es

1) nur in den Ecken des Fundamental-Polygons $s$ter Stufe verzweigt ist und

2) ein Congruenz-Modul der Stufe s^2 ist.

Damit ist die verlangte Darstellung von $\psi(\omega)$ gegeben. Es liegt auf der Hand, wie sich diese allgemeine Darstellung von $\psi(\omega)$ specialisirt, wenn einer der beiden pag. 16 namhaft gemachten speciellen Fälle vorliegt.

Bevor wir in der Behandlung unserer Multiplicator-Gleichungen für die $x\lambda_\mu^{(\sigma)}$ fortfahren, dürfte es angemessen sein, an dieser Stelle einiges Wenige über die Behandlung der andern Transformations-Gleichungen mit den $\sigma\lambda_\mu$, resp. $x\lambda_\mu^{(\sigma)}$ einzuschalten.

---

1) Betreffs der Definition und Construction der Fundamental-Polygone vergleiche man Hurwitz, Math. Ann. Bd. 18, pag. 537, ff.

2) Dies ist eine nahe liegende Verallgemeinerung des Math. Ann. Bd. 14, pag. 128 von Herrn Klein angegebenen Satzes.

§ 5. *Behandlung andrer TransformationsGleichungen mit den* $\sigma_{\lambda\mu}$.

Die andere der beiden pag. 14 und 15 erwähnten Aufgaben, nämlich die Aufgabe, die Multiplicator- und Modular-Gleichungen für die Combinationen der $\varkappa_{\lambda\mu}^{(i)}$ zu studiren, wird dadurch bedeutungsvoll, dass sich zeigt, dass die in der Transformations-Theorie gewöhnlich betrachteten Modulformen und Modulfunctionen sich in einfacher Weise durch die $\sigma_{\lambda\mu}$ darstellen. Man vergleiche hierzu I, § 3 der bereits citirten Abhandlung „Ueber die elliptischen Normalcurven etc." des Herrn Klein. Die Existenz dieser Gleichungen, die Stufe ihrer Coefficienten, lässt sich unter Anwendung des § 4 benutzten Verfahrens erschliessen.

Es mag genügen, explicite einerseits darauf hinzuweisen, dass man die Multiplicator-Gleichungen für $\sqrt[12]{\Delta}$ und die Jacobi'schen Multiplicator-Gleichungen von den $\sigma_{\lambda\mu}$ ausgehend behandeln kann. In der Tat bestehen beispielsweise die Relationen:

$$21) \qquad \sqrt[12]{\Delta} = \frac{1-e^{\frac{4i\pi}{3}}}{2e^{\frac{3i\pi}{4}}} \frac{\sigma_{01}\sigma_{10}\sigma_{11}(s=2)}{\sigma_{01}\sigma_{10}\sigma_{11}\sigma_{12}(s=3)}$$

und

$$(22) \qquad \sigma_{01} = \frac{e^{\frac{3i\pi}{2}}}{\sqrt[4]{e_2-e_3}\sqrt[4]{e_1-e_3}}, \quad \sigma_{10} = \frac{-1}{\sqrt[4]{e_1-e_3}\sqrt[4]{e_1-e_2}},$$

$$\sigma_{11} = \frac{e^{\frac{5i\pi}{4}}}{\sqrt[4]{e_2-e_3}\sqrt[4]{e_1-e_2}},$$

resp.

$$(22^b) \qquad \sqrt{e_1-e_2} = e^{\frac{3i\pi}{4}} \frac{\sigma_{01}}{\sigma_{10}\sigma_{11}}, \quad \sqrt{e_2-e_3} = e^{\frac{7i\pi}{4}} \frac{\sigma_{10}}{\sigma_{01}\sigma_{11}}$$

$$\sqrt{e_1-e_3} = e^{\frac{5i\pi}{4}} \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{01}\sigma_{10}}.$$

Andrerseits gestatten z. B. die Formeln:

$$(23)\qquad \begin{cases} k^2 = -\left(\dfrac{\sigma_{10}}{\sigma_{11}}\right)^4 (s=2) = -\left(\dfrac{\sigma_{10}\,\sigma_{12}}{\sigma_{11}\,\sigma_{21}}\right)^8 (s=4) \\ \xi = -2\,\dfrac{{\sigma_{10}}^3}{{\sigma_{10}}^3 + i\sqrt{3}\,{\sigma_{01}}^3}\,(s=3) \\ o = -\dfrac{{\sigma_{10}}^2}{{\sigma_{01}}^2 + i{\sigma_{11}}^2}\,(s=2) = e^{\frac{3i\pi}{4}}\,\dfrac{{\sigma_{10}}^2}{{\sigma_{12}}^2}\,(s=4) \\ z = e^{\frac{2i\pi}{5}}\,\dfrac{\sigma_{01}\,\sigma_{11}\,\sigma_{21}\,\sigma_{31}\,\sigma_{41}}{\sigma_{02}\,\sigma_{12}\,\sigma_{22}\,\sigma_{32}\,\sigma_{42}}\,(s=5)\ ^{1}) \end{cases}$$

unter ξ, o, z eine bestimmt normirte Tetraeder-, Octaeder-, Ikosaeder-Irrationalität verstanden, die Modular-Gleichungen für $\sqrt[4]{k}$, $\sqrt{k}$, k, k^2, ξ, $\sqrt{o}$, o, z auf Grund der $\sigma_{\lambda\mu}$ zu behandeln.

Wie für die 2te Stufe die fundamentalen Modular-Gleichungen nicht eigentlich diejenigen für k^2, sondern diejenigen für $\sqrt[4]{k}$ sind, insofern sich aus den letzteren die ersteren ableiten lassen, wird man z. B. bei $s = 3$ mit Vorteil die Modular-Gleichungen für

$$\frac{\sigma_{01}}{\sigma_{10}} = \sqrt{\frac{-\xi-2}{i\sqrt{3}\,\xi}}$$

studiren. Oder da beispielsweise wieder bei $s = 3$ die vier Grössen σ_{01}, σ_{10}, σ_{11}, σ_{12} ein volles Formensystem 9ter Stufe oder die Quotienten $\sigma_{01} : \sigma_{10} : \sigma_{11} : \sigma_{12}$ ein volles Modulsystem 9ter Stufe abgeben, so bieten sich die $\sigma_{\lambda\mu}$ sehr einfach dar, um die zugehörigen Correspondenzen zu studiren.

Aehnliches wird für höhere Fälle zu bemerken sein.

Wir beschränken uns nunmehr darauf, die Multiplicator-Gleichungen für die Grössen $x_{\lambda\mu}^{(\sigma)}$ selbst in das Auge zu fassen. Es mag jedoch bemerkt werden, dass die weitere Behandlungsweise im Princip auch dann zur Geltung kommt, wenn es sich um Combinationen der $x_{\lambda\mu}^{(\sigma)}$ handelt.

---

1) Man vergleiche den II. Abschnitt des Textes, ferner pag. 77, 78 der Note des Herrn Klein vom 2. März 1885 in den Berichten der Kgl. S. Ges. d. Wissensch. „Neue Untersuchungen über elliptische Modulfunctionen der niedersten Stufen“ und schliesslich Bianchi, Math. Ann. Bd. 17, pag. 244 und pag. 252. Jedoch sind in der genannten März-Note und bei Bianchi k^2, ξ, o, z in andrer Weise als hier fixirt.

§ 6. *Form der Coefficienten und Aufstellung der Gleichungen.*

Das Ziel, welches sich eine allgemeine Theorie der Transformations-Gleichungen setzen wird, ist dies, es möglich zu machen, bei vorgegebener Stufe und vorgegebener Ordnung n der Transformation die ins Auge gefasste Gleichung mit der kleinst-möglichen Anzahl unbestimmter Constanten anzuschreiben, welch letztere dann durch die Einsetzung der particulären Reihenentwicklungen nach q bestimmt werden können.

Um uns in der allgemeinen Betrachtung der Multiplicator-Gleichungen für die $\varkappa\lambda_\mu^{(i)}$ diesem Ziele zu nähern, haben wir nunmehr die Coefficienten, welche wir auf die Form (20) gebracht haben, weiter zu studiren.

Der nächste Schritt ist folgender: Da es für $s = 2$ nur $\frac{S}{s}$ und für $s > 2$ nur $\frac{S}{2s}$ verschiedene $\sigma_{\lambda\mu}$, dagegen für $s = 2$ S und für $s < 2$ $\frac{S}{2}$ nicht-homogene mod s incongruente lineare Substitutionen von ω_1, ω_2 giebt, so existiren nach (19), (19^b) für jede Gleichung für ein System von N Grössen $\varkappa\lambda_\mu^{(i)}$ s nicht-homogene mod s incongruente lineare Substitutionen von ω_1, ω_2, welche die Gleichung in sich überführen. Da sich bei diesen s Substitutionen die Moduln M_1, M_2, ... M_α des vollen Systems für die $s$te Stufe in gewisser Weise ändern, so erhalten wir auf diese Weise für jeden Coefficienten $\psi(\omega)$ von der Form (20) s Bedingungen, s Functional-Gleichungen.

Noch weiter über die Form der Coefficienten kann uns die bisher benutzte gruppentheoretische Methode nicht orientiren. Dazu wird eine functionentheoretische Discussion erforderlich.

Der erste Schritt in dieser Richtung ist es, die $\sigma_{\lambda\mu}$ als Potenzreihen und unendliche Producte darzustellen. Dazu ziehen wir folgende Formeln heran:

$$\vartheta_1(v, \omega) = \frac{1}{i} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^k q^{\frac{(2k+1)^2}{4}} z^{(2k+1)}, \tag{24}$$

worin

$$v = \frac{u}{\omega_1}, \quad z = e^{\frac{ui\pi}{\omega_1}} = e^{i\pi v};$$

$$(25)\quad \sigma(u) = \frac{\sqrt{\frac{2\pi}{\omega_1}}\, e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}}{\sqrt[8]{\Delta}}\, \vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_1},\ \omega\right)$$

$$= e^{\frac{\eta_1 u^2}{\omega_1}}\, \frac{\omega_1}{\pi}\, \frac{z - z^{-1}}{2i} \prod_1^\infty \frac{1-q^{2n}z^2}{1-q^{2n}} \frac{1-q^{2n}z^{-2}}{1-q^{2n}},$$

$$(26)\quad \sqrt[8]{\Delta} = \left\{\sqrt{\frac{2\pi}{\omega_1}}\, q^{1/12} \prod_1^\infty (1-q^{2k})\right\}^8$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_1}}\, \frac{1}{\omega_1}\, \vartheta_1'(0) = \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\omega_1}}\right)^8 q^{1/4}(1 - 3q^{1.2} + 5q^{2.3} - 7q^{3.4} + \ldots$$

Damit wird:

$$(27)\quad \sigma_{\lambda\mu} = -\frac{\sqrt{\frac{2\pi}{\omega_1}}\, e^{\frac{\lambda\mu\, i\pi}{s^2}}\, q^{\frac{\mu^2}{s^2}}}{\sqrt[8]{\Delta}}\, \vartheta_1\left(\frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{s\omega_1},\ \omega\right)$$

$$= -i\frac{\sqrt{\frac{2\pi}{\omega_1}}\, e^{\frac{\lambda i\pi}{s}\left(1+\frac{\mu}{s}\right)}\, q^{\left(\frac{\mu}{s}+\frac{1}{2}\right)^2}}{\sqrt[8]{\Delta}} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^k\, e^{k\frac{2\lambda i\pi}{s}}\, q^{\frac{2k\mu}{s} + k(k+1)}$$

und

$$(28)\quad \sigma_{\lambda\mu} = i\,\frac{\omega_1}{2\pi}\, e^{\frac{\lambda\mu}{s^2} i\pi}\, q^{\frac{\mu^2}{s^2}} \left\{e^{\frac{\lambda}{s} i\pi}\, q^{\frac{\mu}{s}} - e^{-\frac{\lambda}{s} i\pi}\, q^{-\frac{\mu}{s}}\right\}$$

$$\cdot \prod_1^\infty \left\{\frac{(1 - e^{+\frac{2\lambda}{s} i\pi}\, q^{2k+\frac{2\mu}{s}})}{(1-q^{2k})} \frac{(1 - e^{-\frac{2\lambda}{s} i\pi}\, q^{2k-\frac{2\mu}{s}})}{(1-q^{2k})}\right\}$$

Die beiden letzten Gleichungen vermitteln unter Bezugnahme auf (15^b) die Reihen- und Product-Entwicklung der $x_{\lambda\mu}^{(\omega)}$.

An diese Formeln knüpft nun die functionentheoretische Discussion einerseits an. Des einfachen Ausdrucks und der Anschaulichkeit wegen wollen wir dabei wieder vom Fundamental-Polygon und seinen Ecken sprechen (man vergleiche dazu pag. 22).

Zunächst kann man auf Grund von (28) und (15^b) die Werte sämtlicher $x_{\lambda\mu}^{(\omega)}$ in der Ecke $\omega = i\infty$ des Fundamental-Polygons in endlicher und geschlossener Form angeben. Es ist, resp. verhält sich nämlich für $q = 0$ in erster Annäherung:

1) wenn $\mu = 0$, $\sigma_{\lambda\mu} = i\frac{\omega_1}{2\pi}\left(e^{\frac{\lambda i\pi}{s}} - e^{-\frac{\lambda i\pi}{s}}\right)$,

2) wenn $\mu > 0$, $\sigma_{\lambda\mu} = -i\frac{\omega_1}{2\pi} e^{\frac{\lambda\mu\, i\pi}{s^2} - \frac{\lambda i\pi}{s}\frac{\mu^2}{q^{s^2}} - \frac{\mu}{s}}$.

Beispielsweise ist daher für $q = 0$:

$$x_{\lambda_0^{(i)}} = \frac{1}{d_i}\left\{\frac{e^{\frac{\lambda d_i i\pi}{s}} - e^{-\frac{\lambda d_i i\pi}{s}}}{e^{\frac{\lambda i\pi}{s}} - e^{-\frac{\lambda i\pi}{s}}}\right\}$$

Da die sämtlichen übrigen Ecken des Fundamental-Polygons durch lineare Substitution der Perioden aus dieser einen hervorgehen, wird durch die Formel (19) das Gleiche für die übrigen Ecken geleistet. Man kann sonach von vornherein die particulären Multiplicator-Gleichungen angeben, auf welche sich die allgemeine für beliebiges ω giltige Multiplicator-Gleichung in den Ecken des zugehörigen Polygons reducirt. Damit ist bereits eine gewisse Anzahl der zunächst unbestimmten Constanten, welche in die allgemeine, für beliebiges ω giltige Multiplicator-Gleichung eingehen, bestimmt. Denn um von den particulären Multiplicator-Gleichungen ausgehend die allgemeine zu bilden, um also die Gleichung von den Ecken des zugehörigen Fundamental-Polygons aus gewissermassen über das ganze Fundamental-Polygon hinweg fortzusetzen, hat man ihnen nur geeignete Zusatzglieder zu geben, deren Coefficienten die Form (20) haben und ausserdem den pag. 20 namhaft gemachten s Bedingungen genügen.

Weiter zeigen (28) und (15^b), dass allgemein die Wurzeln $x_{\lambda\mu^{(i)}}$ nur in den Ecken des zugehörigen Fundamental-Polygons null und unendlich werden, und bei vorgegebenem s lehren sie, in welchen dieser Ecken die Wurzeln null und unendlich werden und in welchen sie endlich bleiben. Setzt man dies in Verbindung mit der Lage der Null- und Unendlichkeitspunkte des benutzten vollen Modulsystems M_1, M_2, ... M_α, so erhält man andrerseits noch weitere Bedingungen für den Aufbau der Coefficienten. Es gelingt dadurch, diese Coefficienten als rationale ganze Functionen gewisser Aggregate der M_1, M_2, ... M_α aufzubauen. Der Grad dieser ganzen Functionen wird leicht abgezählt, wenn man die Anfangsglieder der Reihen-Entwicklungen der M_1, M_2, ... M_α und der $x_{\lambda\mu^{(i)}}$ berücksichtigt. Damit sind wir in der Tat in den Stand gesetzt, im gegebenen Falle die Multiplicator-Gleichung mit einer gewissen Anzahl

von unbestimmten Constanten anzuschreiben, wie dies im Eingange dieses Paragraphen beabsichtigt wurde.

Für die zuletzt angedeutete Discussion der Coefficienten und auch bereits für die s pag. 20 erschlossenen Bedingungen wird naturgemäss die specielle Auswahl und Werte-Verteilung des vollen Modul-Systems $M_1, M_2, \ldots M_\alpha$ für die $s$te Stufe massgebend. Sofern wir nicht über eine allgemeine Theorie voller Modulsysteme beliebiger Stufe verfügen, hat daher die Einzel-Untersuchung der Fälle $s = 2, 3, 4, \ldots$, bei denen wir geeignete Modulsysteme besitzen, die Form der Coefficienten im Detail zu studiren. Die nunmehr folgenden, ausführlich behandelten Fälle $s = 2, 3, 4$ sind in diesem Sinne durchaus nur als die ersten und einfachsten Beispiele zu betrachten.

Zweiter Abschnitt.

Specielle Behandlung der Multiplicator-Gleichungen der niedersten Stufen für die Teilwerte der σ-Function.

Erstes Capitel: $s = 2$.

§ 1. *Zusammenhang der $\sigma_{\lambda\mu}$ mit k^2.*

Wir recapituliren zunächst das Wichtigste, was sich aus I, § 1 für den vorliegenden Fall $s = 2$ ergiebt.

a) Bei beliebigen linearen Substitutionen von ω_1, ω_2 permutiren sich die $\sigma_{\lambda\mu}$ bis auf vortretende 4te Einheitswurzeln und aus irgend einem der drei verschiedenen $\sigma_{\lambda\mu}$ lassen sich daher durch lineare Substitution der Perioden sämtliche drei $\sigma_{\lambda\mu}$ und nur diese ableiten.

Dies wird übrigens auch anschaulich, wenn wir die Tabelle für den Einfluss der beiden Erzeugenden

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} &\text{S)} \quad \omega_1' = \omega_1, \quad \omega_2' = \omega_1 + \omega_2 \quad \text{und} \\ &\text{T)} \quad \omega_1' = -\omega_2, \quad \omega_2' = \omega_1 \end{aligned}$$

der Gruppe auf die $\sigma_{\lambda\mu}$ angeben. Nämlich greifen wir σ_{01}, σ_{10}, σ_{11} als die drei verschiedenen $\sigma_{\lambda\mu}$ heraus,

(2)

so geht bei Ausübung von		über in	σ_{01}	σ_{10}	σ_{11}
	S		$+\sigma_{11}$	$+\sigma_{10}$	$-i\sigma_{01}$
	T		$+\sigma_{10}$	$-\sigma_{01}$	$-i\sigma_{11}$

Auf Grund dieses Schemas werden alle folgenden Tabellen ohne erläuternden Text verständlich sein.

b) Bei linearen Substitutionen von ω_1, ω_2, welche mod 2 zur Identität congruent sind, ändert sich jedes $\sigma_{\lambda\mu}$ im allgemeinen um eine 4te Einheitswurzel, d. h. die $\sigma_{\lambda\mu}$ sind der 2ten Stufe adjungirt.

c) Bei linearen Substitutionen von ω_1, ω_2, welche mod 4 zur Identität congruent sind, ändert sich jedes $\sigma_{\lambda\mu}$ im allgemeinen um eine 2te Einheitswurzel.

d) Bei linearen Substitutionen von ω_1, ω_2, welche mod 8 zur Identität congruent sind, bleibt jedes $\sigma_{\lambda\mu}$ ungeändert, d. h. die $\sigma_{\lambda\mu}$ sind von der 8ten Stufe.

e) Die Substitutions-Coefficienten von linearen Substitutionen der Perioden, welche auf die $\sigma_{\lambda\mu}$ ausgeübt werden, dürfen beliebig mod 8 modificirt werden.

Für den Hauptmodul 2ter Stufe k^2 setzen wir (mit Weierstrass):

$$(3) \qquad k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = 16q \left\{\frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots}\right\}^8$$
$$= 16q\{1 - 8q + \ldots\}$$

wobei

$$(3^b) \quad e_1 = p\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \quad e_2 = p\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right), \quad e_3 = p\left(\frac{\omega_2}{2}\right) \text{ ist.}$$

Die Zusammenhänge (3), (3^b) geben das Verhalten von k^2 bei Ausübung von S und T, nämlich:

$$(4) \qquad \begin{array}{ll} & k^2 \\ S) & \dfrac{k^2}{k^2-1} \\ T) & 1-k^2. \end{array}$$

Die Werte-Verteilung von k^2 in den drei Ecken $\omega = i\infty$, 0, 1 des Fundamental-Polygons 2ter Stufe anlangend giebt die Definition (3) $k^2(i\infty) = 0$. Der Punkt $\omega = 0$ entsteht aus $\omega = i\infty$ durch die Operation T. Die Operation S führt schliesslich $\omega = 0$ in $\omega = 1$ über. Es ergiebt sich daher unter Benutzung von (4):

$$(5) \qquad k^2(i\infty) = 0, \quad k^2(0) = 1, \quad k^2(1) = \omega.$$

Wir wünschen, dies vorausgeschickt, die Beziehungen zwischen k^2 und den $\sigma_{\lambda\mu}$ zu gewinnen; b) lehrt in dieser Richtung, dass die Quotienten der 4ten Potenzen der $\sigma_{\lambda\mu}$ rationale Functionen von k^2

sind. Es genügt, einen Quotienten, etwa $\frac{\sigma_{01}^4}{\sigma_{10}^4}$ zu behandeln, da sich der andere daraus durch die Ausübung von S ergiebt. Die Werte von σ_{01} und σ_{10} für $\omega = ix$ folgen aus I., (28), und daraus ergeben sich dann weiter mit Bezug auf (2) die Werte für $\omega = 0, 1$; es findet sich so in erster Annäherung:

$$(6)\quad \begin{cases} \omega = i\infty) & \sigma_{01} = -\frac{i\omega_1}{2\pi}\cdot q^{-\frac{1}{4}}, \quad \sigma_{10} = -\frac{\omega_1}{\pi} \\ \omega = 0) & \sigma_{01} = -\frac{\omega_1}{\pi} \qquad\qquad \sigma_{10} = +\frac{i\omega_1}{2\pi} q^{-\frac{1}{4}} \\ \omega = 1) & \sigma_{01} = e^{\frac{3i\pi}{4}} \frac{\omega_1}{2\pi} q^{-\frac{1}{4}}, \quad \sigma_{10} = +\frac{i\omega_1}{2\pi} q^{-\frac{1}{4}} \end{cases}$$

Da nach I., (28) die $\sigma\lambda\mu$ nur in den rationalen Punkten der reellen Axe null und unendlich werden, wird also $\frac{\sigma_{01}^4}{\sigma_{10}^4}$ null nur für $k^2 = 1$, unendlich nur für $k^2 = 0$. Das giebt den Ansatz:

$$\frac{\sigma_{01}^4}{\sigma_{10}^4} = C\frac{k^2 - 1}{k^2}.$$

Ziehen wir beiderseits das erste Glied der Reihen-Entwickelungen heran, so lehrt dies $C = -1$, somit:

$$\frac{\sigma_{01}^4}{\sigma_{10}^4} = \frac{1 - k^2}{k^2}.$$

Bilden wir auf die oben angegebene Weise noch den anderen Quotienten $\frac{\sigma_{11}^4}{\sigma_{10}^4}$ und schreiben beide Resultate in einer fortlaufenden Proportion, so ist das Endresultat:

$$(7)\qquad \sigma_{01}^4 : \sigma_{10}^4 : \sigma_{11}^4 = (1 - k^2) : k^2 : -1.$$

Es folgt daraus beiläufig die Identität:

$$\sigma_{01}^4 + \sigma_{10}^4 + \sigma_{11}^4 = 0.$$

§ 2. *Die $x\lambda_\mu^{(i)}$. Ihr Verhalten bei linearer Substitution der Perioden ω_1, ω_2. Die Transformationen der Gleichungen in sich.*

Die Repräsentanten I, (8)

$$\bar\omega_1^{(i)} = \alpha_i\omega_1 + \beta_i\omega_2, \quad \bar\omega_2^{(i)} = \frac{\gamma_i\omega_1 + \delta_i\omega_2}{n},$$
$$\alpha_i\delta_i - \beta_i\gamma_i = 1, \quad i = 1, 2, \ldots N,$$

für Transformation n ter Ordnung (n ungerade) sind so zu wählen, dass die linearen Substitutionen der Perioden

$$\alpha_i \omega_1 + \beta_i \omega_2, \quad \gamma_i \omega_1 + \delta_i \omega_2$$

mod 8 zur Identität congruent sind. Betreffs des andern Repräsentanten-Systems I, (12 b)

$$\frac{a_i \omega_1}{n}, \quad \frac{8c_i \omega_1 + d_i \omega_2}{n}, \quad a_i d_i \equiv n, \quad c_i < a_i,$$

beachten wir, dass d_i ungerade, also $D_i \equiv d_i^{-1} \equiv d_i \bmod 8$ wird. Deshalb wollen wir setzen $d_i = 2b_i + 1$ und beachten, dass

$$\sigma_{\lambda(2b_i+1),\, \mu(2b_i+1)} = (-1)^{b_i} \sigma_{\lambda\mu} \text{ ist.}$$

In den beiderlei Repräsentanten geschrieben haben wir so für die $x_{\lambda\mu}^{(i)}$:

$$(8) \quad x_{\lambda\mu}^{(i)} = \frac{\sigma_{\lambda\mu}\{\bar{\omega}_1^{(i)}, \bar{\omega}_2^{(i)}\}}{\sigma_{\lambda\mu}} = (-1)^{\frac{d_i - 1}{2}} \frac{\sigma_{\lambda\mu}\left\{\frac{a_i \omega_1}{n}, \frac{8c_i \omega_1 + d_i \omega_2}{n}\right\}}{\sigma_{\lambda\mu}}$$

Es handelt sich nunmehr weiter um das Verhalten der $\alpha_{\lambda\mu}$ bei linearer Substitution der Perioden ω_1, ω_2. Da wir diese linearen Substitutionen sämtlich aus S und T zusammensetzen können, berechnen wir nur die Aenderungen von S und T auf dem directen in I. § 3. angegebenen Wege.

Es entspricht einerseits:

$$P = S = U = (1, 0, 1, 1) \equiv$$
$$\begin{cases} (1, 0, 1.1, 1), \\ (1, 0, 3.3, 1), \\ \\ (1, 0, 5.5, 1), \\ (1, 0, 7.7, 1), \end{cases} \pmod 8 \quad V \equiv \begin{cases} (1, 0, 1, 1), \\ (1, 0, 3, 1), \\ \\ (1, 0, 5, 1), \\ (1, 0, 7, 1), \end{cases}$$

worin nach einander die vier Fälle unterschieden sind $n \equiv 1, 3, 5, 7 \bmod 8$.

Andrerseits entspricht in analoger Weise:

$$P = T = U = (0, -1, +1, 0) \equiv$$
$$\begin{cases} (0, -1, 1.1, 0), \\ (0, -1, 3.3, 0), \\ \\ (0, -1, 5.5, 0), \\ (0, -1, 7.7, 0), \end{cases} \pmod 8 \quad V \equiv \begin{cases} (0, -1, 1, 0), \\ (0, -3, 3, 0), \\ \\ (0, -5, 5, 0), \\ (0, -7, 7, 0). \end{cases}$$

Berechnen wir den Einfluss dieser 8 mod 8 incongruenten linearen Substitutionen von einer Determinante, welche $\equiv 1 \pmod 8$ ist, auf die drei $\sigma_{\lambda\mu}$, so können wir damit unmittelbar das Verhalten der $x_{\lambda\mu}^{(\nu)}$ bei Ausübung von S und T tabelliren.

Im Falle $n \equiv 7 \bmod 8$ z. B. beachten wir, dass

$$T = U = (0, -1, +1, 0) \qquad \sigma_{11}' = -i\sigma_{11}$$
$$V = (0, -7, 7, 0) \qquad \sigma_{11}' = +i\sigma_{11}$$

zur Folge hat und also T jedes $x_{11}^{(\nu)}$ in

$$\frac{+i\sigma_{11}\{\bar\omega_1^{(\nu)}, \bar\omega_2^{(\nu)}\}}{-i\sigma_{11}} = -x_{11}^{(\nu)}$$

verwandelt.

Die vollständige Tabelle für den Einfluss von S und T ist folgende, wobei wir die oberen Indices i und j unterdrücken und ausserdem noch die Tabelle durch Combination von S und T zu den sechs mod 2 incongruenten linearen Substitutionen vervollständigen:

(9)

	x_{01}	x_{10}	x_{11}	k^2
S)	$+$	$+$	$+$	$\frac{k^2}{k^2-1}$
	$-i$ $\}x_{11}$	$+$ $\}x_{10}$	$-i$ $\}x_{01}$	
	$-$	$+$	$-$	
	$+i$	$+$	$+i$	
T)	$+$	$+$	$+$	$1-k^2$
	$-$ $\}x_{10}$	$-$ $\}x_{01}$	$-$ $\}x_{11}$	
	$+$	$+$	$+$	
	$-$	$-$	$-$	
TS)	$+$	$+$	$+$	$\frac{k^2-1}{k^2}$
	$+i$ $\}x_{11}$	$-$ $\}x_{01}$	$+i$ $\}x_{10}$	
	$-$	$+$	$-$	
	$-i$	$-$	$-i$	
ST)	$+$	$+$	$+$	$\frac{1}{1-k^2}$
	$-$ $\}x_{10}$	$+i$ $\}x_{11}$	$+i$ $\}x_{01}$	
	$+$	$-$	$-$	
	$-$	$-i$	$-i$	

$$STS) \quad \left.\begin{matrix}+\\+\\+\\+\end{matrix}\right\} x_{01} \qquad \left.\begin{matrix}+\\+i\\-\\-i\end{matrix}\right\} x_{11} \qquad \left.\begin{matrix}+\\+i\\-\\-i\end{matrix}\right\} x_{10} \qquad \frac{1}{k^2}.$$

Gleichzeitig ist damit für das weitere das Verhalten von k^2 bei den sechs mod 2 incongruenten Substitutionen tabellirt worden und die vierfache Fallunterscheidung bezieht sich immer auf die Fälle $n \equiv 1$, 3, 5, 7 mod 8.

Es geht also durch lineare Substitution der Perioden ω_1, ω_2 ein System von $N x_{\lambda\mu}^{(i)}$ bis auf 4te Einheitswurzeln wieder in ein solches System über ohne einen solchen Factor $\frac{\sigma_{lm}}{\sigma_{l'm'}}$, wie er nach I. (19) bei allgemeinem s sich einstellt.

Die Tabelle (9) zeigt weiter die beiden Transformationen der drei simultanen Gleichungen in sich. Es bleibt nämlich die Gleichung für x_{01}, x_{10}, x_{11} (unter Ausschluss der identischen Operation) ungeändert, wenn man in derselben resp. die lineare Substitution STS, S, T der Perioden vornimmt.

Die Anwendung von I., § 4. auf den vorliegenden Fall $s = 2$ giebt als allgemeinen Satz: Je N Grössen $x_{\lambda\mu}^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots N$, genügen einer Gleichung Nten Grades, deren Coefficienten der 2ten Stufe in Bezug auf 2te Einheitswurzeln adjungirt sind.

Die beiden Specificationen werden diese:

a) Ist $n \equiv 1$ mod 4, so sind sämtliche Coefficienten von der 2ten Stufe.

b) Ist $n \equiv 3$ mod 4, so sind die Coefficienten abwechselnd von der 2ten Stufe und der zweiten Stufe in Bezug auf 2te Einheitswurzeln adjungirt, je nachdem die homogene symmetrische Function der $x_{\lambda\mu}^{(i)}$, welche den Coefficienten constituirt, von geradem oder ungeradem Grade ist.

§ 3. *Werte der Wurzeln $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ in den Ecken des Fundamental-Polygons.*

Aus (8) und I., (28) erhalten wir unmittelbar die Werte der Wurzeln im Punkte $\omega = i\infty$. Die Tabelle (9) ermöglicht es sodann,

auf Grund derselben die Werte in den beiden andern Ecken des Fundamental-Polygons anzugeben. Auf diese Weise ist, resp. verhält sich in erster Annäherung:

$$
(10)\quad
x_{01}\begin{cases}
\omega = i\infty) & (-1)^{\frac{d_i-1}{2}}\,\frac{1}{d_i}\,e^{-\frac{2c_i i\pi}{a_i}}\,q^{-1/4\left(\frac{d_i}{a_i}-1\right)}\\
\omega = 0) \begin{matrix}+\\-\\+\\-\end{matrix} & (-1)^{\frac{d_i-1}{2}}\,\frac{1}{d_i}\\
\omega = 1) \begin{matrix}+\\+i\\-\\-i\end{matrix} & (-1)^{\frac{d_i-1}{2}}\,\frac{1}{d_i}\,e^{-\frac{2c_i i\pi}{a_i}}\,q^{-1/4\left(\frac{d_i}{a_i}-1\right)}
\end{cases}
$$

$$
x_{10}\begin{cases}
\omega = i\infty) & (-1)^{\frac{d_i-1}{2}}\,\frac{1}{d_i}\\
\omega = 0) \begin{matrix}+\\-\\+\\-\end{matrix} & (-1)^{\frac{d_i-1}{2}}\,\frac{1}{d_i}\,e^{-\frac{2c_i i\pi}{a_i}}\,q^{-1/4\left(\frac{d_i}{a_i}-1\right)}\\
\omega = 1) \begin{matrix}+\\-\\+\\-\end{matrix} & (-1)^{\frac{d_i-1}{2}}\,\frac{1}{d_i}\,e^{-\frac{2c_i i\pi}{a_i}}\,q^{-1/4\left(\frac{d_i}{a_i}-1\right)}
\end{cases}
$$

$$
x_{11}\begin{cases}
\omega = i\infty) & (-1)^{\frac{d_i-1}{2}}\,\frac{1}{d_i}\,e^{-\frac{2c_i i\pi}{a_i}}\,q^{-1/4\left(\frac{d_i}{a_i}-1\right)}\\
\omega = 0) \begin{matrix}+\\-\\+\\-\end{matrix} & (-1)^{\frac{d_i-1}{2}}\,\frac{1}{d_i}\,e^{-\frac{2c_i i\pi}{a_i}}\,q^{-1/4\left(\frac{d_i}{a_i}-1\right)}\\
\omega = 1) \begin{matrix}+\\+i\\-\\-i\end{matrix} & (-1)^{\frac{d_i-1}{2}}\,\frac{1}{d_i}.
\end{cases}
$$

Wir achten daranf, dass nns diese Tabelle folgendes lehrt:

1) In einer Ecke des Fnndamental-Polygons sind sämtliche N Wnrzeln $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ seines Systems endlich nnd von null verschieden.

2) In jeder der beiden andern Ecken werden die N $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ eines Systems stets zu einem Teil nnll und zn einem Teil nnendlich (ausserdem, wenn n eine Qnadrat-Zahl ist, noch zn einem Teile endlich nnd $\gtrless 0$).

Die damit gefnndenen Nnll- nnd Unendlichkeitspnnkte der Wnrzeln sind nach I., § 6. die einzigen im Fundamental-Polygon zweiter Stnfe.

§ 4. *Form der Coefficienten, Aufstellung der Gleichungen.*

Betreffs der Form der Coefficienten haben wir znnächst die allgemeine Betrachtnng von pag. 6. etc. anf Modnlfnnctionen $\psi(\omega)$ in Anwendnng zu bringen, welche in Bezug anf zweite Einheitswurzeln zur zweiten Stufe adjnngirt sind. Es genügt, nur diesen allgemeinen Fall zu behandeln, da der specielle Fall der Coefficienten zweiter Stnfe dnrch $[\psi(\omega)]^2$ gegeben ist.

Znvörderst ist:

$$[\psi(\omega)]^2 = R(k^2),$$

folglich, da $\psi(\omega)$ als eindentige Fnnction von ω nnr in $\omega = i\infty, 0, 1$ verzweigt sein kann

$$(11)\quad \psi(\omega) = (\sqrt{k^2})^\alpha (\sqrt{1-k^2})^\beta R(k^2) = k^\alpha k'^\beta R(k^2),$$

nnter α, β beliebige ganze Zahlen verstanden. Diese Darstellnng genügt bereits von selbst der notwendigen Bedingung, einen Congrnenz-Modnl zn geben.[1]

Um k nnd k' eindentig zn definiren, gehen wir anf (7) znrück und setzon:

$$(12)\qquad k = +i\frac{\sigma_{10}^2}{\sigma_{11}^2}, \quad k' = -i\frac{\sigma_{01}^2}{\sigma_{11}^2}.$$

Im Anschlnss hieran tahelliren wir nach dem Schema (9) auch das Verhalten von k, k' bei den sechs mod 2 incongrnenten linearen Suhstitntionen:

(9b)

	k	k'
S	$+i\frac{k}{k'}$	$+\frac{1}{k'}$
T)	$+k'$	$+k$
TS)	$+i\frac{k'}{k}$	$+\frac{1}{k}$
ST)	$+\frac{1}{k'}$	$+i\frac{k'}{k}$
STS)	$+\frac{1}{k}$	$-i\frac{k}{k'}$

Damit ist zugleich die Werte-Verteilung von k und k' in den Ecken des Fundamental-Polygons gegeben; es findet sich:

(13)

	k	k'
$\omega = i\infty$)	0	1
$\omega = 0$)	1	0
$\omega = 1$)	∞	∞.

Weitern Anfschluss über die Form der Coefficienten als durch (11) erhalten wir nach pag. 20 durch die Transformationen der Gleichungen in sich. Um mit Hilfe deren zunächst die Exponenten α und β in (11) zu bestimmen, bringen wir lineare Substitutionen in Anwendung, welche mod 2 zur Identität congruent sind, weil dadurch $R(k^2)$ in (11) nicht geändert wird. Die erzeugenden Substitutionen dieser Untergruppe sind S^2 und TS^2T; wir erhalten dafür:

	x_{01}	x_{10}	x_{11}	k	k'
S^2)	$-x_{01}$	$+x_{10}$	$-x_{11}$	$-k$	$+k'$
TS^2T)	$+x_{01}$	$-x_{10}$	$-x_{11}$	$+k$	$-k'$

Da $\psi(\omega)$ ein Coefficient ist, welcher eine homogene symmetrische Function ungeraden Grades der $x\lambda_\mu^{(i)}$ ist, erfordert dies, dass diese Coefficienten bez. von der Form sind:

$$\begin{cases} \psi_{01}(\omega) = k\,R(k^2) \\ \psi_{10}(\omega) = k'\,R(k^2) \\ \psi_{11}(\omega) = kk'\,R(k^2) \end{cases}$$

wenn $\psi\lambda_{\mu\varepsilon}$ der Gleichung für die $x\lambda_\mu^{(i)}$ angehört.

Um nunmehr auch Aufschluss über die Form von $R(k^2)$ zu erhalten, benutzen wir die aus (9) zu entnehmenden Transformationen der Gleichungen in sich, welche von linearen Substitutionen der

Perioden herrühren, welche nicht mod 2 zur Identität congruent sind. Dies lehrt unter Bezugnahme auf (9 h):

(14)

$$\psi_{01}(\omega) = \left(k+\frac{1}{k}\right)R\left(k^2+\frac{1}{k^2}\right) \qquad = \left(k+\frac{1}{k}\right)R\left\{\left(k+\frac{1}{k}\right)^2\right\}$$

$$\psi_{10}(\omega) = \left(k'+\frac{1}{k'}\right)R\left(k'^2+\frac{1}{k'^2}\right) \quad = \left(k'+\frac{1}{k'}\right)R\left\{\left(k'+\frac{1}{k'}\right)^2\right\}$$

$$\psi_{11}(\omega) = \left(i\frac{k'}{k}-i\frac{k}{k'}\right)R\left(\frac{k^2-1}{k^2}+\frac{k^2}{k^2-1}\right)$$

$$= \left(i\frac{k'}{k}-i\frac{k}{k'}\right)R\left\{\left(i\frac{k'}{k}-i\frac{k}{k'}\right)^2\right\}.$$

Die weitere Discussion ist functionentheoretischer Natur: Nach § 3. und Formel (13) werden die Wurzeln x_{01}, x_{10}, x_{11} nur null und unendlich bez. für unendlich grosses k und $\frac{1}{k}$, k' und $\frac{1}{k'}$, $+i\frac{k'}{k}$ und $-i\frac{k}{k'}$. Dies heisst: Die Coefficienten der Gleichungen sind, wenn man dieselben so anschreibt, dass die höchste Potenz den Coefficienten 1 hat, rationale ganze Functionen bez. der beiden Argumente k und $\frac{1}{k}$, k' und $\frac{1}{k'}$, $+i\frac{k'}{k}$ und $-i\frac{k}{k'}$ und das constante Glied jeder Gleichung ist unabhängig von k^2, also eine Constante und kann daher unmittelbar nach (10) angegeben werden.

Damit erhalten wir nun aus (14) die definitive Form der allgemeinen Coefficienten, welche der zweiten Stufe in Bezug auf zweite Einheitswurzeln adjungirt sind, in der Gestalt:

(15)
$$\psi_{01}(\omega) = \left(k+\frac{1}{k}\right)G\left\{\left(k+\frac{1}{k}\right)^2\right\}$$

$$\psi_{10}(\omega) = \left(k'+\frac{1}{k'}\right)G\left\{\left(k'+\frac{1}{k'}\right)^2\right\}$$

$$\psi_{11}(\omega) = \left(i\frac{k'}{k}-i\frac{k}{k'}\right)G\left\{\left(i\frac{k'}{k}-i\frac{k}{k'}\right)^2\right\}$$

worin G eine rationale ganze Function andeutet. Wie bereits am Eingange dieses Paragraphen erwähnt wurde, erhalten wir aus (15) die specielle Form der Coefficienten einerseits im Falle $n \equiv 1 \bmod 4$

und andrerseits im Falle, dass für $n \equiv 3 \bmod 4$ die homogene symmetrische Function der Wurzeln von geradem Grade ist, durch Quadriren, also:

$$\chi_{01}(\omega) = G\left\{\left(k+\frac{1}{k}\right)^2\right\}$$

$$\chi_{10}(\omega) = G\left\{\left(k'+\frac{1}{k'}\right)^2\right\} \tag{15}$$

$$\chi_{10}(\omega) = G\left\{\left(i\frac{k'}{k}-i\frac{k}{k'}\right)^2\right\}.$$

Um bequem von irgend einer der drei simultanen Gleichungen zu den andern übergehen zu können, tabelliren wir noch das Verhalten der drei Argumente $\left(k+\frac{1}{k}\right)$ etc. bei Ausübung von S und T:

		$X_{01} = k+\frac{1}{k}$	$X_{10} = k'+\frac{1}{k'}$	$X_{11} = +i\frac{k'}{k}-i\frac{k}{k'}$
(16)	S)	$-X_{11}$	$+X_{10}$	$+X_{01}$
	T)	$+X_{10}$	$+X_{01}$	$-X_{11}$.

Die gefundenen Resultate betreffs der Form der Coefficienten lassen sich übrigens in folgendem Satze zusammenfassen: Im Falle $n \equiv 1 \bmod 4$ sind die Coefficienten der Gleichungen für die $x_{\lambda\mu}^{(i)}$, sofern wir die Gleichungen mit dem ersten Coefficienten 1 anschreiben, gerade ganze Functionen von $X_{\lambda\mu}$ und im Falle $n \equiv 3 \bmod 4$ abwechselnd gerade und ungerade ganze Functionen von $X_{\lambda\mu}$, je nachdem die betreffende homogene symmetrische Function der Wurzeln selbst von geradem oder ungeradem Grade ist.

Der Grad jedes Coefficienten in $X_{\lambda\mu}$ resp. $X_{\lambda\mu}^2$ bestimmt sich dadurch, dass man mit (10) das erste Glied der Reihen-Entwicklung jedes Coefficienten in den drei Ecken des Fundamental-Polygons angeben kann. Die Vergleichung mit dem Anfangsgliede der Reihen-Entwicklung von $X_{\lambda\mu}$ in denselben drei Ecken liefert dann in der Tat den gesuchten Grad der ganzen Function im Argumente $X_{\lambda\mu}$ resp. $X_{\lambda\mu}^2$.

Unter Benutzung aller der im Vorhergehenden abgeleiteten Eigenschaften unserer Multiplicator-Gleichungen für die $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ ist man jederzeit im Stande, bei vorgegebenen n die Gleichungen mit einer gewissen Anzahl unbestimmter Constanten anzuschreiben. Diese können dann durch Einsetzen der Reihen-Entwickelungen einer Wurzel

$x_{\lambda\mu}^{(\sigma)}$ und des $X_{\lambda\mu}$ nach q bestimmt werden. Da wir alle N Wurzeln unserer Gleichungen kennen, kann man auch durch Bildung der symmetrischen Functionen der Wurzeln jeden Coefficienten einzeln bestimmen. Im einzelnen Falle kann es auch, um mit möglichst wenig Gliedern der Reihen-Entwicklungen auszukommen, zweckmässig sein, beide Methoden zur Bestimmung der unbestimmten Constanten zu combiniren.

Dieser Process der Bestimmung der unbestimmten Constanten kommt, in einem geometrischen Bilde gesprochen, darauf hinaus, jede Gleichung von den Punkten $\omega = i\infty, 0, 1$ aus, für welche sie durch (10) gegeben ist, über das Fundamental-Polygon hinweg fortzusetzen.

Uebrigens liegt auf der Hand, dass es genügt hätte, die ganze Entwicklung nur für eine der drei simultanen Gleichungen zu geben. In diesem einfachsten Falle $s = 2$ haben wir es vorgezogen, die drei simultanen Gleichungen auch wirklich simultan zu behandeln, um ihre Gleichberechtigung vollkommen vor Augen zu führen.

Eine genügende Controle für die Richtigkeit der bestimmten Constanten erhält man, wenn man noch ein weiteres Glied in den Reihen-Entwicklungen hinzunimmt, welches bei der Bestimmung der Constanten nicht beteiligt ist. Auf diese Weise sind die Constanten in allen im folgenden gegebenen Beispielen verificirt worden.

§ 5. *Beispiele:* $n = 3, 5, 7, 9.$

$n = 3.$

Wir wollen etwa die Gleichung für die $x_{01}^{(\sigma)}$ auf directem Wege, behandeln. Die Grössen a_i, $8c_i$, d_i für das kanonische Repräsentantensystem I, (12^b) $\frac{a_i\omega_1}{n}$, $\frac{8c_i\omega_1 + d_i\omega_2}{n}$ werden folgende:

	a_i	$8c_i$	d_i
1)	1	0	3
2)	3	0	1
3)	3	8.1	1
4)	3	8.2	1.

Die vier Wurzeln sind daher diese:

$$x_{01}^{(1)} = -\frac{\sigma_{01}\left\{\frac{\omega_1}{3}, \omega_2\right\}}{\sigma_{01}} = Cq^{-1/2} + \ldots$$

$$x_{01}^{(2)} = + \frac{\sigma_{01}\left\{\omega_1, \frac{\omega_2}{3}\right\}}{\sigma_{01}} = Cq^{1/6} + \ldots$$

$$x_{01}^{(3)} = + \frac{\sigma_{01}\left\{\omega_1, \frac{8\omega_1+\omega_2}{3}\right\}}{\sigma_{01}} = Cq^{1/6} + \ldots$$

$$x_{01}^{(4)} = + \frac{\sigma_{01}\left\{\omega_1, \frac{16\omega_1+\omega_2}{3}\right\}}{\sigma_{01}} = Cq^{1/6} + \ldots$$

Gleichzeitig ist dabei das erste Glied ihrer Reihen-Entwicklungen markirt worden. Die Reihen-Entwicklung von X_{01} beginnt

$$X_{01} = q^{-1/2}(1 + \ldots$$

und die Reihe in der Parenthese schreitet nach ganzen Potenzen von q fort. Durch Bildung der symmetrischen Functionen $\Sigma x_{01}^{(i)}$, $\Sigma\Sigma x_{01}^{(i)} x_{01}^{(k)}$, etc. erkennen wir, dass nur der erste Coefficient mit einem Gliede in q beginnt, nämlich mit $Cq^{-1/2}$. Es hängt somit nur der erste Coefficient von X_{01} ab und zwar ist er eine lineare ganze Function von X_{01}.

Die particulären Multiplicator-Gleichungen in den drei Ecken des Fundamental-Polygons sind:

für
$\omega = i\infty$, $\quad X_{01} = \infty, \quad x_{01}^3 = 0$
$\omega = 0$, d. h. für $\quad X_{01} = 2, \quad (x_{01} - \frac{1}{3})(x_{01}+1)^3$
$\qquad = x_{01}^4 + \frac{8}{3} x_{01}^3 + 2x_{01}^2 - \frac{1}{3} = 0$
$\omega = 1$, $\quad X_{01} = \infty, \quad x_{01}^3 = 0.$

Deshalb erhalten wir sofort ohne eine unbestimmte Constante als allgemeine Gleichung:

$$x_{01}^4 + \tfrac{4}{3} X_{01} x_{01}^3 + 2x_{01}^2 - \tfrac{1}{3} = (x_{01} - \tfrac{1}{3})(x_{01}+1)^3 + \tfrac{4}{3}(X_{01} - 2) x_{01}^3 = 0.$$

Die Ausübung von T und S führt diese Gleichung in die beiden andern über:

$$x_{10}^4 - \tfrac{4}{3} X_{10} x_{10}^3 + 2x_{10}^2 - \tfrac{1}{3} = 0$$

und

$$x_{11}^4 - i\tfrac{4}{3} X_{11} x_{11}^3 - 2x_{11}^2 - \tfrac{1}{3} = 0.$$

$$n = 5.$$

Es ist

$$x_{01}^{(1)} = + \frac{\sigma_{01}\left\{\frac{\omega_1}{5}, \omega_2\right\}}{\sigma_{01}} = + \tfrac{1}{3} q^{-1}(1 + 2q + \ldots$$

während die Reihen-Entwicklung der übrigen fünf Wurzeln beginnt:

$$x_{01}^{(i)} = Cq^{1/5} + \ldots, \quad i = 2, 3, \ldots 6.$$

Weiter ist

$$X_{01}^2 = \tfrac{1}{16} q^{-1}(1 + 40q + \ldots)$$

Durch Abzählen sehen wir, dass nur die erste symmetrische Function $\Sigma x_{01}^{(i)}$ mit einem Gliede in q beginnt und zwar mit Cq^{-1}. Es geht daher nur in den ersten Coefficienten X_{01}^2 ein und zwar linear.

Von den particulären Multiplicator-Gleichungen in den drei Ecken des Fundamental-Polygons interessirt uns nur die eine, deren Wurzeln endlich und von null verschieden sind, nämlich die Gleichung für

$\omega = 0$ oder $X_{01} = 2$) : $(x_{01} - \frac{1}{5})(x_{01} - 1)^5$

$$= x_{01}^6 - \tfrac{26}{5} x_{01}^5 + 11 x_{01}^4 - 12 x_{01}^3 + 7 x_{01}^2 - 2 x_{01} + \tfrac{1}{5} = 0$$

Auf Grund dessen haben wir folgenden Ansatz mit einer unbestimmten Constanten:

$$(x_{01} - \tfrac{1}{5})(x_{01} - 1)^5 + A(X_{01}^2 - 4) x_{01}^5 = 0.$$

Um die Constante A zu bestimmen, ist es hier wohl am einfachsten zu beachten, dass

$$\begin{aligned} \Sigma x_{01}^{(i)} &= + \tfrac{1}{5} q^{-1}(1 + 2q + \ldots \\ &= + \tfrac{26}{5} - A\{\tfrac{1}{16} q^{-1}(1 + 40q + \ldots) - 4\} \\ &= + q^{-1}\left\{ - \frac{A}{16} + (\tfrac{5}{2} A + \tfrac{26}{5}) q + \ldots \right\} \end{aligned}$$

sein soll. Dies giebt mit einer Verification $A = -\frac{16}{5}$, sodass die Gleichung für x_{01} lautet:

$$\begin{aligned} &x_{01} - \tfrac{1}{5})(x_{01} - 1)^5 - \tfrac{16}{5} (X_{01}^2 - 4) x_{01}^5 \\ &\quad = x_{01}^6 + \tfrac{2}{5}(19 - 8 X_{01}^2) x_{01}^5 + 11 x_{01}^4 - 12 x_{01}^3 + 7 x_{01}^2 - 2 x_{01} + \tfrac{1}{5} = 0 \end{aligned}$$

Mit der Tabelle (9) erhält man daraus als die beiden anderen Gleichungen:

$$x_{10}^6 + \tfrac{2}{5}(19 - 8 X_{10}^2) x_{10}^5 + 11 x_{10}^4 - 12 x_{10}^3 + 7 x_{10}^2 - 2 x_{10} + \tfrac{1}{5} = 0.$$

$$x_{11}^6 - \tfrac{2}{5}(19 - 8 X_{11}^2) x_{11}^5 + 11 x_{11}^4 + 12 x_{11}^3 + 7 x_{11}^2 + 2 x_{11} + \tfrac{1}{5} = 0.$$

$$n = 7.$$

Dafür ist

$$x_{01}^{(1)} = -\frac{\sigma_{01}\left\{\frac{\omega_1}{7}, \omega_2\right\}}{\sigma_{01}} = -\tfrac{1}{7} q^{-3/2}(1 + 2q + q^2 + 2q^3 + \ldots$$

während die Reihen-Entwicklungen der 7 anderen Wurzeln beginnen

$$x_{01}^{(i)} = q^{3/14}(C + \ldots)$$

wobei die Reihe in der Parenthese nach ganzen Potenzen von $q^{1/7}$ fortschreitet. Deshalb zählt man für die symmetrischen Fnnctionen der Wurzeln folgende Anfangsglieder ab:

$$c_1 = -\Sigma x_{01}^{(i)} = Cq^{-3/2}$$
$$c_2 = \Sigma\Sigma x_{01}^{(i)} x_{01}^{(k)} = Cq^{-1}$$
$$c_3 = -\Sigma\Sigma\Sigma x_{01}^{(i)} x_{01}^{(k)} x_{01}^{(l)} = Cq^{-1/2}$$
$$c_4 = C$$
$$c_5 = Cq^{-1/2}$$
$$c_6 = C$$
$$c_7 = C$$

Die particnläre Multiplicator-Gleichung für $\omega = 0$ oder $X_{01} = 2$ lst

$$(x_{01} - \tfrac{1}{7})(x_{01} + 1)^7$$
$$= x_{01}^8 + \tfrac{48}{7} x_{01}^7 + 20x_{01}^6 + 32x_{01}^5 + 30x_{01}^4 + 16x_{01}^3 + 4x_{01}^2 - \tfrac{1}{7} = 0.$$

Wir haben daher für die allgemeine Gleichnng folgenden Ansatz mit zwei unbestimmten Constanten:

$$x_{01}^8 + X_{01}\{(\tfrac{24}{7} - 4A) + AX_{01}^2\}x_{01}^7 + \{(20 - 4B) + BX_{01}^2\}x_{01}^6$$
$$+ 16X_{01}x_{01}^5 + 30x_{01}^4 + 8X_{01}x_{01}^3 + 4x_{01}^2 - \tfrac{1}{7} = 0.$$

Um A und B zu bestimmen, wollen wir die Reihen-Entwicklnng von $x_{01}^{(1)}$ und X_{01} in der Gleichnng einsetzen. Wir beachten, dass die einzelnen Glieder der Gleichnng folgendermassen in q beginnen:

$$\begin{aligned}
x_{01}^8 &= Cq^{-12} + . + . + . + . + \ldots \\
X_{01}\{(\tfrac{24}{7} - 4A) + AX_{01}^2\}x_{01}^7 &= Cq^{-12} + . + . + . + . + \ldots \\
\{(20 - 4B) + BX_{01}^2\}x_{01}^6 &= Cq^{-10} + . + . + \ldots \\
16X_{01}x_{01}^5 &= + Cq^{-8} + \ldots
\end{aligned}$$

etc. etc.

Wir berechnen daher zunächst A mit einer Verification, indem wir zwei Glieder der beiden ersten Reihen-Entwicklnngen combiniren, und zwar ist:

$$x_{01}^8 = +\frac{1}{7^8} q^{-12}\left\{1 + 16q + \ldots\right\}$$

$$X_{01}\left\{\left(\frac{24}{7} - 4A\right) + AX_{01}^2\right\}x_{01}^7 = -\frac{1}{4.7^7} q^{-12}\left\{\frac{A}{16} + \left(\frac{24}{7} + \frac{5A}{8}\right)q + \ldots\right\}$$

Dies giebt mit der gewünschten Verification $A = +\frac{64}{7}$. Um auch B auf diese Weise mit einer Verification zn bestimmen, haben wir vier Glieder der drei ersten Reihen-Entwicklungen zn nehmen, nämlich:

$$x_{01}^{8} = +\frac{1}{7^8}q^{-12}\left\{1+16q+120q^2+576q^3+\ldots\right\}$$

$$X_{01}\left\{-\frac{232}{7}+\frac{64}{7}X_{01}^{2}\right\}x_{01}^{7} = -\frac{1}{7^8}q^{-12}\left\{1+16q-27q^2+3320q^3+\ldots\right\}$$

$$\left\{(20-4B)+BX_{01}^{2}\right\}x_{01}^{6} \qquad +\frac{1}{7^6}q^{-10}\left\{\frac{B}{16}+(20-\frac{3}{4}B)q+\ldots\right\}$$

Daraus folgt mit der gewünschten Verification $B = -48$ und also lautet die definitive Gleichung:

$$x_{01}^{8}+\tfrac{8}{7}X_{01}\{-29+8X_{01}^{2}\}x_{01}^{7}+4\{53-12X_{01}^{2}\}x_{01}^{6}+16X_{01}x_{01}^{5}$$
$$+30x_{01}^{4}+8X_{01}x_{01}^{3}+4x_{01}^{2}-\tfrac{1}{7}=0.$$

Die beiden andern Gleichungen werden:

$$x_{10}^{8}-\tfrac{8}{7}X_{10}\{-29+8X_{10}^{2}\}x_{10}^{7}+4\{53-12X_{10}^{2}\}x_{10}^{6}-16X_{10}x_{10}^{5}$$
$$+30x_{10}^{4}-8X_{10}x_{10}^{3}+4x_{10}^{2}-\tfrac{1}{7}=0$$

$$x_{11}^{8}+\tfrac{8}{7}iX_{11}\{-29+8X_{11}^{2}\}x_{11}^{7}-4\{53-12X_{11}^{2}\}x_{11}^{6}-16iX_{11}x_{11}^{5}$$
$$+30x_{11}^{4}+8iX_{11}x_{11}^{3}-4x_{11}^{2}-\tfrac{1}{7}=0$$

$$n = 9.$$

Dafür ist:

$$x_{01}^{(1)} = +\frac{\sigma_{01}\left\{\frac{\omega_1}{9},\,\omega_2\right\}}{\sigma_{01}} = +\tfrac{1}{3}q^{-2}(1+\ldots$$

welche Reihe nach ganzen Potenzen von q fortschreitet. Weiter ist:

$$x_{01}^{(2)} = -\frac{\sigma_{01}\left\{\frac{\omega_1}{3},\,\frac{8\omega_1+3\omega_2}{9}\right\}}{\sigma_{01}} = \text{Const}+\ldots$$

$$x_{01}^{(3)} = -\frac{\sigma_{01}\left\{\frac{\omega_1}{3},\,\frac{16\omega_1+3\omega_2}{9}\right\}}{\sigma_{01}} = \text{Const}+\ldots$$

welche Reihen ebenfalls nach ganzen Potenzen von q fortschreiten. Die Reihen-Entwicklungen der 9 übrigen Wurzeln beginnen:

$$x_{01}^{(i)} = Cq^{2/9}(1+\ldots), \quad i = 4, 5, \ldots 12$$

wobei die Reihe in der Parenthese nach Potenzen von $q^{1/3}$ fortschreitet. Auf Grund dessen zählt man für die symmetrischen Functionen der Wurzeln folgende Anfangsglieder ab:

$$c_1 = -\Sigma x_{01}^{(i)} = Cq^{-2}$$

$$c_2 = \Sigma\Sigma x_{01}^{(i)} x_{01}^{(k)} = Cq^{-2},$$
$$c_3 = -\Sigma\Sigma\Sigma x_{01}^{(i)} x_{01}^{(k)} x_{01}^{(l)} = Cq^{-2},$$
$$c_4 = Cq^{-1},$$
$$c_5 = Cq^{-1},$$
$$c_6 = Cq^{-1},$$
$$c_7 = Cq^{-1},$$
$$c_8 = C,$$
$$c_9 = C, \text{ etc.}$$

Die Wurzeln der Multiplicator-Gleichung für die Grössen $x_{01}^{(i)}$ sind für $\omega = 0$ wie in den vorangehenden Beispielen sämtlich endlich und von null verschieden; abweichend von den drei vorausgeschickten Beispielen sind aber, weil nämlich n eine Quadrat-Zahl ist, auch für die beiden andern Ecken des Fundamental-Polygons zwei Wurzeln endlich und von null verschieden. Wir machen daher von allen drei particulären Multiplicator-Gleichungen Gebrauch, um die Zahl der in die allgemeine Gleichung eingehenden zunächst unbestimmten Constanten nach Möglichkeit zu reduciren. Dieselben sind:

$$\text{für } X_{01} = \infty, \quad \left(x_{01} + \frac{1}{3}e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)\left(x_{01} + \frac{1}{3}e^{\frac{4i\pi}{3}}\right) x_{01}^{9} =$$
$$\left(x_{01}^{2} - \frac{1}{3}x_{01} + \frac{1}{9}\right) x_{01}^{9} = 0,$$

$$\text{für } X_{01} = 2, \quad \left(x_{01} - \frac{1}{9}\right)\left(x_{01} + \frac{1}{3}\right)^{2}(x_{01} - 1)^{2} -$$
$$x_{01}^{12} - \frac{76}{9}x_{01}^{11} + \frac{838}{27}x_{01}^{10} - \frac{5212}{81}x_{01}^{9} + \frac{727}{9}x_{01}^{8} - \frac{536}{9}x_{01}^{7}$$
$$+ \frac{532}{27}x_{01}^{6} + \frac{40}{9}x_{01}^{5} - \frac{19}{3}x_{01}^{4} + \frac{44}{27}x_{01}^{3} + \frac{2}{9}x_{01}^{2} - \frac{4}{27}x_{01} + \frac{1}{81} = 0.$$

Daher gewinnen wir folgenden Ansatz mit 8 unbestimmten Constanten:

$$x_{01}^{12} + AX_{01}^{4}\left(x_{01}^{2} - \frac{1}{3}x_{01} + \frac{1}{9}\right) x_{01}^{2}$$
$$+ \left\{\left(-\frac{76}{9} - 4B - 16A\right) + BX_{01}^{2}\right\} x_{01}^{11}$$
$$+ \left\{\left(\frac{838}{27} - 4C + \frac{16}{3}A\right) + CX_{01}^{2}\right\} x_{01}^{10}$$
$$+ \left\{\left(-\frac{5212}{81} - 4D - \frac{16}{9}A\right) + DX_{01}^{2}\right\} x_{01}^{9}$$

$$+\left\{\left(\frac{727}{9}-4E\right)+EX_{01}^{2}\right\}x_{01}^{8}+\left\{\left(-\frac{536}{9}-4F\right)+FX_{01}^{2}\right\}x_{01}^{7}$$
$$+\left\{\left(\frac{532}{27}-4G\right)+GX_{01}^{2}\right\}x_{01}^{6}+\left\{\left(\frac{40}{9}-4H\right)+HX_{01}^{2}\right\}x_{01}^{5}$$
$$-\frac{19}{3}x_{01}^{4}+\frac{44}{27}x_{01}^{3}+\frac{2}{9}x_{01}^{2}-\frac{4}{27}x_{01}+\frac{1}{81}=0.$$

Nach Bestimmuug der Constauten erhält man:

$$x_{01}^{12}-\frac{256}{9}X_{01}^{4}\left(x_{01}^{2}-\frac{1}{3}x_{01}+\frac{1}{9}\right)x_{01}^{3}+\left\{-108+\frac{416}{3}X_{01}^{2}\right\}x_{01}^{11}$$
$$+\left\{2866-\frac{2240}{3}X_{01}^{2}\right\}x_{01}^{10}+\left\{\frac{8103}{3}-\frac{6112}{9}X_{01}^{2}\right\}x_{01}^{9}$$
$$+\left\{479-\frac{896}{9}X_{01}^{2}\right\}x_{01}^{8}+\left\{40-\frac{224}{9}X_{01}^{2}\right\}x_{01}^{7}$$
$$+\left\{124-\frac{704}{27}X_{01}^{2}\right\}x_{01}^{6}+\left\{\frac{56}{3}-\frac{32}{9}X_{01}^{2}\right\}x_{01}^{5}$$
$$-\frac{19}{8}x_{01}^{4}+\frac{44}{27}x_{01}^{3}+\frac{2}{9}x_{01}^{2}-\frac{4}{27}x_{01}+\frac{1}{81}=0.$$

Wegen der complicirten Beschaffouheit dieser Gleichnug mag es genügen, nur diese eine der drei simultanen Gleichungen angeführt zu haben.

Zweites Capitel: $s=3$.

§ 1. *Zusammenhang der $\sigma_{\lambda\mu}$ mit der Tetraeder-Irrationalität.*

Das Verhalten der $\sigma_{\lambda\mu}$ bei linearen Snbstitntionen der Perioden ω_1, ω_2 anlangend gilt hier folgendes:

a) Bei heliebigen linearen Substitntionen von ω_1, ω_2 permntiren sich die $\sigma_{\lambda\mu}$ his auf vortretende 6te Einheitswurzeln nnd es lassen sich daher durch lineare Snbstitution der Perioden aus irgend einem der vier verschiedenen $\sigma_{\lambda\mu}$ sämtliche vier $\sigma_{\lambda\mu}$ nud nur diese ableiten.

Dies geht, abgesehen vom früheren directen Nachweise, auch daraus hervor, dass die Erzeugenden S und T der Gruppo der linearen Substitutionen von ω_1, ω_2 diesen Einfluss anf die vier vorschiedenen $\sigma_{\lambda\mu}$ ausüben. Greifen wir σ_{01}, σ_{10}, σ_{11} und σ_{12} als die vier verschiedenen $\sigma_{\lambda\mu}$ herans, so ist das diesbezügliche Verhalten folgendes:

(1)

	σ_{01}	σ_{10}	σ_{11}	σ_{12}
S	$+\sigma_{11}$	$+\sigma_{10}$	$-\varepsilon\sigma_{12}$	$-\varepsilon\sigma_{01}$
T	$+\sigma_{10}$	$-\sigma_{01}$	$-\varepsilon^2\sigma_{12}$	$-\varepsilon\sigma_{11}$.

b) Bei linearen Substitutionen von ω_1, ω_2, welche mod 3 zur Identität congruent sind, ändert sich jedes $\sigma_{\lambda\mu}$ im allgemeinen um eine 3te Einheitswurzel, d. h. die $\sigma_{\lambda\mu}$ sind der 3ten Stufe adjungirt.

c) Bei linearen Substitutionen von ω_1, ω_2, welche mod 9 zur Identität congruent sind, bleibt jedes $\sigma_{\lambda\mu}$ ungeändert, d. h. die $\sigma_{\lambda\mu}$ sind von der 9ten Stufe.

d) Die Substitutions-Coefficienten von linearen Substitutionen der Perioden, welche auf die $\sigma_{\lambda\mu}$ ausgeübt werden, dürfen beliebig mod 18 (nicht mod 9) modificirt werden.

Als den Haupt-Modul für die 3te Stufe führen wir nach Herrn Klein [1]) die folgende Tetraeder-Irrationalität ein:

$$\xi = -6q^{2/3}\frac{\sum_{+0}^{\infty}(-1)^k(2k+1)q^{3k^2+3k}}{\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^k(6k+1)q^{3k^2+k}} \tag{2}$$

deren Verhalten bei linearer Substitution der Perioden ω_1, ω_2 wir wieder dadurch angeben, dass wir das Verhalten speciell bei Ausübung von S und T notiren. Es ist dies folgendes:

$$\begin{array}{cc} & \xi \\ S & \varepsilon.\xi \\ T & \dfrac{\xi+2}{\xi-1}. \end{array} \tag{3}$$

Das Fundamental-Polygon 3ter Stufe hat vier Ecken, als welche wir $\omega = i\infty$, 0, 1, 2 annehmen können. Es gilt zunächst, auf Grund der gegebenen Definition von ξ dessen Werte in diesen vier Punkten anzugeben. (2) giebt direct den Wert für $\omega = \infty$; ihn benutzend giebt (3) den Wert für $\omega = 0, 1, 2$ und zwar findet sich

$$\xi(i\infty) = 0, \quad \xi(0) = -2, \quad \xi(1) = -2\varepsilon, \quad \xi(2) = -2\varepsilon^2 \tag{4}$$

Wünschen wir nunmehr die Beziehungen von ξ zu den $\sigma_{\lambda\mu}$ kennen zu lernen, so lehrt (b), dass die Quotienten der 3ten Potenzen der $\sigma_{\lambda\mu}$ rationale Functionen der Tetraeder-Irrationalität sind. Wir behandeln etwa den Quotienten $\frac{\sigma_{01}^3}{\sigma_{10}^3}$. Die Werte der $\sigma_{\lambda\mu}$ für $\omega = i\infty$ ergeben sich aus Abschn. I, (28); mittels (1) kann man dann die

---

1) Man vergleiche Klein, „Vorlesungen über den Ikosaeder", Leipzig 1884, pag. 133.

Werte der $\sigma_{\lambda\mu}$ in den andern Ecken des Fundamental-Polygons angeben. Für diese vier Punkte ist in erster Annäherung:

$$\omega = i\infty) \quad \sigma_{01} = -\frac{i\omega_1}{2\pi} q^{-1/2}, \qquad \sigma_{10} = +\frac{i\omega_1}{2\pi}\left(e^{\frac{i\pi}{3}} - e^{-\frac{i\pi}{3}}\right),$$

$$\sigma_{11} = -\frac{i\omega_1}{2\pi} e^{-\frac{2i\pi}{9}} q^{-1/9}, \quad \sigma_{12} = -\frac{i\omega_1}{2\pi} e^{-\frac{i\pi}{9}} q^{-1/9},$$

$$(5) \quad \omega = 0) \quad \sigma_{01} = +\frac{i\omega_1}{2\pi}\left(e^{\frac{i\pi}{3}} - e^{-\frac{i\pi}{3}}\right), \quad \sigma_{10} = +\frac{i\omega_1}{2\pi} q^{-1/9},$$

$$\omega = 1) \quad \sigma_{01} = -\frac{i\omega_1}{2\pi} \varepsilon^2 e^{-\frac{i\pi}{9}} q^{-1/9}, \quad \sigma_{10} = +\frac{i\omega_1}{2\pi} q^{-1/9},$$

$$\omega = 2) \quad \sigma_{01} = -\frac{i\omega_1}{2\pi} \varepsilon^2 e^{-\frac{2i\pi}{9}} q^{-1/9}, \quad \sigma_{10} = +\frac{i\omega_1}{2\pi} q^{-1/9},$$

Da die $\sigma_{\lambda\mu}$ nur in den rationalen Punkten der reellen Axe null und unendlich werden, wird sonach $\frac{\sigma_{01}^3}{\sigma_{10}^3}$ null nur für $\xi = -2$, unendlich nur für $\xi = 0$. Dies heisst, es ist:

$$\frac{\sigma_{01}^3}{\sigma_{10}^3} = C\frac{\xi+2}{\xi}$$

Vergleichen wir je das erste Glied der Reihen-Entwicklung auf beiden Seiten, so findet sich:

$$\frac{\sigma_{01}^3}{\sigma_{10}^3} = \frac{1}{-i\sqrt{3}} \frac{\xi+2}{\xi}.$$

Bilden wir durch Ausübung der Operationen S und T hieraus die beiden anderen Quotienten, so lässt sich das Endresultat zusammenfassen in

$$(6) \quad \sigma_{10}^3 : \sigma_{01}^3 : \sigma_{11}^3 : \sigma_{12}^3 = -i\sqrt{3}.\xi : (\xi+2) : (\xi+2\varepsilon^2) : -(\xi+2\varepsilon),$$

§ 2. *Die $x_{\lambda\mu}^{(\nu)}$. Ihr Verhalten bei linearer Substitution der Perioden ω_1, ω_2. Die Transformationen der Gleichungen in sich.*

Wir wählen für Transformation $n$ter Ordnung ($n \equiv 1$ oder $2 \bmod 3$) das eine Repräsentanten-System

$$\overline{\omega}_1^{(\nu)} = \alpha_\nu \omega_1 + \beta_\nu \omega_2, \quad \overline{\omega}_2^{(\nu)} = \frac{\gamma_\nu \omega_1 + \delta_\nu \omega_2}{n}$$

$$\alpha_i\delta_i - \beta_i\gamma_i = 1, \quad i = 1, 2, \ldots N,$$

so, dass die linearen Substitutionen der Perioden

$$\alpha_i\omega_1 + \beta_i\omega_2, \quad \gamma_i\omega_1 + \delta_i\omega_2$$

mod 3 zur Identität congruent sind. Das andre Repräsentanten-System wird:

$$\frac{a_i\omega_1}{n}, \quad \frac{9c_i\omega_1 + d_i\omega_2}{n}, \quad a_id_i = n, \quad c_i < a_i.$$

Da mit n auch d_i nicht durch 3 teilbar ist, so ist

$$d_i^{-1} \equiv d_i \bmod 3$$

und dies hat zur Folge

$$\sigma\lambda A_i + \mu C_i,\ \lambda B_i + \mu D_i = E\lambda\mu^{(i)}\,\sigma\lambda d_i,\ \mu d_i - 1 = E\lambda\mu^{(i)}\,\sigma\lambda\mu,$$

unter $E\lambda\mu^{(i)}$ eine 6te Einheitswurzel verstanden. In den beiderlei Repräsentanten geschrieben haben wir so für die Wurzeln unserer zu betrachtenden Multiplicator-Gleichungen:

$$(7)\quad x\lambda\mu^{(i)} = \frac{\sigma\lambda\mu\{\overline{\omega}_1^{(i)},\ \overline{\omega}_2^{(i)}\}}{\sigma\lambda\mu} = \frac{\sigma\lambda A_i + \mu C_i,\ \lambda B_i + \mu D_i\left\{\frac{a_i\omega_1}{n},\ \frac{9c_i\omega_1 + d_i\omega_2}{n}\right\}}{\sigma\lambda\mu} = E\lambda\mu^{(i)}\frac{\sigma\lambda\mu\left\{\frac{a_i\omega_1}{n},\ \frac{9c_i\omega_1 + d_i\omega_2}{n}\right\}}{\sigma\lambda\mu}$$

Damit sind die $x\lambda\mu^{(i)}$ eindeutig definirt. Es handle sich jetzt um ihr Verhalten bei linearer Substitution der Perioden ω_1, ω_2. Es genügt wieder, die Aenderungen bei Ausübung von S und T zu bestimmen.

Einerseits entspricht:

$$P = S = U = (1, 0, 1, 1) \equiv \begin{cases} (1, 0, 1.1, 1) \\ (1, 0, 4.7, 1) \\ (1, 0, 7.4, 1) \\ \\ (1, 0, 2.5, 1) \\ (1, 0, 5.2, 1) \\ (1, 0, 8.8, 1) \end{cases} \pmod 9 \quad V = \begin{cases} (1, 0, 1, 1) \\ (1, 0, 7, 1) \\ (1, 0, 4, 1) \\ \\ (1, 0, 5, 1) \\ (1, 0, 2, 1) \\ (1, 0, 8, 1), \end{cases}$$

wobei nach einander die 6 Fälle $n \equiv 1, 4, 7, 2, 5, 8$ unterschieden sind, wie dies im folgenden immer geschieht. Andrerseits entspricht in analoger Weise:

$$P = T = U = (0, -1, +1, 0) \equiv$$

$$\begin{cases} (0, -1, 1.1, 0) \\ (0, -1, 4.7, 0) \\ (0, -1, 7.4, 0) \end{cases} \quad \begin{cases} (0, -1, 1, 0) \\ (0, -4, 7, 0) \\ (0, -7, 4, 0) \end{cases}$$

$$\pmod 9 \qquad V \equiv$$

$$\begin{cases} (0, -1, 2.5, 0) \\ (0, -1, 5.2, 0, \\ (0, -1, 8.8, 0) \end{cases} \quad \begin{cases} (0, -2, 5, 0) \\ (0, -5, 2, 0) \\ (0, -8, 8, 0) \end{cases}$$

Die letzten 5 linearen Substitutionen V der Perioden haben nur eine Determinatne, welche $\equiv 1 \bmod 9$, nicht aber gleich 1 ist. Wir haben für dieselben zuvörderst durch Modification der Substitutions-Coefficienten mod 9 die Determinante gleich 1 zu machen. Die so normirten Substitutions-Coefficienten dürfen dann behufs einfacherer Berechnung der entsprechenden Aenderung der $\sigma_{\lambda\mu}$ mod 18 modificirt werden.

Berechnen wir den Einfluss der angegebenen 12 mod 9 incongruenten linearen Substitutionen auf die vier $\sigma_{\lambda\mu}$, so können wir damit unmittelbar das Verhalten der $x_{\lambda\mu}$ bei Ausübung von S und T zusammenstellen.

Im Falle $n \equiv 8 \bmod 9$ z. B. beachten wir, dass

$$(0, -8, 8, 0) \equiv (9, 1, 80, 9) \bmod 9$$

ist, wovon die letztere Substitution die Determinante 1 hat. Wir ersetzen dieselbe einfacher durch (9, 1, 8, 9). Nun hat

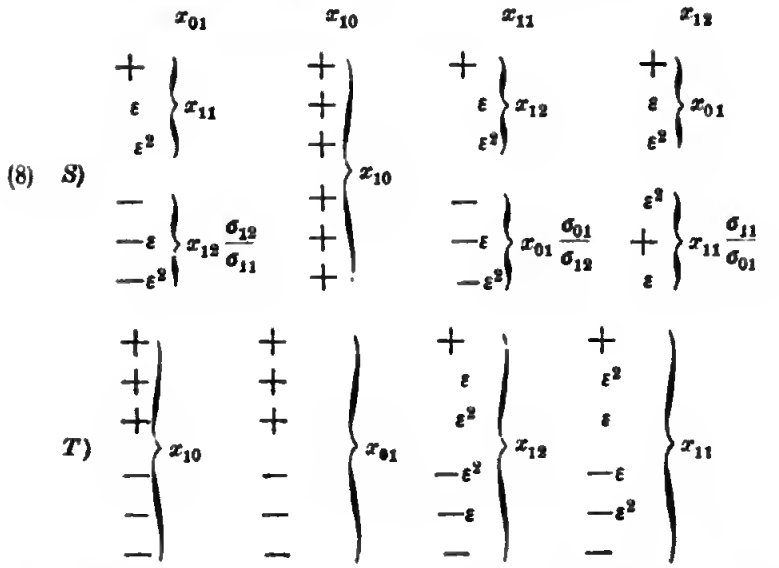
$$\begin{aligned} T = U &= (0, -1, +1, 0) & \sigma_{12}' &= -\varepsilon\sigma_{11} \\ V &\equiv (9, 1, 8, 9) & \sigma_{12}' &= +\varepsilon\sigma_{11} \end{aligned}$$

zur Folge, und also verwandelt T jedes $x_{12(j)}$ in

$$\frac{-\varepsilon\sigma_{11}\{\bar{\omega}_1^{(j)}, \bar{\omega}_2^{(j)}\}}{+\varepsilon\sigma_{11}} = -x_{11}^{(j)}.$$

Die vollständige Tabelle für die Aenderungen bei Ausübung von S und T ist folgende, wenn wir die oberen Indices i und j unterdrücken:

(8)



Es geht also im Falle $n \equiv 1 \bmod 3$ durch lineare Substitution von ω_1, ω_2 ein System von N Grössen $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ bis auf 3te Einheitswurzeln wieder ein solches System über ohne einen solchen Factor $\frac{\sigma_{lm}}{\sigma_{l'm'}}$ in I. (19), wie dies bei allgemeinem s der Fall ist. Für $s \equiv 2 \bmod 3$ hingegen geht durch lineare Substitution von ω_1, ω_2 ein System von N Grössen $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ bis auf 6te Einheitswurzeln wieder in ein solches System x_{lm} über, multiplicirt mit $\frac{\sigma_{lm}}{\sigma_{l'm'}}$.

Im Besitze der Tabelle (8) ist es leicht, die Transformationen in sich jeder der vier simultanen Gleichungen aufzusuchen. Um hierbei und weiterhin Weitläufigkeiten zu vermeiden, beschränken wir, abweichend von der Darstellung bei $s = 2$, unsere Entwicklungen von jetzt an auf eine der vier simultanen Gleichungen. Durch Ausübung der Operationen S und T ist es dann leicht, die gewonnenen Resultate auf die drei andern zu übertragen. Der Tabelle (8) gemäss wird es am einfachsten sein, die Gleichung für x_{10} herauszugreifen. Dafür ergiebt sich der Satz: Die Gleichung für x_{10} bleibt (unter Ausschluss der identischen Operation) ungeändert, wenn man in derselben die linearen Substitutionen S und S^2 der Perioden ω_1, ω_2 vornimmt.

Betreffs der Existenz der Multiplicator-Gleichungen giebt die Anwendung von I. § 4 auf den vorliegen Fall $s = 3$ folgenden allgemeinen Satz: Je N Grössen $x_{\lambda\mu}^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots N$ genügen

einer Gleichung Nten Grades, deren Coefficienten der 3ten Stufe in Bezug auf 3te Einheitswurzeln adjungirt sind.

Die beiden Specificationen werden diese:

a) Ist $n \equiv 1 \bmod 3$, so sind sämtliche Coefficienten von der 3ten Stufe.

b) Ist $n \equiv 2 \bmod 3$, so sind die Coefficienten, welche homogenen symmetrischen Functionen 3ten Grades der Wurzeln entsprechen, von der 3ten Stufe.

§ 3. *Werte der Wurzeln $x_{10}^{(i)}$ in den Ecken des Fundamental-Polygons.*

Aus (7) und I. (28) erhalten wir unmittelbar die Werte der Wurzeln im Punkte $\omega = i\infty$. Die Tabelle (8) ermöglicht es sodann, auf Grund derselben die Werte der Wurzeln in den drei andern Ecken des Fundamental-Polygons anzugeben. Auf diese Weise findet man folgendes Verhalten der Wurzeln $x_{10}^{(i)}$ (bez. in erster Annäherung):

$$\begin{array}{ll} \omega = i\infty & E_{10}^{(i)}\,\frac{1}{d_i} \\ \left.\begin{array}{l}\omega = 0\\ \omega = 1\\ \omega = 2\end{array}\right\} & \pm\{E_{01}^{(i)}\,\frac{1}{d_i}\,e^{-\frac{2e_i}{a_i}i\pi} - \lambda/9\left(\frac{d_i}{a_i} - 1\right)\end{array} \tag{9}$$

wobei sich für $\omega = 0, 1, 2$ die zweifache Fallunterscheidung auf die Fälle $n \equiv \left.\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right\} \bmod 3$ bezieht.

Wir entnehmen aus (9) folgendes:

1) In der Ecke $\omega = i\infty$ des Fundamental-Polygons sind sämtliche N Wurzeln $x_{10}^{(i)}$ endlich und von null verschieden.

2) In den drei andern Ecken des Fundamental-Polygons sind diese N Wurzeln $x_{10}^{(i)}$ stets zu einem Teil null und zu einem Teil unendlich (ausserdem, wenn n eine Quadratzahl ist, noch zu einem Teil endlich und $\gtrless 0$).

Die hiermit gefundenen Null- und Unendlichkeitspunkte der Wurzeln sind nach I. § 6. die einzigen im Fundamental-Polygon 3ter Stufe.

§ 4. *Form der Coefficienten, Aufstellung der Gleichungen.*

Betreffs der Form der Coefficienten haben wir zunächst die allgemeine Betrachtung von pag. 17. etc. auf Congruenz-Modnln $\psi(\omega)$ in Anwendnng zn bringen, welche in Bezug anf 3te Einheitswnrzeln der 3ten Stnfe adjnngirt sind. Es genügt, nnr diesen allgemeinen Fall, welcher $n \equiv 2 \bmod 3$ entspricht, zn behandeln, da der specielle Fall der Coefficienten 3ten Stnfe, welcher $n \equiv 1 \bmod 3$ entspricht, damit bereits erledigt ist.

Wir setzen an

$$[\psi(\omega)]^3 = R(\xi)$$

Daraus folgt, da $\psi(\omega)$ als eindentige Fnnction von ω nur in $\omega = i\omega$, 0, 1, 2 verzweigt sein kann:

$$(10) \quad \psi(\omega) = (\sqrt[3]{\xi})^{\alpha} (\sqrt[3]{\xi+2})^{\beta} \sqrt[3]{(\xi+2\varepsilon)^{\gamma}} (\sqrt[3]{\xi+2\varepsilon^2})^{\delta} R(\xi)$$

unter α, β, γ, δ ganze Zahlen verstanden. Die Grössen $\sqrt[3]{\xi}$, $\sqrt[3]{\xi+2\varepsilon^i}$ einzeln sind jedoch keine Congruenz-Modnln, sondern nur ihre Verhältnisse sind nach (6) solche. Damit das angeschriebene $\psi(\omega)$ ein Congruenz-Modnl wird, ist also notwendig und hinreichend:

$$(10b) \qquad \alpha+\beta+\gamma+\delta \equiv 0 \bmod 3$$

zu nehmen oder wir haben den letzten Ansatz etwa in

$$(11) \quad \psi(\omega) = \left(\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2}}\right)^{p} \left(\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon}}\right)^{q} \left(\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon^2}}\right)^{r} R(\xi)$$

zu specialisiren, um hierin die allgemeinste Darstellnng eines eindentigen Congruenz-Moduls zn haben, der der 3ten Stnfe in Bezng anf 3te Einheitswnrzeln adjnngirt ist. Wir beschränken, wie dies zulässig ist, die Werte von p, q, r anf 0, 1, 2. Um aber die Darstellung (11) vollkommen eindentig zu machen, haben wir noch festzusetzen, wie die 3ten Wnrzeln ans $\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon^i}$ gezogen werden sollen. Dies geschieht sehr einfach, wenn wir anf die Relationen (6) zurückgreifend definiren:

$$\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2}} = +\frac{1}{\sqrt[3]{-i\sqrt{3}}}\frac{\sigma_{10}}{\sigma_{01}}$$

$$(12)\qquad \sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon}} = +\frac{1}{\sqrt[3]{-i\sqrt{3}}}\frac{\sigma_{10}}{\sigma_{11}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon^2}} = -\frac{\varepsilon}{\sqrt[3]{-i\sqrt{3}}}\frac{\sigma_{10}}{\sigma_{11}}$$

unter $\sqrt[3]{-i\sqrt{3}}$ in allen drei Fällen dieselbe 3te Wurzel verstanden.

Im Anschluss an diese Definitionen stellen wir das Verhalten der drei Moduln bei Ausübung von S und T tabellarisch zusammen, und zwar ist dies nach (1) so beschaffen:

$$(13)\qquad \begin{array}{c|c|c}
 & \sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2}} & \sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon}} \\
S) & +\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon}} & +\varepsilon\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon^2}} \\
T) & -\frac{1}{(\sqrt[3]{-i\sqrt{3}})^2}\sqrt[3]{\frac{\xi+2}{\xi}} & +\frac{1}{\sqrt[3]{-i\sqrt{3}}}\sqrt[3]{\frac{\xi+2}{\xi+2\varepsilon^2}}
\end{array}$$

$$\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon^2}}$$

$$+\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2}}$$

$$-\frac{1}{\sqrt[3]{-i\sqrt{3}}}\sqrt[3]{\frac{\xi+2}{\xi+2\varepsilon}}$$

Weiteren Aufschluss als durch (11) über die Form der Coefficienten erhalten wir durch die Transformationen der Gleichungen in sich. Um mit Hilfe deren zunächst die Exponenten p, q, r in (11) zu bestimmen, bringen wir lineare Substitutionen der Perioden ω_1, ω_2 in Anwendung, welche mod 3 zur Identität congruent sind, weil nämlich dadurch $R(\xi)$ in (11) nicht geändert wird. Die erzeugenden Substitutionen dieser Untergruppe sind S^3, TS^3T, $S^{-1}TS^3TS^{+1}$,

$S^{+1}TS^3TS^{-1}$; wir erhalten dafür, indem wir uns von den $x_{\lambda\mu}$ wieder auf x_{10} und dafür weiter auf den allgemeinen Fall $n \equiv 2 \bmod 3$ beschränken:

$$(14)\qquad \begin{array}{|c|c|} \hline & x_{10} \\ S^3) & x_{10} \\ TS^3T) & \varepsilon^2 x_{10} \\ S^{-1}TS^3TS^{+1}) & \varepsilon^2 x_{10} \\ S^{+1}TS^3TS^{-1}) & \varepsilon^2 x_{10} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2}} & \sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon}} & \sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon^2}} \\ \varepsilon\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2}} & \varepsilon\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon}} & \varepsilon\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon^2}} \\ \varepsilon^2\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2}} & \sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon}} & \sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon^2}} \\ \sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2}} & \sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon}} & \varepsilon^2\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon^2}} \\ \sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2}} & \varepsilon^2\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon}} & \sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon^2}} \\ \hline \end{array}$$

Daraus ist ersichtlich, dass ein Coefficient $\psi_{10}^{(\nu)}(\omega)$, welcher einer homogenen symmetrischen Function νten Grades der Wurzeln $x_{10}^{(i)}$ entspricht, die Form hat:

$$(15)\qquad \psi_{10}^{(\nu)}(\omega) = \left\{\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2}}\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon}}\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon^2}}\right\}^{\nu'} R(\xi)$$

sofern $\nu = \nu' + 3\nu''$ gesetzt und ν' auf die Werte 0, 1, 2 beschränkt wird.

Um nunmehr auch Aufschluss über die Form von $R(\xi)$ zu erhalten, benutzen wir die pag. 45. angegebenen Transformationen der Gleichungen in sich, welche von linearen Substitutionen der Perioden ω_1, ω_2 herrühren, die nicht mod 3 zur Identität congruent sind. Diese beiden Substitutionen S und S^2 bringen folgende Aenderungen hervor:

$$(16)\qquad \begin{array}{cccc} & x_{10} & \sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2}}\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon}}\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon^2}} & \xi \\ S & x_{10} & \varepsilon\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2}}\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon}}\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon^2}} & \varepsilon.\xi \end{array}$$

(16) $S^2 \qquad x_{10} \qquad \varepsilon^2 \sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2}} \sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon}} \sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon^2}} \qquad \varepsilon^2.\xi$

Um daraus den gewünschten Schluss ziehen zu können, wollen wir beachten, dass es 12 mod 3 incongruente nicht-homogene lineare Substitutionen von ω_1, ω_2 giebt. Dieso sind:

(17a) $\qquad S^i, \quad TS^i, \quad STS^i, \quad S^2TS^i, \quad i = 0, 1, 2.$

Ihnen entsprechen folgende 12 lineare Substitutionen der Tetraeder-Irrationalität ξ oder folgende Substitutionen der Tetraeder-Gruppe:

(17b) $\qquad \varepsilon^i.\xi, \quad \varepsilon^i.\frac{\xi+2}{\xi-1}, \quad \varepsilon^i.\frac{\varepsilon\xi+2}{\varepsilon\xi-1}, \quad \varepsilon^i.\frac{\varepsilon^2\xi+2}{\varepsilon^2\xi-1}.$

wobei i denselben Wert hat wie in der symbolischen Schreibweise $S^k T^l S^i$ der linearen Substitution.

Aus diesen Angaben geht hervor, dass $\varepsilon^i.\xi$ die einzigen Tetraeder-Substitutionen sind, welche sich bei Ausübung von S um ε ändern. Daher folgt aus (16):

(18) $\qquad \psi_{10}^{(r)}(\omega) = \left\{\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2}} \sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon}} \sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon^2}} \; \frac{1}{\xi}\right\}^{r'}. R(\xi^3).$

An letzter Stelle achten wir schliesslich auf die Null- und Unendlichkeitspunkte der Wurzeln, welche in (9) angegeben worden sind. Die Lage derselben lässt sich, indem wir auf die Tetraeder-Substitutionen Bezug nehmen, so beschreiben: Die Wurzeln werden null und unendlich nur für unendlich grosse $\varepsilon^k.\frac{\xi-1}{\xi+2}$, $\varepsilon^l.\frac{\varepsilon\xi-1}{\varepsilon\xi+2}$, $\varepsilon^m.\frac{\varepsilon^2\xi-1}{\varepsilon^2\xi+2}$ und $\sqrt[3]{\frac{1}{\xi^3+8}}$. Daraus folgt, dass, wenn man die Gleichung für x_{10} so anschreibt, dass die höchste Potenz den Coefficienten 1 hat, einesteils

(18b) $\qquad R(\xi^3) = G\left\{\varepsilon^k.\frac{\xi-1}{\xi+2}, \; \varepsilon^l.\frac{\varepsilon\xi-1}{\varepsilon\xi+2}, \; \varepsilon^m.\frac{\varepsilon^2\xi-1}{\varepsilon^2\xi+1}\right\}$

sein muss, worin G eine ganze Function der drei Argumente und k, l, m beliebig 0, 1 oder 2 bedeuten, und dass anderenteils das constante Glied der Gleichung unabhängig von ξ, also eine Constante ist, welche daher unmittelbar nach (9) angegeben werden kann. Die Frage ist nach (18b) nunmehr, wie eine ganze Function der drei Argumente $0, \frac{\xi-1}{\xi+2}, \frac{\varepsilon\xi-1}{\varepsilon\xi+2}, \frac{\varepsilon^2\xi-1}{\varepsilon^2\xi-2}$ (indem wir einfach $k = l = m = 0$

setzen) beschaffen sein muss, damit sie eine rationale Function von ξ^3 ist oder, was dasselbe ist, damit sie ungeändert bleibt, wenn man ξ durch $\varepsilon\xi$ ersetzt. Da durch Vertauschung von ξ mit $\varepsilon\xi$ die genannten Argumente wechselseitig in einander übergehen, muss die ganze Function G eine symmetrische ganze Function der drei Argumente sein. Als solche ist sie eine ganze Function der drei symmetrischen Functionen

$$\frac{\xi-1}{\xi+2}\cdot\frac{\varepsilon\xi-1}{\varepsilon\xi+2}\cdot\frac{\varepsilon^2\xi-1}{\varepsilon^2\xi+2},$$

$$\frac{\xi-1}{\xi+2}\cdot\frac{\varepsilon\xi-1}{\varepsilon\xi+2}\cdot+\frac{-1}{\xi+2}\cdot\frac{\varepsilon^2\xi-1}{\varepsilon^2\xi+2}+\frac{\varepsilon\xi-1}{\varepsilon\xi+2}\cdot\frac{\varepsilon^2\xi-1}{\varepsilon^2\xi+2},$$

$$\frac{\xi-1}{\xi+2}+\frac{\varepsilon\xi-1}{\varepsilon\xi+2}+\frac{\varepsilon^2\xi-1}{\varepsilon^2\xi+2}$$

jener drei Argumente. Jede dieser drei symmetrischen Functionen hat die Form $\frac{A\xi^3+B}{\xi^3+8}$; folglich drücken sich zwei derselben stets durch die dritte, oder alle drei drücken sich ganz durch

$$27\cdot\frac{\xi}{\xi+2}\cdot\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon}\cdot\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon^2}=27\cdot\frac{\xi^3}{\xi^3+8}$$

aus, d. h. die gesuchte symmetrische ganze Function von $\frac{\xi-1}{\xi+2}\cdot\frac{\varepsilon\xi-1}{\varepsilon\xi+2}\cdot\frac{\varepsilon^2\xi-1}{\varepsilon^2\xi+2}$ ist eine ganze Function etwa von $27\cdot\frac{\xi^3}{\xi^3+8}$. Die definitive Form der Coefficienten $\psi_{10}^{(\nu)}(\omega)$ wird daher:

$$(19)\quad \psi_{10}^{(\nu)}(\omega)=\left\{3\cdot\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon}}\cdot\sqrt[3]{\frac{\xi}{\xi+2\varepsilon^2}}\cdot\frac{1}{\xi}\right\}^{\nu'}\cdot G\left\{27\cdot\frac{\xi^3}{\xi^3+8}\right\},$$

oder wenn wir

$$(0)\qquad X_{10}=3\sqrt[3]{\frac{\xi^3}{\xi^3+8}}$$

setzen:

$$(19a)\qquad \psi_{10}^{(\nu)}(\omega)=\left(X_{10}\cdot\frac{1}{\xi}\right)^{\nu'}G(X_{10}^3)$$

Damit ist die allgemeine Discussion der Coefficienten für die Gleichung für x_{10} zu Ende geführt.

Um auf Grund dessen die Form der Coefficienten für die drei andern simultanen Gleichungen anzugeben, hat man mittelst der Tabelle (8) aufzusuchen, durch welche Operationen die Gleichung für x_{10} in die Gleichung für x_{01}, x_{11}, x_{12} übergeführt wird, und diese Operationen unter Benutzung von (17a), (17b) auf (19a) auszuüben. Um Weitläufigkeiten zu vermeiden, und weil wir bei den Beispielen ohnehin die sämtlichen simultanen Gleichungen aufstellen werden, möge es genügen, die dabei auftretenden Argumente X_{01}, X_{11}, X_{12} namhaft zu machen und das Verhalten der X_{10} bei Ausübung von S und T zusammenzustellen.

(21)

	S	T
$X_{01} = \frac{3}{(\sqrt[3]{-i\sqrt{3}})^4} \sqrt[3]{\frac{(\xi+2)^3}{\xi(\xi+2\varepsilon)(\xi+2\varepsilon^2)}}$	$\varepsilon . X_{11}$	X_{10}
$X_{10} = 3 \sqrt[3]{\frac{\xi^3}{\xi^3+8}}$	$\varepsilon . X_{10}$	X_{01}
$X_{11} = \frac{3}{(\sqrt[3]{-i\sqrt{3}})^4} \sqrt[3]{\frac{(\xi+2\varepsilon)^3}{\xi(\xi+2)(\xi+2\varepsilon^2)}}$	X_{12}	X_{12}
$X_{12} = \frac{3}{(\sqrt[3]{-i\sqrt{3}})^4} \sqrt[3]{\frac{(\xi+2\varepsilon^2)^3}{\xi(\xi+2)(\xi+2\varepsilon)}}$	$\varepsilon . X_{01}$	X_{11}

Beispielsweise ist also:

$$\psi_{01}{}^{(\nu)}(\omega) = \left(X_{01} \cdot \frac{\xi-1}{\xi+2}\right)^{\nu'} . G(X_{01}{}^3). \tag{19h}$$

Nachdem wir durch diese Erörterungen die Form der Coefficienten im allgemeinen Falle, d. h. im Falle $n \equiv 2 \bmod 3$ und $\nu \equiv 1, 2 \bmod 3$, sowie im speciellen Falle $n \equiv 2$, $\nu \equiv 0 \bmod 3$ bestimmt haben, bleibt es nur noch übrig, die specielle Form der Coefficienten im andern der beiden pag. 46. angeführten speciellen Fälle, nämlich im Falle $n \equiv 1 \bmod 3$ auszugeben. Der Unterschied zwischen diesem Falle und dem allgemeinen Falle besteht lediglich darin, dass die Coefficienten von der 3ten Stufe sind. Es fällt daher einfach in der Darstellung der Coefficienten durch ξ der Factor in (19a), (19b) etc. fort, welcher der 3ten Stufe adjungirt ist. Die Coefficienten haben somit für $n \equiv 1 \bmod 3$ die Form:

(22)

$$\begin{aligned} \chi_{01} &= G(X_{01}{}^3), \\ \chi_{10} &= G(X_{10}{}^3), \\ \chi_{11} &= G(X_{11}{}^3), \\ \chi_{12} &= G(X_{12}{}^3). \end{aligned}$$

Der Grad der rationalen ganzen Fnnctionen G in $X_{\lambda\mu}^3$ lässt sich, genau wie im Falle $\varepsilon = 2$, dadnrch bestimmen, dass man, wenn es sich beispielsweise nm die Gleichnng für x_{10} handelt, nach (9) das erste Glied der Reihen-Entwicklnng des betreffenden Coefficienten im Punkte $\omega = 0$ oder $\omega = 1$ oder $\omega = 2$ angehen kann, nnd dass in diesen drei Punkten die Reihen-Entwickelnng von X_{10} und von $X_{10} \cdot \frac{1}{\xi}$ beginnt:

$$(23)\quad X_{10} = C \cdot q^{-2/9}, \quad X_{10} \cdot \frac{1}{\xi} = C \cdot q^{-2/9}$$

Bei Benntznng aller der abgeleiteten Eigenschaften nnserer Multiplicator-Gleichnngen ist man nnnmehr, ganz entsprechend wie früher im Falle $\varepsilon = 2$, im Stande, irgend eine der einem bestimmten Transformationsgrade n zngehörigen Gleichungen mit einer gewissen Anzahl von nnbestimmten Constanten anznschreiben. Damit ist das Ziel der allgemeinen Theorie nnserer Multiplicator-Gleichnngen 3ter Stufe erreicht.

Ueber die Bestimmnng der erwähnten nnbestimmten Constanten ist dasselbe zn bemerken, wie an der entsprechenden Stelle im Falle $\varepsilon = 2$ (Schlnss des § 4.). Die Reihenentwickelungen der Grössen $X_{\lambda\mu}$ nach q erhält man, indem man dieselben mittels (12) durch die $\sigma_{\lambda\mu}$ ausdrückt, deren Reihen-Entwickelnngen durch I. (27) gegeben sind. Z. B. ist:

$$X_{01} = -i\sqrt{3} \cdot \varepsilon \frac{\sigma_{01}^3}{\sigma_{10}\sigma_{11}\sigma_{12}}, \quad X_{10} = -i\sqrt{3} \cdot \varepsilon \frac{\sigma_{10}^3}{\sigma_{01}\sigma_{11}\sigma_{12}}.$$

§ 5. *Beispiele:* $n = 2, 4, 5, 7.$

$n = 2.$

Wir behandeln im Anschlnss an nnsere Entwickelnngen in § 4. die eine Gleichnng für die $x_{10}^{(6)}$ anf directem Wege.

Die Grössen a_i, $9c_i$, d_i im kanonischen Repräsentantensystem $\frac{a_i\omega_1}{n}$, $\frac{9c_i\omega_1 + d_i\omega_2}{n}$ für die drei Wurzeln werden:

	a_i	$9c_i$	d_i
1)	1	0	2
2)	2	0	1
3)	2	9.1	1

nnd demnach wird entsprechend weiter

	A_i	B_i	C_i	D_i mod 9
1)	2	0	0	5
2)	1	0	0	1
3)	1	0	0	1.

Davon haben nur die beiden letzten Substitutionen die Determinante 1. Die Determinante der ersten ist dagegen nur $\equiv 1 \bmod 9$; wir haben daher die erste Substitution zuvörderst durch Modification der Substitutions-Coefficienten mod 9 in eine lineare Substitution zu verwandeln, welche die Determinante hat. Dies ist (2, 9, 9, 41) oder bequemer mod 18 vereinfacht (2, 9, 9, 8). Dieselbe hat zur Folge:

$$\sigma_{10}' = \sigma_{2,9} = \sigma_{2,0}\sigma_{3,3} = -\sigma_{10}$$

Die drei Wurzeln sind also:

$$x_{10}^{(1)} = -\frac{\sigma_{10}\left\{\frac{\omega_1}{2}, \omega_2\right\}}{\sigma_{10}}, \quad x_{10}^{(2)} = +\frac{\sigma_{10}\left\{\omega_1, \frac{\omega_2}{2}\right\}}{\sigma_{10}}$$

$$x_{10}^{(3)} = +\frac{\sigma_{10}\left\{\omega_1, \frac{9\omega_1+\omega_2}{2}\right\}}{\sigma_{10}}$$

Für $\omega = 0, 1, 2$ verhalten sich dieselben nach (9) in erster Annäherung wie

$$x_{10}^{(1)} = C.q^{-2/9}, \quad x_{10}^{(2)} = C.q^{+1/9}, \quad x_{10}^{(3)} = C.q^{+1/9} \quad \text{für} \quad q = 0.$$

Wir entnehmen daraus mit Bezug auf (19a) und (23), dass nur die eine symmetrische Function $\Sigma x_{10}^{(i)}$ der drei Wurzeln von X_{10} abhängt und zwar in folgender Weise:

$$-\Sigma x_{10}^{(i)} = C.X_{10}.\frac{1}{\xi}.$$

Von den particulären Gleichungen für die Ecken des Fundamental-Polygons interessirt uns nur die eine für $\omega = i\infty$ oder für $X_{10} = -9q^{2/3}$, $X_{10}.\frac{1}{\xi} = +\frac{3}{2}$, welche endliche und von null verschiedene Wurzeln hat. Sie ist:

$$(x_{10}+\tfrac{1}{2})(x_{10}-1)^2 = x_{10}^3 - \tfrac{3}{2}x_{10}^2 + \tfrac{1}{2} = 0.$$

Daher erhalten wir sofort als allgemeine Gleichung ohne jede unbestimmte Constante:

$$x_{10}^3 - X_{10} \cdot \frac{1}{\xi} x_{10}^2 + \tfrac{1}{2} = (x_{10} + \tfrac{1}{2})(x_{10} - 1)^2 + \left(\frac{3}{2} - X_{10} \cdot \frac{1}{\xi}\right) x_{10}^2 = 0.$$

Durch Ansübung der Operation T erhalten wir daraus:

$$x_{01}^3 + X_{01} \cdot \frac{\xi - 1}{\xi + 2} \cdot x_{01}^2 - \tfrac{1}{2} = 0$$

Durch Ansühung der Operation S anf diese neue Gleichung entsteht weiter:

$$x_{12}^3 - \varepsilon X_{11} \cdot \frac{\varepsilon\xi - 1}{\varepsilon\xi + 2} \cdot \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{12}} \cdot x_{12}^2 + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_{11}^3}{\sigma_{12}^3} = 0.$$

Schliesslich ergieht die Ansübung der Operation T anf diese letztere Gleichnng als letzte der vier simnltanen Gleichnngen:

$$x_{11}^3 - \varepsilon^2 X_{12} \cdot \frac{\varepsilon^2\xi - 1}{\varepsilon^2\xi + 2} \cdot \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}} \cdot x_{11}^2 + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_{12}^3}{\sigma_{11}^3} = 0.$$

$$n = 4.$$

Es wird für die sechs Wnrzeln:

	a_i	$9c_i$	d_i	A_i	B_i	C_i	D_i mod 9
1)	1	0	4	4	0	0	7
2)	2	9.1	2	2	0	0	5
3)	4	0	1	1	0	0	1
			folglich:				
4)	4	9.1	1	1	0	0	1
5)	4	9.2	1	1	0	0	1
6)	4	9.3	1	1	0	0	1

Die zwei ersten dieser 6 linearen Snbstitntionen A_i, B_i, C_i, D_i müssen zuvörderst durch Modification mod 9 auf die Determinante $A_iD_i - B_iC_i = 1$ gebracht werden, nnd zwar ist:

$$(4, 0, 0, 7) \equiv (-41, 9, -2) \text{ mod } 9$$

oder in zulässiger Weise mod 18 vereinfacht: $(-5, 5, 9, 9, -2)$. Die Snbstitntion $(2, 0, 0, 5)$ ist hereits im Beispiel $n = 2$ behandelt worden. Die Snbstitution $(-5, 9, 9, -2)$ verwandelt σ_{10} in

$$\sigma_{10}' = \sigma_{-5,9} = \sigma_{10}$$

und sonach siud die 6 Wnrzeln folgende:

$$x_{10}^{(1)} = + \frac{\sigma_{10}\left\{\frac{\omega_1}{4}, \omega_2\right\}}{\sigma_{10}}, \qquad x_{10}^{(4)} = + \frac{\sigma_{10}\left\{\omega_1, \frac{9\omega_1 + \omega_2}{4}\right\}}{\sigma_{10}}$$

$$x_{10}^{(2)} = -\frac{\sigma_{10}\left\{\frac{\omega_1}{2}, \frac{9\omega_1+2\omega_2}{4}\right\}}{\sigma_{10}}, \qquad x_{10}^{(5)} = +\frac{\sigma_{10}\left\{\omega_1, \frac{9.2\omega_1+\omega_2}{4}\right\}}{\sigma_{10}}$$

$$x_{10}^{(3)} = +\frac{\sigma_{10}\left\{\omega_1, \frac{\omega_2}{4}\right\}}{\sigma_{10}}, \qquad x_{10}^{(6)} = +\frac{\sigma_{10}\left\{\omega_1, \frac{9.3\omega_1+\omega_2}{4}\right\}}{\sigma_{10}}$$

Für $\omega = 0, 1, 2$ verhalten sie sich nach (9) in erster Annäherung wie

$$\left.\begin{aligned} x_{10}^{(1)} &= C.q^{-2/3} \\ x_{10}^{(2)} &= \text{Const} \\ x_{10}^{(3)} = x_{10}^{(4)} = x_{10}^{(5)} = x_{10}^{(2)} &= C.q^{+1/6} \end{aligned}\right\} \text{ für } q = 0.$$

Mit Bezug auf (22) und (23) erfahren wir daraus, dass nur die beiden ersten symmetrischen Functionen $\Sigma x_{10}^{(i)}$, $\Sigma\Sigma x_{10}^{(i)} x_{10}^{(k)}$ von $X_{10}^{(3)}$ abhangen und zwar linear.

Für die Ecke $\omega = i\infty$ des Fundamental-Polygons sind sämtliche 6 Wurzeln endlich und von null verschieden; da n Quadrat-Zahl ist, ist dies auch für die drei andern Ecken $\omega = 0, 1, 2$, mit einer Wurzel der Fall. Daher benutzen wir, um die Zahl der in die allgemeine Gleichung eingehenden zunächst unbestimmten Constanten nach Möglichkeit zu reduciren, sämtliche vier particuläre Gleichungen. Dieselben sind für

$\omega = i\infty$, d. h. $X_{10}^3 = 0$, $(x_{10}-\frac{1}{4})(x_{10}+\frac{1}{2})(x_{10}-1)^4 =$

$$x_{10}^6 - \frac{15}{4}x_{10}^5 + \frac{39}{8}x_{10}^4 - 2x_{10}^3 - \frac{3}{4}x_{10}^2 + \frac{3}{4}x_{10} - \frac{1}{8} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \omega &= 0 \\ \omega &= 1 \\ \omega &= 2 \end{aligned}\right\} \text{ d. h. } X_{10}^3 = \infty, \qquad (x_{10} - \tfrac{1}{2})x_{10}^4 = 0$$

Daher erhalten wir für die allgemeine Gleichung folgenden Ansatz mit einer unbestimmten Constanten:

$$(x_{10}-\tfrac{1}{4})(x_{10}+\tfrac{1}{2})(x_{10}-1)^4 + A X_{10}^3 (x_{10} - \tfrac{1}{2})x_{10}^4 = 0.$$

Um A zu bestimmen, wollen wir einfacher die Gleichung für x_{10} heranziehen. Wir erhalten sie aus der angeschriebenen für x_{10} durch Anwendung der linearen Substitution T der Perioden ω_1, ω_2 und zwar wird sie:

$$(x_{01}-\tfrac{1}{4})(x_{01}+\tfrac{1}{2})(x_{01}-1)^4 + A.X_{01}^3(x_{01}-\tfrac{1}{2})x_{01}^4 = 0.$$

Wir benutzen dafür:

$$\sigma_{01} = -\frac{i\omega_2}{2\pi}\cdot q^{-1/6}\left\{1 - q^{2/3} + \ldots\right\}$$

$$x_{01}^{(1)} = \frac{\sigma_{01}\left\{\frac{\omega_1}{4},\ \omega_2\right\}}{\sigma_{01}} = \tfrac{1}{4}q^{-2/3}\left\{1 + q^{2/3} + \ldots\right\}$$

$$X_{01}^{3} = -q^{-2/3}\left\{1 - 12q^{2/3} + \ldots\right\}$$

Damit bilden wir:

$$(x_{01}^{(1)})^6 = +\frac{1}{4^6}q^{-4}\left\{1 + 6q^{2/3} + \ldots\right\}$$

$$-\frac{15}{4}(x_{01}^{(1)})^5 = -\frac{15}{4^6}q^{-10/3}\left\{1 + \ldots\right\}$$

$$+AX_{01}^{3}(x_{01}^{1})^5 = -\frac{A}{4^5}\cdot q^{-4}\left\{1 - 7q^{2/3} + \ldots\right\}$$

$$-\frac{A}{2}X_{01}^{3}(x_{01}^{(1)})^4 = +\frac{A}{2\cdot 4^4}\cdot q^{-10/3}\left\{1 + \ldots\right\}$$

und erhalten mit einer Verification $A = +\frac{1}{4}$. Somit werden die vier simultanen Gleichungen:

$$(x_{01} - \tfrac{1}{4})(x_{01} + \tfrac{1}{2})(x_{01} - 1)^4 + \tfrac{1}{4}X_{01}^{3}(x_{01} - \tfrac{1}{2})x_{01}^{4} = 0,$$

$$(x_{10} - \tfrac{1}{4})(x_{10} + \tfrac{1}{2})(x_{10} - 1)^4 + \tfrac{1}{4}X_{10}^{3}(x_{10} - \tfrac{1}{2})x_{10}^{4} = 0,$$

$$\left(x_{11} - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)\left(x_{11} + \frac{\varepsilon^2}{2}\right)(x_{11} - \varepsilon^2)^4 + \frac{\varepsilon^2}{4}X_{11}^{3}\left(x_{11} - \frac{\varepsilon^2}{2}\right)x_{11}^{4} = 0,$$

$$\left(x_{12} - \frac{\varepsilon}{4}\right)\left(x_{12} + \frac{\varepsilon}{2}\right)(x_{12} - \varepsilon)^4 + \frac{\varepsilon}{4}X_{12}^{3}\left(x_{12} - \frac{\varepsilon}{2}\right)x_{12}^{4} = 0.$$

$$n = 5.$$

Man hat für die 6 Wurzeln:

	a_i	$9c_i$	d_i		A_i	B_i	C_i	D_i
1)	1	0	5		5	0	0	2
2)	5	0	1		1	0	0	1
3)	5	9.1	1		1	0	0	1
				folglich:				
4)	5	9.2	1		1	0	0	1
5)	5	9.3	1		1	0	0	1
6)	5	9.4	1		1	0	0	1

Wir beachten, dass

$$(5, 0, 0, 2) \equiv (41, 9, 9, 2) \bmod 9$$
$$(41, 9, 9, 2) \equiv (5, 9, 9, 2) \bmod 18$$
$$\sigma_{10}(5, 9, 9, 2) \equiv -\sigma_{10}$$

und also

$$x_{10}^{(1)} = -\frac{\sigma_{10}\left\{\frac{\omega_1}{5}, \omega_2\right\}}{\sigma_{10}}, \quad x_{10}^{(4)} = +\frac{\sigma_{10}\left\{\omega_1, \frac{9.2\omega_1+\omega_2}{5}\right\}}{\sigma_{10}}$$

$$x_{10}^{(2)} = +\frac{\sigma_{10}\left\{\omega_1, \frac{\omega_2}{5}\right\}}{\sigma_{10}}, \quad x_{10}^{(5)} = +\frac{\sigma_{10}\left\{\omega_1, \frac{9.3\omega_1+\omega_2}{5}\right\}}{\sigma_{10}}$$

$$x_{10}^{(3)} = +\frac{\sigma_{01}\left\{\omega_1, \frac{9\omega_1+\omega_2}{5}\right\}}{\sigma_{10}}, \quad x_{10}^{(6)} = +\frac{\sigma_{10}\left\{\omega_1, \frac{9.4\omega_1+\omega_2}{5}\right\}}{\sigma_{10}} \text{ ist.}$$

Für $\omega = 0, 1, 2$ verhalten sich die Wurzeln wie

$$\left.\begin{aligned} x_{10}^{(1)} &= C.q^{-8/9} \\ x_{10}^{(k)} &= C.q^{+8/45}, \quad k = 2, \ldots 6 \end{aligned}\right\} \text{ für } q = 0,$$

Da nun die symmetrischen Functionen der $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ die Form (19a) haben sollen, so folgt daraus mit Bezug auf das unter (23) angegebene Verhalten von X_{10} und $X_{10}.\frac{1}{\xi}$ für dieselben drei Punkte:

$$-\Sigma x_{10}^{(i)} = c_1 = X_{10}.\frac{1}{\xi}.G_1(X_{10}^3),$$

$$+\Sigma\Sigma x_{10}^{(i)}x_{10}^{(k)} = c_2 = C.\left(X_{10}\ \frac{1}{\xi}\right)^2,$$

$$-\Sigma\Sigma\Sigma x_{10}^{(i)}x_{10}^{(k)}x_{10}^{(l)} = c_3 = C, \quad c_4 = C.X_{10}.\frac{1}{\xi}, \quad c_5 = C,$$

wobei G_1 eine ganze Function 1ten Grades andeuten soll.

Bilden wir ferner noch die particuläre Gleichung für $\omega = i\infty$ nämlich:

$$\left(x_{10}+\frac{1}{5}\right)(x_{10}-1)^5 = x_{10}^6 - \frac{24}{5}x_{10}^5 + 9x_{10}^4 - 8x_{10}^3 + 3x_{10}^2 - \ldots - \frac{1}{5} = 0,$$

so folgt für die allgemeine Gleichung folgender Ansatz mit einer unbestimmten Constanten:

$$x_{10}+X_{10}\frac{1}{\xi}\left(-\frac{16}{5}+AX_{10}^{3}\right)x_{10}^{5}+4\left(X_{10}\ \frac{1}{\xi}\right)^{2}x_{10}^{4}-8x_{10}^{3}$$
$$+2X_{10}.\frac{1}{\xi}x_{10}^{2}-\ldots-\frac{1}{5}=0.$$

Nach Bestimmung von A werden die vier simultanen Gleichungen:

$$x_{10}^{6}+X_{10}.\frac{1}{\xi}\left(-\frac{16}{5}+\frac{2}{5}X_{10}^{3}\right)x_{10}^{5}+4\left(X_{10}.\frac{1}{\xi}\right)^{2}x_{10}^{4}-8x_{10}^{3}$$
$$+2X_{10}\frac{1}{\xi}x_{10}^{2}-\ldots-\frac{1}{5}=0,$$

$$x_{01}^{6}-X_{01}.\frac{\xi-1}{\xi+2}\left(-\frac{16}{5}+\frac{2}{5}X_{01}^{3}\right)x_{01}^{5}+4\left(X_{01}\frac{\xi-1}{\xi+2}\right)^{2}x_{01}^{4}+8x_{01}$$
$$+2X_{01}\frac{\xi-1}{\xi+2}x_{01}^{2}-\ldots-\frac{1}{5}=0,$$

$$x_{11}^{6}+X_{12}.\frac{\varepsilon^{2}\xi-1}{\varepsilon^{2}\xi+2}\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}}\left(-\frac{16}{5}+\frac{2}{5}X_{12}^{3}\right)x_{11}^{5}+4\left(X_{12}.\frac{\varepsilon^{2}\xi-1}{\varepsilon^{2}\xi+2}.\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{12}}\right)^{2}x_{11}^{4}$$
$$-8\left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}}\right)^{3}x_{11}^{3}+2X_{12}\frac{\varepsilon^{2}\xi-1}{\varepsilon^{2}\xi+2}.\left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}}\right)^{4}x_{11}^{2}-\ldots-\frac{1}{5}\left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}}\right)^{6}=0,$$

$$x_{12}^{6}+X_{11}.\frac{\varepsilon\xi-1}{\varepsilon\xi+2}.\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{12}}\left(-\frac{16}{5}+\frac{2}{5}X_{11}^{3}\right)x_{12}^{5}+4\left(X_{11}.\frac{\varepsilon\xi-1}{\varepsilon\xi+2}\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{12}}\right)^{2}x_{12}^{4}$$
$$-8\left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{12}}\right)^{3}x_{12}^{3}+2X_{11}\frac{\varepsilon\xi-1}{\varepsilon\xi+2}\left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{12}}\right)^{4}x_{12}^{2}-\ldots-\frac{1}{5}\left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{12}}\right)^{6}=0.$$

$$n=7.$$

Der allgemeine Ansatz hat 5 zunächst unbestimmte Constanten, lautet nämlich z. B. für x_{10}:

$$(x_{10}-\tfrac{1}{7})(x_{10}-1)^{7}+X_{10}^{3}(A+BX_{10}^{3})x_{10}^{7}+X_{10}^{3}(Cx_{10}^{2}+Dx_{10}+E)x_{10}^{4}=0.$$

Nach Bestimmung von A, B, C, D, E sind die simultanen Gleichungen:

$$\left(x_{01}-\frac{1}{7}\right)(x_{01}-1)^{7}+\frac{1}{7}X_{01}^{3}(25-X_{01}^{3})x_{01}^{7}+X_{01}^{3}(2x_{01}^{2}-4x_{01}+1)x_{01}^{4}=0,$$

$$\left(x_{10}-\frac{1}{7}\right)(x_{10}-1)^{2}+\frac{1}{7}X_{10}^{3}(25-X_{10}^{3})x_{10}^{7}+X_{10}^{3}(2x_{10}^{2}-4x_{10}+1)x_{10}^{4}=0,$$

$$\left(x_{11}-\frac{\varepsilon}{7}\right)(x_{11}-\varepsilon)^7+\frac{\varepsilon}{7}X_{11}^3(25-X_{11}^3)x_{11}^7+\varepsilon^2X_{10}^3(2x_{10}^2-4\varepsilon x_{11}+\varepsilon^2)x_{11}^4=0,$$

$$\left(x_{12}-\frac{\varepsilon^2}{7}\right)(x_{12}-\varepsilon^2)^7+\frac{\varepsilon^2}{7}.X_{12}^3(25-X_{12}^3)x_{11}^7+\varepsilon.X_{12}^3(2x_{10}^2-4\varepsilon^2x_{12}+\varepsilon)x_{12}^4=0.$$

Drittes Capitel: $s=4$.

§ 1. *Zusammenhang der $\sigma_{\lambda\mu}$ mit der Oktaeder-Irrationalität.*

Betreffs des Verhaltens der $\sigma_{\lambda\mu}$ bei linearer Substitution der Perioden zunächst gilt hier folgendes:

a) Bei beliebigen linearen Substitutionen von ω_1, ω_2 permutiren sich die $\sigma_{\lambda\mu}$ bis auf vortretende 8te Einheitswurzeln und aus irgend einem der sechs verschiedenen $\sigma_{\lambda\mu}$ lassen sich daher durch lineare Substitution der Perioden sämtliche sechs $\sigma_{\lambda\mu}$ und nur diese ableiten.

Dies geht auch aus dem Verhalten der $\sigma_{\lambda\mu}$ bei Ausübung von S und T hervor; legen wir als die sechs verschiedenen $\sigma_{\lambda\mu}$

$$\sigma_{01},\ \sigma_{10},\ \sigma_{11},\ \sigma_{12},\ \sigma_{13},\ \sigma_{21}$$

zu Grunde, so lautet die betreffende Tabelle so:

		σ_{01}	σ_{10}	σ_{11}	σ_{12}	σ_{13}	σ_{21}
(1)	S)	$+\sigma_{11}$	$+\sigma_{10}$	σ_{21}	$e^{\frac{7i\pi}{4}}\sigma_{12}$	$e^{\frac{7i\pi}{4}}\sigma_{01}$	$e^{\frac{7i\pi}{4}}$
	T)	$+\sigma_{10}$	$-\sigma_{01}$	$e^{\frac{5i\pi}{4}}\sigma_{13}$	$e^{\frac{7i\pi}{4}}\sigma_{21}$	$e^{\frac{7i\pi}{4}}\sigma_{11}$	$e^{\frac{5i\pi}{4}}\sigma_{12}$.

b) In Bezug auf das Verhalten bei linearen Substitutionen der Perioden ω_1, ω_2, welche mod 2 zur Identität congruent sind, teilen sich die sechs $\sigma_{\lambda\mu}$ in drei Gruppen zu je zwei: σ_{01} und σ_{21}, σ_{10} und σ_{12}, σ_{11} und σ_{13}. Das Verhalten bei den Erzeugenden S^2 und TS^2T dieser Untergruppe ist nämlich folgendes:

		σ_{01}	σ_{10}	σ_{11}	σ_{12}	σ_{13}	σ_{21}
	S^2)	$+\sigma_{21}$	$+\sigma_{10}$	$e^{\frac{3i\pi}{2}}\sigma_{13}$	$e^{\frac{3i\pi}{2}}\sigma_{12}$	$e^{\frac{7i\pi}{4}}\sigma_{11}$	$e^{\frac{5i\pi}{4}}\sigma_{01}$
(2)	TS^2T)	$-\sigma_{01}$	$e^{\frac{i\pi}{4}}\sigma_{12}$	$e^{\frac{i\pi}{4}}\sigma_{13}$	$-\sigma_{10}$	$-\sigma_{11}$	$e^{\frac{i\pi}{2}}\sigma_{21}$.

Daher bleiben die drei Producte $\sigma_{01}\cdot\sigma_{21}$, $\sigma_{10}\cdot\sigma_{12}$, $\sigma_{11}\cdot\sigma_{13}$ bei Substitution der genannten Untergruppe bis auf vortretende 8te Einheitswurzeln ungeändert.

c) Bei linearen Substitutionen von ω_1, ω_2, welche mod 4 zur Identität congruent sind, ändert sich jedes $\sigma_{\lambda\mu}$ im allgemeinen um eine 8te Einheitswurzel, d. h. die $\sigma_{\lambda\mu}$ sind der vierten Stufe adjungirt.

d) Bei linearen Substitutionen von ω_1, ω_2, welche mod 8 zur Identität congruent sind, ändert sich jedes $\sigma_{\lambda\mu}$ im allgemeinen um eine 4te Einheitswurzel.

e) Bei linearen Substitutionen von ω_1, ω_2, welche mod 16 zur Identität congruent sind, ändert sich jedes $\sigma_{\lambda\mu}$ im allgemeinen um eine 2te Einheitswurzel.

f) Bei linearen Substitutionen von ω_1, ω_2, welche mod 32 zur Identität congruent sind, bleibt jedes $\sigma_{\lambda\mu}$ ungeändert, d. h. die $\sigma_{\lambda\mu}$ sind von der 32ten Stufe.

g) Die Substitutions-Coefficienten von linearen Substitutionen der Perioden ω_1, ω_2, welche auf ein $\sigma_{\lambda\mu}$ ausgeübt werden, dürfen beliebig mod 32 modificirt werden.

Auf Grund von b) können wir zunächst die $\sigma_{\lambda\mu}$ zu k^2 in Beziehung setzen. Nämlich die 8te Potenz jedes der beiden Quotienten aus den drei oben genannten Producten ist eine Modulfunction 2ter Stufe; es ist also etwa:

$$\left(\frac{\sigma_{01}\,\sigma_{21}}{\sigma_{15}\,\sigma_{12}}\right)^8 = R(k^2).$$

Um die rationale Function von k^2 auszuwerten, beachten wir, dass in erster Annäherung

(3) für $\omega = i\infty$ $\qquad \sigma_{01} = -\frac{i\omega_1}{2\pi}\cdot q^{-3/16}$,

$$\sigma_{10} = +\frac{i\omega_1}{2\pi}\left(e^{\frac{i\pi}{4}} - e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)$$

$$\sigma_{11} = -\frac{i\omega_1}{2\pi}\, e^{-\frac{3i\pi}{16}}\, q^{-\frac{3}{16}}$$

$$\sigma_{12} = -\frac{i\omega_1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{i\pi}{8}} \cdot q^{-1/4}$$

$$\sigma_{13} = -\frac{i\omega_1}{2\pi} \cdot e^{\frac{31i\pi}{16}} \cdot q^{-3/16}$$

$$\sigma_{21} = -\frac{i\omega_1}{2\pi} \cdot e^{\frac{13i\pi}{8}} \cdot q^{-3/16}$$

also

$$\left(\frac{\sigma_{01} \cdot \sigma_{21}}{\sigma_{10} \cdot \sigma_{12}}\right)^8 = +\frac{1}{2^4} \cdot q^{-1} \quad \text{ist.}$$

Die Combination der Tabellen (1) und (3) ermöglicht es, die Werte der $\sigma_{\lambda\mu}$ für $\omega = 0$ und $\omega = 1$ anzugeben und auf Grund dessen findet man

$$\text{für } \omega = 0) \quad \left(\frac{\sigma_{01} \cdot \sigma_{21}}{\sigma_{10} \cdot \sigma_{12}}\right)^8 = +2^4 \cdot q,$$

sodass der Ausdruck in der 3ten Ecke $\omega = 1$ des Fundamental-Polygons 2ter Stufe endlich und von null verschieden sein muss. Damit gewinnen wir den Ansatz:

$$\left(\frac{\sigma_{01} \cdot \sigma_{21}}{\sigma_{10} \cdot \sigma_{12}}\right)^8 = C \cdot \frac{k^2 - 1}{k^2},$$

wofür durch Vergleich der beiderseitigen Reihen-Entwickelungen $C = -1$ folgt. Aus

$$\left(\frac{\sigma_{01} \cdot \sigma_{21}}{\sigma_{10} \cdot \sigma_{12}}\right)^8 = \frac{1 - k^2}{k^2}$$

folgt durch Ausführung der Operation S:

$$\left(\frac{\sigma_{11}\ \sigma_{13}}{\sigma_{10} \cdot \sigma_{12}}\right)^8 = -\frac{1}{k^2},$$

sodass die gewünschte Formelgruppe definitiv lautet:

(4) $$(\sigma_{01}\sigma_{21})^8 : (\sigma_{10}\sigma_{12})^8 : (\sigma_{11}\sigma_{13})^8 = (1 - k^2) : k^2 : -1.$$

Weiter können wir nach c) die $\sigma_{\lambda\mu}$ mit dem Hauptmodul für die 4te Stufe, mit der Octaeder-Irrationalität in Verbindung setzen. Wir legen als solche zu Grunde:

(5) $$o = q^{\frac{\sum_{-\infty}^{+\infty} 2k^2+2k}{\sum_{-\infty}^{+\infty} 2k^2}}$$ [1])

Sie zeigt bei Ausführung der linearen Substitutionen S und T der Perioden folgendes Verhalten:

(5b)

	S	T
0	$+i.o$	$\frac{1-o}{1+o}$

24 mod 4 incongruente lineare Substitutionen von ω sind gegeben durch

(6) S^k, TS^k, STS^k, S^2TS_k, S^3TS^k, TS^2TS^k, $k = 0, 1, 2, 3$

und die ihnen entsprechenden Octaeder-Substitutionen sind nach (5b)

(6b) $i^k.o$, $i^k.\frac{1-o}{1+o}$, $i^k.\frac{1-io}{1+io}$, $i^k.\frac{1+o}{1-o}$, $i^k.\frac{1+io}{1-io}$, $i^k.\frac{1}{o}$.

Aus der Definition (5), §(5b) von o erhalten wir die Werte von o in den Ecken des Fundamental-Polygons 4ter Stufe, welche nach (6) bei geeigneter Wahl desselben $\omega = io$, 0, 1, 2, 3, $\frac{1}{2}$ sind. Dafür ist:

(7) $o(i\omega) = 0$, $o(0) = 1$, $o(+1) = +i$, $o(+2) = -1$,
$o(+3) = -i$, $o(+\frac{1}{2}) = \infty$.

Dies voransgeschickt liefert c) den Ansatz:

$$\frac{\sigma_{\lambda\mu}{}^8}{\sigma_{\lambda'\mu'}{}^8} = R(o).$$

Es genügt, irgend einen dieser Quotienten zu behandeln; als solchen greifen wir $\frac{\sigma_{01}{}^8}{\sigma_{10}{}^8}$ heraus. Dieser Quotient verhält sich nach (1) in 6 Ecken des Fundamental-Polygons folgendermassen:

$o = 0)$ $\qquad \sigma_{01} : \sigma_{10}{}^8 = +\frac{1}{16} \cdot q^{-3/2}$

$o = 1)$ $\qquad = +16 . q^{3/2}$

---

1) Man vergleiche Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder, Leipzig 1884 pag. 132.

$$o = +i) \qquad \sigma_{01}^8 : \sigma_{10}^8 = -i$$

$$o = -1) \qquad = -q^{-1/2}$$

$$o = -i) \qquad = +i$$

$$o = \infty) \qquad = -q^{1/2}$$

bez. in erster Annäherung und an $q = 0$ gemessen. Dies Verhalten führt zu den Ansatz:

$$\sigma_{01}^8 : \sigma_{10}^8 = C \cdot \frac{(o-1)^3}{o^2(o+1)},$$

wofür sich, da für $\omega = i\infty$ in erster Annäherung

$$O = 2q^{1/2} \text{ ist,}$$

$$C = -\tfrac{1}{2} \text{ ergibt.}$$

Durch successive Ausführung der Operationen S und T erhält man schliesslich als vollständige Formel-Serie:

(8) $\sigma_{01}^8 : \sigma_{10}^8 : \sigma_{11}^8 : \sigma_{12}^8 : \sigma_{13}^8 : \sigma_{21}^8$

$$= \frac{(1-O)^3}{1+O} : 2O^3 : +i \cdot \frac{(1-iO)^3}{1+iO} : -\frac{2}{O} : -i \cdot \frac{(1+iO)^3}{1-iO} : -\frac{(1+O)^3}{1-O}$$

Die Quotienten $\sigma_{\lambda\mu}^8 : \sigma_{\lambda'\mu'}^8$ sind also rationale Functionen vierten Grades von O.

Da für das Weitere die unter (6b) angegebenen linearen Substitutionen der Oktaeder-Irrationalität, die Oktaeder-Substitutionen, von fundamentaler Wichtigkeit sind, wollen wir nunmehr noch diese durch die $\sigma_{\lambda\mu}$ ausdrücken. Es geschieht dies jetzt einfach, wenn wir aus (8) etwa die Relation

$$O = \sqrt[4]{-1}\ \frac{\sigma_{10}^2}{\sigma_{12}^2}$$

entnehmen und darauf lineare Substitutionen in Anwendung bringen. Dies giebt nach eindeutiger Bestimmung von $\sqrt[4]{-1}$:

$$(9) \quad O = e^{\frac{3i\pi}{4}} \cdot \frac{\sigma_{10}^2}{\sigma_{12}^2}, \quad \frac{1-O}{1+O} = e^{\frac{5i\pi}{4}} \cdot \frac{\sigma_{01}^2}{\sigma_{21}^2}, \quad \frac{1-iO}{1+iO} = e^{\frac{i\pi}{4}} \cdot \frac{\sigma_{11}^2}{\sigma_{13}^2}.$$

§ 2. *Die $x_{\lambda\mu}^{(i)}$. Ihr Verhalten bei linearer Substitution der Perioden ω_1, ω_2. Die Transformationen der Gleichungen in sich.*

Wir nehmen nunmehr Transformation $n$ter Ordnung vor, wobei n als ungerade vorausgesetzt wird. Für das eine Repräsentanten-System:

$$\overline{\omega}_1^{(i)} = \alpha_i . \omega_1 + \beta_i . \omega_2, \quad \overline{\omega}_2^{(i)} = \frac{\gamma_i \omega_1 + \delta_i \omega_2}{n},$$

$$\alpha_i \delta_i - \beta_i \gamma_i = 1, \quad i = 1, 2, \ldots N$$

sind die linearen Substitutionen der Perioden $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i)$ mod 32 zur Identität congruent zu nehmen. Das andre Repräsentanten-System ist:

$$\frac{a_i \omega_1}{n}, \quad \frac{32 c_i \omega_1 + d_i \omega_2}{n}, \quad a_i d_i = n, \quad c_i < a_i.$$

Die lineare Substitution A_i, B_i, C_i, D_i anlangend, welche vom zweiten Repräsentantensystem zum ersten überführt, beachte man, dass

$$D_i = d_i^{-1} \equiv d_i \bmod 8.$$

Es ist daher entweder $(A_i, 0, 0, D_i)$ oder $(-A_i, 0, 0, -D_i)$ mod 4 zur Identität congruent und folglich:

$$(10) \quad x_{\lambda\mu}^{(i)} = \frac{\{\overline{\omega}_1^{(i)}, \overline{\omega}_2^{(i)}\}}{\sigma_{\lambda\mu}} = E_{\lambda\mu}^{(i)} \cdot \frac{\sigma_{\lambda\mu}\left\{\frac{a_i \omega_1}{n}, \frac{32 c_i \omega_1 + d_i \omega_2}{n}\right\}}{\sigma_{\lambda\mu}}.$$

Damit sind die $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ eindeutig definirt und die Reihen-Entwicklungen nach q vermittelt.

Wir studiren nunmehr ihr Verhalten bei linearer Substitution der Perioden ω_1, ω_2 und zwar wieder so, dass wir zunächst das Verhalten bei Ausübung von S und T bestimmen.

Es entpricht einerseits:

$P = S = U = (1,0,1,1 \equiv$	(1, 0, 1.1, 1) (mod 32)	$V \equiv$	(1,0,1, 1)
	(1, 0, 9.25, 1)		(1,0,25,1)
	(1, 0, 17.17, 1)		(1,0,17,1)
	(1, 0, 25.9, 1)		(1,0,9,1)

$$P=S=U=(1,0,1,1)\equiv \left|\begin{array}{l} (1,\ 0,\ 5.13,\ 1) \\ (1,\ 0,\ 13.5,\ 1) \\ (1,\ 0,\ 21.29,\ 1) \\ (1,\ 0,\ 29.21,\ 1) \\ \hline (1,\ 0,\ 3.11,\ 1) \\ (1,\ 0,\ 7.23,\ 1) \\ (1,\ 0,\ 11.3,\ 1) \\ (1,\ 0,\ 15.15,\ 1) \\ (1,\ 0,\ 19.27,\ 1) \\ (1,\ 0,\ 23.7,\ 1) \\ (1,\ 0,\ 27.19,\ 1) \\ (1,\ 0,\ 31.31,\ 1) \end{array}\right| \pmod{32} \quad V\equiv \left|\begin{array}{l} (1,0,13,1) \\ (1,0,5,1) \\ (1,0,29,1) \\ (1,0,21,1) \\ \\ (1,0,11,1) \\ (1,0,23,1) \\ (1,0,3,1) \\ (1,0,15,1) \\ (1,0,27,1) \\ (1,0,7,1) \\ (1,0,19,1) \\ (1,0,31,1) \end{array}\right|$$

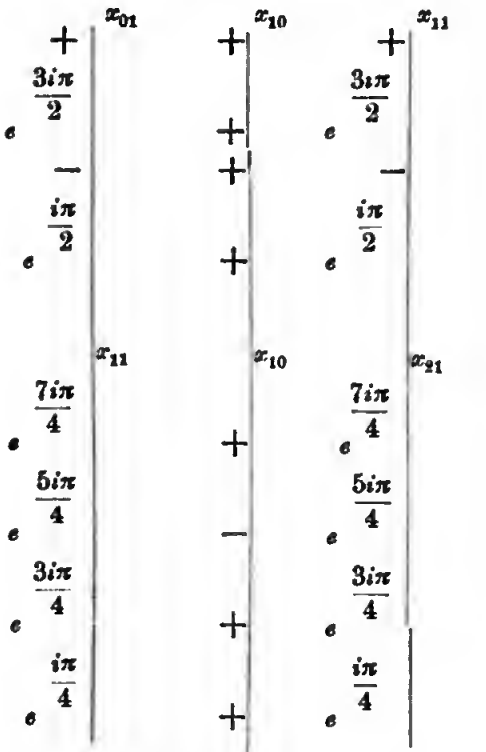
wenn successiv die Fälle $n \equiv 1,\ 9,\ 17,\ 25;\ 5,\ 13,\ 21,\ 29;\ 3,\ 7,\ 11,\ 15,\ 19,\ 23,\ 27,\ 31 \bmod 32$ unterschieden werden, wie dies im folgenden immer geschieht.

Andrerseits entspricht in analoger Weise:

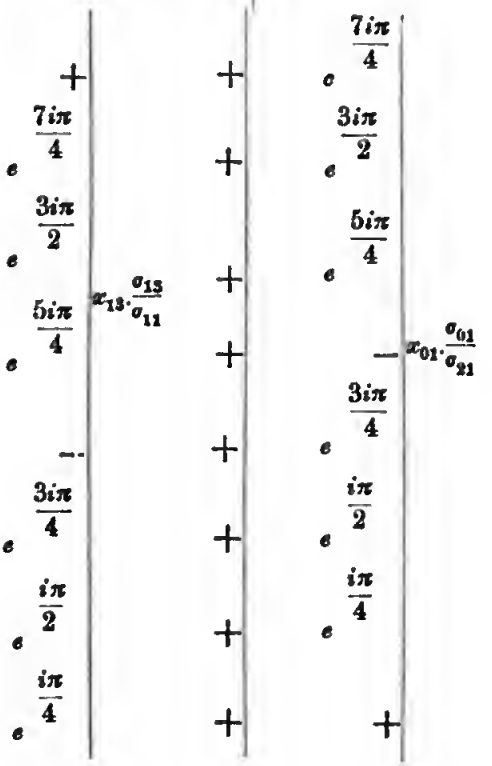
$$P=T=U=(0,-1,+1,0)\equiv \left|\begin{array}{l} (0,-1,1.1,0) \\ (0,-1,9.25,0) \\ (0,-1,17.17,0) \\ (0,-1,25,9,0) \\ \hline (0,-1,5.13,0) \\ (0,-1,13.5,0) \\ (0,-1,21.29,0) \\ (0,-1,29.21,0) \\ \hline (0,-1,3.11,0) \\ (0,-1,7.23,0) \\ (0,-1,11.3,0) \\ (0,-1,15.15,0) \\ (0,-1,19.27,0) \\ (0,-1,23.7,0) \\ (0,-1,27.19,0) \\ (0,-1,31.31,0) \end{array}\right| \pmod{32} \quad V\equiv \left|\begin{array}{l} (0,-1,1,0) \\ (0,-9,25,0) \\ (0,-17,17,0) \\ (0,-25,9,0) \\ \\ (0,-5,13,0) \\ (0,-13,5,0) \\ (0,-21,29,0) \\ (0,-29,21,0) \\ \\ (0,-3,11,0) \\ (0,-7,23,0) \\ (0,-11,3,0) \\ (0,-15,15,0) \\ (0,-19,27,0) \\ (0,-23,7,0) \\ (0,-27,19,0) \\ (0,-31,31,0) \end{array}\right|$$

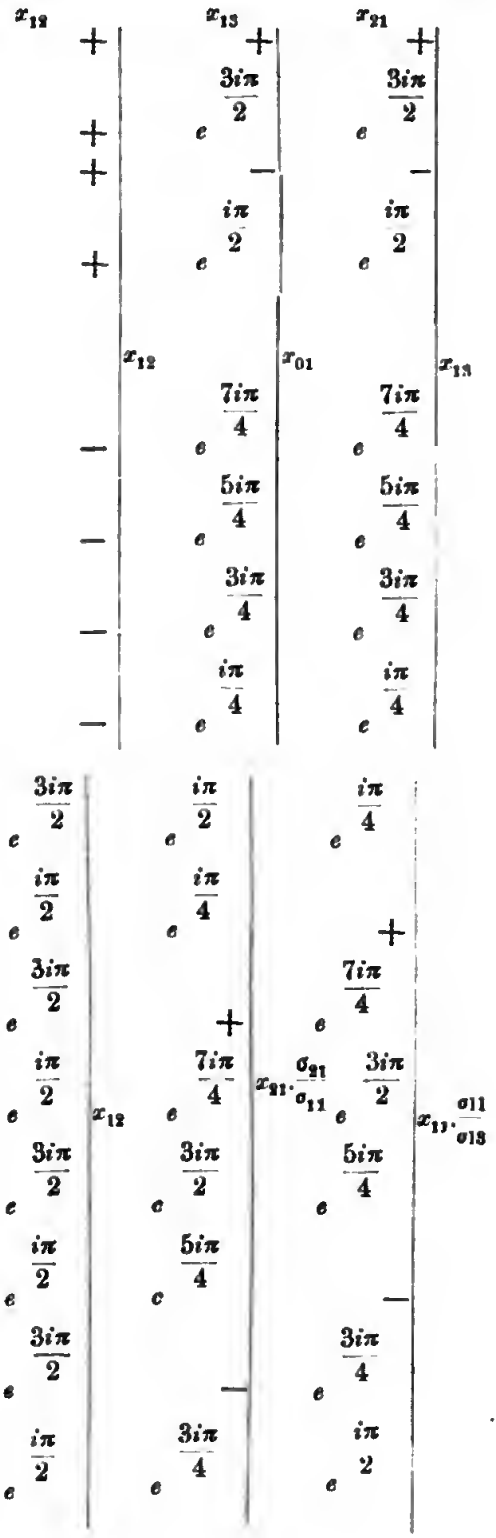
Man findet damit folgende Resultate:

(8

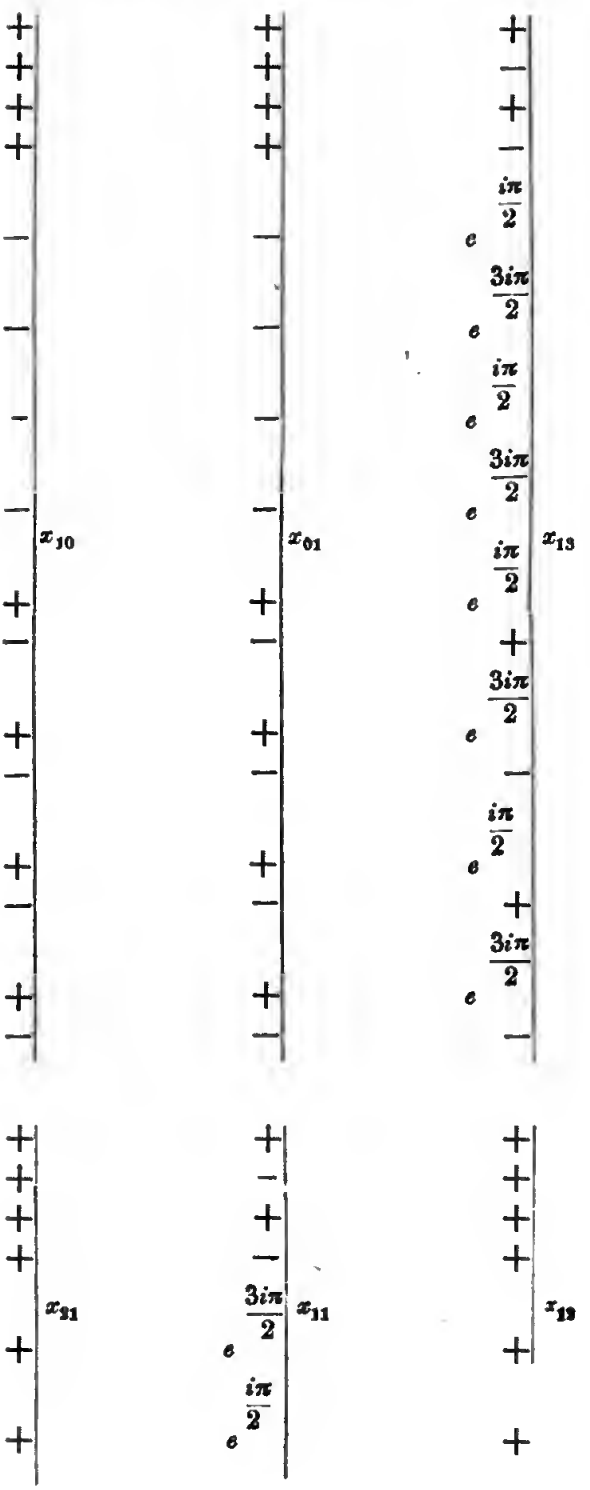

x_{01}
x_{10}
x_{11}
$\frac{3i\pi}{2}$
$\frac{i\pi}{2}$
x_{11}
x_{10}
x_{21}
$\frac{7i\pi}{4}$
$\frac{5i\pi}{4}$
$\frac{3i\pi}{4}$
$\frac{i\pi}{4}$

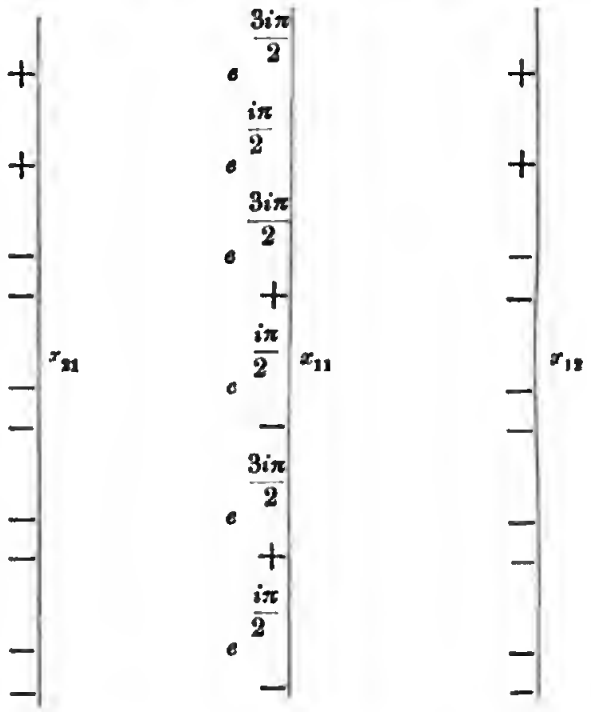
(11)


$\frac{7i\pi}{4}$
$\frac{3i\pi}{2}$
$\frac{5i\pi}{4}$
$x_{13}\cdot\frac{\sigma_{13}}{\sigma_{11}}$
$x_{01}\cdot\frac{\sigma_{01}}{\sigma_{21}}$
$\frac{3i\pi}{4}$
$\frac{i\pi}{2}$
$\frac{i\pi}{4}$


x_{12} x_{13} x_{21}
x_{12} x_{01} x_{13}
x_{12}
$x_{21} \cdot \frac{\sigma_{21}}{\sigma_{11}}$
$x_{13} \cdot \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{13}}$

T)





Um weiterhin Weitläufigkeiten zu vermeiden, wollen wir unsere Entwicklungen wieder auf irgend eine der sechs simultanen Gleichungen beschränken. Durch Ausführung linearer Substitutionen der Perioden können wir dann die für eine Gleichung gewonnenen Resultate auf die fünf andern übertragen. Der Tabelle (11) gemäss wird es am einfachsten sein, die Gleichung für x_{10} zu Grunde zu legen.

Für diese Gleichung können wir zunächst unmittelbar die vier Transformationen in sich angeben; (11) zeigt nämlich: Die Gleichung für x_{10} bleibt (unter Ausschluss der identischen Operation) ungeändert, wenn man in derselben die linearen Substitutionen S, S^2, S^3 der Perioden ω_1, ω_2 vornimmt.

Betreffs der Beschaffenheit der Multiplicator-Gleichungen für die $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ ergiebt die Specialisirung der allgemeinen Resultate auf den vorliegenden Fall im allgemeinen dies: Je N Grössen $x_{\lambda\mu}^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots N$, genügen einer Gleichung Nten Grades, deren Coefficienten der vierten Stufe in Bezug auf vierte Einheitswurzeln adjungirt sind.

Daneben treten folgende Specificationen:

a) Ist $n \equiv 1 \bmod 8$, so sind sämtliche Coefficienten von der 4ten Stufe.

b) Ist $n \equiv 1$ nur mod 4, so sind die Coefficienten abwechselnd von der 4ten Stufe und der 4ten Stufe in Bezug auf 2te Einheitswurzeln adjungirt, und zwar ist das eine oder andre der Fall, je nachdem die betreffende homogene symmetrische Function der Wurzeln von geradem oder ungeradem Grade ist.

c) Ist $n \equiv 1$ nur mod 2, so sind die Coefficienten 1) von der 4ten Stufe, 2) der vierten Stufe in Bezug auf 2te Einheitswurzeln adjungirt, 3) der 4ten Stufe in Bezug auf 4te Einheitswurzeln adjungirt, je nachdem der Grad der betreffenden homogenen symmetrischen Function der Wurzeln 1) durch 4, 2) durch 2 teilbar, 3) ungerade ist.

§. 3. *Werte der Wurzeln $x_{10}^{(\omega)}$ in den Ecken des Fundamental-Polygons.*

Man findet für die Ecken des Fundamental-Polygons folgende Werte der Wurzeln $x_{10}^{(\omega)}$ (bez. in 1ter Annäherung):

$$(12)\qquad \begin{cases} \omega = i\infty) & E_{10}^{(\omega)} \cdot \dfrac{1}{d_i} \\ \omega = 0) \\ \omega = 1) \\ \omega = 2) \\ \omega = 3) & A_{iq}\, q^{-\frac{3}{16}\left(\frac{d_i}{a_i}-1\right)} \\ \omega = \tfrac{1}{2}) & B_{iq}\, q^{-\frac{1}{4}\left(\frac{d_i}{a_i}-1\right)} \end{cases}$$

unter A_i, B_i gewisse, leicht zu bestimmende Constanten verstanden, welche nur abkürzend eingeführt sind, um die vielfachen Fallunterscheidungen zu umgehen. Ueberdies benötigen wir die expliciten Werte von A_i, B_i im folgenden nicht. Wir entnehmen diesen Angaben (12) folgendes:

1) In der Ecke $\omega = i\infty$ des Fundamental-Polygons sind sämtliche N Wurzeln $x_{10}^{(\omega)}$ endlich und von null verschieden.

2) In den fünf andern Ecken des Fundamental-Polygons sind diese N Wurzeln $x_{10}^{(i)}$ stets zu einem Teil null und zu einem Teil unendlich (ausserdem, wenn n eine Quadrat-Zahl ist, noch zu einem Teil endlich und von null verschieden).

3) In der Ecke $\omega = +\frac{1}{2}$ werden die Wurzeln, an $q = 0$ gemessen, in anderer Ordnung null und unendlich, als in den vier Ecken $\omega = 0, 1, 2, 3$, in denen die Werte der Wurzeln je übereinstimmen.

Die in (12) gefundenen Null- und Unendlichkeitspunkte der Wurzeln $x_{10}^{(i)}$ sind die einzigen im Fundamental-Polygon 4ter Stufe.

§ 4. *Form der Coefficienten. Aufstellung der Gleichungen.*

Betreffs der Form der Coefficienten unserer Multiplicator-Gleichungen für die $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ haben wir die allgemeine Betrachtung von pag. 16. etc. auf Congruenz-Moduln 16ter Stufe $\psi(\omega)$ in Anwendung zu bringen, welche in Bezug auf vierte Einheitswurzeln der vierten Stufe adjungirt sind.

Wir setzen an:

$$[\psi(\omega)]^4 = R(o)$$

und leiten daraus ab, da $\psi(\omega)$ als eindeutige Function von ω nur in $o = 0, i^k, \infty$ verzweigt sein kann:

$$\psi(\omega) = (\sqrt[4]{o})^{\alpha}.(\sqrt[4]{o-1})^{\beta}.(\sqrt[4]{o-i})^{\gamma}.(\sqrt[4]{o+1})^{\delta}.(\sqrt[4]{o+i})^{\varepsilon}.R(o)$$

unter α, β, γ, δ, ε ganze Zahlen verstanden. Nun sind aber $\sqrt[4]{o}$, $\sqrt[4]{o-i^k}$ keine Congruenz-Moduln 16ter Stufe, sondern erst gewisse Producte und Quotienten dieser fünf Grössen sind Congruenz-Moduln 16ter Stufe, welche der vierten Stufe in Bezug auf vierte Einheitswurzeln adjungirt sind. Diese Producte und Quotienten aus $\sqrt[4]{o}$, $\sqrt[4]{o-i^k}$ müssen sich rational durch die $o_{\lambda\mu}$ ausdrücken, weil dieselben ein volles Formensystem für die 16te Stufe überhaupt sind. Um daher die sämtlichen Verbindungen von $\sqrt[4]{o}$ und $\sqrt[4]{o-i^k}$ zu Producten und Quotienten, welche Congruenz-Moduln 16ter Stufe sind, ausfindig zu machen, können wir fragen, welche Producte und Quotienten von o und $(o-i^k)$ sich als 4te Potenzen rationaler Functionen der $o_{\lambda\mu}$ ausdrücken. Oder wir können umgekehrt und unter Bezug auf (8), welches die sämtlichen Producte und Quotienten von o und $(o-i^k)$ als Producte und Quotienten der Grössen $o_{\lambda\mu}^8$ darstellt, fragen:

Welche Producte und Quotienten der sechs Grössen $\sigma\lambda\mu^8$ sind 2te Potenzen von Producten und Quotienten der fünf Grössen o und $(o-i^2)$? Diese Frage lässt sich nun auf Grund der Formel-Gruppe (8) leicht beantworten.

Von Producten und Quotienten der sechs Grössen $\sigma\lambda\mu^8$, welche 2te Potenzen von Producten und Quotienten der fünf Grössen o, $(o-i^2)$ sind, existiren nämlich nach (8) nur die durch folgende Relationen gegebenen:

$$(13) \qquad (\sigma_{01}\sigma_{21})^8 : (\sigma_{10}\sigma_{12})^8 : (\sigma_{11}\sigma_{13})^8$$
$$= -[(1+o)(1-o)]^2 : -4o^2 : +[(1+io)(1-io)]^2.$$

Daher sind von den Producten und Quotienten von $\sqrt[4]{o}$ und $\sqrt[4]{o-i^2}$ nur die beiden Ausdrücke

$$\sqrt[4]{\frac{o}{(1+o)(1-o)}} \quad \text{und} \quad \sqrt[4]{\frac{o}{(1+io)(1-io)}}$$

(abgesehen von deren Product, Quotienten und ganzzahligen Potenzen) der 4ten Stufe in Bezug auf 4te Einheitswurzeln adjungirt. Die geradzahligen Potenzen dieser 2 Grössen sind der 4ten Stufe nur in Bezug auf 2te Einheitswurzeln adjungirt.

In dem der vierten Stufe in Bezug auf 4te Einheitswurzeln adjungirten Factor:

$$(\sqrt[4]{o})^\alpha . (\sqrt[4]{o-1})^\beta . (\sqrt[4]{o-i})^\gamma . (\sqrt[4]{o+1})^\delta . (\sqrt[4]{o+i})^\varepsilon$$

in der Darstellung von $\psi(\omega)$ sind nun aber weiter ausser den durch das Vorhergehende indicirten Factoren:

$$\left(\sqrt[4]{\frac{o}{(1+o)(1-o)}}\right)^a \cdot \left(\sqrt{\frac{o}{(1+io)(1-io)}}\right)^b$$

auch solche Producte und Quotienten von $\sqrt{o}$ und $\sqrt{o-i^2}$ zulässig, welche der 4ten Stufe nur in Bezug auf 2te Einheitswurzeln adjungirt sind. Wir haben daher noch zu bestimmen, welche andren Producte und Quotienten von $\sqrt{o}$ und $\sqrt{o-i^2}$ ausser

$$\sqrt{\frac{o}{(1+o)(1-o)}} \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{o}{(1+io)(1-io)}}$$

der 2ten Stufe in Bezug auf 2te Einheitswurzeln adjungirt sind. Dazu werden wir, dem Ideengange von pag. 72., folgend fragen, welche Producte und Quotienten der sechs Grössen $\sigma\lambda\mu$ vierte Po-

tenzen von Producten und Quotienten der fünf Grössen o und $(o-i^k)$ sind. Die Beantwortung dieser Frage erledigt sich ebenfalls leicht auf Grund von (8) und ist bereits durch (9) gegeben. Danach giebt es (ausser den beiden bereits genannten) nur folgende drei Moduln 8ter Stufe, welche der vierten Stufe in Bezug auf 2te Einheitswurzeln adjungirt sind:

$$\sqrt{o},\quad \sqrt{\frac{1-o}{1+o}},\quad \sqrt{\frac{1-io}{1+io}}$$

(von deren Product, Quotienten und ganzzahligen Potenzen abgesehen). Wir gewinnen daher als allgemeinste Darstellung eines Congruenz-Moduls der 16ten Stufe, der der vierten Stufe in Bezug auf 4te Einheitswurzeln adjungirt ist:

$$\psi(\omega) = \left(\sqrt[4]{\frac{o}{1-o^2}}\right)^a \cdot \left(\sqrt[4]{\frac{o}{1-o^2}}\right)^b \cdot (\sqrt{o})^c \cdot \left(\sqrt{\frac{1-o}{1+o}}\right)^d \cdot \left(\sqrt{\frac{1-io}{1+io}}\right)^e \cdot R(o),$$

worin wir a und b auf die Werte 0, 1, 2, 3 und c, d, e auf die Werte 0, 1 beschränken können, oder in einer für das Folgende zweckmässigeren Form:

$$(14)\quad \psi(\omega) = \left(\sqrt[4]{\frac{o}{1-o^2}}\right)^p \left(\sqrt[4]{\frac{o}{1+o^2}}\right)^q \left(\sqrt{\frac{o}{1-o^2}}\right)^u \left(\sqrt{\frac{o}{1+o^2}}\right)^v \cdot (\sqrt{o})^x \cdot \left(\sqrt{\frac{1-o}{1+o}}\right)^y \cdot \left(\sqrt{\frac{1-io}{1+io}}\right)^z \cdot R(o),$$

worin wir p, q, u, v, x, y, z auf die Werte 0 und 1 beschränken können und wollen.

Um diese Darstellung (14) vollkommen eindeutig zu machen, haben wir festzusetzen, wie die dabei auftretenden vierten und zweiten Wurzeln gezogen werden sollen. Wir greifen dazu zweckmässig auf (13) und (9) zurück und definiren:

$$(15)\quad \sqrt[4]{\frac{o}{1-o^2}} = e^{\frac{i\pi}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \cdot \frac{o_{10}\,o_{12}}{o_{01}\,o_{21}}$$

$$\sqrt[4]{\frac{o}{1+o^2}} = e^{\frac{3i\pi}{8}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \cdot \frac{o_{10}\,o_{12}}{o_{11}\,o_{13}}$$

(15)
$$\begin{array}{lll} \sqrt{o} = e^{\frac{3i\pi}{8}} \cdot \frac{\sigma_{10}}{\sigma_{12}} & & \\ \sqrt{\frac{1-o}{1+o}} = e^{\frac{13i\pi}{8}} \cdot \frac{\sigma_{01}}{\sigma_{21}} & & \\ \sqrt{\frac{1-io}{1+io}} = e^{\frac{i\pi}{8}} \cdot \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{13}} & & \end{array}$$

worin wir unter $\sqrt[4]{2}$ beide mal dieselbe 4te Wurzel und zwar die reelle positive verstehen. Im Anschluss an diese eindeutige Darstellung unserer zur 4ten Stufe adjungirten Moduln durch die $\sigma_{\lambda\mu}$ können wir das Verhalten derselben bei Ausübung von S und T angeben, und zwar ist dies folgendes:

$$\begin{array}{lll} \sqrt[4]{\frac{o}{1-o^2}} & e^{\frac{11i\pi}{8}} \cdot \sqrt[4]{\frac{o}{1+o^2}} & e^{\frac{3i\pi}{2}} \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{1-o^2}{o}} \\ \sqrt[4]{\frac{o}{1+b^2}} & e^{\frac{7i\pi}{8}} \cdot \sqrt[4]{\frac{o}{1-o^2}} & e^{\frac{7i\pi}{4}} \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{1-o^2}{1+o^2}} \end{array}$$

(16)
$$\begin{array}{lll} \sqrt{o} & e^{\frac{i\pi}{4}} \cdot \sqrt{o} & -\sqrt{\frac{1-o}{1+o}} \\ \sqrt{\frac{1-o}{1+o}} & -\sqrt{\frac{1-io}{1+io}} & -\sqrt{o} \\ \sqrt{\frac{1-io}{1+io}} & -\sqrt{\frac{1+o}{1-o}} & e^{\frac{7i\pi}{4}} \cdot \sqrt{\frac{1-io}{1+io}} \end{array}$$

Weiteren Aufschluss über die Form der Coefficienten unserer Gleichungen als durch (14) erhalten wir, wenn wir die Transformationen

der Gleichungen in sich heranziehen. Und zwar werden wir, um zunächst die Exponenten p und q der zur 4ten Stufe in Bezug auf 4te Einheitswurzeln adjungirten Modulu in (14) zu bestimmen, lineare Substitutionen der Perioden ω_1, ω_2 in Anwendung bringen, welche mod 8. zur Identität congruent sind. Nachdem p und q auf diese Weise bestimmt sind, werden wir durch Ausübung linearer Substitutionen der Perioden ω_1, ω_2, welche mod 4 zur Identität congruent sind, in analoger Weise die Exponenten u, v, x, y, z bestimmen. Diese Discussion verläuft ganz ähnlich wie die entsprechende Discussion im Falle $s = 3$, pag. 48. Man findet schliesslich für einen Coefficienten $\psi_{10^{(v)}}(\omega)$, welcher einer homogenen symmetrischen Function $v$ten Grades der Wurzeln $x_{10^{(i)}}$ entspricht, sofern man $\nu = \nu' + 4\nu''$ setzt und ν' auf die Werte 0, 1, 2, 3 beschränkt:

a) wenn $n \equiv 3 \bmod 8$ $\psi_{10^{(v)}}(\omega) = \left(\sqrt[4]{\frac{o^2}{1-o^4}} \cdot \sqrt{o}\right)^{4-\nu} \cdot R(o)$,

b) wenn $n \equiv 7 \bmod 8$ $\psi_{10^{(v)}}(\omega) = \left(\sqrt[4]{\frac{o^2}{1-o^4}} \cdot \sqrt{o}\right)^{\nu'} \cdot R(o)$.

Um nunmehr Aufschluss über die Form von $R(o)$ zu erhalten, benutzen wir die Transformationen der Gleichungen in sich, welche durch lineare Substitutionen der Perioden ω_2, ω_3 zu Wege kommen, die nicht mod 4 zur Identität congruent sind. Diese 3 linearen Substitutionen S, S^2, S^3 bringen folgende Aenderungen hervor:

(17)

	x_{10}	$\sqrt[4]{\frac{o^4}{1-o^4}}$	o
S)	x_{10}	$+i\sqrt[4]{\frac{o^4}{1-o^4}}$	$+io$
S^2)	x_{10}	$-\sqrt[4]{\frac{o^4}{1-o^4}}$	$-o$
S^3)	x_{10}	$-i\sqrt[4]{\frac{o^4}{1-o^4}}$	$-io$

Aus den früheren Angaben über die Oktaeder-Substitutionen geht hervor, dass $i^k . o$ die einzigen Oktaeder-Substitutionen sind, welche sich bei Ausübung von S um i ändern. Daher folgt aus (17):

(18) $\psi_{10^{(\nu)}}(\omega) = \left(\sqrt[4]{\frac{1}{1-o^4}}\right)^{\binom{4-\nu'}{\nu'}} \cdot R(o)$,

in welcher Formel sich die zweifache Fall-Unterscheidung im Anschluss an das Vorhergehende darauf bezieht, ob $n \equiv 3$ oder $n \equiv 7 \bmod 8$ ist.

An letzter Stelle achten wir auf die Null- und Unendlichkeitspunkte der Wurzeln, welche in (12) angegeben worden sind. Die Lage derselben lässt sich mit Bezugnahme auf die Oktaeder-Substitutionen so beschreiben: Die Wurzeln $x_{10}^{(\nu)}$ werden null und unendlich nur für unendlich grosses o. Daraus folgt, dass, wenn man die Gleichung für x_{10} so anschreibt, dass die höchste Potenz der Coefficienten 1 hat, einesteils

$$R(o^4) = G\left\{\frac{1-io}{1+io}, \frac{1-o}{1+o}, \frac{1+io}{1-io}, \frac{1+o}{1-o}, o\right\}$$

sein muss, unter G eine ganze Function der fünf Argumente verstanden, und dass andererseits das constante Glied der Gleichung unabhängig von o, also eine Constante ist, welche daher unmittelbar nach (12) angegeben werden kann. Soll nun diese ganze Function der fünf Argumente bei Vertauschung von o mit io ungeändert bleiben, so erfordert dies, dass sie eine ganze Function der beiden Argumente $\frac{1}{1-o^4}$ und $(1-o^4)$ ist. Die definitive Form der Coefficienten $\psi_{10}^{(\nu)}(\omega)$ ist daher, wenn wir abkürzend

$$X_{10} = \sqrt[4]{\frac{1}{1-o^4}} \quad \text{setzen,} \tag{19}$$

$$\psi_{10}^{(\nu)}(\omega) = X_{10}^{\binom{4-\nu'}{\nu'}} \cdot G\left(X_{10}^4, \frac{1}{X_{10}^4}\right) \tag{20}$$

Damit ist die allgemeine Discussion der Coefficienten der Gleichung für die $x_{10}^{(\nu)}$ zu ihrem Abschluss gebracht.

Durch Ausübung linearer Substitutionen von ω_1, ω_2 in der Gleichung für x_{10} erhält man successive die fünf andern simultanen Multiplicator-Gleichungen. Es mag genügen, die dabei auftretenden Argumente $X_{\lambda\mu}$ in den $o_{\lambda\mu}$ dargestellt anzugeben und ihr Verhalten bei Ausübung von S und T zusammenzustellen. Diese Darstellung der $X_{\lambda\mu}$ durch die $o_{\lambda\mu}$ vermittelt nämlich in bequemer Weise die Reihenentwickelungen der $X_{\lambda\mu}$.

(21)

		S	T
X_{01}	$= \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sigma_{01}\sigma_{21}^2}{\sigma_{10}\sigma_{11}\sigma_{12}\sigma_{13}}$	X_{11}	X_{10}
X_{10}	$= \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sigma_{10}\sigma_{12}^2}{\sigma_{01}\sigma_{11}\sigma_{13}\sigma_{21}}$	X_{10}	X_{01}
X_{11}	$= \frac{e^{\frac{5i\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sigma_{11}\sigma_{13}^2}{\sigma_{01}\sigma_{10}\sigma_{12}\sigma_{21}}$	$e^{\frac{3i\pi}{4}} X_{21}$	X_{13}
X_{12}	$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sigma_{12}\sigma_{10}}{\sigma_{01}\sigma_{11}\sigma_{13}\sigma_{20}}$	$e^{\frac{i\pi}{2}} X_{12}$	X_{21}
X_{13}	$= \frac{e^{\frac{7i\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sigma_{13}\sigma_{11}^2}{\sigma_{01}\sigma_{10}\sigma_{12}\sigma_{21}}$	X_{01}	X_{11}
X_{21}	$= \frac{e^{\frac{i\pi}{2}}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sigma_{21}\sigma_{01}}{\sigma_{10}\sigma_{11}\sigma_{12}\sigma_{13}}$	$e^{\frac{3i\pi}{4}} X_{13}$	X_{12}.

Für die Bestimmung des Grades der ganzen Function G in den beiden Argumenten $X_{\lambda\mu}^4$ und $\frac{1}{X_{\lambda\mu}^4}$, sowie für die Bestimmung der unbestimmten Constanten in der einzelnen Ansatz-Gleichung gelten dieselben Bemerkungen wie in den Fällen $s = 2, 3$.

§ 5. *Beispiele*: $n = 3, 5, 7$.

$n = 3$.

Man gewinnt mit Hilfe der particulären Gleichung für die Ecke $\omega = i\infty$ oder für $X_{10} = 1$:

$$\left(x_{10} - \frac{1}{3}\right)(x_{10} - 1)^3 = x_{10}^4 - \frac{10}{3}x_{10}^3 + 4x_{10}^2 - 2x_{10} + \frac{1}{3} = 0$$

folgenden Ansatz mit einer unbestimmten Constanten:

$$x_{10}^4 + X_{10}^3\left\{\left(-\frac{10}{3} + A\right) - A\frac{1}{X_{10}^4}\right\}x_{10}^3 + 4X_{10}^2 x_{10}^2 - 2X_{10}x_{10} + \tfrac{1}{3} = 0$$

Nach Bestimmung von A werden die sechs simultanen Gleichungen:

$$x_{01}^4 - \tfrac{2}{3}X_{01}^3\left(4+\frac{1}{X_{01}^4}\right)x_{01}^3 + 4X_{01}^4 x_{01}^2 - 2X_{01}x_{01} + \tfrac{1}{3} = 0,$$

$$x_{10}^4 - \tfrac{2}{3}X_{10}^3\left(4+\frac{1}{X_{10}^4}\right)x_{10}^3 + 4X_{10}^2 x_{10}^2 - 2X_{10}x_{10} + \tfrac{1}{3} = 0,$$

$$x_{11}^4 - \tfrac{2}{3}X_{13}^3\frac{\sigma_{13}}{\sigma_{11}}\left(4+\frac{1}{X_{13}^4}\right)x_{11}^3 + 4X_{13}^2\left(\frac{\sigma_{13}}{\sigma_{11}}\right)^2 x_{11}^2 - 2X_{13}\left(\frac{\sigma_{13}}{\sigma_{11}}\right)^3 x_{11} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{\sigma_{13}}{\sigma_{11}}\right)^4 = 0,$$

$$x_{12}^4 + \tfrac{2}{3}X_{12}^3\left(4-\frac{1}{X_{12}^4}\right)x_{12}^3 - 4X_{12}^2 x_{12}^2 + 2X_{12}x_1 : - \tfrac{1}{3} = 0,$$

$$x_{13}^4 - \tfrac{2}{3}X_{11}^3\cdot\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{13}}\left(4+\frac{1}{X_{11}^4}\right)x_{13}^3 + 4X_{11}^2\left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{13}}\right)^2 x_{13}^2 - 2X_{11}\left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{13}}\right)^3 x_{13} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{13}}\right)^4 = 0,$$

$$x_{21}^4 - \tfrac{2}{3}X_{21}^3\left(4-\frac{1}{X_{21}^4}\right)x_{21}^3 - 4X_{21}^2 x_{21}^2 - 2X_{21}x_{21} - \tfrac{1}{3} = 0,$$

$$n = 5.$$

Der Ansatz hat drei unbestimmte Constanten. Nach deren Bestimmung sind die sechs simultanen Gleichungen:

$$x_{01}^6 + \tfrac{4}{5}X_{01}^2\left(-11+16X_{01}^4+\frac{1}{X_{01}^4}\right)x_{01}^5 + (-7+16X_{01}^4)x_{01}^4 + 8X_{01}^2 x_{01}^3 + 3x_{01}^2 - \tfrac{1}{5} = 0,$$

$$x_{10}^6 - \tfrac{4}{5}X_{10}^2\left(-11+16X_{10}^4+\frac{1}{X_{10}^4}\right)x_{10}^5 + (-7+16X_{10}^4)x_{10}^4 - 8X_{10}^2 x_{10}^3 + 3x_{10}^2 - \tfrac{1}{5} = 0,$$

$$x_{11}^6 + e^{\frac{i\pi}{4}}\tfrac{4}{5}X_{11}^2\left(-11+16X_{11}^4+\frac{1}{X_{11}^4}\right)x_{11}^5 + e^{\frac{i\pi}{2}}(-7+16X_{11}^4)x_{11}^4 + e^{\frac{3i\pi}{4}}\cdot 8X_{11}^2 x_{11}^3 - 3x_{11}^2 + e^{\frac{i\pi}{2}}\cdot\tfrac{1}{5} = 0,$$

$$x_{12}^6 - \tfrac{4}{5}X_{12}^2\left(11+16X_{12}^4+\frac{1}{X_{12}^4}\right)x_{12}^5 + (7+16X_{12}^4)x_{12}^4 - 8X_{12}^2 x_{12}^3 + 3x_{12}^2 + \tfrac{1}{5} = 0,$$

$$x_{13}^6 + e^{\frac{7i\pi}{4}} \tfrac{1}{5} X_{13}^2 \left(-11 + 16 X_{13}^4 + \frac{1}{X_{13}^4}\right) x_{13}^5 + e^{\frac{3i\pi}{2}} (-7 + 16 X_{13}^4) x_{13}^4$$
$$+ e^{\frac{5i\pi}{4}} .8 X_{13}^2 x_{13}^3 - 3 x_{13}^2 + e^{\frac{3i\pi}{2}} .\tfrac{1}{5} = 0,$$

$$x_{21}^6 - \tfrac{1}{5} X_{21}^2 \left(11 + 16 X_{21}^4 + \frac{1}{X_{21}^4}\right) x_{21}^5 + (7 + 16 X_{21}^4) x_{21}^4$$
$$- 8 X_{21}^2 x_{21}^3 + 3 x_{21}^2 + \tfrac{1}{5} = 0.$$

$$n = 7.$$

Der Ansatz lautet:

$$x_{10}^8 - X_{10} \left\{\left(\frac{48}{7} - A - B - C\right) + A X_{10}^4 + B X_{10}^8 + C \frac{1}{X_{10}^4}\right\} x_{10}^7$$
$$+ X_{10}^2 \left\{(20 - D - E) + D X_{10}^4 + E \frac{1}{X_{10}^4}\right\} x_{10}^6$$
$$- X_{10}^3 \left\{(32 - F) + F \cdot \frac{1}{X_{10}^4}\right\} x_{10}^5 - \{(30 - G) + G X_{10}^4\} x_{10}^4$$
$$- 16 X_{10} x_{10}^3 + 4 X_{10}^2 x_{10}^2 - \tfrac{1}{7} = 0,$$

hat also 7 zunächst unbestimmte Constanten. Wir begnügen uns damit, in diesem complicirteren Beispiele nur eine der sechs simultanen Gleichungen, diejenige für x_{10}, explicite anzugeben. Dieselbe lautet:

$$x_{10}^8 - X_{10} \left(\frac{72}{7} - \frac{544}{7} X_{10}^4 + \frac{512}{7} X_{10}^8 + \frac{8}{7} \frac{1}{X_{10}^4}\right) x_{10}^7$$
$$+ X_{10}^2 \left(-56 + 64 X_{10}^4 + 12 . \frac{1}{X_{10}^4}\right) x_{10}^6$$
$$- X_{10}^3 \left(-8 + 40 . \frac{1}{X_{10}^4}\right) x_{10}^5 + (46 - 16 X_{10}^4) x_{10}^4 - 16 X_{10} x_{10}^3$$
$$+ 4 X_{10}^2 x_{10}^2 - \tfrac{1}{7} = 0.$$

Schlussbemerkungen über den Zusammenhang der zu $s = 5$ gehörigen $\sigma_{\lambda\mu}$ mit der Ikosaeder-Irrationalität.

Wir wollen zum Schluss noch die fünften Teilwerte der σ-Function mit der Ikosaeder-Irrationalität in Verbindung bringen, um damit wenigstens die Grundlage zu liefern für die Discussion der Multiplicator-Gleichungen 5 ter Stufe für die Teilwerte der σ-Function.

Die $\sigma_{\lambda\mu}$ zeigen für $s = 5$ folgendes Verhalten:

a) Bei beliebigen linearen Substitutionen von ω_1, ω_2 permutiren sich die $\sigma_{\lambda\mu}$ bis auf vortretende 10te Einheitswurzeln und aus irgend einem der 12 verschiedenen $\sigma_{\lambda\mu}$ lassen sich daher durch lineare Substitution der Perioden sämtliche zwölf $\sigma_{\lambda\mu}$ und nur diese ableiten.

Dasselbe geht auch aus folgender Tabelle hervor, welche die 12 verschiedenen $\sigma_{\lambda\mu}$, die für das Folgende zu Grunde gelegt sind, namhaft macht, und deren Verhalten bei Ausübung von S und T angibt:

(1)

	S	T
σ_{01}	σ_{11}	σ_{10}
σ_{02}	σ_{22}	σ_{20}
σ_{10}	σ_{10}	$-\sigma_{01}$
σ_{20}	σ_{20}	$-\sigma_{02}$
σ_{11}	σ_{21}	$+\varepsilon^3.\sigma_{14}$
σ_{12}	$-\varepsilon^2.\sigma_{23}$	$-\varepsilon^2.\sigma_{31}$
σ_{13}	$-\varepsilon^2.\sigma_{12}$	$-\varepsilon^2.\sigma_{21}$
σ_{14}	$-\varepsilon^2.\sigma_{01}$	$-\varepsilon^2.\sigma_{11}$
σ_{21}	σ_{31}	$+\varepsilon^3.\sigma_{13}$
σ_{22}	$+\varepsilon^4.\sigma_{13}$	$-\varepsilon.\sigma_{23}$
σ_{23}	$+\varepsilon^4\sigma_{02}$	$+\varepsilon^4.\sigma_{22}$
σ_{31}	$-\varepsilon.\sigma_{14}$	$+\varepsilon^3.\sigma_{12}$.

b) Bei linearen Substitutionen von ω_1, ω_2, welche mod 5 zur Identität congruent sind, ändert sich jedes $\sigma_{\lambda\mu}$ im allgemeinen um eine 5te Einheitswurzel, d. h. die $\sigma_{\lambda\mu}$ sind der 5ten Stufe adjungirt.

c) Bei linearen Substitutionen von ω_1, ω_2, welche mod 25 zur Identität congruent sind, bleibt jedes $\sigma_{\lambda\mu}$ ungeändert, d. h. die $\sigma_{\lambda\mu}$ sind von der 25ten Stufe.

d) Die Substitutions-Coefficienten von linearen Substitutionen der Perioden, welche auf die $\sigma_{\lambda\mu}$ ausgeübt werden, dürfen beliebig mod 50 (nicht mod 25, wenn die Determinante dabei nicht gleich 1 bleibt) modificirt werden.

Als den Haupt-Modul für die 5te Stufe führen wir nach Herrn Klein[1]) die folgende Ikosaeder-Irrationalität ein:

---

1) Man vergleiche Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder.

$$(2)\quad z = q^{\frac{2}{5}}\,\frac{\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^k . q^{5k^2-3k}}{\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^k . q^{5k^2-k}} = q^{\frac{2}{5}}(1-q^2+\ldots)$$

Dieselbe entsteht, wie kurz angegeben werden mag, indem man in der Bezeichnung der bereits citirten Abhandlung des Herrn Klein in den Abh. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wissensch. die beiden zu $n = 5$ gehörigen Modulformen

$$z_\alpha = (-1)^{\alpha+1}.\sqrt{\frac{2n\pi}{\omega_1}}\cdot\frac{q^{\frac{\alpha^2}{n}}}{\sqrt[6]{\Delta^n}}\cdot\vartheta_1\left(\frac{\alpha\omega_2\pi}{\omega_1}, q^n\right)$$

bildet (cf. daselbst pag. 371) und den Quotienten

$$(2a)\qquad z = -\frac{z_1}{z_2}$$

nimmt. Das Verhalten der z_α bei Ausübung von S und T ist (nach Formel (112) l. c.) folgendes:

$$S)\qquad z_\alpha(\omega_1, \omega_2+\omega_1) = \varepsilon^{-\frac{\alpha(5-\alpha)}{2}} . z_\alpha$$

$$T)\qquad -\sqrt{5}\,.\,z_\alpha(-\omega_2, \omega_1) = \sum_{-2}^{+2}{}_\beta\, \varepsilon^{\alpha\beta}\,.\,z_\beta.$$

Daher führen diese erzeugenden Substitutionen S und T die Ikosaeder-Irrationalität z über in

$$(2b)\qquad \begin{matrix} S) & \varepsilon z \\ T) & \dfrac{-(\varepsilon-\varepsilon^4)z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)z+(\varepsilon-\varepsilon^4)} \end{matrix}$$

In dem Schema

$$(3a)\qquad \begin{matrix} S^i, & S^k T S^i, \\ S^i U, & S^k T S^i U \end{matrix}$$

sind, wenn man darin k und i unabhängig von einander die Werte 0, 1, 2, 3, 4 annehmen lässt und $U = S^2 T S^2 T S^2 T$ setzt, 60 mod 5 incongruente lineare Substitutionen von ω zusammengefasst. In (3a) haben wir daher zugleich die ihnen entsprechenden 60 Ikosaeder-Substitutionen in symbolischer Schreibweise vor uns. Explicite sind dieselben, da U das z in $-\frac{1}{z}$ überführt:

$$\varepsilon^i \cdot z, \quad \varepsilon^i \cdot \frac{-(\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon^k z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon^k z+(\varepsilon-\varepsilon^4)}$$

(3b)

$$-\frac{1}{\varepsilon^i \cdot z}, \quad -\frac{1}{\varepsilon^i} \cdot \frac{+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon^k z+(\varepsilon-\varepsilon^4)}{-(\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon^k z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}.$$

Aus (3b) folgt mit Rücksicht darauf, dass z als Hauptmodul 5ter Stufe im Fundamental-Polygon dieser Stufe jeden Wert nur ein mal annimmt, dass dies Fundamental-Polygon 12 Ecken auf der reellen Axe hat. Die von uns getroffene Wahl dieser 12 Ecken ist aus folgender Tabelle ersichtlich, in welcher die Werte von z in diesen Punkten, wie sie sich aus dessen Definitionen (2) ergeben, notirt sind:

$$z(\omega=i\infty)=0, \qquad z(0)=\frac{\varepsilon^3-\varepsilon^3}{\varepsilon-\varepsilon^4}, \quad z(1)=\varepsilon \cdot \frac{\varepsilon^2-\varepsilon^3}{\varepsilon-\varepsilon^4},$$

$$z(2)=\varepsilon^2 \cdot \frac{\varepsilon^2-\varepsilon^3}{\varepsilon-\varepsilon^4}, \quad z(3)=\varepsilon^3 \cdot \frac{\varepsilon^2-\varepsilon^3}{\varepsilon-\varepsilon^4}, \quad z(4)=\varepsilon^4 \cdot \frac{\varepsilon^2-\varepsilon^3}{\varepsilon-\varepsilon^4},$$

(4)

$$z(\tfrac{1}{2})=-\varepsilon^3 \cdot \frac{\varepsilon-\varepsilon^4}{\varepsilon^2-\varepsilon^3}, \quad z(1\tfrac{1}{2})=-\varepsilon^4 \cdot \frac{\varepsilon-\varepsilon^4}{\varepsilon^2-\varepsilon^3}, \quad z(2\tfrac{1}{2})=-\frac{\varepsilon-\varepsilon^4}{\varepsilon^2-\varepsilon^3},$$

$$z(3\tfrac{1}{2})=-\varepsilon \cdot \frac{\varepsilon-\varepsilon^4}{\varepsilon^2-\varepsilon^3}, \quad z(4\tfrac{1}{2})=-\varepsilon^2 \cdot \frac{\varepsilon-\varepsilon^4}{\varepsilon^3-\varepsilon^3}, \quad z(\tfrac{2}{5})=\infty.$$

Dies vorausgeschickt können wir nunmehr die $\sigma\lambda_\mu$ zu z in Beziehung setzen und zwar wird es uns in Analogie zu den Fällen $s=2, 3, 4$ vorzugsweise interessiren, welche rationalen Functionen von z sich auf Grund von b) für die Quotienten $\sigma\lambda_\mu{}^5 : \sigma\lambda'_{\mu'}{}^5$ ergeben. Relationen zunächst, welche einfacher als diese in z aufgebaut sind, ergeben sich, wenn wir andere Combinationen der $\sigma\lambda_\mu$ als deren 5te Potenzen in Betracht ziehen. Ueben wir eine lineare Substitution aus

$$\omega_1' = (5a+1)\omega_1+5b\omega_2, \quad \omega_2' = 5c\omega_1+(5d+1)\omega_2,$$
$$(5a+1)(5d+1)-5b \cdot 5c = 1,$$

welche mod 5 zur Identität congruent ist, und beachten, dass für eine solche

$$a+ab \equiv cd+d \equiv 0 \bmod 2$$

ist, so zeigt sich nämlich, dass dabei beispielsweise sowol

(5)

$$\sigma\lambda_0 \cdot \sigma\lambda_1 \cdot \sigma\lambda_2 \cdot \sigma\lambda_3 \cdot \sigma\lambda_4 \quad \text{als auch}$$

$$\sigma_{0\mu} \cdot \sigma_{1\mu} \cdot \sigma_{2\mu} \cdot \sigma_{3\mu} \cdot \sigma_{4\mu}$$

ungeändert bleibt. λ und μ dürfen in (5) beliebige Werte annehmen. Indem wir speciell $\mu = 1$ und $\mu = 2$ setzen, haben wir den Ansatz:

$$\frac{\sigma_{01}\sigma_{11}\sigma_{21}\sigma_{31}\sigma_{41}}{\sigma_{02}\sigma_{12}\sigma_{22}\sigma_{32}\sigma_{42}} = \mathrm{Rat}(z)$$

Um die rationale Function rechter Hand auszuwerten, beachten wir, dass wir ihre sämtlichen Null- und Unendlichkeitspunkte dadurch angeben können, dass wir die Werte der $\sigma_{\lambda\mu}$ in den 12 Ecken des Fundamental-Polygons untersuchen, und dass sodann nur noch eine multiplicative Constante dadurch zu bestimmen ist, dass wir einen Term der beiderseitigen Reihenentwickelungen benutzen. Nun ist im Punkte $\omega = i\infty$ in erster Annäherung:

$$\sigma_{01} = -\frac{i\omega_1}{2\pi}\cdot q^{-4/25} \qquad \sigma_{02} = -\frac{i\omega_1}{2\pi}\cdot q^{-6/25}$$

$$\sigma_{10} = +\frac{i\omega_1}{2\pi}\cdot(\varepsilon^2-\varepsilon^3) \qquad \sigma_{20} = +\frac{i\omega_1}{2\pi}\cdot(\varepsilon-\varepsilon^4)$$

$$\sigma_{11} = +\frac{i\omega_1}{2\pi}\cdot e^{\frac{i\pi}{25}}\cdot\varepsilon^2 q^{-4/25} \qquad \sigma_{12} = +\frac{i\omega_1}{2\pi}\cdot e^{\frac{2i\pi}{25}}\cdot\varepsilon^2.q^{-6/25}$$

(6)

$$\sigma_{13} = +\frac{i\omega_1}{2\pi}\cdot e^{\frac{3i\pi}{25}}\cdot\varepsilon\cdot\varepsilon^2.q^{-6/25} \qquad \sigma_{14} = +\frac{i\omega_1}{2\pi}\cdot e^{\frac{4i\pi}{25}}\cdot\varepsilon^2.q^{-4/25}$$

$$\sigma_{21} = -\frac{i\omega_1}{2\pi}\cdot e^{\frac{2i\pi}{25}}\cdot\varepsilon^4.q^{-4/25} \qquad \sigma_{22} = -\frac{i\omega_1}{2\pi}\cdot e^{\frac{4i\pi}{25}}\cdot\varepsilon^4.q^{-6/25}$$

$$\sigma_{23} = -\frac{i\omega_1}{2\pi}\cdot e^{\frac{6i\pi}{25}}\cdot\varepsilon^4.q^{-6/25} \qquad \sigma_{31} = +\frac{i\omega_1}{2\pi}\cdot e^{\frac{3i\pi}{25}}\cdot\varepsilon\,.q^{-4/25}$$

und auf Grund dessen vermittelt die Tabelle (1) die Werte der $\sigma_{\lambda\mu}$ in den andern Ecken des Fundamental-Polygons. Man findet damit auf die angegebene Weise:

$$\frac{\sigma_{01}\sigma_{11}\sigma_{21}\sigma_{31}\sigma_{41}}{\sigma_{02}\sigma_{12}\sigma_{22}\sigma_{32}\sigma_{42}} = \varepsilon^4.z.$$

Durch Ausübung linearer Substitutionen der Perioden erhalten wir

offenbar daraus Relationen, welche sämtliche Ikosaeder-Substitutionen durch derartige Combinationen der λ_μ ausdrücken. Von den 60 Ikosaeder-Substitutionen sind nun immer je 5 nur durch die vortretenden 5ten Einheitswurzeln von einander verschieden. Für die Darstellung durch jene Producte und Quotienten der $\sigma\lambda_\mu$ kommen daher nur 12 Ikosaeder-Substitutionen als in dieser Beziehung von einander verschieden in Betracht. Je 2 von diesen 12 wieder hangen immer durch die einfache Operation $z' = -\frac{1}{z}$ zusammen. Es genügt daher, die Resultate nur für diejenigen 6 Ikosaeder-Substitutionen anzugeben, aus denen alle andern durch Ausübung von U und S^ε hervorgehen, und zwar schreiben wir diese Ikosaeder-Substitutionen, um diese und spätere Formeln in der Schreibweise zu vereinfachen, mit Bezug auf (3a) symbolisch in S und T. Dann werden die 6 Formeln:

$$1 = +\varepsilon \cdot \frac{\sigma_{01}\sigma_{11}\sigma_{14}\sigma_{21}\sigma_{31}}{\sigma_{02}\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{22}\sigma_{23}}, \qquad T = +\varepsilon^3 \cdot \frac{\sigma_{10}\sigma_{11}\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{14}}{\sigma_{20}\sigma_{21}\sigma_{22}\sigma_{23}\sigma_{31}}$$

$$(7) \qquad ST = +\frac{\sigma_{01}\sigma_{10}\sigma_{12}\sigma_{21}\sigma_{23}}{\sigma_{02}\sigma_{13}\sigma_{14}\sigma_{20}\sigma_{31}}, \quad S^2T = +\varepsilon \cdot \frac{\sigma_{02}\sigma_{10}\sigma_{11}\sigma_{23}\sigma_{31}}{\sigma_{01}\sigma_{12}\sigma_{14}\sigma_{20}\sigma_{22}}$$

$$S^3T = -\varepsilon^3 \cdot \frac{\sigma_{02}\sigma_{10}\sigma_{14}\sigma_{21}\sigma_{2}}{\sigma_{01}\sigma_{11}\sigma_{13}\sigma_{20}\sigma_{22}}, \quad S^4T = -\varepsilon^3 \cdot \frac{\sigma_{01}\sigma_{10}\sigma_{13}\sigma_{22}\sigma_{31}}{\sigma_{02}\sigma_{11}\sigma_{12}\sigma_{20}\sigma_{21}}\Big)^1.$$

Mit diesen Relationen ist man im Stande, 6 der Quotienten $\sigma_{\lambda\mu}{}^5 : \sigma_{\lambda'\mu'}{}^5$ durch z darzustellen, und zwar findet sich:

$$\frac{\sigma_{01}{}^5}{\sigma_{02}{}^5} = 1 \,.\, ST \,.\, S^4T \,.\, S^2TU \,.\, S^3TU = \frac{z(z^4 - 3z^3 + + 4z^2 - 2z + 1)}{z^4 + 2z^3 + 4z^2 + 3z + 1}$$

$$\frac{\sigma_{20}{}^5}{\sigma_{20}{}^5} = T \,.\, ST \,.\, S^2T \,.\, S^3T \,.\, S^4T$$

$$\varepsilon^4 \cdot \frac{\sigma_{11}{}^5}{\sigma_{22}{}^5} = 1 \,.\, T \,.\, S^2T \,.\, S^3TU \,.\, S^4TU$$

(7b)

$$\varepsilon^3 \cdot \frac{\sigma_{12}{}^5}{\sigma_{31}{}^5} = U \,.\, T \,.\, ST \,.\, S^2TU \,.\, S^4TU$$

$$-\varepsilon^2 \frac{\sigma_{13}{}^5}{\sigma_{21}{}^5} = U \,.\, T \,.\, STU \,.\, S^3TU \,.\, S^4T$$

$$-\varepsilon \cdot \frac{\sigma_{14}{}^5}{\sigma_{23}{}^5} = 1 \,.\, T \,.\, STU \,.\, S^2TU \,.\, S^3T$$

---

1) Diese Formelgruppe (7) findet sich im Princip bereits bei Bianchi, Math. Ann. Bd. 17., indem derselbe eine dieser 6 Formeln ableitet.

Die Ausübung linearer Substitutionen der Perioden in (7b) liefert keine neuen Relationen, sondern vertauscht nur dieselben unter sich. Diese 6 Quotienten $\sigma_{\lambda\mu}{}^5 : \sigma_{\lambda'\mu'}{}^5$ in (7b) sind also rationale Functionen 5ten Grades von z.

Eine weitere Reihe von Relationen, welche zwischen den $\sigma_{\lambda\mu}$ und der Ikosaeder-Irrationalität bestehen, finden wir, wenn wir nochmals auf die Combinationen (5) zurückgehen und speciell λ und $\mu = 0$ setzen. Dann lehrt dies, dass auch $(\sigma_{01}\sigma_{02})^2$ nnd $(\sigma_{10}\sigma_{20})^2$ bei linearen Substitutionen der Perioden, welche mod 5 zur Identität congruent sind, nngeändert bleiben. Die Rechnung zeigt, dass dies sogar bereits mit $(\sigma_{01}\sigma_{02})$ und $(\sigma_{10}\sigma_{20})$ selbst der Fall ist. Dies giebt den Ansatz:

$$\frac{\sigma_{10}\sigma_{20}}{\sigma_{01}\sigma_{02}} = \mathrm{Rat}(z)$$

und zwar findet man auf analoge Weise wie vorhin:

$$\frac{\sigma_{10}\sigma_{20}}{\sigma_{01}\sigma_{02}} = 5z : [-(\varepsilon-\varepsilon^4)z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)][+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)z+(z-\varepsilon^4)]$$

Bringt man darauf die Operationen S^i in Anwendung, so kann man schliesslich folgende fortlaufende Proportion anschreiben:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{10}\sigma_{20} : \sigma_{01}\sigma_{02} : \sigma_{11}\sigma_{22} : \sigma_{13}\sigma_{21} : \sigma_{12}\sigma_{31} : \sigma_{14}\sigma_{23} \\
&= 5z : +[-(\varepsilon-\varepsilon^4)z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)][+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)z+(\varepsilon-\varepsilon^4)] \\
&\quad : +\varepsilon^4[-(\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)][+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon z+(\varepsilon-\varepsilon^4)] \\
&\quad : +\varepsilon^4[-(\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon^2 z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)][+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon^2 z+(\varepsilon-\varepsilon^4)] \\
&\quad : -\varepsilon[-(\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon^3 z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)][+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon^3 z+(\varepsilon-\varepsilon^4)] \\
&\quad : -\varepsilon^2[-(\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon^4 z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)][+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon^4 z+(\varepsilon-\varepsilon^4)].
\end{aligned} \tag{8}$$

Weitere Relationen ergeben sich daraus durch Anwendung linearer Substitutionen der Perioden nicht. Diese Relationen (8) können sichtlich nicht dazu dienen, die noch fehlenden Quotienten $\sigma_{\lambda\mu} : \sigma_{\lambda'\mu'}$ mit Hilfe von (7b) zu bestimmen. Dazu wird es vielmehr erforderlich, einen der noch fehlenden Quotienten direct als rationale Function von z auszuwerten. Man findet so beispielsweise durch die bekannte Methode:

$$\frac{\sigma_{10}{}^5}{\sigma_{01}{}^5} = (\sqrt{5})^5 \cdot \frac{-(\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon^2 z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon^2 z+(\varepsilon-\varepsilon^4)} \cdot \frac{-(\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon^3 z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon^3 z+(\varepsilon-\varepsilon^4)} \cdot \left[\frac{z}{-(\varepsilon-\varepsilon^4)z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}\right]^2 \cdot \left[\frac{1}{+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)z+(\varepsilon-\varepsilon^4)}\right]^2 \tag{9}$$

unter $\sqrt{5}$ die positive Quadratwurzel verstanden. Dieser Quotient ist also eine rationale Function 7ten Grades in z.

Durch Ausübung linearer Substitutionen in (9) kann man nun unter ev. Benutzung der Formeln (7b) jeden beliebigen der noch fehlenden Quotienten $\sigma_{\lambda\mu}{}^5 : \sigma_{\lambda'\mu'}{}^5$ berechnen. Von den 66 überhaupt existirenden derartigen Quotienten sind nur die 6 in (7^b) angegebenen vom 5ten Grade in z; die 60 andern sind vom 7ten Grade in z.

Will man die diesbez. Resultate in der Form der fortlaufenden Proportion:

$$\sigma_{10}{}^5 : \sigma_{20}{}^5 : \sigma_{01}{}^5 : \sigma_{02}{}^5 : \sigma_{12}{}^5 : \ldots = R_1(z) : R_2(z) \ldots$$

zusammenfassen, so hat dies keine Schwierigkeit, aber die Formeln werden zu complicirt, als dass sie hier eine Stelle finden könnten. Es mag daher genügen, den Formeln (7^b), welche 6 von einander unabhängige Quotienten $\sigma_{\lambda\mu}{}^5 : \sigma_{\lambda'\mu'}{}^5$ geben, folgende Formel-Serie an die Seite zu setzen, welche weitere 5 von jenen Quotienten unabhängige Quotienten in der gewünschten Weise darstellt. Diese Formeln werden einfach erhalten, indem man in (9) die Operationen S^ν vornimmt. Diese 11 von einander unabhängigen Quotienten (7^b) und (9^b) genügen dann, um irgend einen der andern Quotienten unmittelbar angeben zu können.

$$\frac{\sigma_{10}{}^5}{\sigma_{01}{}^5} = (\sqrt{5})^5 \frac{-(\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon^2 z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon^2 z+(\varepsilon-\varepsilon^4)} \cdot \frac{-(\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon^3 z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon^3 z+(\varepsilon-\varepsilon^4)} \cdot \left[\frac{z}{-(\varepsilon-\varepsilon^4)z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}\right]^2 \cdot \left[\frac{1}{+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)z+(\varepsilon-\varepsilon^4)}\right]^3$$

$$\frac{\sigma_{10}{}^5}{\sigma_{11}{}^5} = (\sqrt{5})^5 \cdot \frac{-(\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon^3 z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon^3 z+(\varepsilon-\varepsilon^4)} \cdot \frac{-(\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon^4 z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon^4 z+(\varepsilon-\varepsilon^4)} \cdot \left[\frac{\varepsilon z}{-(\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}\right]^2 \cdot \left[\frac{1}{+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon z+(\varepsilon-\varepsilon^4)}\right]^3$$

(9^b)
$$\frac{\sigma_{10}{}^5}{\sigma_{21}{}^5} = (\sqrt{5})^5 \cdot \frac{-(\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon^4 z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon^4 z+(\varepsilon-\varepsilon^4)} \cdot \frac{-(\varepsilon-\varepsilon^4)z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)z+(\varepsilon-\varepsilon^4)} \cdot \left[\frac{\varepsilon^2 z}{-(\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon^2 z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}\right]^2 \cdot \left[\frac{1}{+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon^2 z+(\varepsilon-\varepsilon^4)}\right]$$

$$\frac{\sigma 10^5}{\sigma_{31}{}^5} = (\sqrt{5})^5 \frac{-(\varepsilon-\varepsilon^4)z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)z+(\varepsilon-\varepsilon^4)} \cdot \frac{-(\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon z+(\varepsilon-\varepsilon^4)}$$

$$\cdot\left[\frac{\varepsilon^3 z}{-(\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon^3 z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}\right]^2 \cdot \left[\frac{1}{+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon^3 z+(\varepsilon-\varepsilon^4)}\right]^3$$

$$\frac{\sigma 10^5}{\sigma_{41}{}^5} = (\sqrt{5})^5 \cdot \frac{-(\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon z+(\varepsilon-\varepsilon^4)} \cdot \frac{-(\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon^2 z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon^2 z+(\varepsilon-\varepsilon^4)}$$

$$\cdot\left[\frac{\varepsilon^4 z}{-(\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon^4 z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}\right]\left[\frac{1}{+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon^4 z+(\varepsilon-\varepsilon^4)}\right]^3$$

Inhalt.

Seite.

Einleitung 1

Erster Abschnitt. Allgemeines über die Multiplicator-Gleichungen für die Teilwerte der σ-Function.

§ 1. Die Teilwerte der σ-Function 3

§ 2. Transformation $n$ter Ordnung, Wahl der Repräsentanten, die Functionen $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ 7

§ 3. Verhalten der $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ bei linearer Substitution der Perioden ω_1, ω_2 12

§ 4. Stufe einer Transformations-Gleichung. Existenz der Multiplicator-Gleichungen für die $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ 14

§ 5. Behandlung andrer Transformations-Gleichungen mit den $\sigma_{\lambda\mu}$ 18

§ 6. Form der Coefficienten und Aufstellung der Gleichungen . 20

Zweiter Abschnitt. Specielle Behandlung der Multiplicator-Gleichungen der niedersten Stufen für die Teilwerte der σ-Function.

Erstes Capitel. $s = 2$.

§ 1. Zusammenhang der $\sigma_{\lambda\mu}$ mit k^2 23

§ 2. Die $x_{\lambda\mu}^{(i)}$. Ihr Verhalten bei linearer Substitution der Perioden ω_1, ω_2. Die Transformationen der Gleichungen in sich 25

§ 3. Werte der Wurzeln $x_{\lambda\mu}^{(i)}$ in den Ecken des Fundamental-Polygons 28

§ 4. Form der Coefficienten. Aufstellung der Gleichungen . . . 30

§ 5. Beispiele. $n = 3, 5, 7, 9$ 34

Zweites Capitel. $s = 3$.

§ 1. Zusammenhang der $\sigma_{\lambda\mu}$ mit der Tetraeder-Irrationalität . . 40

§ 2. Die $x_{\lambda\mu}^{(i)}$. Ihr Verhalten bei linearer Substitution der Perioden ω_1, ω_2. Die Transformationen der Gleichungen in sich 42

Seite

§ 3. Werte der Wurzeln $x_{10}^{(i)}$ in den Ecken des Fundamental-Polygons 46

§ 4. Form der Coefficienten. Aufstellung der Gleichungen . . . 47

§ 5. Beispiele. $n = 2, 4, 5, 7$ 53

Drittes Capitel. $s = 4$.

§ 1. Zusammenhang der $\sigma_{\lambda\mu}$ mit k^2 und der Oktaeder-Irrationalität 60

§ 2. Die $x_{\lambda\mu}^{(i)}$. Ihr Verhalten bei linearer Substitution der Perioden ω_1, ω_2. Die Transformationen der Gleichungen in sich 65

§ 3. Werte der Wurzeln x_{10}^{i} in den Ecken des Fundamental-Polygons 71

§ 4. Form der Coefficienten. Aufstellung der Gleichungen . . . 72

§ 5. Beispiele. $n = 3, 5, 7$ 78

Schlussbemerkungen über den Zusammenhang der $\sigma_{\lambda\mu}$ für $s = 5$ mit der Ikosaeder-Irrationalität 80

II.

Ueber die Integrale $\int \frac{\sin z}{z^\alpha} dz$ und $\int \frac{\cos z}{z^\alpha} dz$.

Von

Dr. **Ernst Linhardt.**

Als Jahresprogramm pro 1883 der Studienanstalt Neustadt a/H. veröffentlichte Hr. Nachreiner eine Abhandlung „Beiträge zur Theorie der bestimmten Integrale und zur Attractionstheorie", worin die Auswertung des Potentials eines elektrodynamischen Cylinders unter anderem von einer Gattung Integrale abhängt, welche sich, wie in der Einleitung gezeigt wird, auf die specielleren Formen

$$\int \frac{\sin z}{z^\alpha} dz \quad \text{und} \quad \int \frac{\cos z}{z^\alpha} dz$$

zurückführen lassen. Hiebei kommen diese Integrale jedoch nur als bestimmte Integrale zwischen den Grenzen 0 und ∞ in Betracht, als welche sie bekanntlich durch Euler für positive $\alpha < 1$ bereits erledigt wurden. Noch nicht durchweg beantwortet dagegen erscheint die Frage nach den Functionen, welche durch die obigen unbestimmten Integrale ihren Ausdruck finden und aus welchen sodann die bestimmten Integrale nach Einstellung der Grenzen hervorgehen müssen. Mit dieser Frage sollen sich nun die folgenden Zeilen beschäftigen, und zwar betreten wir dabei den Weg, welcher von Hrn. Lommel [1]) hinsichtlich der Specialfälle

---

1) Lommel, Math. Ann. Bd. XVI, S. 183—208. 1880.

$$\int \frac{\sin z}{\sqrt{z}} dz \qquad \int \frac{\cos z}{\sqrt{z}} dz$$

$$\int \frac{\sin z}{z} dz \qquad \int \frac{\cos z}{z} dz$$

eingeschlagen worden ist.

1) Der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung [1])

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \frac{\alpha}{z} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} + \left(1 - \frac{\nu^2 - \left(\frac{\alpha-1}{2}\right)^2}{z^2}\right) . y = k . z^{\mu - \frac{\alpha+1}{2}}$$

genügt für ein ganzzahliges $\nu = n$ das vollständige Integral

$$y = z^{-\frac{\alpha-1}{2}} [A_1 J_n + B_1 Y_n + k . S_{\mu,n}]$$

für gebrochene ν aber der Ausdruck

$$y = z^{-\frac{\alpha-1}{2}} [A_1 J_\nu + B_1 J_{-\nu} + k . S_{\mu,\nu}],$$

in welchen beiden Formeln α, k, A_1, B_1 constante Grössen bedeuten, J_ν, $J_{-\nu}$, J_n, Y_n Bessel'sche Functionen in der gewöhnlichen Schreibweise vorstellen, und $S_{\mu,n}$, bzhw. $S_{\mu,\nu}$ durch nachstehende Gleichungen definirt wird

$$S_{\mu,n} = Y_n \int z^\mu J_n dz - J_n \int z^\mu Y_n dz$$

$$S_{\mu,\nu} = \frac{\pi}{2 \sin \nu\pi} \left(J_\nu \int z^\mu J_{-\nu} dz - J_{-\nu} \int z^\mu J_\nu dz \right).$$

$S_{\mu,\nu}$ oder auch $S_{\mu,n}$ kann nun, wie Hr. Lommel in der eben citirten Abhandlung gezeigt hat, als eine neue den Bessel'schen Functionen verwandte allgemeinere Function angesehen werden, welche sich ganz ähnlichen Grundbedingungen, wie jenen Transcendenten zukommen, unterwirft und die mannigfachsten Eigenschaften besitzt; insbesondere teilt sie mit den Bessel'schen Functionen das Charakteristikum sich in zwei Weisen entwickeln zu lassen, und es gelingt hiedurch sowol $S_{\mu,\nu}$ als auch $S_{\mu,n}$ für alle Werte μ, ν, n zu berechnen. Als diese Entwicklungen finden sich unter Annahme eines allgemeinen ν

---

1) Lommel, Math. Ann. Bd. IX, S. 425—444. 1876.

$$S_{\mu,\nu} = z^{\mu-1}\sum_{p=0}^{p=m}(-1)^p(\mu-\nu-1)^{p/-2}(\mu+\nu-1)^{p/-2}z^{-2p}$$
$$+(-1)^{m+1}(\mu-\nu+1)^{m+1/-2}(\mu+\nu-1)^{m+1/-2}S_{\mu-2m-2,\nu}$$

und

$$S_{\mu,\nu} = \Sigma\frac{(-1)^p z^{\mu+2p+1}}{(\mu-\nu+1)^{p+1/2}(\mu+\nu+1)^{p+1/2}}$$
$$+\frac{2^{\mu-1}}{\sin\nu\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}\right)\cdot\left(\sin\frac{\mu+\nu-1}{2}\pi.J_\nu\right.$$
$$\left.-\sin\frac{\mu-\nu-1}{2}\pi.J_{-\nu}\right)$$

wovon freilich die erste Reihe, wenn man sich dieselbe bis ins Unendliche fortgesetzt denkt, divergent ist, jedoch gehört sie zu den sogenannten halbconvergenten Reihen, die sich namentlich für grosse Werte von z zur nnmerischen Berechnung besonders eignen; die zweite Summe dagegen convergirt für alle Werte von z, was auch μ und ν sein mag, nur ist bei Anwendungen darauf zu achten, dass die Argumente der Γ-Fnnctionen immer positiv ausfallen, was aber mit Hülfe der Beziehung [1])

$$S_{\mu,\nu} = \sum_{p=0}^{p=m-1}\frac{(-1)^p.z^{\mu+2p+1}}{(\mu-\nu+1)^{p+1/2}(\mu+\nu+1)^{p+1/2}}$$
$$+\frac{(-1)^m.S_{\mu+2m,\nu}}{(\mu-\nu+1)^{m/2}(\mu+\nu+1)^{m/2}}$$

jedesmal erreicht werden kann.

Die Function $S_{\mu,\nu}$ integrirt nicht nur obige Differentialgleichnng vollständig, sondern es gelingt auch sämtliche Integrale von der Form

$$\int z^\mu J_\nu\,dz \quad \text{und} \quad \int z^\mu Y_n\,dz$$

durch sie auszudrücken; es ergiebt sich auf diese Weise

$$\int z^\mu Y_n\,dz = (\mu+n-1).z\,Y_n S_{\mu-1,n-1} - z\,Y_{n-1}S_{\mu,n},$$

$$\int z^\mu J_\nu\,dz = (\mu+\nu-1)zJ_\nu S_{\mu-1,\nu-1} - z.J_{\nu-1}S_{\mu,\nu}$$

---

1) Lommel a. a. O.

anch hier ist, wie schon früher hervorgehoben. die erstere Gleichung nur dann zu gebranchen, wenn der Index der Bessel'schen Function positiv oder negativ ganz wird.

2) In die obengenannte Form nnn lassen sich nnsere Integrale $\int \frac{\sin z}{z^\alpha} dz$ nnd $\int \frac{\cos z}{z^\alpha} dz$ sofort znrückführen, wenn man bedenkt, dass

$$J_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z$$

nnd ebenso

$$J_{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z$$

ist. Man gewinnt deshalb für die beiden in Rede stehenden Integrale die Gleichungen

$$\int \frac{\sin z}{z^\alpha} dz = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int J_{\frac{1}{2}} z^{-\alpha+\frac{1}{2}} dz,$$

$$\int \frac{\cos z}{z^\alpha} dz = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int J_{\frac{1}{2}} z^{-\alpha+\frac{1}{2}} dz,$$

anf deren rechte Seiten sofort die am Schlnsse des vorigen Paragraphen mitgeteilte Relation angewendet werden kann.

Znnächst sei znr Behandlnng des Integrals $\int \frac{\sin z}{z^\alpha} dz$ geschritten, nach welchem in analoger Weise der Wert für $\int \frac{\cos z}{z^\alpha} dz$ abzuleiten ist.

Für ersteres findet sich

$$\int \frac{\sin z}{z^\alpha} dz = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int J_{\frac{1}{2}} z^{-\alpha+\frac{1}{2}} dz = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \Big[-\alpha . z J_{\frac{1}{2}} S_{-(\alpha+\frac{1}{2}),\frac{1}{2}} - z . J_{-\frac{1}{2}} S_{-\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \Big] + C,$$

welches dnrch Einführnng der Werte für $J_{\frac{1}{2}}$ nnd $J_{-\frac{1}{2}}$ übergeht in

$$\int \frac{\sin z}{z^\alpha} dz = -\alpha . z^{\frac{1}{2}} S_{-(\alpha+\frac{1}{2}),\frac{1}{2}} \sin z - z^{\frac{1}{2}} S_{-\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \cos z + \sigma.$$

Anstatt der hier vorkommenden S-Fnnctionen könnten sowol die convergente wie divergente Entwicklnng des § 1. eintreten, nnr ist für erstere noch znvor der Umstand in Betracht zn ziehen, dass im vorliegenden Falle die Argumente der dabei anftretenden Γ-Fnnc-

tionen negativ ausfallen, weshalb zunächst eine Umformung von $S_{-(\alpha+\frac{1}{2}),\frac{1}{2}}$ und $S_{-\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ nach früher erwähnter Methode (§ 1.) ausgeführt werden muss.

Dieselbe liefert die Beziehungen

$$S_{-\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \frac{z^{-\alpha+\frac{1}{2}} - S_{-\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}}{(1-\alpha)(2-\alpha)}$$

$$S_{-(\alpha+\frac{1}{2}),\frac{1}{2}} = -\frac{z^{-\alpha+\frac{1}{2}} - S_{-\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}}{\alpha(1-\alpha)}.$$

in welche die vorher angegebenen ganz allgemeinen Werte der S für die speciellen Fälle $\mu = \begin{cases} -\alpha+\frac{1}{2} \\ -\alpha+\frac{1}{2} \end{cases}$, $\nu = \frac{1}{2}$ eingetragen werden können, so dass sich nach einigen Umformungen, insbesondere der dabei auftretenden Γ-Functionen mit Hülfe der Relationen

$$\Gamma(\beta).\Gamma(1-\beta) = \frac{\pi}{\sin\beta\pi} \quad (\beta < 1)$$

und

$$\Gamma(a).\Gamma\left(a+\frac{1}{q}\right).\Gamma\left(a+\frac{2}{q}\right)\dots\Gamma\left(a+\frac{q-1}{q}\right)$$

$$= (2\pi)^{\frac{q-1}{2}}.q^{\frac{1}{2}-qa}.\Gamma(qa) \qquad (q \text{ ganz u. } >0)$$

findet

$$\int S_{-\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \frac{1}{z^\alpha}\,\Sigma\frac{(-1)^p.z^{2p+2}}{(1-\alpha)^{2p+2/1}} + \frac{\pi\cos\left(\frac{\alpha}{2}\pi+z\right)}{2\Gamma(\alpha)\sin\frac{\alpha}{2}\pi\cos\frac{\alpha}{2}\pi}$$

$$-\alpha.\int S_{-(\alpha+\frac{1}{2}),\frac{1}{2}} = \frac{1}{z^\alpha}\,\Sigma\frac{(-1)^p.z^{2p+1}}{(1-\alpha)^{2p+1/1}} - \frac{\pi\sin\left(\frac{\alpha}{2}\pi+z\right)}{2\Gamma(\alpha)\sin\frac{\alpha}{2}\pi\cos\frac{\alpha}{2}\pi}$$

woraus sogleich hervorgeht

$$\int\frac{\sin z}{z^\alpha}dz = \frac{\sin z}{z^\alpha}\Sigma\frac{(-1)^p.z^{2p+1}}{(1-\alpha)^{2p+1/1}} - \frac{\cos z}{z^\alpha}\Sigma\frac{(-1)^p.z^{2p+2}}{(1-\alpha)^{2p+2/1}}$$

$$-\frac{\pi}{2\sin\frac{\alpha}{2}\pi.\Gamma(\alpha)} + C.$$

Rascher ergiebt sich die semiconvergente Entwicklung durch sofortige Substitution der Werte

$$\alpha . S_{-(\alpha+1),1} = \frac{1}{z^{\alpha+1}} \Sigma(-1)^p . \frac{\alpha^{2p+1/1}}{z^{2p}}$$

und

$$S_{-\alpha+1,1} = \frac{1}{z^{\alpha+1}} \Sigma(-1)^p . \frac{\alpha^{2p/1}}{z^{2p}}$$

in die frühere Gleichung, und auf diese Weise folgt

$$\int \frac{\sin z}{z^\alpha} dz = -\frac{\sin z}{z^\alpha} \Sigma(-1)^p . \frac{\alpha^{2p+1/1}}{z^{2p+1}} - \frac{\cos z}{z^\alpha} \Sigma(-1)^p . \frac{\alpha^{2p/1}}{z^{2p}} + C$$

wobei die hier vorkommende Constante C identisch die nämliche sein muss, wie die der convergenten Entwicklung.

Auf ganz ähnliche Art kann man auch das zweite Integral behandeln, und so resultirt schliesslich hiefür nachstehendes Gleichungspaar

$$\int \frac{\cos z}{z^\alpha} dz = \frac{\cos z}{z^\alpha} \Sigma \frac{(-1)^p . z^{2p+1}}{(1-\alpha)^{2p+1/1}} + \frac{\sin z}{z^\alpha} \Sigma \frac{(-1)^p . z^{2p+2}}{(1-\alpha)^{2p+2/1}} - \frac{\pi}{2\cos\frac{\alpha}{2}\pi . \Gamma(\alpha)} + C_1$$

und

$$\int \frac{\cos z}{z^\alpha} dz = -\frac{\cos z}{z^\alpha} \Sigma(-1)^p . \frac{\alpha^{2p+1,1}}{z^{2p+1}} + \frac{\sin z}{z^\alpha} \Sigma(-1)^p . \frac{\alpha^{2p/1}}{z^{2p}} + C_1$$

3) Die convergenten Ausdrücke lassen erkennen, dass sowol die Reihen von $\int \frac{\sin z}{z^\alpha} dz$ als auch $\int \frac{\cos z}{z^\alpha} dz$ bei positivem $\alpha < 1$ für $z = 0$ verschwinden, und ebenso reduciren sich die Summen in der divergenten Entwicklung für $z = \infty$ auf null; man erhält daher

$$\int_0^\infty \frac{\cos z}{z^\alpha} dz = \frac{\pi}{2\cos\frac{\alpha}{2}\pi . \Gamma(\alpha)}$$

und ebenso

$$\int_0^\infty \frac{\sin z}{z^\alpha} dz = \frac{\pi}{2\sin\frac{\alpha}{2}\pi . \Gamma(\alpha)},$$

welche Resultate längst bekannt sind.

Letztere Integrale, welche der Kürze halber mit bzhw. C_α und S_α bezeichnet werden, können noch mit Hülfe der Beziehung

$$\Gamma(\alpha).\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi} \quad (\alpha < 1)$$

in die beqnemere Form

$$C_\alpha = \Gamma(1-\alpha).\sin\frac{\alpha}{2}\pi$$

und

$$S_\alpha = \Gamma(1-\alpha).\cos\frac{\alpha}{2}\pi$$

übergeführt werden.

Durch beiderseitiges Qnadriren und Addiren geht hieraus die bemerkenswerte Relation hervor

$$C_\alpha^2 + S_\alpha^2 = (\Gamma(1-\alpha^2))^2;$$

ebenso kann durch Multiplication der Definitionsgleichnngen geschlossen werden, dass

$$C_\alpha . S_\alpha = \tfrac{1}{2}\sin\alpha\pi\,(\Gamma(1-\alpha))^2$$

also

$$C_\alpha . S_\alpha = \tfrac{1}{2}\sin\alpha\pi\,(C\alpha^2 + S_\alpha^2)$$

In gleicher Weise ergeben sich noch die folgenden Beziehnngen

$$S_\alpha^2 - C_\alpha^2 = \cos\alpha\pi\,(C_\alpha^2 + S_\alpha^2),$$

$$C_\alpha \cos\frac{\alpha}{2}\pi = S_\alpha \sin\frac{\alpha}{2}\pi$$

Durch Vertauschnng von α mit $1-\alpha$ findet sich weiter

$$C_{1-\alpha} = \cos\frac{\alpha}{2}\pi . \Gamma(\alpha),$$

$$S_{1-\alpha} = \sin\frac{\alpha}{2}\pi . \Gamma(\alpha)$$

daher ähnlich

$$C_{1-\alpha}^2 + S_{1-\alpha}^2 = (\Gamma(\alpha))^2,$$

$$C_{1-\alpha} \sin \frac{\alpha}{2}\pi = S_{1-\alpha} \cos \frac{\alpha}{2}\pi$$

woraus durch Vergleich mit Früherem zu entnehmen, dass

$$C_\alpha . S_\alpha = C_{1-\alpha} . S_{1-\alpha} \left(\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\right)^2$$

$$C_\alpha . C_{1-\alpha} + S_\alpha . S_{1-\alpha} = \pi,$$

$$C_\alpha . C_{1-\alpha} = S_\alpha . S_{1-\alpha} = \frac{\pi}{2}$$

ist. Endlich ersieht man noch aus den Werten für C_α, S_α, $C_{1-\alpha}$, $S_{1-\alpha}$ das weitere Gleichungspaar

$$C_\alpha . S_{1-\alpha} + S_\alpha . C_{1-\alpha} = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi} = \Gamma(\alpha) . \Gamma(1-\alpha),$$

$$S_\alpha . C_{1-\alpha} - C_\alpha . S_{1-\alpha} = \pi . \operatorname{ctg} \alpha\pi$$

4) Wurde auf die Entwicklung der S-Functionen nicht eingegangen, so stellten sich die in Frage stehenden Integrale in folgender Form dar

$$\int \frac{\sin z}{z^\alpha} dz = -\alpha . z^{\frac{1}{2}} S_{-(\alpha+\frac{1}{2}),\frac{1}{2}} \sin z - z^{\frac{1}{2}} S_{-\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \cos z + C$$

und

$$\int \frac{\cos z}{z^\alpha} dz = -\alpha . z^{\frac{1}{2}} S_{-(\alpha+\frac{1}{2}),\frac{1}{2}} \cos z + z^{\frac{1}{2}} S_{-\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \sin z + C_1.$$

Nun hat Hr. Lommel [1]) gezeigt, dass für jedes μ und ν ganz allgemein die Beziehungen gültig sind

$$S_{\mu,-\nu} = S_{\mu,\nu}$$

$$(\mu+\nu-1) z^\nu S_{\mu-1,\ \nu-1} = \frac{\partial(z^\nu S_{\mu,\nu})}{\partial z} = \frac{z^{\mu+\nu} - z^\nu S_{\mu+1,\nu-1}}{\mu-\nu+1}$$

wendet man diese auf unsere Ausdrücke rechts an, so kommt

$$\int \frac{\sin z}{z^\alpha} dz = \frac{\partial(z^{\frac{1}{2}} S_{-\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2}})}{\partial z} \sin z - z^{\frac{1}{2}} S_{-\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2}} . \cos z,$$

$$\int \frac{\cos z}{z^\alpha} dz = \frac{\partial(z^{\frac{1}{2}} S_{-\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2}})}{\partial z} \cos z + z^{\frac{1}{2}} S_{-\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \sin z$$

wenn die noch hinzu zu fügende willkürliche Constante der Einfachheit halber gleich null gesetzt wird. Man bemerkt, dass obige unbestimmte Integrale

---

1) Lommel, Math. Ann. Bd. IX. S. 431. 1876.

in ihrer jetzigen Darstellung, abgesehen von den trigonometrischen Functionen, nur von $S_{-\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ und seinem ersten Differentialquotienten abhängig sind und deshalb gerade in dieser Gestalt sich recht gut zu einer eingehenderen Discussion eignen, voraussgesetzt, dass der Verlauf der S-Functionen bekannt ist.

5) Wie bereits erwähnt, genügt $S_{\mu,\nu}$ für alle Werte μ und ν als particuläres Integral der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \frac{\alpha}{z} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} + \left(1 - \frac{\nu^2 - \left(\frac{\alpha-1}{2}\right)^2}{z^2}\right) y = k . z^{\mu - \frac{\alpha+1}{2}}$$

deren vollständiges Integral ebenfalls früher für ganzzahlige und gebrochene ν mitgeteilt wurde. Es liegt deshalb jetzt die Frage nach jenen specielleren Formen obiger Differentialgleichung nahe, die sowol $z^{\frac{1}{2}} S_{-\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ als auch $\frac{\partial(z^{\frac{1}{2}} S_{-\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2}})}{\partial z}$ oder, was dasselbe ist, $-\alpha z^{\frac{1}{2}} S_{-(\alpha+1),\frac{1}{2}}$ befriedigen. Durch Vergleiche findet sich aber leicht, dass $z^{\frac{1}{2}} S_{\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ die Gleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + y = \frac{1}{2}\alpha$$

erfüllt und ebenso gehorcht $\frac{\partial(z^{\frac{1}{2}} S_{-\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2}})}{\partial z}$ der Beziehung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + y = \frac{1}{z^{\alpha+1}},$$

wenn für y die betreffenden Functionen eingetragen werden.

Nun soll versucht werden in ähnlicher Weise, wie es schon bei den speciellen Integralen für $\alpha = \frac{1}{2}$ und $\alpha = 1$ seine Erledigung gefunden hat [1]), ein bestimmtes Integral von der Form

$$y = k \int_0^\infty e^{-uz} f(u)\, du$$

zu gewinnen, welches ebenfalls der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + y = \frac{1}{z^\alpha}$$

als Particularlösung genügt.

---

1) Lommel, Math. Ann. Bd. XVI. S. 188—208. 1880.

Dabei bedeutet k eine noch zu bestimmende Constante und $f(u)$ eine noch unbekannte Function von u. Durch Substitution dieses Wertes für y in die Differentialgleichung erhält man als Bedingung

$$k\int_0^\infty e^{-uz}(1+u^2).f(u)\,du = \frac{1}{z^\alpha}$$

es ist aber allgemein

$$\int_0^\infty e^{-uz}u^{\alpha-1}\,du = \frac{\Gamma(\alpha)}{z^\alpha} \qquad (z>0)$$

daraus ergiebt sich durch Vergleich mit Obigem

$$k = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}$$
$$(1+u^2).f(u) = u^{\alpha-1}$$

also das in Rede stehende Integral

$$y = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \frac{e^{-uz}.u^{\alpha-1}}{1+u^2}\,du.$$

Weil aber die Function $z^{\frac{1}{2}}S_{-\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ ebenfalls particuläre Lösung obiger Differentialgleichung ist, so muss sie in dem vollständigen Integral jener Gleichung

$$y = A\sin z + B\cos z + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \frac{e^{-uz}.u^{\alpha-1}}{1+u^2}\,du$$

für gewisse Werte der Constanten A und B enthalten sein.

Nun repräsentirt $z^{\frac{1}{2}}S_{-\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ für $z=0$, $\alpha<1$, wie aus Früherem (§ 2) zu entnehmen, den Wert $\dfrac{\pi}{2\Gamma(\alpha)\sin\frac{\alpha}{2}\pi}$ oder, was dasselbe ist, $\Gamma(1-\alpha)\cos\frac{\alpha}{2}\pi$, ferner hat man bekanntlich

$$\int_0^\infty \frac{u^{\alpha-1}}{1+u^2}\,du = \frac{\pi}{2\sin\frac{\alpha}{2}\pi}$$

$z=0$ verlangt daher

$$y_0 = B + \frac{\pi}{2\Gamma(\alpha)\sin\frac{\alpha\pi}{2}}.$$

Hieraus folgt notwendig $B = 0$, und aus dem Umstande, dass für $z = \infty$ $z^{\frac{1}{2}}S_{-\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ sich auf null zurückzieht, lässt das vollständige Integral weiter erkennen, dass auch die Constante A verschwinden muss, demnach ist

$$z^{\frac{1}{2}}S_{-\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \frac{e^{-uz}.u^{\alpha-1}}{1+u^2}\,du$$

Durch Differentiation geht daraus sofort hervor

$$\frac{\partial(z^{\frac{1}{2}}S_{-\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2}})}{\partial z} = -\alpha.z^{\frac{1}{2}}S_{-(\alpha+1),\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \frac{e^{-uz}.u^{\alpha}}{1+u^2}\,du$$

und weiter durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens unter Berücksichtigung, dass

$$\frac{\partial(z^{\frac{1}{2}}S_{-\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2}})}{\partial z} = \frac{z^{1-\alpha} - z^{\frac{1}{2}}S_{-\alpha+1,\frac{1}{2}}}{1-\alpha},$$

$$\frac{\partial(z^{\frac{1}{2}}S_{-\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2}})}{\partial z} = (1-\alpha)\,z^{\frac{1}{2}}S_{-\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$$

resultirt

$$\frac{\partial^2(z^{\frac{1}{2}}S_{-\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2}})}{\partial z^2} = z^{-\alpha} - z^{\frac{1}{2}}S_{-\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \frac{e^{-uz}.u^{\alpha+1}}{1+u^2}\,du$$

$$= \frac{\partial(-\alpha.z^{\frac{1}{2}}S_{-(\alpha+1),\frac{1}{2}})}{\partial z},$$

$$\frac{\partial^3(z^{\frac{1}{2}}S_{-\alpha+1,\frac{1}{2}})}{\partial z^3} = -\alpha.z^{-\alpha-1} + \alpha.z^{\frac{1}{2}}S_{-(\alpha+1),\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \frac{e^{-uz}.u^{\alpha+2}}{1+u^2}\,du$$

$$= \frac{\partial^2(-\alpha.z^{\frac{1}{2}}S_{-(\alpha+1),\frac{1}{2}})}{\partial z^2}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots$$

Die hier vorkommenden Integrale, welche die bekannten Gilbert'schen als Specialfälle enthalten, haben die Eigenschaft wesentlich positive Werte vorzustellen, und es können deshalb obige Beziehungen zwischen ihnen und den S-Functionen dazu dienen über den Verlauf von $z^{\frac{1}{2}}S_{-\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ und $\frac{\partial(z^{\frac{1}{2}}S_{-\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2}})}{\partial z}$ bei veränderlichem positivem z Schlüsse zu ziehen.

6) Aus ihnen entnimmt man, dass die Function $z^{\frac{1}{2}}S_{-\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ stets **positiv** ist und vom Werte $\cos\frac{\alpha}{2}\pi.\Gamma(1-\alpha)$ für $z=0$ an mit wachsendem z immer mehr abnimmt, um endlich für $z=\infty$ zu verschwinden. Als Curve betrachtet, schneidet dieselbe die Ordinatenachse in der Höhe $y=\cos\frac{\alpha}{2}\pi.\Gamma(1-\alpha)$ und nähert sich sodann asymptotisch der Abscissenachse, derselben ihre convexe Seite zuwendend. Die Function $\frac{\partial(z^{\frac{1}{2}}S_{-\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2}})}{\partial z}$ dagegen ist immerfort **negativ**. Vom Werte $y=-\sin\frac{\alpha}{2}\pi.\Gamma(1-\alpha)$ bei $z=0$ anfangend nimmt sie mit wachsendem z beständig zu, um auch schliesslich für $z=\infty$ zu null zu werden. Stellt man sich auch diese Function in graphischer Weise dar, so findet man, dass dieselbe die Y Achse unter dem Ordinatenwert $y=-\sin\frac{\alpha}{2}\pi.\Gamma(1-\alpha)$ berührt und gegen die Z-Achse sich asymptotisch erhebend derselben ihre convexe Seite zukehrt.

Nach diesen Auseinandersetzungen betreffs der S wird es ebenso gelingen über den Verlauf der sich aus S-Functionen zusammensetzenden Integralwerte Schlüsse zu ziehen.

Zu diesem Zwecke denken wir uns die Integrale zwischen den Grenzen 0 und z genommen unter gleichzeitiger Voraussetzung von $\alpha<1$. Die Function $\int_0^z\frac{\sin z}{z^\alpha}dz$ wird ein Maximum oder Minimum, wenn

$$\frac{\partial\int_0^z\frac{\sin z}{z^\alpha}dz}{\partial z}=\frac{\sin z}{z^\alpha}=0,$$

also für $z=n\pi$, wenn n eine ganze Zahl vorstellt. Die Maxima werden daher für $z=(2n+1)\pi$ eintreten, während die Minima den Wert $z=2n\pi$ fordern.

Das obige Integral zwischen den angenommenen Grenzen stellt sich unter Berücksichtigung der Entwicklung in § 4. wie folgt dar

$$\int_0^z\frac{\sin z}{z^\alpha}dz=\cos\frac{\alpha}{2}\pi.\Gamma(1-\alpha)+\frac{\partial(z^{\frac{1}{2}}S_{-\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2}})}{\partial z}\sin z-z^{\frac{1}{2}}S_{-\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\cos z.$$

Da nun die Bedingung der Maxima sich an die Werte $x=(2a+1)\pi$ knüpfte, und, wie oben gezeigt wurde, die Function $z^{\frac{1}{2}}S_{-a+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ stets positiv ist, so werden diese Maximalwerte ausgedrückt durch

$$\left(\int_0^x \frac{\sin z}{z^a}\,dz\right)_{\max} = \cos\frac{\alpha}{2}\pi.\Gamma(1-\alpha)+z^{\frac{1}{2}}S_{-a+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$$

und ähnlich sind die Minima enthalten in

$$\left(\int_0^x \frac{\sin z}{z^a}\,dz\right)_{\min} = \cos\frac{\alpha}{2}\pi.\Gamma(1-\alpha)-z^{\frac{1}{2}}S_{-a+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}.$$

Weil nun $z^{\frac{1}{2}}S_{-a+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ früherer Discussion gemäss nur für $z=0$ den Wert $\cos\frac{\alpha}{2}\pi.\Gamma(1-\alpha)$ annimmt, ausserdem aber immer kleiner als dieser Wert ist, so können die Maxima nie $2\cos\frac{\alpha}{2}\pi.\Gamma(1-\alpha)$ erreichen, und ebensowenig dürfen die Minima unter null herabsinken. Das Integral ist deshalb stets positiv. Als Curve gedacht verläuft dieselbe zwischen der Geraden $y=2\cos\frac{\alpha}{2}\pi.\Gamma(1-\alpha)$ und der Abscissenachse, welche letztere sie im Anfangspunkte berührt. Von dieser Stelle an erhebt sie sich über die Gerade $y=\cos\frac{\alpha}{2}\pi.\Gamma(1-\alpha)$ zum ersten Maximum, sinkt wiederum unter das Niveau obiger Geraden u. s. f., um sich nach unzählig vielen Windungen dieser Geraden asymptotisch zu nähern, da für $x=\infty$ der Integralwert eben zu $\cos\frac{\alpha}{2}\pi.\Gamma(1-\alpha)$ wird. Die grössten Hebungen und tiefsten Senkungen unserer Curve nehmen bei jedem neuen Maximum und Minimum stetig ab; ihre Gipfel liegen bzhw. auf den Curven

$$y=\cos\frac{\alpha}{2}\pi\Gamma(1-\alpha)+x^{\frac{1}{2}}S_{-a+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$$

und

$$y=\cos\frac{\alpha}{2}\pi.\Gamma(1-\alpha)-x^{\frac{1}{2}}S_{-a+\frac{1}{2},\frac{1}{2}},$$

welche symmetrisch zu beiden Seiten der Asymptote verlaufen. Die Schnittpunkte der Curve mit der Asymptote sind durch das Gleichungspaar

$$y = \frac{\partial(z^{\frac{1}{2}} S_{-\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2}})}{\partial z} \sin z - z^{\frac{1}{2}} S_{-\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \cos z + \cos\frac{\alpha}{2}\pi . \Gamma(1-\alpha)$$

$$y = \cos\frac{\alpha}{2}\pi . \Gamma(1-\alpha)$$

oder auch mit

$$\operatorname{tg} z = \frac{z^{\frac{1}{2}} S_{-\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}}{\frac{\partial(z^{\frac{1}{2}} S_{-\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2}})}{\partial z}}$$

gegeben.

Das Integral $\int_0^z \frac{\cos z}{z^\alpha} dz$, ($\alpha$ positiv u. < 1 voraussgesetzt), welches sich zwischen den gegebenen Grenzen, wie folgt, darstellt

$$\int_0^z \frac{\cos z}{z^\alpha} dz = \sin\frac{\alpha}{2}\pi . \Gamma(1-\alpha) + \frac{\partial(z^{\frac{1}{2}} S_{-\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2}})}{\partial z} \cos z + z^{\frac{1}{2}} S_{-\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \sin z,$$

hat seine Maxima und Minima für $z = (2n+1).\frac{\pi}{2}$, wenn n wiederum eine ganze Zahl bedeutet. Dio Maxima treten bei $z = (4n+1)\frac{\pi}{2}$, die Minima für $z = (4n+3)\frac{\pi}{2}$ ein, erstere sind dargestellt durch

$$\left(\int_0^z \frac{\cos z}{z^\alpha} dz\right)_{\max} = \sin\frac{\alpha}{2}\pi . \Gamma(1-\alpha) + z^{\frac{1}{2}} S_{-\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$$

während letztere den Werten

$$\left(\int_0^z \frac{\cos z}{z^\alpha} dz\right)_{\min} = \sin\frac{\alpha}{2}\pi . \Gamma(1-\alpha) - z^{\frac{1}{2}} S_{-\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$$

bei wechselndem z gleichkommon. Doch dieses Insegral ist unter den oben gemachten Voraussetzungen nur dann stets positiv, wenn $\alpha \geq \frac{1}{2}$; es können die Maxima, wie man ersieht, niemals den Wert $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\pi + 45^0\right).\sqrt{2}.\Gamma(1-\alpha)$ erreichen, und ebensowenig dürfen die Minima his $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\pi - 45^0\right).\sqrt{2}.\Gamma(1-\alpha)$ herabsinken. Die durch das Integral vorgestellte Curve herührt im Coordinatenanfang die Y-Achse, verlänft sodann zwischen den Geraden

$$y = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\pi + 45^0\right).\sqrt{2}\,.\,\Gamma(1-\alpha)$$

und

$$y = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\pi - 45^0\right).\sqrt{2}.\Gamma(1-\alpha)$$

und nähert sich, nachdem sie unzählig oft die Gerade

$$y = \sin\frac{\alpha}{2}\pi\,.\,\Gamma(1-\alpha)$$

durchsetzt, derselben asymptotisch; die Schnittpunkte der Curve mit ihr sind gegeben durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} z = -\frac{\frac{\partial(S_{-\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2}})}{\partial z}}{S_{-\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}}$$

und die Gipfel ihrer Maxima und Minima gehören bzhw. den Curven

$$y = \sin\frac{\alpha}{2}\pi\,.\,\Gamma(1-\alpha) + z^{\frac{1}{2}}\,S_{-\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$$

und

$$y = \sin\frac{\alpha}{2}\pi\,.\,\Gamma(1-\alpha) - z^{\frac{1}{2}}\,S_{-\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$$

an, die ebenfalls hier zur Asymptote symmetrisch gelagert sind.

7) Ferner ist es möglich die allgemeinen Integrale der Functionen $\frac{\sin z}{z^\alpha}$ und $\frac{\cos z}{z^\alpha}$ auf vier verschiedene Arten in Reihen zu entwickeln, welche nach Bessel'schen Functionen und den Potenzen von z fortschreiten. Es ist nämlich

$$\int \frac{\sin z}{z^\alpha}\,dz = \int z^{\frac{1}{2}-\alpha}\,\frac{\sin z}{\sqrt{z}}\,dz = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\int z^{\frac{1}{2}-\alpha}J_{\frac{1}{2}}\,dz,$$

welch letzterer Integralwert identisch ist mit

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int z^{\frac{1}{2}-\alpha-\frac{1}{2}}.z^{\frac{1}{2}}J_{\frac{1}{2}}\,dz.$$

Für jeden Wert von ν herrscht aber die Beziehung [1])

$$\int z^\nu J_{\nu-1}\,dz = z^\nu\,.\,J_\nu$$

---

1) Lommel, Studien über die Bessel'schen Functionen. S. 20.

und diese Formel auf den eben gefundenen Ausdruck des fraglichen Integrals angewendet findet sich nach den Regeln der partiellen Integration zunächst

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \int z^{n-\alpha-\frac{1}{2}} . z^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}} dz = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[z^{\frac{1}{2}-\alpha-\frac{1}{2}} . z^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}} + (\alpha+1) . \int z^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}} . z^{-\alpha-2} dz \right]$$

und durch ähnliche Umformungen eines jeden neu auftretenden Integrals mit Hilfe obiger Gleichung nach einigen Reductionen die Entwicklung:

$$\int \frac{\sin z}{z^\alpha} dz = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{z^\alpha} \left[z^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}} + (\alpha+1) z^{-\frac{1}{2}} J^{\frac{1}{2}} + (\alpha+1)(\alpha+3) . z^{-\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}} + \ldots \right.$$
$$\left. + ((\alpha+1)^{p/2} . z^{-\frac{2p-1}{2}} J_{\frac{2p+3}{2}} + \ldots \right]$$
$$- \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{z^\alpha} \Sigma (\alpha+1)^{p/2} . z^{-\frac{2p-1}{2}} J_{\frac{2p+3}{2}}$$

in gleicher Weise erhält man für das zweite in Rede stehende Integral die Reihe

$$\int \frac{\cos z}{z^\alpha} dz = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{z^\alpha} \left[z^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}} + \alpha . z^{-\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}} + \alpha(\alpha+2) . z^{-\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}} + \ldots \right.$$
$$\left. + \alpha^{p/2} . z^{-\frac{2p-1}{2}} J_{\frac{2p+1}{2}} + \ldots \right]$$
$$= \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{z^\alpha} \Sigma \alpha^{p/2} . z^{-\frac{2p-1}{2}} J_{\frac{2p+1}{2}}.$$

Beide Summen stellen, da die Exponenten der z negativ sind, und übordies die Bessel'schen Functionen mit wachsendem Index rasch abnehmen, convergirende Entwicklungen dar, was auch α sein mag.

Ein zweites sich diesen Ausdrücken zur Seite stellendes und sie in gewisser Beziehung ergänzendes Reihenpaar lässt sich durch Anwendung der allgemein gültigen Relation [1])

---

1) Lommel a. a. O.

$$\int x^{-\nu} J_{\nu+1}\, dx = -x^{-\nu} J_\nu$$

gewinnen.

Weil nämlich

$$\int \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int x^{\frac{1}{2}-\alpha} J_{\frac{1}{2}}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int x^{-\alpha} . x^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}\, dx$$

so kann dies letztere Integral im Sinne der partiellen Integration durch die oben angegebene Gleichung umgeformt werden. Zunächst ergiebt sich wiederum

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \int x^{-\alpha} . x^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[-x^{-\alpha} . x^{\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{2}} - \alpha \int x^{\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{2}} x^{-\alpha-1}\, dx \right]$$

und die fortgesetzte Anwendung dieses Verfahrens, nachdem immer zuvor das neu resultirende Integral passend umgestaltet wurde, liefert endlich

$$\int \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{x^\alpha} \left[-x^{\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{2}} + \alpha . x^{-\frac{1}{2}} J_{-\frac{3}{2}} - \alpha(\alpha+2) . x^{-\frac{1}{2}} J_{-\frac{5}{2}} + \ldots \right.$$

$$\left. (-1)^{p+1} . \alpha^{p/2} . x^{-\frac{2p-1}{2}} J_{-\frac{2p+1}{2}} \ldots \right]$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{x^\alpha} \Sigma (-1)^{p+1} . \alpha^{p/2} . x^{-\frac{2p-1}{2}} J_{-\frac{2p+1}{2}}$$

und ähnlich findet man

$$\int \frac{\cos x}{x^\alpha} = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{x^\alpha} \left[-x^{\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{2}} + (\alpha+1) . x^{-\frac{1}{2}} J_{-\frac{3}{2}} - (\alpha+1)(\alpha+3) . x^{-\frac{1}{2}} J_{-\frac{5}{2}} + \ldots \right.$$

$$\left. (-1)^{p+1} (\alpha+1)^{p/2} . x^{-\frac{2p-1}{2}} J_{-\frac{2p+3}{2}} \ldots \right]$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{x^\alpha} \Sigma (-1)^{p+1} (\alpha+1)^{p/2} . x^{-\frac{2p-1}{2}} J_{-\frac{2p+3}{2}}$$

Die hier vorkommenden Summen sind eigentlich divergent, weil die Indices der Bessel'schen Functionen negativ ausfallen, können aber, wie die früher erhaltenen divergenten Reihen, besonders für grosse x zur Berechnung der Integrale dienen, weil in diesem Falle, wie man nachzuweisen im Stande ist, der auftretende Rest immer

kleiner ist als das letzte Glied der Entwicklung; es wird dann das Integral so zu sagen durch einen geschlossenen Ausdruck repräsentirt.

Weitere Reihen liefern die Gleichungen [1])

$$\frac{\partial(z^{-\nu}J_\nu)}{\partial z} = -z^{-\nu}J_{\nu+1}$$

und

$$\frac{\partial(z^{\nu}.J_\nu)}{\partial z} = z^{\nu}.J_{\nu-1}$$

wenn dieselben auf die mit bzhw. $\int \frac{\sin z}{z^\alpha}dz$ und $\int \frac{\cos z}{z^\alpha}dz$ identischen Formen

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int z^{1-\alpha}.z^{-\frac{1}{2}}J_{\frac{1}{2}}dz \qquad \sqrt{\frac{\pi}{2}}\int z^{-\alpha}.z^{\frac{1}{2}}J^{\cdot}dz$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int z^{-\alpha}.z^{\frac{1}{2}}J_{-\frac{1}{2}}dz \qquad \sqrt{\frac{\pi}{2}}\int z^{1-\alpha}.z^{-\frac{1}{2}}J_{-\frac{1}{2}}dz$$

bei partieller Integration in Anwendung kommen. So findet sich bei Benutzung der ersten Relation

$$\int \frac{\sin z}{z^\alpha}dz = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{z^\alpha}\left[\frac{z^{\cdot}}{2-\alpha}J_{\frac{1}{2}} + \frac{z^{\frac{1}{2}}}{(2-\alpha)(4-\alpha)} + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + \frac{z^{\frac{2p+3}{2}}}{(2-\alpha)^{p+1/2}}J_{\frac{2p+1}{2}} + \cdots\right]$$
$$-\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{z^\alpha}\Sigma\frac{z^{\frac{2p+3}{2}}}{(2-\alpha)^{p+1/2}}J_{\frac{2p+1}{2}}$$

und

$$\int \frac{\cos z}{z^\alpha}dz = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{z^\alpha}\left[\frac{z^{\frac{1}{2}}}{1-\alpha}.J_{-\frac{1}{2}} + \frac{z^{\frac{1}{2}}}{(1-\alpha)(2-\alpha)}J_{\frac{1}{2}} + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{z^{\frac{2p+3}{2}}}{(1-\alpha)^{p+1/2}}J_{-\frac{2p-1}{2}} + \cdots\right]$$

---

1) Lommel, Studien über die Bessel'schen Functionen. S. 8.

$$= \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{z^\alpha} \Sigma \frac{z^{\frac{2p+3}{2}}}{(1-\alpha)^{p+1/2}} J_{\frac{2p-1}{2}}$$

und ebenso folgt durch die zweite Formel

$$\int \frac{\sin z}{z^\alpha} dz = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{z^\alpha} \left[\frac{z^{\frac{1}{2}}}{1-\alpha} J_{\frac{1}{2}} - \frac{z^{\frac{1}{2}}}{(1-\alpha)(3-\alpha)} J_{-\frac{1}{2}} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + (-1)^p \frac{z^{\frac{2p+3}{2}}}{(1-\alpha)^{p+1/2}} J_{-\frac{2p-1}{2}} + \ldots \right]$$
$$= \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{z_\alpha} \Sigma (-1)_p \frac{z^{\frac{2p+3}{2}}}{(1-\alpha)^{p+1/2}} J_{-\frac{2p-1}{2}}$$

und

$$\int \frac{\cos z}{z^\alpha} dz = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{z^\alpha} \left[\frac{z^{\frac{1}{2}}}{2-\alpha} J_{-\frac{1}{2}} - \frac{z^{\frac{1}{2}}}{(2-\alpha)(4-\alpha)} J_{-\frac{1}{2}} + \ldots \right.$$
$$\left. + \ldots (-1)^p \frac{z^{\frac{2p+3}{2}}}{(2-\alpha)^{p+1/2}} J_{-\frac{2p+1}{2}} \ldots \right]$$
$$= \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{z^\alpha} \Sigma (-1)^p \frac{z^{\frac{2p+3}{2}}}{(2-\alpha)^{p+1/2}} J_{-\frac{2p+1}{2}}$$

Auch hier sind die beiden ersten Ausdrücke convergent, während die sich ihnen anschliessenden anderen Entwicklungen zur Classe der semiconvergenten Reihen gehören. Welchen Wert daher α vorstellen mag, es wird immer gelingen aus diesen vier Summen ein für den gegebenen Fall zur Rechnung geeignetes Paar auszuwählen. Es werden dann die in nächster Zeit durch Herrn Lommel zur Publication gelangenden Tafeln für die Bessel'schen Functionen mit gebrochenem Index ein Mittel an die Hand geben mit Hülfe vorstehender Reihen die Integrale

$$\int \frac{\sin z}{z^a} dz \quad \text{und} \quad \int \frac{\cos z}{z^a} dz$$

für jedes a genügend genau auszuwerten und sie auf diese Weise der weiteren Anwendung zugänglicher zu machen.

Zum Schlusse fühle ich mich verpflichtet Herrn Prof. Lommel, der mir bei dieser Arbeit in freundlicher und zuvorkommender Weise ratgebend zur Seite stand, gebührenden Dank auszusprechen.

III.

Ueber rationale Dreiecke und ihren Zusammenhang mit der Pell'schen Gleichung.

Von

Dr. **Richard Müller**,

Berlin.

Verschiedene beim Unterricht in der Ober-Tertia gemachte Zahlenbeobachtungen brachten mich auf das Problem: „Alle rationalen Dreiecke herzustellen, deren Seitenlängen durch drei aufeinander folgende Zahlen gegeben sind."

Haben die 3 Seiten die Längen $x-1$, x, $x+1$, so ergiebt sich der Dreiecksinhalt nach der bekannten Elementarformel:

$$\triangle = \tfrac{1}{4}x\sqrt{3(x^2-4)}.$$

Damit er rational sei, muss also sein:

$$x^2-4 = 3y^2,$$

oder

$$x^2-3y^2 = 4.$$

Die quadratische Form x^2-3y^2 hat die Determinante $+3$, und da $(\frac{3}{2}) = -1$ ist, kann die Form die Zahl 4 nicht darstellen, wenn x und y relative Primzahlen sein sollen *).

Setzen wir aber:

---

*) cf. Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, § 36. und 60.

$$x = 2u, \quad y = 2v$$

so erhalten wir:

$$u^2 - 3v^2 = 1$$

und diese Pell'sche Gleichnng hat, wie bekannt, nnendlich viele Lösnngen, welche ans der kleinsten Lösnng $u = 2$, $v = 1$ leicht abgeleitet werden können; wenn nämlich (l. c. § 85)

$$(2 + \sqrt{3})^n = u_n + v_n \sqrt{3}$$

gesetzt wird, so sind u_n, v_n ebenfalls Lösnngen.

Die Anfangspotenzen ($n = 1$ bis 6) geben also die kleinsten Dreiecke der verlangten Art:

(3, 4, 5), (13, 14, 15), (51, 52, 53), (193, 194, 195),
(723, 724, 725), (2701, 2702, 2703).

Die immer fortschreitende Annäherung an das gleichseitige Dreieck lässt sich bei dem letzten dieser 6 Dreiecke in der Decimalbrnchform (27,01; 27,02; 27,03) zum besonderen Ansdruck bringen.

IV.

Allgemeine Theorie der Isophoten-Tangenten und Construction derselben für Flächen zweiten Grades.

Von

Josef Bazala,

Lehrer an der k. k. Staats-Oberrealschule in Bielitz.

I.

Allgemeine Theorie der Isophoten-Tangenten.

§. 1.

In Figur 1. der Tafel sollen s die Selbstschattengrenze einer Fläche F, und E und E_1 zwei dieselbe in den Punkten i und i_1 von s berührende Ebenen vorstellen, so dass die Durchschnittsgerade l' dieser Ebenen die Lichtstrahlenrichtung ist. Denkt man sich nun l' in der den Keil $El'E_1$ halbirenden Ebene E' nach l gedreht, so werden i und i_1 nicht mehr Punkte der Selbstschattengrenze sein, aber trotzdem gleich stark beleuchtet erscheinen; sie sind also Punkte einer und derselben Isophote. Wird nun die Ebene E_1 so bewegt, dass sich ihr Berührungspunkt i_1 auf s fortschreitend dem Punkte i immer nähert, und wird während dieser Bewegung der sich ändernde Lichtstrahl immer in der Halbirungsebene E' des Keiles $El'E_1$ belassen, so werden sich zwar die Beleuchtungsstärken von i und i_1 ändern, beide Punkte müssen aber immer gleich stark beleuchtet erscheinen, selbst in dem Momente, in welchem i und i_1 und daher auch E und E_1 benachbarte Elemente werden, und die dann durch i gehende Grenzlage l' ihrer Schnittgeraden die orthogonale Projection der Grenzlinie l auf die Berührungsebene EE_1 ist. Da aber die Gerade ii_1 in dieser Grenzlage eine Tangente t von s wird, so resultirt folgender Satz:

Wenn bei einer beleuchteten Fläche F die Lichtstrahlenrichtung l' in einer Ebene E' gedreht wird, so werden diejenigen Tangenten der früheren Selbstschattengrenze, welche in den zu E' normalen Berührungsebenen E von F liegen, Tangenten anderer Isophoten J mit Beibehaltung ihrer Berührungspunkte.

Will man hingegen für eine Lichtstrahlenrichtung l in einem Punkte i einer Fläche F die Tangente der durch ihn gehenden Isophote darstellen, so hat man l auf die F in i berührende Ebene E orthogonal zu projiciren und für diese Projection l' als Lichtstrahleneinrichtung die durch i gehende Tangente t der Selbstschattengrenze darzustellen; t ist dann die verlangte Isophoten-Tangente.

Wie dieses allgemeine Princip bei den Flächen zweiten Grades durchzuführen ist, damit die Construction der Isophoten-Tangenten ausser dem Interesse, welches schon ihre theoretische Möglichkeit und wirkliche Durchführbarkeit bieten, auch die vollständige Darstellung der Isophoten in hohem Masse erleichtern, werden wir in den folgenden Paragraphen zeigen. Ausserdem lässt sich unser Princip überhaupt bei allen Flächen durchführen, bei welchen man Tangenten der Selbstschattengrenze construiren kann.

II.

Beleuchtungs-Constructionen für das Ellipsoid mit besonderer Berücksichtigung der Isophoten-Tangenten.

A) Bei gewöhnlicher Darstellung durch Grund- und Aufriss.

§. 2.

Um bei dem in Fig. 2. durch seine zu den Projectionsebenen parallelen Hauptschnitte P und Q dargestellten Ellipsoide die Isophoten zu construiren, suchen wir die Isophotenpunkte einzelner verticaler Achsenschnitte (Seitenlinien) desselben. Wir zeichnen über der Flächenachse BC als Durchmesser einen zur verticalen Projectionsebene parallelen Kreis M und legen denselben unserer Construction in derselben Weise zu Grunde, wie dies in unserer Abhandlung „Beleuchtungs-Constructionen für Flächen, deren zu einer Achse normale Schnitte ähnlich und ähnlich liegend sind, bei orthogonaler und bei perspectivischer Darstellung“ (Archiv der Mathematik und Physik, II. Reihe, Teil 1.) in Fig. 1. bezüglich der gezeichneten Seitenlinie M geschehen ist.

Um die Richtungen der den einzelnen Seitenlinien M zukommenden Tangenten t_1 am einfachsten zu erhalten, zeichnen wir in

der Nebenfigur 2_a aus einem Punkte der Projectionsachse x einen durch S' gehenden Kreis $\varkappa$, führen in der Hauptfigur die Scheiteltangenten t_3 und t_4 von P', hierauf zu der sich dadurch ergebenden Geraden $A'b$ in der Nebenfigur die Parallele $S'b$ und schliesslich $b\varepsilon$ normal zu x. Zieht man jetzt zu M_1' [Fig. 2.] in der Nebenfigur die Parallele $S'b_1$ und dann die Gerade $b_1\varepsilon c_1$, so ergibt sich in $S'c_1$ die der Richtung $S'b_1$ involutorisch entsprechende Richtung der Tangente t_1 [Fig. 2] [1]).

Hat man bezüglich der Seitenlinie M_1 in der Nebenfigur auf bekannte Art die Punktreihe $m\,n$ dargestellt [$t_1 d'$, $d' d_1 \parallel l'$ u. s. w.], so ist dieselbe in der in der Hauptfigur sich ergebenden Richtung $e_1 f$[$A'f = A'a'$] auf den Träger z zu projiciren. Nun markirt man die Endpunkte der zu den Strahlen des Normalbüschels $S_n z$ parallelen Radien des Kreises M''. Das Projiciren dieser Punkte auf die Seitenlinie M_1 wird wesentlich vereinfacht, wenn man mit dem Halbmesser $A''a''_1$ aus A'' einen Kreis N beschreibt und den zu $S_n z$ parallelen Strahlenbüschel A'' durch beide Kreise M'' und N schneidet; die zu x_1 Parallelen durch die Punktreihe M'' und die zu x_1 Normalen durch die Punktreihe N geben beide Projectionen der Isophotenpunkte.

Wir wollen jetzt in den dargestellten Isophotenpunkten die Isophoten-Tangenten construiren. Nach unserem allgemeinen Principe [§. 1.] hätten wir beispielsweise für den Isophotenpunkt 5 die das Ellipsoid in diesem Punkte berührende Ebene E_5 zu bestimmen, deren in der Hauptschnittebene P liegend zu t_1 parallele Spur u_5 ist, auf E_5 einen Lichtstrahl zu projiciren und für die sich so ergebende Richtung als Lichtstrahlenrichtung die durch den Flächenpunkt 5 gehende Ebene E_3 der Selbstschattengrenze zu construiren; der Schnitt der Ebenen E_5 und E_3 ist schon eine Tangente der genannten Selbstschattengrenze und daher auch die verlangte Isophoten-Tangente. Von den beiden Systemen von Ebenen E und E_3 werden wir blos die in der Hauptschnittebene P liegenden Spuren darstellen, so dass sich durch geradlinige Verbindung ihrer Durchschnittspunkte mit den entsprechenden Isophotenpunkten schon die Isophoten-Tangenten ergeben.

Bezüglich der Ebenen E ziehe man an M'' zu den Strahlen des Büschels $S_n z$ [Fig. 2a] normale Tangenten, was am zweckmässigsten gleichzeitig mit der Führung der durch A'' gehenden Radien

1) Diese Construction conjugirter Durchmesser der Linien zweiten Grades findet man in Dr. L. Burmester's „Theorie und Darstellung der Beleuchtung gesetzmässig gestalteter Flächen" p. 35. (Leipzig 1871).

vorgenommen wird, und markire ihre auf x'' liegenden Schnittpunkte welche in der Richtung $a''a'$ auf x' und von hier in der Richtung $a'a_1'$ auf M_1' projicirt werden sollten; die dann durch die Punktreihe M_1' zu t_1 parallel zu führenden Geraden u stellen schon die erwähnten Spuren der Berührungsebenen vor. Weil aber bei dieser Construction der durch die Punktreihe x'' zu $a''a'$ parallel gehende Strahlenbüschel mit dem resultirenden Parallelbüschel u die unendlich ferne Gerade gemeinschaftlich hat, müssen beide perspectivisch sein; man bestimme daher den Schnittpunkt α der Strahlen $a''a'$ und t_1, durch welchen das Erzeugniss $A'\alpha$ der beiden Parallelbüschel geführt wird. Der erstere Büschel ist dann durch $A'\alpha$ zu schneiden, worauf durch die sich ergebende Punktreihe die zu t_1 parallelen Spuren u geführt werden.

Weil von den Projectionen der Lichtstrahlenrichtung auf die construirten Berührungsebenen E blos die Richtungen erforderlich sind, werden wir in der Nebenfigur den durch S geführten Lichtstrahl l auf die Berührungsebenen des Kegelbüschels [s. unsere „Beleuchtungsconstructionen ... " [S. 267.], welche zu den Ebenen E parallel sind, projiciren, wobei sich als Projectionen die betreffenden Berührungs-Erzeugenden der Kegel ergeben. Wir bestimmen also in der umgelegten Lage die Berührungspunkte der aus d_1 an den Kreisbüschel geführten Tangenten mittelst des über $d_1 o$ als Durchmesser geführten Kreises k_1 und drehen sie dann in den Raum auf; dies geschieht am einfachsten, wenn man durch d' und die Punktreihe $m n$ die horizontalen Projectionen der Kreistangenten zieht und auf dieselben in der Richtung l' die auf k_1 liegenden Schnittpunkte projicirt. Die sich ergebenden Punkte liegen im Umfange einer Ellipse k_1', die der Grundriss des aufgedrehten Kreises k_1 ist, und gehen, mit S' durch Strahlen verbunden, schon die horizontalen Projectionen der bei unserer Construction vorkommenden Lichtstrahlenrichtungen.

Der construirte Büschel S' wird durch den Kreis $\varkappa$ geschnitten und der dadurch entstehende Strahlenbüschel $\varepsilon\varkappa$ wieder mit $\varkappa$ zum Durchschnitt gebracht. Die sich schliesslich ergebenden Punkte gehen mit S' einen Büschel, zu dessen Strahlen man in der Hauptfigur durch A' Parallele zu führen hat, welche schon die oben erwähnten Spuren der Ebenen E_3 sind; von denselben braucht man blos die auf den entsprechenden Spuren u liegenden Schnittpunkte h_5', h_4', h_3' ... zu markiren. Sucht man noch die in l''' liegenden verticalen Projectionen der letzteren Punkte, so kann man beide Projectionen der Isophoten-Tangenten zeichnen.

Es lassen sich auch in der Nebenfigur die Richtungen der Isophoten-Tangenten construiren, so dass man zu denselben durch die

Isophotenpunkte blos Parallele zu ziehen braucht; doch ist obiger Vorgang zweckmässiger.

Bei der die Lichtpole enthaltenden Seitenlinie M_2 würde man zur Construction der Isophotenpunkte den in unseren „Beleuchtungs-Constructionen" auf S. 270 angegebenen Vorgang an. Weil die bei der Construction der Isophoten-Tangenten hier in Anwendung kommenden Berührungs-Erzeugenden des Kegelbüschels in der Lichtrissebene liegen, fallen in der Hauptfigur die Spuren der Ebenen aller Selbstschattengrenzen mit dem zu l' conjugirten Durchmesser $\mu\nu$ zusammen, weshalb man die entsprechenden Spuren u nicht zu ziehen, sondern nur ihre auf $\mu\nu$ liegenden Schnittpunkte zu markiren braucht.

Bei der Bestimmung der in der Verticalcontour liegenden Isophotenpunkte ist es nicht nothwendig, den Kreis N darzustellen. Die verticalen Projectionen der zugehörigen Isophoten-Tangenten werden durch die Contour ersetzt, so dass nur die Construction ihrer horizontalen Projectionen angezeigt ist; es ist dabei zweckmässiger, anstatt die an den Kreis M'' zu führenden Tangenten durch x'' zu schneiden, mittelst der Affinitätsachse $B''C''$ die Contourtangenten zu bestimmen und ihre auf x'' liegenden Schnittpunkte zu markiren.

Für die Construction der in dem Hauptschnitte P liegenden Isophotenpunkte wird man in bekannter Weise eine Hälfte der symmetrischen Punktreihe D_1 darstellen, dieselbe in der Richtung l' nach D' projiciren und diese Punktreihe symmetrisch ergänzen. Die zu den Strahlen des Büschels $S'D'$ conjugirten Durchmesser von P' [Fig. 2], deren Richtungen wieder mittelst des Kreises $\varkappa$ bestimmt werden, schneiden die Horizontalcontour in ihren Isophotenpunkten. Da der oben angegebene Vorgang für die Construction der Isophoten-Tangenten hier zu keinem Resultate führt, zeichnen wir in der Nebenfigur, in welcher h der Durchstosspunkt des durch S gehenden Lichtstrahles l mit dem Grundrisse ist, über $S'h'$ als Durchmesser den Kreis k_2'. Weil die Strahlen des Büschels $S'D'$ die horizontalen Projectionen der durch S parallel zu den den construirten Isophotenpunkten entsprechenden Berührungsebenen sind, so ergeben sich auf denselben durch den Kreis k_2' schon die Projectionen des Lichtstrahles l auf die genannten Ebenen. $S'0'$, $S'1'$, $S'2'$, $S'3'$ ... sind nämlich die Grundrisse dieser neuen Lichtstrahlenrichtungen, aus welchen man ihre Aufrisse $S''0''$, $S''1''$, $S''2''$ ... erhält. Mittelst des letztgenannten Büschels kann nun im Hauptschnitte Q [Fig. 2] dieselbe Construction der Isophoten-Tangenten durchgeführt werden, welche wir bisher im Hauptschnitte P vornahmen. Man führe an P' parallel zu den Strahlen des Büschels $S'D'$ [Fig. 2a] Tangenten

und markire ihre in x' liegenden Schnittpunkte, durch welche die zu x_1 normalen in der Ebene Q liegenden Spuren der Berührungsebenen zu ziehen sind. Die zu den Strahlen des Büschels $S''x$ [Fig. 2a] conjugirten Durchmesser der Ellipse Q'' ergeben sich am einfachsten durch Supplementarsehnen.

Die durchgeführten Beleuchtungs-Constructionen lassen sich in ungeänderter Form auch ausführen, wenn nur ein Hauptschnitt des Ellipsoids zu einer Projectionsebene parallel ist.

B) Bei axonometrischer Darstellung.

§. 3.

Bei axonometrischer Darstellung betrachten wir die Bilder eines Hauptschnittes P des Ellipsoids und der zu ihm normalen Flächenachse BC als Angaben. Wir legen unserer Construction eine Ellipse M zu Grunde, deren Bild der über BC als Durchmesser geführte Kreis ist, und stellen nach dem in unseren „Beleuchtungs-Constructionen" auf den Seiten 271 und 272 angegebenen Vorgange die Hilfsfigur her; nur wird man in letzterer ausser den Geraden D_1 und (D_1) auch die Gerade D' construiren. Zur Bestimmung der Richtungen t der den einzelnen Seitenlinien entsprechenden Berührungscylinder ist es zweckmässig, in der Nebenfigur einen die Gerade $S'z$ in S' berührenden Kreis x' [vergl. Fig. 5a] so zu construiren, dass derselbe die conjugirten Richtungen für das Bild des Hauptschnittes P liefert.

Nachdem man bezüglich einer Seitenlinie M_1 in der Nebenfigur [vgl. Fig. 5a] die Punkte d', $d_1[d'd_1 \parallel l']$ und (d_1) $[d_1[d_1)$ norm. $x]$ bestimmt hat, werden wegen der Construction der Isophoten-Tangenten von den aus (d_1) an den Kreisbüschel zu führenden Tangenten die in der Affinitätsachse x liegenden Punkte markirt, so dass dann der Strahlenbüschel d_1x die in die zu P parallele Grundebene aufgedrehten Lagen dieser Tangenten vorstellt; er schneidet mn in einer Punktreihe, welche in bekannter Weise auf den Träger x projicirt wird und dadurch einen Strahlenbüschel Sx liefert, der die Richtungen der an M [vergl. Fig. 2 unserer „Beleuchtungs-Constructionen"] zu führenden Tangenten angibt. Von diesen Tangenten markire man ausser den Berührungspunkten auch die in x und in der Affinitätsachse BC liegenden Schnittpunkte. Durch Projection der sich so ergebenden Punktreihe x auf den Träger M_1' erhält man die zu obigen affinen Tangenten von M_1, welche die Isophotenpunkte liefern.

Behufs Construction der Ispophoten-Tangenten führe man durch die Punktreihe M_1' die zu t_1 parallelen Spuren u der Berührungsebenen. Um die in (k_1) [vgl. Fig. 5a] liegenden Berührungspunkte des Kreisbüschels in den Raum aufzudrehen, projiciren wir sie zunächst mit Benutzung des Büschels $d_1 x$ auf die zu P parallele Grundebene und von hier nach der Richtung l' auf die Strahlen des Büschels $d' mn$. Die zuletzt erhaltenen Punkte gehen in S' einen Büschel, zu dessen Strahlen mittelst des Kreises x die conjugirten Richtungen bestimmt werden, nach denen in der Hauptfigur durch den Flächenmittelpunkt die Spuren der Selbstschattengrenzen geführt werden. Durch die Schnittpunkte dieser mit den entsprechenden Spuren u müssen die Isophoten-Tangenten gehen.

In ähnlicher Weise wird die die Lichtpole enthaltende Seitenlinie behandelt. Einfach gestaltet sich die Construction der Isophotenpunkte des Hauptschnittes P, während die Bestimmung der entsprechenden Isophoten-Tangenten zwar durchführbar, aber ziemlich umständlich ist.

Bei der Construction der in der Contour liegenden Isophotenpunkte werden wir in der Nebenfigur den in unseren „Beleuchtungs-Constructionen" auf Seite 273 angewandten Büschel $v \overline{mn}$ darstellen. Nun könnte man daraus die Isophoten-Punkte und -Tangenten bestimmen und mittelst derselben erst die Contour zeichnen; einfacher ist es aber, vorerst die Contour aus zwei conjugirten Durchmessern darzustellen [1]) und erst dann die Berührungspunkte der zu den Strahlen des Büschels $v \overline{mn}$ parallelen Contourtangenten mit Benutzung von Supplementarsehnen zu bestimmen; sie sind schon die gesuchten Isophotenpunkte.

C) Bei perspectivischer Darstellung.

§. 4.

Auch bei perspectivischer Darstellung betrachten wir die Bilder eines Hauptschnittes P und der zu ihm normalen und ihn in A treffenden Flächenachse BC als Angaben [2]) und bezeichnen die Flucht-

---

1) S. d. Verf. „Constructionen über Flächen zweiten Grades in allgemeiner Parallelprojection" (Jahresbericht der öffentlichen Oberrealschule in der Josefstadt in Wien. $188\frac{1}{2}$).

2) S. d. Verf. „Neue Constructionen über Flächen zweiter Ordnung mit besonderer Berücksichtigung der perspectivischen Darstellung" (Zeitschrift d. Vereines oesterr. Zeichenlehrer, Wien 1883).

linie des ersteren mit $\mu\nu$ [vergl. Fig. 3 unserer „Beleuchtungs-Constructionen"] und den Fluchtpunkt der letzteren mit α. Wir stellen eine als Kreis erscheinende Ellipse dar, deren eine Achse BC ist, indem wir den von B und C gleich weit entfernten Punkt μ der Fluchtlinie $\mu\nu$ bestimmen und dann die Geraden μB und μC führen, wodurch der dieselbe respective in den Punkten B und C berührende Kreis M die obigen Bedingungen erfüllt; er ist das Bild einer die Hauptschnittebene P in $A\mu$ schneidenden Ellipse mit den Achsen BC und $A\mu$.

Bei der Beleuchtungs-Construction wird das im vorigen Paragraphen befolgte Verfahren mit wenigen Aenderungen durchgeführt. Die Fluchtpunkte der Tangenten t ergeben sich hier am einfachsten durch die Bilder von Supplementarsehnen. Dann werden auf die in unseren „Beleuchtungs-Constructionen" im allgemeinen Falle angegebene Art (S. 275) die auf der Fluchtlinie $\mu\alpha$ von M liegenden Fluchtpunkte der an M zu führenden Tangenten bestimmt und von diesen Tangenten ausser den Berührungspunkten die auf M' und auf der Collineationsachse BC liegenden Schnittpunkte markirt, aus welchen sich die Isophotenpunkte von M_1 und die zu t parallelen Spuren u der Berührungsebenen ergeben. Für die Darstellung der Isophoten-Tangenten wird auf bekannte Art in der Nebenfigur der Büschel $S'k'$ dargestellt, worauf man wieder in der Hauptfigur mittelst der Bilder von Supplementarsehnen die durch A gehenden conjugirten Richtungen führt. Durch die Schnittpunkte der letzteren mit den Spuren u müssen schliesslich die Isophoten-Tangenten gehen.

Bei der Construction der in dem Hauptschnitte P liegenden Isophotenpunkte wird das im Paragraphen 2 angegebene Verfahren in fast ungeänderter Weise durchgeführt.

III.

Beleuchtungs-Constructionen für das elliptische Hyperboloid mit besonderer Berücksichtigung der Isophoten-Tangenten.

§. 5.

Wir betrachten ein elliptisches Hyperboloid, dessen reelle Achse zur horizontalen Projectionsebene normal und von dem ein Hauptschnitt M zur verticalen Projectionsebene parallel ist, als gegeben. Weil sich die Beleuchtungs-Constructionen bei dieser Fläche von denen des Ellipsoides nur in der Aufsuchung der Berührungspunkte der an die Seitenlinie M zu führenden Tangenten unterscheiden, haben wir in der entsprechenden Fig. 3 [Taf. I.] den Grundriss weggelassen.

Man führe ein für allemal durch einen Punkt S_n der reellen Flächenachse auf die Asymptoten T des Hauptschnittes M die Normalen $S_n c$, verbinde die Fusspunkte c derselben durch eine Gerade r'' und lege die Hilfsfigur so an, dass der Scheitel des aus derselben resultirenden Normalbüschels mit dem Punkte S_n zusammenfällt [$S'S'' = S_n S'$]. Hat man dann für irgend eine Seitenlinie M_1 in der Nebenfigur den Normalbüschel S_n dargestellt, so werden seine Strahlen durch die Gerade r'' geschnitten, und gleichzeitig behufs Darstellung der Isophoten-Tangenten zu denselben normale Tangenten an M'' geführt, und ihre auf der imaginären Achse x von M liegenden Schnittpunkte markirt. Verbindet man hierauf die auf r'' sich ergebenden Punkte mit dem Mittelpunkte A'' von M'' durch Gerade, so treffen diese M'' in denjenigen Berührungspunkten, welche, auf M_1 projicirt, die Isophotenpunkte liefern [1]). Der weitere Verlauf ist der beim Ellipsoid angegebene.

Bei axonometrischer Darstellung müssen auch eine Seitenlinie M samt ihren Asymptoten und ein zur reellen Flächenachse normaler Flächenschnitt gegeben sein [2]). Hat man ein für allemal bei dem Bilde von M aus einem Punkte S_n der reellen Achse des Bildes auf die Asymptoten die Normalen $S_n c$ gefällt und ihre Fusspunkte durch die Gerade r verbunden, so wird bei der Durchführung der bekannten Beleuchtungs-Construction der sich in der Nebenfigur, welche in der oben angegebenen Art mit der Hauptfigur zu vereinigen ist, ergebenden Büschel S_n mit r geschnitten und dann in bekannter Weise fortgefahren. Auch bei der Bestimmung der in der Flächencontour

---

1) Wir wollen die angewandte planimetrische Construction, welche Dr. L. Burmester in seiner „Theorie und Darstellung der Beleuchtung“ veröffentlicht hat, nach Principien der darstellenden Geometrie ableiten, indem wir uns die Aufgabe stellen, bei der in Fig. 3 samt den Asymptoten T dargestellten Hyperbel M'' den Berührungspunkt derjenigen Tangente t'' zu finden, welche auf einer gegebenen Geraden a'' normal steht. Denken wir uns das entstandene Viereck $S_n c A c$ um die Hyperbelachse $A S_n$ rotirt, so entstehen zwei auf einander normal stehende Kegelflächen mit der gemeinschaftlichen Basis r und den Scheiteln A und S_n. Die gegebene Hyperbel M kann man dann als die verticale Projection des Schnittes, den eine zum Aufrisse parallele Ebene E mit dem Kegel A bildet, und a'' als verticale Projection einer Erzeugenden des Kegels S_n betrachten und die dieser entsprechende Erzeugende b des Kegels A ziehen. Die in dem Schnittpunkte B der Erzeugenden b und des Kegelschnittes M an letzteren gezogene Tangente t ist der Durchschnitt der Ebene E mit der den Kegel A längs b berührenden Ebene; da letztere auf a normal steht, muss auch die zur Verticalspur der Berührungsebene parallele Gerade t'' auf a'' normal stehen und man erhält daher in B'' den gesuchten Punkt.

2) S. unsere auf S. 119 citirte Abhandlung.

liegenden Isophotenpunkte ist es sehr zweckmässig, die Asymptoten der Contour in mehrerwähnter Weise anzuwenden.

Bei perspectivischer Darstellung hat man analog dem früheren immer die reelle Achse und die Asymptoten des Bildes der gegebenen Seitenlinie M bei der Construction zu benutzen.

IV.

Beleuchtungs-Constructionen für das elliptische Paraboloid mit besonderer Berücksichtigung der Isophoten-Tangenten.

A) Construction der Isophotenpunkte und Isophoten-Tangenten für einzelne Achsenschnitte.

§. 6.

Der in Fig. 2 eingeschlagene Vorgang lässt sich auch auf ein elliptisches Paraboloid [Fig. 4] anwenden. Die auf der gegebenen Seitenlinie P sich ergebenden Berührungspunkte erhält man, wenn man zu dem aus der Nebenfigur resultirenden Normalbüschel S_n durch den Brennpunkt F_1 von P einen Parallelbüschel führt und durch die sich dadurch auf der Directrix r_1 ergebenden Schnittpunkte Parallele zur Flächenachse BA zieht. Man kann deshalb das ganze aus dem Brennpunkte F_1, der Directrix r_1 und dem durch F_1 zu führenden Normalbüschel bestehende ebene System in der Richtung $A''B''$ soweit hinauf rücken, dass dadurch die verticale Projection der Fläche auch dann nicht gestört wird, wenn man den Punkt S_n der Nebenfigur mit dem hinauf gerückten Punkt F_1 zusammen fallen lässt.

Bei der Construction der Isophoten-Tangenten ist es vortheilhaft, von den dabei vorkommenden zwei Systemen von Ebenen die Spuren in derjenigen horizontalen Ebene darzustellen, deren verticale Projection die durch A' geführte Gerade $A'\alpha$ ist. Dann sind die an P'' zu führenden Tangenten durch letztere Gerade zu schneiden und die sich so ergebende Punktreihe kann sofort auf M_1' projicirt werden. Weil bei dieser Fläche die Ebenen aller Selbstschattengrenzen zur verticalen Flächenachse BA parallel sind, müssen die Spuren derselben nach den sich in der Nebenfigur ergebenden Richtungen durch die horizontalen Projectionen der Isophotenpunkte geführt werden; sie sind schon die horizontalen Projectionen der Isophoten-Tangenten.

Bezüglich der axonometrischen und der perspectivischen Darstellung genügt die Bemerkung, dass der Brennpunkt und die Directrix des Bildes der gegebenen Seitenlinie zu benutzen sind.

B) Construction der Isophotenpunkte und Isophoten-Tangenten für einzelne Parallelschnitte.

§. 7.

Ist ein Hauptschnitt P des Paraboloids zu einer Projectionsebene parallel [Fig. 4], so ist es zweckmässiger, nach dem Vorgange des §. 4 unserer „Beleuchtungs-Constructionen" die Isophotenpunkte der zu ihm parallelen Schnitte darzustellen. In der Nebenfigur 4a haben wir also die verticale Projectionsebene als Constructionsebene zu betrachten und den Punkt S in der horizontalen anzunehmen [$S'S''$ norm. x, l', l'', $v'v''$ norm. x, $S''S_0$ norm. l', $S''S_0 = S''S'$, l_0, $S_0 10$ norm. l_0, ... mn norm. l', $S''O$ norm. l_0 u. s. w.]

Die Richtungen der den einzelnen Schnitten P_1 [Fig. 4] entsprechenden Umhüllungscylinder werden wir mittelst des auf der Projectionsachse x_1 normalen Hauptschnittes Q bestimmen und uns letzteren zu dem Behufe in dem in die horizontale Projectionsebene umgeklappten Kreuzrisse dargestellt denken. Um die Richtungen der einzelnen Tangenten t_1 zu erhalten, ohne diesen Hauptschnitt zeichnen zu müssen, führen wir r norm. $A'\alpha$ und machen σF gleich der Subnormale der Parabel $Q[A'\alpha = \overline{2A''B''}$, $\alpha\beta$ norm. $a\alpha$, $\sigma F = A'\beta]$. Für den Schnitt P_1 ergibt sich schon in $\gamma_1 F$ die Richtung der Normalen seines in Q liegenden Punktes und durch t_1''' norm. $\gamma_1 F$ die Tangentenrichtung t_1''', so dass $\sigma\delta_1$ gleich der Subtangente und die Hälfte $\sigma\zeta_1$ davon gleich der Abscisse des in P_1 liegenden Punktes des Hauptschnittes Q ist.

Damit man in der Nebenfigur die Durchschnittspunkte der durch S zu den Tangenten t parallel geführten Geraden mit der verticalen Projectionsebene und mit der Ebene mno bestimmen kann, construiren wir im Aufrisse und in dem in den Aufriss umgeklappten Kreuzrisse die Schnittgerade g der durch S gehenden zum Hauptschnitte Q parallelen Ebene mit mno und legen sie dann um die Spur mn in die verticale Projectionsebene nach g_1 um. Wegen der Uebereinstimmung mit der Nebenfigur denken wir uns auch in der Hauptfigur den Kreuzriss in die verticale Projectionsebene umgeklappt, d. h. um 90^0 gedreht, wodurch in der neuen Lage die Tangenten t die in $F\gamma_1$ dargestellten Richtungen der Normalen erhalten würden. Wir können also in der Nebenfigur sofort die Tangentenrichtung t_1''' parallel zu $F\gamma_1$ ziehen und die Schnittpunkte v_1 und d der Geraden t_1 mit der verticalen Projectionsebene und der Ebene mno darstellen [d''', $d'''d''$ norm. z, $d''d_1 \parallel l''$].

Die aus d_1 hervorgehende Punktreihe mn gibt mit v_1 die Richtungen der an P geführten Tangenten, deren Berührungspunkte sich

wieder mittelst des Normalbüschels F_1 ergeben. Durch die auf r_1 entstehende Punktreihe erhält man gleichzeitig die die Berührungspunkte von P'' nach P_1'' projicirenden zu $B''A''$ parallelen Geraden und auch die in P_1' liegenden horizontalen Projectionen der Isophotenpunkte; um die verticalen Projectionen derselben zu bestimmen, braucht man blos auf den Projicirenden die Strecke $\sigma\zeta_1$ aufzutragen.

Für die Construction der Isophoten-Tangenten muss man wieder die im Kreise k_1 [Fig. 4a] liegenden Schnittpunkte des Kreisbüschels aufdrehen. Die aufgedrehten Punkte geben mit S' einen Büschel, zu dessen Strahlen, als Tangentenrichtungen betrachtet, im Hauptschnitte P die conjugirten Durchmesser und ihre in P' liegenden horizontalen Projectionen v_0', v_8' ... wieder mittelst eines durch F_1 geführten zu S' normalen Büschels gezeichnet werden; sie sind die Spuren des Bündels der Ebenen der Selbstschattengrenzen. Die zugehörigen Spuren der Berührungsebenen kann man erhalten, wenn man durch die Isophotenpunkte die Erzeugenden des das Paraboloid nach P_1 berührenden Cylinders bis zu ihren in der Ebene P liegenden Schnittpunkten führt, was durch blosses Auftragen der Subtangente $\sigma\delta_1$ geschieht, und durch diese Schnittpunkte zu den entsprechenden Tangenten von P Parallele zieht. Durch die Durchschnittspunkte v_0'', v_1'', v_2'', v_3'' ... der beiden Spurensysteme kann man schon die verticalen Projectionen der Isophoten-Tangenten führen. Bedeutend einfacher ist es, wenn man auf den Spuren der Selbstschattengrenzen von ihren Schnittpunkten mit den Tangenten des Hauptschnittes P angefangen die constante Strecke $\sigma\zeta_1$ aufträgt. Die horizontalen Projectionen der Isophoten-Tangenten müssen durch die Punkte v_0', v_8'... gehen.

Um den den Lichtpol enthaltenden Schnitt P_2 zu erhalten, braucht man blos die Normale Fy_2 parallel zu l''' zu führen. Die entsprechenden Tangenten des Kreisbüschels sind dann zu g_1 parallel, und ihre Berührungspunkte, welche in einer zu g_1 normalen Geraden k_2 liegen, werden dadurch aufgedreht, dass man sie auf ihren aufgedrehten Träger projicirt.

Um die Isophotenpunkte der Verticalcontour P zu erhalten, stelle man in bekannter Weise die Punktreihen D_1 und D'' her und führe dann zu dem Strahlenbüschel $S'D''$ durch F_1 einen Normalbüschel. Da die obige Methode der Construction der Isophoten-Tangenten für P zu keinem Resultate führt, schlagen wir denjenigen Vorgang ein, welcher bei der Horizontalcontour des Ellipsoids [S. 117] besprochen wurde, indem wir zunächst über $S''v''$ als Durchmesser den Kreis k_3' zeichnen, denselben mit dem Strahlenbüschel $S'D''$ zum Schnitte bringen und die in x liegenden horizontalen Projectionen

der Schnittpunkte markiren. Bei der Ellipse E sind nun zu den Strahlen des Büschels $S'x$ durch Supplementarsehnen die conjugirten Richtungen zu bestimmen, nach welchen schliesslich die horizontalen Projectionen der Isophoten-Tangenten geführt werden.

Die in Fig. 4 behandelten Beleuchtungs-Constructionen lassen sich auch bei axonometrischer und bei perspectivischer Darstellung durchführen.

V.

Beleuchtungs-Constructionen für das windschiefe Hyperboloid mit besonderer Berücksichtigung der Isophoten-Tangenten.

A) Bei gewöhnlicher Darstellung durch Grund- und Aufriss.

§. 8.

Um bei einem windschiefen Hyperboloide die Isophotenpunkte und die zugehörigen Isophoten-Tangenten einzelner durch die imaginäre Flächenachse gehender Schnitte zu erhalten, hat man den beim elliptischen Hyperboloid angedeuteten Vorgang einzuschlagen, also vor allem durch einen Punkt S_u der reellen Achse des Bildes der gegebenen Seitenlinie M auf seine Asymptoten T Normale $S_u c$ zu führen.

In hohem Grade einfacher ist die Beleuchtungs-Construction, wenn man die Isophotenpunkte einzelner Erzengenden der Fläche und die zugehörigen Systeme von Tangenten sucht; wir werden den betreffenden Vorgang im nächsten Paragraphen kennen lernen.

B) Bei axonometrischer und bei perspectivischer Darstellung.

§. 9.

Das in Fig. 5 axonometrisch dargestellte windschiefe Hyperboloid ist durch zwei congruente zur imaginären Flächenachse OA normale ebene Schnitte P, von welchen wir den oberen als Constructions-Grundriss wählen, begrenzt; die beiden durch den Flächenmittelpunkt O gehenden Geraden sind die Contouren des Asymptotenkegels der Fläche[1]). Damit man durch beliebige Punkte die Erzengenden der Fläche ziehen könne, ist es notwendig, vorerst ihre Contour über das dargestellte Flächenstück hinaus bedeutend zu erweitern.

1) S. unsere auf S. 119. citirte Abhandlung.

Um die Isophotenpunkte irgend einer Erzengenden g_1, g_1' [a_1 $a_1' \parallel OA$] zu erhalten, führen wir, da bei einem windschiefen Hyperboloide die Berührungsebene in einem Flächenpunkte die durch ihn gehenden Erzengenden enthält, in der Nebenfigur 5a durch S und S' Parallele zu g_1 respective g_1'; beide treffen sich im Durchstosspunkte h der g_1 mit der Grundebene. Um die Durchstosspunkte d der verschiedenen Geraden g mit der Ebene mno des Kreisbüschels einfach zu erhalten, projiciren wir ein für allemal S in der Richtung l' auf die Ebene mno nach s (s. unsere „Beleuchtungs-Constructionen", S. 273); wird die Ebene mno um die Spur mn in die Grundebene umgeklappt, so kommt die Strecke $S's$ nach $S's_1$ [$(s_1)s_1$ norm. x]. Wenn man nun $h\sigma$ parallel zu l' führt, so ergibt sich in $s\sigma$ die durch Projection der Geraden g_1 nach der Projectionsrichtung l' auf mno entstehende Gerade und in $s_1\sigma$ ihre umgelegte Lage; somit erhält man im Durchschnitte der Geraden g_1' und $s'\sigma$ den Punkt d' dann durch $d'd_1 \parallel l'$ die erste Umlegung d_1 und aus ihr die zweite Umlegung (d_1).

Aus (d_1) werden an den Kreisbüschel Tangenten geführt und ihre Schnittpunkte mit der Affinitätsaehe x markirt, so dass sich dann der in der aufgedrehten Grundebene liegende Büschel $d_1 x$ ergiebt; derselbe schneidet die Spur mn in einer Punktreihe, welche in dem Scheitel h einen Büschel liefert, der die Grundspuren derjenigen durch S gehenden Ebenen vorstellt, welche zu den das Hyperboloid in den gesuchten Isophotenpunkten berührenden Ebenen parallel sind. Die in P [Fig. 5] liegenden Spuren der letzteren ergeben sich demnach, wenn man durch den Fusspunkt h_1 der g_1 zu den Strahlen des obigen Büschels Parallele zieht. Sie treffen die Flächenspur P in den Punkten 0, 1, 2, 3 ..., durch welche mittelst der Flächencontour die Erzeugenden desjenigen Systems gezogen werden, dem g_1 nicht angehört; wo letztere die Erzeugende g_1 schneiden, sind die gesuchten Isophotenpunkte.

Um in den dargestellten Isophotenpunkten die Isophoten-Tangenten zu construiren, führen wir in der Ebene des elliptischen Hauptschnittes durch den in ihm liegenden Punkt e_1 der Erzengenden g_1 [$a_1 e_1 = e_1 h_1$] die Spuren der Berührungsebenen, welche zu den durch h_1 in der Ebene P geführten parallel sein müssen und daher auch gleichzeitig mit letzteren gezogen werden können. Die Richtungen der Strahlen des anderen, durch den Flächenmittelpunkt O gehenden Spurenbüschels kann man auf die beim Ellipsoid angegebene Art erhalten.

Aus den Isophotenpunkten einer Erzengenden g_1 ergeben sich auch schon die diametral gegenüber liegenden der zu ihr parallelen

Erzeugenden g_2 und aus den Isophoten-Tangenten der ersteren die zu ihnen parallelen der letzteren.

Die Richtungen der vier Erzeugenden, welche paarweise die Lichtpole der Fläche liefern, wenn solche auf ihr überhaupt vorkommen, ergeben sich bekanntlich, wenn man durch die Flächenspur P einen zum Asymptotenkegel des Hyperboloids parallelen Kegel legt und denselben durch eine durch seinen Scheitel $s\,[ts \parallel T]$ gehende auf t normal stehende Ebene schneidet. Führt man sH parallel zur Geraden sS' der Nebenfigur, so ergeben sich in der zu mn parallelen Geraden Hh_3h_4 die Spur der genannten Schnittebene und in sh_3 und sh_4 die in ihr liegenden Kegelerzeugenden. Werden zu letzteren parallele Erzeugende des Hyperboloids geführt, so treffen sich dieselben in den beiden Lichtpolen. Da diese beiden Richtungen zur Ebene mno parallel sind, fällt jeder der beiden ihnen entsprechenden Tangentialbüschel parallel aus, und zwar ergeben sich die Richtungen derselben, wenn man in der Nebenfigur sh_3 und sh_4 parallel zu den gleichnamigen Geraden der Hauptfigur zieht, in $(s_1)(h_3)$ und $(s_1)(h_4)$. Die weitere Construction bleibt ungeändert, und ist bei derselben blos, wie beim elliptischen Paraboloid, zu berücksichtigen, dass die Berührungspunkte des Kreisbüschels wieder in eine Gerade fallen.

Die Isophotenpunkte des elliptischen Hauptschnittes werden auf die beim Ellipsoid angegebene Art bestimmt; nur hat man die Tangenten an P zu führen und die sich ergebenden Berührungspunkte aus einem Punkte σ der Flächenachse central auf den Hauptschnitt zu projiciren.

Auch die in der Flächencontour liegenden Isophotenpunkte ergeben sich auf die beim Ellipsoid angegebene Art; um die betreffenden Berührungspunkte zu erhalten, wird man aus einem Punkte S_n der reellen Achse des Contourbildes auf die Contouren T des Asymptotenkegels Normale ziehen und ihre Fusspunkte α und β durch eine Gerade verbinden.

Bei perspectivischer Darstellung hat man auch den Vorgang einzuhalten, welcher in diesem Paragraphen gegeben wurde; da sich dabei gar keine Schwierigkeiten ergeben, überlassen wir die Ausführung dem geneigten Leser [1]).

---

1) Die Construction der Isophoten-Tangenten bei windschiefen Flächen zweiten Grades hat der Verfasser bereits im Jahre 1876 in seiner Abhandlung „Ueber die Construction der Linien von gleicher Beleuchtungsstärke auf windschiefen Flächen", welche sich als Manuscript im Archiv der k. k. wissenschaftlichen Realschul-Prüfungs-Commission zu Wien befindet, durchgeführt.

VI.

Beleuchtungs-Constructionen für das windschiefe Paraboloid mit besonderer Berücksichtigung der Isophoten-Tangenten.

A) Bei gewöhnlicher Darstellung durch Grund- und Aufriss.

§. 10.

Bei einem windschiefen Paraboloide kann man entweder, wie beim Ellipsoid, die Isophotenpunkte einzelner Achsenschnitte bestimmen, oder nach dem beim elliptischen Paraboloid angewendeten Verfahren die Isophotenpunkte einzelner zu einem parabolischen Hauptschnitte paralleler Schnitte darstellen, oder endlich die Isophotenpunkte einzelner Erzeugenden construiren. Wir wollen nur den letzteren Vorgang behandeln und uns dabei kurz fassen, weil er sich von dem analogen Verfahren bei dem windschiefen Hyperboloid nur durch einige Voreinfachungen unterscheidet.

Wir denken uns das windschiefe Paraboloid so gestellt, dass die Flächenachse normal zur horizontalen Projectionsebene und ein parabolischer Hauptschnitt parallel zur verticalen Projectionsebene ist, wodurch die beiden Richtungsebenen P und Q eine verticale Lage annehmen; die Horizontalspur des Paraboloids ist dann eine Hyperbel, deren Asymptoten die horizontalen Projectionen P' und Q' der Richtungsebenen sind. Ausserdem denken wir uns die Fläche durch zwei congruente zur Projectionsachse normale Schnitte begrenzt.

In der Hilfsfigur, welche in derselben Lage ausgeführt wird, wie die Fig. 2a, legen wir durch S zwei Ebenen P und Q, welche zu den Richtungsebenen der Fläche parallel sind, und bestimmen ihre Schnitte G und H mit der Ebene mno, sowie auch die umgelegten Lagen G_1 und H_1 derselben: in diesen Geraden müssen alle Durchstosspunkte d der durch S zu den Erzeugenden des Paraboloids parallel zu führenden Geraden g mit der Ebene mno liegen.

Um die Isophotenpunkte einer zur Richtungsebene P parallelen Erzeugenden g_1 zu erhalten, führen wir in der Nebenfigur durch S die zu ihr parallele g_1, welche die horizontale Projectionsebene im Punkte h und die Gerade G in dem Punkte d trifft. Dann ergeben sich in der horizontalen Projectionsebene der Hauptfigur auf bekannte Art die durch den Fusspunkt h_1 der Erzeugenden g_1 gehenden Spuren der Berührungsebenen, aus deren in der erweiterten Horizontalspur des Paraboloids liegenden Schnittpunkten, die die Isophotenpunkte liefernden zu Q' parallelen Erzeugenden zu führen sind.

Bezüglich der Isophoten-Tangenten für g_1 hat man, da die Ebenen aller Selbstschattengrenzen vertical ausfallen, zu den Strahlen des in der Nebenfigur sich ergebenden Büschels $S'k_1'$ die conjugirten Richtungen durch die horizontalen Projectionen der Isophotenpunkte zu führen, bis sie in ihren Schnittpunkten mit den durch h_1 gehenden Spuren die Fusspunkte der Isophoten-Tangenten geben, mittelst deren man ihre verticalen Projectionen bestimmt.

Der Lichtpol der Fläche ergibt sich im Schnittpunkte der zu den Geraden G und H der Nebenfigur parallel zu führenden Erzengenden. Bei dem betrachteten Flächenstücke ist es auch sehr wichtig, nach den aus den früheren Paragraphen bekannten Vorgängen die in der Verticalcontour und in den zur Projectionsachse normalen Grenzschnitten liegenden Isophotenpunkte samt den entsprechenden Tangenten zu construiren.

B) Bei axonometrischer und bei perspectivischer Darstellung.

§. 11.

Um das soeben behandelte Verfahren bei axonometrischer Darstellung durchzuführen, stellen wir in der Nebenfigur die Schnittgeraden G und H der zu den Asymptotenebenen der Fläche parallelen Ebenen mit der Ebene mno dar. Hat man dann die einer zur Richtungsebene P parallelen Erzeugenden g_1 entsprechenden Punkte h, d, d, d', d_1 und (d_1) auf einander folgend construirt und die sich dann ergebende Punktreihe mn bestimmt, so schneide man den Büschel $\overline{dmn}$ durch die Gerade H; dadurch erhält man mittelst des Büschels SH die Richtungen der die Isophotenpunkte von g_1 liefernden Erzengenden der Fläche, welche leicht berührend an die erweiterte Contour gezeichnet werden können.

Um in den dargestellten Isophotenpunkten die Isophoten-Tangenten zu construiren, stellen wir auf bekannte Art in der Nebenfigur die Grundrisse der Berührungspunkte des Kreisbüschels dar und bestimmen dann mittels der durch S' zu den Asymptoten P' und Q' der Flächenspur parallel zu führenden Geraden zu den Strahlen des Büschels $S'k_1'$ die durch S' gehenden conjugirten Richtungen dar; dieselben treffen die Strahlen des Büschels $\overline{hmn}$ in Punkten, die

mit S dnrch Gerade verhnnden, schon die Richtnngen der gesnchten Tangenten vorstellen.

Anch bei perspectivischer Darstellnng kann man den soeben angegebenen Vorgang dnrchführen; nnr mnss man in der Nebenfigur bei der Bestimmung der Richtungen der Isophoten-Tangenten den Spurenbüschel S' in dem znr Bildebene parallel gedrehten Grundrisse mittelst der Asymptoten der Spnrhyperbel, welche von den Asymptoten ihres Bildes zn unterscheiden sind, construiren, nnd ihn erst dann in den Raum anfdrehen.

Wien, December 1884.

V.

Ueber die Curve, deren Rotation die kleinste Oberfläche erzeugt.

Von

Louis Saalschütz.

(Mit einer Figurentafel.)

Stellt man sich die Aufgabe, durch zwei gegebene Punkte C, D eine Curve zu legen, so dass durch ihre Rotation um eine gegebene Axe, die wir zur Abscissen-Axe nehmen, die an Flächeninhalt kleinste Oberfläche entsteht, so antwortet die Variationsrechnung bekanntlich mit einer Kettenlinie besonderer Art, fügt jedoch die Bedingung hinzu, dass die in C und D an die Curve gelegten Tangenten sich oberhalb der Rotationsaxe (d. h. auf der Seite, auf welcher C und D liegen) schneiden müssen. Wendet man nun das Integral der betreffenden Differentialgleichung zur Bestimmung ihrer Integrationsconstanten auf die Punkte C und D an, so erhält man entweder zwei Auflösungen oder keine oder, im Grenzfalle, eine einzige. Im ersten Falle genügt die höher gelegene der beiden Curven der obigen Bedingung eines Minimums, im zweiten Falle giebt es kein Minimum, in diesem Sinne, im dritten Falle schneiden sich die genannten Tangenten auf der Rotationsaxe und man kann auch nicht eigentlich von einem Minimum sprechen. — Ich will nun das genannte Problem im Folgenden nach zwei verschiedenen Richtungen hin weiterer Betrachtung unterziehen. Für's Erste will ich versuchen den Uebergang von den Fällen, in denen ein Minimum existirt, zu denjenigen, in welchen es nicht vorhanden ist, unter einer specielleren Annahme näher zu veranschaulichen, und zweitens werde ich unter der Voraussetzung, dass der eine Punkt C in beliebiger Lage gegeben ist, das (unendliche) Gebiet begrenzen, innerhalb dessen der andere, D, liegen muss, wenn ein Minimum vorhanden sein muss.

I.

Fälle ich von den Punkten C und D die Lote CA und DB auf die Abscissenaxe, die zugleich die Rotationsaxe sein sollte, und nehme ich irgend wo auf ihr den Ursprung O des Coordinatensystems an, so seien die Coordinaten

$$\text{von } C\text{:}\quad OA = a \quad CA = h_0$$
$$\text{von } D\text{:}\quad OB = b \quad DB = h_1.$$

Die Gleichung der Curve ist dann:

$$1)\qquad y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x-k}{c}} + e^{-\frac{x-k}{c}}\right)$$

wobei c und k die Integrationsconstanten sind, zu deren Bestimmung die Gleichungen [2]) dienen:

$$2)\qquad \left.\begin{aligned} h_0 &= \frac{c}{2}\left(e^{\frac{a-k}{c}} + e^{-\frac{a-k}{c}}\right) \\ h_1 &= \frac{c}{2}\left(e^{\frac{b-k}{c}} + e^{-\frac{b-k}{c}}\right) \end{aligned}\right\}$$

Für den tiefsten Punkt der Curve ist:

$$3)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x-k}{c}} - e^{-\frac{x-k}{c}}\right) = 0$$

also

$$4)\qquad x = k.$$

Der fragliche Flächeninhalt Ω selbst ist:

$$5)\qquad \Omega = 2\pi . U,\ U = \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

Ich nehme nun für diesen ersten Abschnitt die beiden Punkte C und D als gleich hoch gelegen an, (s. Fig. 1.), lege O unter den tiefsten Punkt H der Curve und setze $h_0 = h_1 = h$. Dann sind also die Coordinaten von D: b, h; von C: $-b$, h. Ferner folgt dann aus 5):

---

1) S. z. B. Dienger, Grundriss der Variationsrechnung § 5, 2. (S. 15 ff.).

2) Eine zweckmässige Auflösungsmethode derselben findet man in einer Anmerkung beim Abschnitt II. dieses Aufsatzes (nebst einem Beispiel).

6) $$U = \int_{-b}^{b} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

und aus (4): $k = 0$. Somit heisst die Gleichnng der Curve:

7) $$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right)$$

woraus also folgt:

8) $$y = c \quad \text{für} \quad x = 0$$

nd die transcendente Gleichnng für c:

$$h = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{b}{c}} + e^{-\frac{b}{c}}\right)$$

9) oder

$$\frac{h}{b} = \frac{1}{2}\frac{c}{b}\left(e^{\frac{b}{c}} + e^{-\frac{b}{c}}\right)$$

Hier ist die Klammer nnter allen Umständen positiv, also folgt, da nch h nnd b positive Grössen sind, dass anch c positiv sein mnss Setzt man nnn $\frac{b}{c} = t$ nnd lässt in dem Ansdrucke:

10) $$z = \frac{e^t + e^{-t}}{2t}$$

t von 0 his ∞ wachsen, so ist für dioso beiden Grenzwerto: $z = \infty$ nd erreicht ein Minimnm, wenn

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^t - e^{-t}}{t} - \frac{e^t + e^{-t}}{t^2}\right) = 0$$

oder

11) $$\frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}} = t.$$

Hier erkennt man sofort, dass $t > 1$ sein mnss nnd durch Nähernng findet man t und das zngehörige z:

12) $$t = 1{,}199\,68 = \tau; \quad z = 1{,}50888 = z_m.$$

Soll also eine Kettenlinie der verlangten Art sich durch die heiden Punkte C nnd D legen lassen, so mnss $\frac{h}{b} \geqq 1{,}50\,888$ sein. Um diesem Resultat die bekannte geometrische Form zn geben, wie anch späterer Anwendungen wegen, leiten wir noch einige andere hieher go-

hörige Gleichungen ab. Durch Division der Gleichung 7) und der daraus durch Differentiation nach x entstehenden:

$$13) \qquad \frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}\right)$$

folgt $\left(\text{mit der Bezeichnung } y' = \frac{dy}{dx}\right)$:

$$14) \qquad \frac{y}{y'} = c \cdot \frac{e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}}{e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}}$$

also für $x = b$, $y = h$:

$$\frac{h}{b} = \frac{c}{b} \cdot \frac{e^{\frac{b}{c}} + e^{-\frac{b}{c}}}{e^{\frac{b}{c}} - e^{-\frac{b}{c}}} \cdot y'_b$$

(wenn y'_b den Wert von y' für $x = b$ bedeutet).

Liegen nun die beiden Punkte C und D in einem Specialfalle so, dass $\frac{h}{b}$ den Wert $z_m = 1{,}50888$ erhält, so folgt $\frac{b}{c} = t$ aus der Geichung 11) und daher ist dann:

$$\frac{b}{h} = y'_b$$

Bezeichne ich die Punkte C und D in dieser speciellen Lage (s. Fig. 2.) mit M und N, ihre Projectionen mit A_m und B_m und die Coordinaten von N mit b_m und h_m, so sehen wir, dass die Linien OM, ON die Curve in M und N berühren und dass, wenn wir Wkl. MOA_m = Wkl. NOB_m mit α bezeichnen:

$$15) \qquad \frac{h_m}{b_m} = z_m = \operatorname{tg}\alpha; \quad \alpha = 56^0\,28'.$$

Es ist also auch, wie ich in 13) $x = b_m$, $\frac{b_m}{c} = \tau$ setze:

16) $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{e^{\tau} - e^{-\tau}}{2}$$

folglich

$$\sec\alpha = \frac{e^{\tau} + e^{-\tau}}{2}$$

Setze ich diese beiden Werte in 11) ein, indem ich daselbst τ statt t geschrieben denke, so zeigt sich:

17) $$\tau = \frac{1}{\sin\alpha} = \sec\beta,$$

wenn β das Complement von α genannt wird.

Demnach ist:

18) $$b_m = h_m \operatorname{tg}\beta, \quad c = b_m \cos\beta, \quad c = h_m \sin\beta,$$

sodass das von A_m anf OM gefällte Lot die Grösse von $OH = c$ darstellt. Ersotzen wir in 11) t durch $\sec\beta$, so nimmt sie die Form an:

$$\sec\beta = \frac{e^{\sec\beta} + e^{-\sec\beta}}{e^{\sec\beta} - e^{-\sec\beta}}$$

woraus:

$$\frac{\sec\beta + 1}{\sec\beta - 1} = e^{2\sec\beta}$$

oder

$$\frac{1 + \cos\beta}{1 - \cos\beta} = \cot^2\frac{\beta}{2} = e^{2\sec\beta}$$

also

19a) $$\cot\frac{\beta}{2} = e^{\sec\beta}$$

oder

19b) $$\sec\beta = \log\cot\frac{\beta}{2}.$$

Eine der letzteren Gleichnngen kann also anch znr Borechnnng von β nnd somit von τ dienen.

Fallen nnn C nnd D nicht mit M und N znsammen, liegon aber auch bzhw. über A_m und B_m, so mnss, wie oben gezeigt, $\frac{h}{b_m}$!grösser als z_m d. i. grösser als $\frac{h_m}{b_m}$, also $h > b_m$ sein; da nnn dasselbe für jeden beliebigen Wert von b_m gilt, so folgt darans, dass zwei gleich hoch nnd symmetrisch gegen den Punkt O der Rotationsaxe gelegene Punkte C nnd D oberhalb der beiden durch O gezogenen Linien, welche mit der ersteren den Winkel α bilden, liegen müssen,

wenn eine Kettenlinie verlangter Art zwischen ihnen möglich sein soll. Ist diese Bedingung erfüllt, so giebt es zwei Werte von c, die der Gleichung 9) genügen; von diesen ist nur der eine, nämlich der grössere zu nehmen und in die Gl. 7) einzusetzen.

Dieser bekannten geometrischen Einkleidung der obigen Bedingung über die Lage der Punkte C und D: $\frac{h}{b} > z_m$ lässt sich noch eine geometrische Eigenschaft der in Rede stehenden Curven hinzufügen. Seien nämlich C und D (Fig. 3.) zwei Punkte von verlangter Lage, legen wir die Kettenlinie hindurch, deren Tangenten in C und D sich oberhalb der Abscissenaxe schneiden, und versuchen wir nun von O aus die beiden symmetrisch gelegenen Tangenten an die Curve zu ziehen. Seien für eine derselben $x_1 y_1$ die Coordinaten des Berührungspunktes N, dann muss sein

$$\frac{y_1}{x_1} = \left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_1}$$

das ist den Gleichungen 7) und 13) zufolge:

$$\frac{1}{2}\frac{c}{x_1}\cdot\left(e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x_1}{c}}-e^{-\frac{x_1}{c}}\right)$$

Diese Gleichung ist aber für $\frac{x_1}{c}$ dieselbe wie 11) für t, liefert also das Resultat: $\frac{x_1}{c} = \tau$ und somit mit Rücksicht auf 16):

$$\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_1} = \frac{e^{\tau}-e^{-\tau}}{2} = \operatorname{tg}\alpha,$$

d. h. alle Kettenlinien bewegter Art, welche zwei Punkte wie C und D verbinden, haben dieselben Linien OM und ON (genügend verlängert) zu Tangenten.

Rücken wir nun mit den Punkten C und D gleichzeitig den Berührungspunkten M und N näher, so bleibt unsere Kettenlinie noch immer richtig, rücken wir aber über M und N hinaus, etwa in die Lage C_1 und D_1, so sind die in diesen Punkten gezogenen Tangenten steiler als OM und ON, schneiden sich also unterhalb der Abscissenaxe, und unsere Kettenlinie hört auf richtig zu sein. Wir müssten vielmehr durch C_1 und D_1 die zweite Kettenlinie legen, welche OM und ON ebenfalls, etwa in M_1 und N_1 tangiren wird, und bei welcher die Punkte C_1 und D_1 wiederum zwischen M_1 und N_1 liegen.

Hat nun in diesem Falle unsere alte Kettenlinie (die durch M und N geht) für den Punkte C_1 und D_1 auch irgend welche Bedeutung? Lässt sich's überhaupt anschaulich machen, dass ein, so zu sagen, vernünftiges Problem unter Umständen eine Lösung besitzt und unter scheinbar wenig veränderten Umständen nicht? Um diese Fragen beantworten zu können, stellen wir uns eine viel engere Aufgabe als die von der Variationsrechnung gelöste, welche aber den Vorteil bietet, dass ihre Lösung nicht anders als vollkommen durchsichtig sein kann. Die Aufgabe lautet:

Es sollen durch die beliebig, aber gleich hoch gelegenen Punkte C und D verschiedene Kettenlinien gelegt und bezüglich der durch ihre Rotation um die Abscissenaxe erzeugten Oberfläche mit einander verglichen werden.

Dabei können wir ein Ergebnis voraussagen, falls die Variationsrechnung ein Minimum liefert, muss ein solches auch hier und zwar bei derselben Kettenlinie stattfinden, weil wir ja aus den unendlich vielen Curven, die durch C und D gehen und über welche die Variationsrechnung verfügt, eine besondere Classe herausgehoben haben und zwar diejenige, zu welcher die von der Variationsrechnung erwählte auch gehört.

Die Gleichung einer Kettenlinie heisst aber im allgemeinen, wenn wir den Wert von y für $x = 0$ (und zugleich für den tiefsten Punkt der Curve) mit y_0 bezeichnen:

$$20) \qquad y - y_0 = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}} - 2\right)$$

oder mit $\frac{b}{c} = t$:

$$\frac{y}{b} = \frac{y_0}{b} - \frac{1}{t} + \frac{e^{\frac{tx}{b}} + e^{-\frac{txb}{}}}{2t} -$$

so dass also die Specialisirung durch die Variationsrechnung darin besteht, dass $y_0 = c$ oder $\frac{y_0}{b} = \frac{1}{t}$ wird. Aus der voranstehenden Gleichung folgt:

$$22) \qquad 1 + y'^2 = \tfrac{1}{4}\left(e^{\frac{tx}{b}} + e^{-\frac{tx}{b}}\right)^2$$

und somit, wenn die durch 6) angegebene Integration ausgeführt wird:

$$23) \qquad U = \frac{b^3}{t} + \frac{b^2}{t}\left(\frac{y_0}{b} - \frac{1}{t}\right)(e^t - e^{-t}) + \frac{b^2}{4t^2}(e^2 - e^{-2t})$$

Wendon wir abor die Gleichnng 21) auf den Pnnkt $(x = b,\ y = h)$ an, so folgt:

$$24) \qquad \frac{h}{b} = \frac{y_0}{b} - \frac{1}{t} + \frac{e^t + e^{-t}}{2t}$$

nnd demnach durch Elimination von $\frac{y_0}{b}$ ans 23) und 24):

$$25) \quad U = b^2 \cdot \left\{\frac{1}{t} + \frac{h}{b} \cdot \frac{e^t - e^{-t}}{t} - \frac{1}{t}\,\frac{e^{2t} - e^{-2t}}{t^2}\right\}$$

Wir wollen nun schon, wie sich U mit t oder eigentlich mit y_0 ändert. Für $y_0 = h$ ist $t = 0$ nnd $U = 2bh$, denn, wenn t sehr klein ist, folgt ans 24):

$$0 = -\frac{1}{t} + \frac{1}{2t}(2 + t^2 + \ldots) = \tfrac{1}{2}t + \ldots$$

und 25) wird:

$$U = b^2\left\{\frac{1}{t} + \frac{h}{b} \cdot \frac{1}{t}\left(2t + \frac{t^3}{3} + \ldots\right) - \frac{1}{4t^2}\left(4t + \frac{8t^2}{6} + \ldots\right)\right\}$$

$$= b^2\left(\frac{2h}{b}\left(1 + \frac{t^2}{6}\right) - \frac{t}{3}\right),$$

also die Oberfläche $= 4bh\tau$ wie es sein muss; für $y = 0$ erhält t einen bestimmten Wert ans der Gleichung

$$26a) \qquad \frac{e^t + e^{-t} - 2}{2t} = \frac{h}{b}$$

oder:

$$26b) \qquad \frac{\left(e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}\right)^2}{\frac{t}{2}} = \frac{4h}{b}.$$

Gleichzeitig wird $U > h^2$, (was für aas Folgendo gebraucht wird) donn es wird, wenn man für $\frac{h}{b}$ den Wert aus 26a) entnimmt nnd gehörig zusammenzieht:

$$U-h^2 = b^2\left\{\frac{1}{t}-\frac{3}{2t^2}-\frac{e^{-2t}}{2t^2}+\frac{2e^{-t}}{t^2}\right\}$$
$$= \frac{b^2}{2t^2}\left\{4e^{-t}+2t-e^{-2t}-3\right\}$$

Hier verschwindet die Klammer für $t=0$, ihr Differentialgleichung nach t ist aber $= 2(1-e^{-t})^2$, also positiv und daher auch die Klammer stets positiv. Bezeichne ich also den Wert von U für $y_0 = 0$ mit U_0, so haben wir:

27) $$U_0 > h^2$$

Für $y_0 \angle 0$ hört die geometrische Bedeutung auf, doch wäre für $y_0 = -\infty$: $t = \infty$, $U = -\infty$.

Ferner ist nun:

$$\frac{dU}{dt} = b^2\left\{-\frac{1}{t^2}-\frac{h}{b}\cdot\frac{e^t-e^{-t}}{t^2}+\frac{h}{b}\cdot\frac{e^t+e^{-t}}{t}+\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{2t^3}\right\}$$

oder nach leichten Reductionen:

28) $$\frac{dU}{dt} = \frac{b^2}{t}\left(e^t+e^{-t}-\frac{e^t-e^{-t}}{t}\right)\left(\frac{h}{b}-\frac{e^t+e^{-t}}{2t}\right) = \frac{b^2}{t}.K_1.K_2,$$

wenn wir die erste Klammer mit K_1, die zweite mit K_2 bezeichnen. Nun ist K_1 stets positiv, denn $K_1.t$ verschwindet für $t=0$ und:

$$\frac{d(K_1.t)}{dt} = t(e^t-e^{-t}) > 0,$$

K_2 ist aber wie aus dem Früheren zu ersehen, negativ, wenn

$$\frac{h}{b} < z_m = 1{,}50888$$

(Gl. 12)), also nimmt dann U mit wachsendem t dauernd ab; ist jedoch $\frac{h}{b} > z_m$ und bezeichne ich die beiden Werte von t, die K_2 zum Verschwinden bringen mit $t_1 t_2 (t_1 < \tau,\ t_2 > \tau)$, so ist:

für: $t=0$ $\quad K_2 = -\infty$; $\frac{dU}{dt}$ neg. aber nicht $-\infty$

„ $0 < t < t_1$ K_2 neg.; $\frac{dU}{dt}$ neg.

„ $t = t_1$ $\quad K_2 = 0$; $\frac{dU}{dt} = 0$

für: $t_1 < t < t_2$ K_2 pos.; $\frac{dU}{dt}$ pos.

„ $t = t_2$ $K_2 = 0$ $\frac{dU}{dt} = 0$

„ $t > t_2$ K_2 neg.; $\frac{dU}{dt}$ neg.

Ausserdem folgt durch Differentiation der Gl. 24), welche in Beziehung zwischen y_0 und t ausdrückt:

$$29) \qquad \frac{1}{b} \cdot \frac{dy_0}{dt} = -\frac{1}{t^2} + \frac{e^t + e^{-t}}{2t^2} - \frac{e^t - e^{-t}}{2t}$$

und dieser Ausdruck ist stets negativ, was sich (ähnlich wie bei K_1) zeigen lässt, indem man ihn mit t^2 multiplicirt: y_0 nimmt also dauernd ab, während t wächst. Bezeichnen wir also den Wert von t für $y_0 = 0$ mit t_0, welcher nach dem eben Gesagten noch grösser als t_2 sein muss, und die Werte von y_0 für $t = t_2$ und $t = t_1$, nämlich, wie 24) zeigt, $\frac{b}{t_2}$ und $\frac{b}{t_1}$ bez. mit $y_0^{(2)}$, $y_0^{(1)}$, so erhalten wir, wenn y_0 von 0 bis h wächst, folgende vergleichende Zusammenstellung:

$y_0 = 0$, $t = t_1$ K_2 und $\frac{dU}{dt}$ neg.; $\frac{dU}{dy_0}$ pos.; U zunehmend

$y_0 = y_0^{(2)}$, $t = t_2$ K_2 und $\frac{dU}{dt}$ null; $\frac{dU}{dy_0}$ null; Max. von U

$y_0^{(2)} < y_0 < y_0^{(1)}$, $t_2 > t > t_1$, K_2 und $\frac{dU}{dt}$ pos.; $\frac{dU}{dy_0}$ neg.; U abnehmend

$y_0 = y_0^{(1)}$, $t = t_1$ K_2 und $\frac{dU}{dt}$ null; $\frac{dU}{dy_0}$ null; Min. von U

$y_0^{(1)} < y_0 < h$, $t_1 > t > 0$ K_2 und $\frac{dU}{dt}$ neg.; $\frac{dU}{dy_0}$ pos.; U zunehmend

$y_0 = h$, $t = 0$ K_2 und $\frac{dU}{dt}$ neg.; $\frac{dU}{dy_0}$ pos.; Endwert von U.

Wir können daher als Ergebniss aussprechen:

1) Wenn $\frac{h}{b} < 1{,}50888$ ist, wächst U, also der Inhalt der Rotationsoberfläche dauernd, während y_0 (von 0 bis h) zunimmt; hier giebt also die Differentialgleichung ebenso wenig ein Minimum (unter allen Kettenlinien) wie die Variationsrechnung (unter allen Curven überhaupt).

2) Wenn $\frac{h}{b} > 1{,}50888$ ist, nimmt U anfänglich zu, wenn y_0 von 0 an wächst, erreicht ein Maximum für das y_0 das dem $t = t_2$ entspricht, nimmt wieder ab, erreicht ein Minimum für dasjenige y_3, welches dem $t = t_1$ entspricht und nimmt von da an wieder zu bis y_0 den Grenzwert h erreicht. Wir sehen also jetzt: Für die Punkte $C_1 D_1$ (Fig. 3) bedeutet die Kettenlinie $C_1 M N D_1$ das Maximum von U, dagegen die Kettenlinie $(M_1) C_2 D_1 (N_1)$ das Minimum von U; und wir erkennen somit direct warum die Variationsrechnung für ihr Minimum die höher gelegene Curve (das grössere y_0 d. i. c) fordern muss.

3) Wenn $\frac{h}{b} = 1{,}50888$ ist, so fliessen Max. und Min. zusammen, d. h. Wachstum von U findet an dieser Stelle sehr langsam statt.

Die weiteren Untersuchungen knüpfen sich zunächst an den 2ten Fall. Denkt man sich y_0 als Abscisse und das zugehörige U als Ordinate aufgetragen $\left(\text{d. h. eigentlich } \frac{y_0}{b}, \text{bzhw. } \frac{U}{b^2}\right)$, so entsteht eine Curve nach Art der (Fig. 4), Darin ist $AD = U_0$, BC der Maximalwert und CF der Minimalwert von U. Ist es nun möglich, dass, wie in der Zeichnung angenommen, der Punkt D tiefer liegt als F? Oder, was dasselbe ist, giebt es einen Punkt zwischen D und E, der ebenso hoch wie F liegt? Wir wollen diese Frage folgendermassen präcisiren, wobei wir zur Bequemlichkeit $b = 1$ setzen.

Aufgabe. Es soll h so bestimmt werden, dass für ein bestimmtes $y_0 : y_0 = g$ (etwa $y_0 = 0,1\,b$, d. i. $= 0,1$) das zugehörige (aus den Gl. 24) und 25) zu berechnende) U gleich dem Minimalwert von U für dieses h wird.

Auflösung. Bezeichnen wir den Minimalwert von U mit U_m und das zugehörige t mit ϑ, behalten aber für das gegebene $y_0 = g$, die Bezeichnungen t und U, jedoch im Sinne von constanten unbekannten Grössen bei, so zerfällt für das Min. von U die Gl 24) in die beiden:

30)
$$\left.\begin{aligned} h &= \frac{e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}}{2\vartheta} \\ y_0 &= \frac{1}{D} \end{aligned}\right\}$$

und setzen wir diesen Wert von h in die Gleichung 25) ein, so wird sie.

31) $$U = \frac{1}{t} + \frac{(e^{\vartheta} - e^{-\vartheta})(e^{t} - e^{-t})}{2\vartheta t} - \frac{1}{4}\,\frac{e^{2t} - e^{-2t}}{t^2}$$

Setzen wir hierin ϑ statt t, so erhalten wir U_m:

32) $$U_m = \frac{1}{\vartheta} + \frac{e^{2\vartheta} - e^{-2\vartheta}}{4\vartheta^2}$$

Die Gleichsetzung der Werte U und U_m liefert eine Gleichung zwischen t und ϑ, die andere erhalten wir, wenn wir in der Gleichung 24) $y_0 = g$ und für h den Wert aus 30) setzen. Wir haben somit folgende beiden Gleichungen:

33) $$\begin{cases} g = \dfrac{e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}}{2\vartheta} - \dfrac{1}{t} - \dfrac{e^{t} - e^{-t}}{2t} \\ \dfrac{1}{t} + \dfrac{(e^{t} - e^{-t})(e^{\vartheta} + e^{-\vartheta})}{2t\vartheta} - \dfrac{e^{2t} - e^{-2t}}{4t^2} = \dfrac{1}{\vartheta} + \dfrac{e^{2\vartheta} - e^{-2\vartheta}}{4\vartheta^2} \end{cases}$$

Setzen wir nun:

34) $$\frac{e^{t} + e^{-t}}{2t} - \frac{1}{t} = z, \qquad \frac{e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}}{2\vartheta} - \zeta$$

und führen die Hilfswinkel p und φ durch die Gleichungen

35) $$\operatorname{tg} p = e^{-t}, \quad \operatorname{tg}\varphi = e^{-\vartheta}$$

ein, so werden obige Gleichungen, etwas anders geordnet:

36) $$\zeta = z + g - \frac{1}{t}$$

37) $$\Phi = \frac{2\csc(2\varphi)\cot(2p)}{t\vartheta} - \frac{\csc(2p)\cot(2p)}{t^2} - \frac{\csc(2\varphi)\cot(2\varphi)}{\vartheta^2} - \left(\frac{1}{\vartheta} - \frac{1}{t}\right) = 0.$$

Nimmt man nun t beliebig an, so folgt aus 34) z, aus 36) ζ und sodann mittelst Näherung oder der nachfolgenden Tabelle aus der zweiten 34) ϑ. Setzt man diese und die aus 35) sich ergebenden Werte von p und φ in 37) ein, so muss ihre linke Seite, die wir mit Φ bezeichnen, gleich 0 werden; ist dies nicht der Fall, so ist t solange zu verändern, bis es geschieht. Zunächst folge hier nun eine kleine Tabelle für z, welche für unsern Zweck eben ausreicht, aber auf Exactheit in der letzten Stelle keinen Anspruch erhebt.

Tafel für $z = \frac{e^t + e^{-t}}{2t}$.

t.	z.	t.	z.	t.	z.	t.	z.
0,0	∞	1,0	1,543	2,0	1,881	3,0	3,347
0,1	10,051	1,1	1,517	2,1	1,972	3,5	4,311
0,2	5,100	1,2	1,509	2,2	2,076	4,0	6,823
0,3	3,485	1,3	1,516	2,3	2,187	4,5	10,02
0,4	2,703	1,4	1,536	2,4	2,312	5,0	14,86
0,5	2,255	1,5	1,568	2,5	2,449	6,0	33,65
0,6	1,975	1,6	1,611	2,6	2,602	7,0	78,34
0,7	1,793	1,7	1,663	2,7	2,764	8,0	186,2
0,8	1,671	1,8	1,727	2,8	2,944	9,0	449,8
0,9	1,592	1,9	1,799	2,9	3,143	10,0	1102,0

Sei nun $\varepsilon = 0{,}1$; nehmen wir $t = 2$, so ist $z = 1{,}881$, also $\zeta = 1{,}481$; für diesen Wert, der in obiger Tafel unter z gesucht werden muss, giebt es aber, da er sich gar nicht findet, kein t d. i. kein ϑ. Nehmen wir $t = 2{,}1$, so folgt $\zeta = 1{,}596$; jetzt ist für ϑ der kleinere Wert aus der Tabelle zu nehmen, weil das Min. von U bei dem grösseren y_0 eintritt, also ist ϑ nahezu $= 0{,}9$; da es zunächst nur auf ungefähre Bestimmung der Grenzen ankommt, behalten wir für ϑ diesen Wert bei; so folgt nach der angegebenen Art $\Phi = -0{,}132$. — Rechnen wir jetzt mit $t = 2{,}2$, so kommt $\Phi = +0{,}013$, also giebt es einen Wert von t, der der Aufgabe genügt, und zwar liegt er zwischen 2,1 und 2,2. Jetzt folgt durch genauere Rechnung[1]) (wobei die obige Tafel zur Richtschnur dienen kann):

$$t = 2{,}195; \quad \zeta = 1{,}716; \quad \vartheta = 0{,}759; \quad \Phi = 0{,}000.$$

Also folgt aus 30) (im Vergleich mit 34))

$$h = \zeta = 1{,}716 \qquad y_0 = \frac{1}{\vartheta} = 1{,}317$$

und aus 32) $U_m = 3{,}203$. Damit ist die Aufgabe gelöst.

Um nun eine vollständige Uebersicht über die Aenderung von U zu gewinnen, habe ich für den obigen Wert $h = 1{,}716$ (d. i. $h = 1{,}716\,b$) und einige Werte von y_1 (indem ich von t ausgieng) mit Benutzung der Formeln 24) und 25) das zugehörige U berechnet, wobei der

---

1) Verfasser benutzte dabei eine von ihm bei anderer Gelegenheit entworfene kleine 4stellige Tafel, welche aus dem $\log_{br} t$ direct $\log_{br}(e^{-t})$ finden lässt.

durch 35) definirte Hilfswinkel p die Zahlenrechnung erleichtert und gewinne dabei folgende Resultate:

t	$y_0 : b$	$U : b^2$	
2,25	0,029	3,156	
2,2	0,095	3,201	
2,195	0,100	3,203	
2,1	0,220	3,272	
2,0	0,335	3,313	
1,8	0,545	3,343	Max
1,7	0,641	3,340	
1,5	0,815	3,311	
1,0	1,173	3,220	
$0{,}759 = \vartheta$	1,317	3,203	Min
0,5	1,461	3,228	
0,0	1,716	3,432	

Wir haben also bei $y_0 = 0{,}545$ ein Max. von U, für $y_0 = 1{,}317$ ein Minimum, doch gehen die Werte $y_0 = 0{,}095$ und 0,029 noch kleinere Werte von U und $y_0 = 0$ würde einen noch etwas kleineren Wert liefern. Man erkennt also deutlich, dass das Min. der Variationsrechnung, welches mit diesem hier (für $y_0 = 1{,}317$) identisch, kein absolutes, sondern nur ein relatives ist, da es andere Curven giebt, die noch kleinere Werte von U hervorbringen.

Wenn nun aber der obige Fall 1. eintritt, in welchem die Variationsrechnung ebenso wenig wie die Differentialrechnung eine Kettenlinie als Minimums-Curve liefert, so liegt die Frage nahe, ob nicht der Differentialgleichung der Variationsrechnung particulär durch eine andere Curve genügt werden kann. Dass dies geschehen kann, tritt besonders deutlich hervor, wenn wir die Coordinaten vertauschen. Bezeichnen wir (s. Fig. 5) die Coordinaten eines beliebigen Punktes P der zu suchenden Curve: BQ mit ξ, PQ mit η, und diejenigen des tiefsten Punktes $H : BF$ mit $\xi_0 (= c)$, HF mit b, so ist:

$$38) \qquad U = \int_{\xi_0}^{h} \xi . \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} d\xi$$

wobei ξ_0 zunächst unbekannt, die zugehörige Ordinate aber bekannt ist. Dann liefert die Methode der Variationsrechnung die Gleichung:

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\xi\cdot\frac{d\eta}{d\xi}}{\sqrt{1+\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}}\right)=0$$

woraus:

39) $$\frac{\xi\cdot\frac{d\eta}{d\xi}}{\sqrt{1+\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}}=\text{const}=C$$

Integrirt man diese Gleichung und bestimmt die Constanten C, ξ_0 und die neu hinzutretende so, dass sie $\xi=\xi_0:\frac{d\xi}{d\eta}=0$ und $\eta=b$, für $\xi=h$ aber $\eta=0$ wird, so erhält man die bekannte Kettenlinie. Setzen wir aber particulär $C=0$, so folgt: entweder $\xi=0$, wobei gleichzeitig $\frac{d\eta}{d\xi}=\infty$ gesetzt werden darf, weil der Bruch

$$\frac{\frac{d\eta}{d\xi}}{\sqrt{1+\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}}$$

hiemit den endlichen Wert 1 annimmt, oder $\frac{d\eta}{d\xi}=0$, $\eta=\text{const}$; und zwar folgt die Constante $=b$. Nehmen wir die andere congruente Hälfte hinzu, so erhalten wir das Resultat, dass auch durch Rotation der gebrochenen Linie $CABD$ um AB ein Minimum[1]) entsteht. Der Wert desselben werde mit: $2\pi.U_{00}$ bezeichnet, so ist:

40) $$U_{00}=h^2.$$

Im Vergleich mit der Kettenlinie, welche durch die Punkte C und D geht und AB berührt, ist wie die Gleichung 27) zeigt,

41) $$U_{00}<U_0;$$

in dem Falle also, dass alle andern Kettenlinien Werte für U liefern, die mit y_0 zunehmen (Fall 1) S. 140), ist U_{00} kleiner als alle diese Werte. Es ist dann aber überhaupt ein absolutes Minimum wie folgende einfache Betrachtung zeigt. Von allen durch C und D

---

1) Nicht etwa ein Maximum, da $\left(\text{wenn } \frac{d\eta}{d\xi} \text{ mit } \eta' \text{ bezeichnet wird}\right)$

$$\frac{\partial}{\partial\eta'}\left(\frac{\xi.\eta'}{\sqrt{1+\eta'^2}}\right)=\frac{\xi}{(1+\eta'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

positiv ist.

gehenden Curven, welche in ihrem ganzen Verlaufe oberhalb AB liegen — und solche können der Natur der Aufgabe gemäss allein in Betracht kommen — ist der Linienzug $CABD$ ein Grenzfall, der andere ist die gerade Linie CD. Die letztere ist als Specialfall einer Kettenlinie anzusehen und liefert somit $U > U_0 > U_{00}$.[1]) Würde nun irgend eine Curve ein U liefern, welches kleiner als U_{00} wäre und liesse man diese Curve durch beliebig kleine Aenderungen der Form einmal allmählich in CD, das andere mal in $CABD$ übergehen, so müsste entweder das U der gedachten Curve selbst kleiner als diejenigen der beiderseits benachbarten sein, oder es müsste dies bei irgend einer der Uebergangscurven stattfinden. Das Eine oder das Andere müsste aber durch die Variationsrechnung angezeigt werden. Da dies nun nicht geschieht, ist die Voraussetzung irrig, d. h. U_{00} das absolute Minimum.

Anders verhält es sich, wenn das relative Minimum U_m der Variationsrechnung vorhanden, wenn also $h > 1{,}50888\,b$ ist. In diesem Falle könnte $U_{00} \lessgtr U_m$ sein. Auf $U = U_m$ beziehen sich die Gleichungen 30) 32) 34), nämlich wenn ich t statt ϑ, z statt ζ setze (und wieder $b = 1$ annehme):

$$42) \qquad \begin{cases} h = z = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2t}, \quad y_0 = \dfrac{1}{t}, \\ U_m = \dfrac{1}{t} + \dfrac{e^{2t} - e^{-2t}}{4t^2} = \dfrac{1}{t} + \dfrac{e^t - e^{-t}}{2t} . z \end{cases}$$

und es ist die Differenz, die ich mit D bezeichne, zu untersuchen:

$$D = U_m - U_{00} = \frac{1}{t} + \frac{e^t - e^{-t}}{2t} . z - h^2 = \frac{1}{t} - z\left(z - \frac{e^t - e^{-t}}{2t}\right)$$

d. i. vereinfacht:

$$43) \qquad D = \frac{1}{t}\,(1 - z . e^{-t})$$

In dem Ausdrucke $z . e^{-t} = \dfrac{1 + e^{-2t}}{2t}$ nimmt, während t von 0 bis ∞ geht, der Zähler von 2 bis 1 ab, und wächst gleichzeitig der Nenner von 0 bis ∞; der Bruch nimmt also stetig von ∞ bis 0 ab und wird daher einmal auch den Wert 1 annehmen müssen. Sei t_1 der betreffende Wert von t, so ist

$$\text{für } t < t_1, \quad z e^{-t} > 1, \quad D \text{ negativ}$$
$$\text{für } t > t_1, \quad z e^{-t} < 1, \quad D \text{ positiv.}$$

---

1) Dies ergiebt sich auch direct, da $h = 1{,}5\,b$, und daher $2\pi h^2 < 4\pi b h$ ist.

Der Wert von t_1 lässt sich mit Hilfe der kleinen Tafel für z (S. 143) näherungsweiso leicht bestimmen; es findet sich:

$$\text{für } t = 0{,}6 \quad z.e^{-t} = 1{,}084$$
$$t = 0{,}7 \quad z.e^{-t} = 0{,}890$$

so dass, wenn ich die dem t_1 entsprechenden z und h mit z_1 und h_1 bezeichne,

$$0{,}6 < t_1 < 0{,}7; \quad 1{,}975 > z_1 = h_1 > 1{,}793$$

ist. Die genaueren Werte sind:

44) $$t_1 = 0{,}639, \quad h_1 = 1{,}895$$

Ist nnn h gegehen, so folgt t aus dem oberen Teile der Tafel für z, weil von den beiden möglichen Werten für y_0 der grössere, also für t der kleinere zn wählen ist; ist also $h > h_1$, so ist $t < t_1$, und daher D negativ, $U_m < U_{00}$. Dann ist U_m das wirkliche Minimnm, wie dnrch eine der obigen Betrachtnng nachgehildete zu ersehen; ist hingegen $h < h_1$, so ist U_{00} das wirkliche Minimnm. So ist z. B.:

für $h = 1{,}716$; $t = 0{,}759$; $U_m = 3{,}203$; $U_{00} = 2{,}944$; $U_{00} < U_m$
- $h = 2{,}255$; $t = 0{,}5$; $U_m = 4{,}352$; $U_{00} = 5{,}087$; $U_m < U_{00}$

Wir erhalten also in jedem Falle eino Anflösnng der Anfgahe: Durch zwei von einer geraden Linie gleich weit gelegene Pnnkte eino Cnrve zn legen, so dass dnrch ihro Rotation um jene Linie die kleinste Oberfläche entsteht. Nenne ich die Enfernnng der beiden Punkte von einander $2b$, und ist die Entfernnng jedes derselben von der Rotationsaxe $< 1{,}895\,b$, so hesteht die Verbindung dor beiden Punkte aus drei znsammenstossenden geraden Linion, und die Oberfläche zerfällt in zwei von einander getrennte Kreisflächen; ist dio genannte Entfernung $> 1{,}895\,b$, so sind die Punkte durch eine Kettenlinie besonderer Art zu verhindon, nnd die Oberfläche hildet ein Continuum.

Schlnsshemerknng. Wenn die heiden Pnnkte C nnd D nicht gloich weit von der Rotationsaxe liegen, so werden zweifellos analoge Resnltate erhalten werden; doch mag ihre spociello Anfsuchnng, der analytischen Complication wegen, und weil sie keine wesentlich nenen Gesichtspunkte herzubringon können, unterbleiben. Uebrigens liefert der folgende Ahschnitt II. Formeln, die zu genanntem Zwecke verwendhar wären.

II.

Wir wenden uns nunmehr zu der andern Aufgabe, die sich an das berührte Problem der Variationsrechnung knüpft. Wir fragen nämlich: Innerhalb welchen Gebietes muss, falls das Minimum der Variationsrechnung U_m existiren soll, der zweite der beiden Punkte C und D liegen, wenn der erste, etwa C, in seiner Lage zur Rotationsaxe beliebig, aber fest, gegeben ist? Zur Beantwortung dieser Frage können wir durch folgende Betrachtung gelangen: Die Kettenlinien, die hier in Betracht kommen, haben für die Rotationsaxe als Abscissenaxe und für eine durch den tiefsten Punkt gehende, zu ersterer senkrechter Linie als Ordinatenaxe die Gleichung 7):

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right)$$

sie hangen also nur von dem einen Parameter c ab, sind daher sämtlich unter einander geometrisch ähnlich und zur Abscissenaxe ähnlich gelegen. Denken wir uns nun eine solche Curve in Fig. 6a) construirt, wobei die Tangenten OM und ON mit der Abscissenaxe den Winkel $\alpha = 56^0 28'$ (1. Gl. 19)) bilden, und nennen wir diese Curve der Kürze wegen die Mustercurve. Nehmen wir auf dieser irgend einen Punkt P als dem Punkte C entsprechend an, so kann der dem Punkte D entsprechende Q nur auf einem begrenzten Stück dieser Curve angenommen werden, und zwar erhält man den Grenzpunkt Q_1 (der eigentlich bereits auszuschliessen ist) wenn man in P eine Tangente zieht, welche die Abscissenaxe in R schneidet, und von R aus die zweite Tangente RQ_1 an die Curve legt. Ist nun (Fig. 6b) der Punkt C in seiner Lage zur Abscissenaxe gegeben, so kann man eine Curve CE zeichnen, welche dem Stück PQ_1 der Mustercurve ähnlich ist, und zwar in dem Aehnlichkeitsverhältniss $CA:PS$, so dass also auch $\frac{BE}{AC} = \frac{TQ_1}{SP}$ und $\frac{BA}{AC} = \frac{TS}{SP}$ ist.

Der Punkt D darf dann irgendwo auf diesem Curvenstück angenommen werden. Nehmen wir nun auf der Mustercurve statt PQ_1 ein anderes ebenfalls brauchbares Stück an und übertragen dasselbe in analoger Weise nach dem Punkte C, so erhalten wir daselbst ein zweites Curvenstück mit einem zweiten Grenzpunkte E'. Denken wir uns nun den Punkt P die ganze Mustercurve durchlaufend, für jede Lage den Punkt Q_1 aufgesucht und das jedesmalige Stück PQ_1 in obiger Art in C nachgezeichnet, so werden alle diese Curven ein bestimmtes Gebiet der Ebene erfüllen und die continuirliche Folge

der Punkte E seine Begrenzung bilden[1]). Innerhalb dieses Gebietes darf denn der Punkt D irgendwo liegen, weil er dann stets auf irgend einer der Curven CE zu liegen kommt.

Gehen wir nun von der besonderen Lage des Punktes P aus, dass er mit M zusammenfällt! Dann wird Q_1 identisch mit N. Zeichnen wir demgemäss CF parallel mit MO, FG gleich und parallel ON, so fällt E in G hinein. Rückt P höher hinauf, so rückt Q_1 und ihm folgend E tiefer hinab und während P in die Unendlichkeit gelangt, kommt Q_1 zur tiefsten (horizontalen) Stelle der Curve. In diesem Falle ist $\frac{Q_1T}{PS} = 0$ und auch:

$$\frac{TS}{PS} = \frac{x}{y}\Big]_{x=\infty} = \frac{2}{c} \cdot \frac{x}{\frac{x}{c} + c - \frac{x}{c}}\Big]_{x=\infty} = 0$$

folglich muss der Punkt E dann mit A zusammenfallen. — Rückt umgekehrt der Punkt P von M aus herab, so rücken Q_1 und E von N bzw. G aus hinauf und gelangen in die Unendlichkeit, wenn P im tiefsten Punkte der Kettenlinie angekommen ist. Auf diese Weise wird ein Teil der Begrenzungscurve hergestellt. Lässt man P noch weiter nach rechts rücken, oder was dasselbe ist, betrachtet man C als den rechts gelegenen von den beiden Punkten C und D, so erhält man den andern Teil derselben; dieser steigt von A nach links hin auf, ist dem ersten Teile congruent und liegt bezüglich C mit ihm symmetrisch. Der Punkt D darf also irgendwo innerhalb dieses unendlichen Gebietes, aber nicht ausserhalb, auch nicht auf der Begrenzung selbst liegen.

Wir haben nun denselben eben geschilderten Weg zur Auffindung der Begrenzungscurve analytisch zu verfolgen. Nehmen wir (Fig 6a und b) für diese Curve A als Coordinatenursprung, bezeichnen die Coordinaten von E, AB mit ξ, EB mit η, das gegebene Stück CA mit g, nennen ferner OT und Q_1T bzw. x und y, endlich den absoluten Wert von OSx_1 und PSy_1 so gelten der vorangehenden Darstellung gemäss die Beziehungen:

$$45) \qquad \frac{AB}{AC} = \frac{ST}{SP}, \quad \frac{EB}{CA} = \frac{Q_1T}{PS} \text{ d. i. } \frac{\xi}{g} = \frac{x + x_1}{y_1}; \quad \frac{\eta}{g} = \frac{y}{y_1}.$$

Nun lautet die Gleichung der Mustercurve (s. Gl. 7):

---

1) Um diese Begrenzung, auf die es schliesslich doch nur ankommt, zu finden, genügt schon die Nachbildung der geradlinigen Figur $PSTQ$, ohne das Curvenstück PQ_1.

46) $$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right)$$

nnd zwar ist nach den Bezeichnungen der Fignr 2. nnd gemäss 18): $c = OH = A_mF = A_mO\cos\beta$, also wenn wir $A_mO = OB_m = 1$ setzen:

47) $$c = \cos\beta$$

nnd dahor die Gleichnng der Cnrve auch

48) $$y = \tfrac{1}{2}\cos\beta\,(e^{x\sec\beta} + e^{-x\sec\beta})$$

worans:

49) $$y' = \frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2}(e^{x\sec\beta} - e^{-x\sec\beta})$$

Nnn ist (Fig. 6a): $RT = \frac{y}{y'}$ also:

50) $$RT = \cos\beta \cdot \frac{e^{x\sec\beta} + e^{-x\sec\beta}}{e^{x\sec\beta} - e^{-x\sec\beta}}$$

Ebenso wird

51) $$y_1 = \tfrac{1}{2}\cos\beta\,(e^{x_1\sec\beta} + e^{-x_1\sec\beta})$$

52) $$\frac{dy_1}{dx_1} = \tfrac{1}{2}(e^{x_1\sec\beta} - e^{-x_1\sec\beta})$$

53) $$RS = \cos\beta\,\frac{e^{x_1\sec\beta} + e^{-x_1\sec\beta}}{e^{x_1\sec\beta} - e^{-x_1\sec\beta}}$$

Die Addition der Gl. 50) nnd 53) giebt, da $RT + RS = ST = x + x_1$ ist:

$$(x+x_1)\sec\beta = \frac{e^{x\sec\beta} + e^{-x\sec\beta}}{e^{x\sec\beta} - e^{-x\sec\beta}} + \frac{e^{x_1\sec\beta} + e^{-x_1\sec\beta}}{e^{x_1\sec\beta} - e^{-x_1\sec\beta}}$$

oder znsammengezogen:

54) $$(x+x_1)\sec\beta = \frac{2(e^{(x+x_1)\sec\beta} - e^{-(x+x_1)\sec\beta})}{(e^{x\sec\beta} - e^{-x\sec\beta})(e^{x_1\sec\beta} - e^{-x_1\sec\beta})}$$

Diese Gleichnng liefert eine Boziehnng zwischen x und x_1. Die Division der Gleichnngen 54) nnd 51) und 48) durch 51) führt dann zu den Gleichungen der Begrenznngscurve:

55)
$$\begin{cases} \dfrac{\xi}{g} = \dfrac{4\left(e^{(x+x_1)\sec\beta} - e^{-(x+x_1)\sec\beta}\right)}{\left(e^{x\sec\beta} - e^{-x\sec\beta}\right)\left(e^{2x_1\sec\beta} - e^{-2x_1\sec\beta}\right)} \\ \dfrac{\eta}{g} = \dfrac{e^{x\sec\beta} + e^{-x\sec\beta}}{e^{x_1\sec\beta} + e^{-x_1\sec\beta}} \end{cases}$$

Um die Formeln 54) und 55) geschmeidiger zu machen, führen wir die Hülfswinkel φ und ψ durch die Gleichungen:

56)
$$e^{-x\sec\beta} = \operatorname{tg}\frac{\psi}{2}; \quad e^{-x_1\sec\beta} = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$$

ein; ihre Substitution in die Gleichungen 49) und 52) giebt:

57)
$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\cot\dfrac{\psi}{2} - \operatorname{tg}\dfrac{\psi}{2}\right) = \cot\psi \\ \dfrac{dy_1}{dx_1} = \frac{1}{2}\left(\cot\dfrac{\varphi}{2} - \operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}\right) = \cot\varphi \end{cases}$$

Es sind also ψ und φ die Winkel, welche die Tangenten $Q_1 R$ und PR mit der Verticalen bilden. Führt man sie in die Gleichung 54) ein, so erhält man:

$$-\log\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}\right) = 2.\frac{\left(\cot\frac{\varphi}{2}\cot\frac{\psi}{2} - \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}\right)}{\left(\cot\frac{\varphi}{2} - \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)\left(\cot\frac{\psi}{2} - \operatorname{tg}\frac{\psi}{2}\right)}$$

$$= 2.\frac{\left(\cos^2\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\psi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\sin^2\frac{\psi}{2}\right)}{\left(\cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\left(\cos^2\frac{\psi}{2} - \sin^2\frac{\psi}{2}\right)}$$

$$= 2\,\frac{\cos\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)}{\cos\varphi\,.\,\cos\psi} = \frac{\cos\varphi+\cos\psi}{\cos\varphi\cos\psi}$$

also:

58)
$$-\log\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}.\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}\right) = \sec\varphi + \sec\psi$$

oder auch:

59)
$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} = e^{-(\sec\varphi+\sec\psi)}$$

Diese Gleichungen geben die Beziehung an, die zwischen ψ und φ besteht, und zwar kommen diese Grössen darin symmetrisch vor, lassen sich also mit einander vertauschen. Formt man endlich die

Gleichung 55) mittelst der Winkel φ und ψ um, so erhält man nach ähnlicher Reduction wie oben:

$$60) \qquad \begin{cases} \frac{\xi}{g} = \sin\varphi(\sec\varphi + \sec\psi) \\ \frac{\eta}{g} = \frac{\sin\varphi}{\sin\psi} \end{cases}$$

Denkt man sich aus den drei Gleichungen 60) und 59) (oder 58)) φ und ψ eliminirt, so entsteht die Gleichung der Begrenzungscurve. Bevor wir aber in die nähere Untersuchung ihrer geometrischen Eigenschaften eintreten, wollen wir die gewonnenen Resultate (d. h. die Gleichungen 58) 59) 60)) noch auf einem ganz andern Wege ableiten.

Sei der Punkt P (Fig. 7) in seiner Lage zur Rotations- und zugleich Abscissenaxe gegeben, das Lot $PJ = h_0$ und J der Anfangspunkt des Coordinatensystems. Lege ich nun durch P alle die Kettenlinien, die dem Problem genügen, d. h. deren Gleichung die Form der Gl. 1),

$$61) \qquad y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x-k}{c}} + e^{-\frac{x+k}{2}}\right)$$

hat, nehme jedoch die Horizontalprojection der Spannweite JK als gegeben $= f$ an, so dass der andere Endpunkt Q in der durch K gehenden Verticalen liegt, so wird bei einer bestimmten von diesen Curven Q dem Punkt K am nächsten liegen, bei allen anderen weiter hinauf. Ist die erstgenannte gefunden, und bezeichne ich für sie QK mit (h_1), für eine beliebige mit h_1, so weiss ich, dass $h_1 > (h_1)$ sein muss, wobei aber das Verhältniss $\left(\frac{h_1}{h_0}\right)$[1]) von h_0 abhängig ist; und ich kann dann auch leicht die Coordinaten eines Punktes der Begrenzungscurve angeben, indem ich

$$62) \qquad \frac{\xi}{g} = \frac{f}{h_0}, \quad \frac{\eta}{g} = \left(\frac{h_1}{h_0}\right)$$

nehme und die Grösse h_0 aus diesen Gleichungen eliminire. Wenden wir die Gleichung 61) auf die Punkte $J = (0, h_0)$ und $K = (f, h_1)$ an, so werden sie:

---

1) Kürzer statt: $\frac{(h_1)}{h_0}$.

$$63) \quad \begin{cases} h_0 = \frac{c}{2}\left(e^{-\frac{k}{c}} + e^{\frac{k}{c}}\right) \\ h_1 = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{f-k}{c}} + e^{-\frac{f-k}{c}}\right) \end{cases}$$

Setzen wir aber:

$$64) \quad e^{-\frac{k}{c}} = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}; \quad e^{-\left(\frac{f-k}{c}\right)} = \operatorname{tg}\frac{\psi}{2}$$

so nehmen sie die einfachere Gestalt an:

$$65) \quad h_0 = \frac{c}{\sin\varphi}, \quad h_1 = \frac{c}{\sin\psi}$$

$$66) \quad \frac{h_1}{h_0} = \frac{\sin\varphi}{\sin\psi}$$

und es sollen also c, k, φ und ψ so bestimmt werden, dass $\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}$ ein Minimum wird, während die Gleichungen 64) und die erste 65) gelten, worin h_0 als bekannt anzunehmen ist. Etwas leichter wird die Rechnung, wenn wir statt c und k die Grössen u und v durch die Gleichungen:

$$67) \quad \frac{k}{c} = u, \quad \frac{f}{c} = v$$

einführen, so dass $\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}$ ein Minimum werden soll unter gleichzeitiger Existenz der Beziehungen:

$$68) \quad \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - e^{-u} = 0, \quad \operatorname{tg}\frac{\psi}{2} - e^{u-v} = 0, \quad v\sin\varphi - \frac{f}{h_0} = 0$$

Wir haben folglich nach der bekannten Methode von Lagrange

$$69)$$

$$V = \frac{\sin\varphi}{\sin\psi} + \lambda\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - e^{-u}\right) + \mu\left(\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} - e^{u-v}\right) + \nu\left(v\sin\varphi - \frac{f}{h_0}\right)$$

Indem wir die Differentialquotienten nach φ, ψ, u, v verschwinden lassen, erhalten wir die Gleichungen:

$$70) \quad \begin{cases} \frac{dV}{d\varphi} = \frac{\cos\varphi}{\sin\psi} + \frac{\lambda}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}} + \nu v\cos\varphi = 0 \\ \frac{dV}{d\psi} = -\frac{\sin\varphi\cos\psi}{\sin^2\psi} + \frac{\mu}{2\cos^2\frac{\psi}{2}} = 0 \\ \frac{dV}{du} = \lambda e^{-u} - \mu e^{u-v} = 0 \\ \frac{dV}{dv} = \mu e^{u-v} + \nu\sin\varphi = 0 \end{cases}$$

Die 2te, 3te und 4te dieser Gleichungen liefern nacheinander:

$$\mu = \frac{\sin\varphi\cos\psi}{2\sin^2\frac{\psi}{2}}, \quad \lambda = \mu . e^{2u-v}, \quad \nu = -\frac{\mu . e^{u-v}}{\sin\varphi}$$

und ihre Substitution in die erste, mit $\sin\psi$ multiplicirte Gleichung giebt:

$$\cos\varphi + \cot\frac{\psi}{2}\sin\varphi\cos\psi\left(\frac{e^{2u-v}}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}} - \frac{v . e^{u-v}\cos\varphi}{\sin\varphi}\right) = 0$$

oder wegen 68)

$$\cos\varphi + \cos\psi - v\cos\varphi . \cos\psi = 0$$

daher:

71) $$v = \sec\varphi + \sec\psi$$

Nun folgt aus 68):

$$-u = \log\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$$

$$u - v = \log\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}$$

daher:

$$-v = \log\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + \log\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}$$

und somit aus 71):

72) $$-\log\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}\right) = \sec\varphi + \sec\psi$$

Die Elimination von v aus der dritten 68) und 71) führt zu der Gleichung

73) $$\frac{f}{h_0} = \sin\varphi(\sec\varphi + \sec\psi)$$

Ersetzen wir nun in 73) und 66) die linken Seiten durch ihre Worte aus 62) und schreiben noch die Gleichung 72) vor, so erhalten wir:

$$\begin{cases} -\log\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}\right) = \sec\varphi + \sec\psi \\ \frac{\xi}{g} = \sin\varphi(\sec\varphi + \sec\psi) \\ \frac{\eta}{g} = \frac{\sin\varphi}{\sin\psi} \end{cases}$$

Dieso Gleichungen sind aber identisch mit den Gleichnngen 58) und 60), nnd zwar sind auch die Hilfswinkol hier nnd dort dieselben[1]).

---

1) Sind die Verhältnisse $\frac{h_0}{f}$ nnd $\frac{h}{f} \cdot \left(> \frac{(h_1)}{f}\right)$ gegeben, nnd sollen für die betreffende Kettenlinie die Parameter k nnd c berechnet werden, so dienen dazu am besten die Gleichungen 88) nnd 66). Man nehme u willkürlich an, bestimme, mittelst der Gleichnng $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = e^{-u}$, φ sodann durch $v = \frac{f}{h_0 \sin\varphi}$, endlieh ψ durch dle Gleichnng: $\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} = e^{-(v-u)}$. Setzt man dann die Werte von φ und ψ in 66) ein, so mnss diese erfüllt werden, nnd es ist u so lange zn verändern, bis dies geschiebt. Man erhält stets zwei Anflösnngen; von diesen ist der kleinere Wert für u zn wählen. Schliesslich folgen c nnd k ans 67).

Beispiel. Wir wollen zuerst die Ordinate η des Punktes I der Begrenzungscurve in Fig. 6b bestimmen, welcher vertical über F liegt; sodann wollen wir die Parameter einer Kettenlinie bestimmen, für welche $\frac{h_0}{f} = \frac{CA}{AF}$ ist, während $\frac{h_1}{f}$ willkürlich, jedoch innerhalb der Grenzen der Mögliehkeit angenommen werden soll.

Um die erste Frage zu beantworten, müssen wir die Winkel φ nnd ψ aus der Gleichnng 59) nnd der ersten der Gleichungen 60) bestimmen. Da nnn $\xi = AF$ den Wert $g \operatorname{tg}\beta$ hat, so beissen sie, nnter Einführnng der Beziehnng Z:

a) $$\sec\psi = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\sin\varphi} - \sec\varphi$$

b) $$Z = e^{-(\sec\varphi + \sec\psi)} \cot\frac{\varphi}{2} \cdot \cot\frac{\psi}{2} = 1$$

Nehme ieh $\varphi = 14°$ an, so folgt aus a): $\psi = 54°\ 8'$ nnd damit aus b): $lZ = 0{,}0135$; für $\varphi = 13°\ 30'$ folgt $\psi = 56°\ 29'$, und $lZ = 9{,}9647 = -0{,}0353$. Dem Werte $\varphi = 13°\ 54'$ entsprechen $\psi = 54°\ 38'$ nnd $lZ = 0{,}0029$ was als genügende Annäherung an $lZ = 0$ gelten mag. Hiermit folgt aus der andern Gleichnng 60):

c) $$\eta = 0{,}2945\, g$$

Bezüglich der Beantwortnng der zweiten Frage ist $\frac{h_0}{f} = \cot\beta$ nnd $\left(\frac{h_1}{h_0}\right) = \frac{\eta}{g}$; nehme ich nnn $h_1 = \frac{1}{2} h_0$ (oder $\frac{h_1}{f} = \frac{1}{2}\cot\beta$) an, so muss die Aufgabe möglich sein, da $\frac{h_1}{h_0} > \left(\frac{h_1}{h_0}\right)$ ist.

Versnehen wir nnn mit $u = 1{,}8$ so folgt $\varphi = 18°\ 46'$, $v = 2{,}060$, somit $v - u = 0{,}260$ und dann $\psi = 75°\ 16'$; setzen wir diese Werte in die aus 66) hergeleitete Gleichung:

Um nun die Begrenzungscurve selbst näher kennen zu lernen, setzen wir zuerst $\varphi = 0$; dann folgt aus 58):

$$-l(0) = 1 + \sec\psi$$

also $\psi = \frac{\pi}{2}$. Folglich wird $\frac{\eta}{g} = 0$ und auch $\frac{\xi}{g} = 0$, indem ich für $\sec\varphi + \sec\psi$ den Wert (aus derselben 58) bei kleinem φ): $-\log\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ setze. Auch wird:

74) $$\frac{\eta}{\xi} = \frac{1}{\sin\psi\,(\sec\varphi + \sec\psi)}$$

also für den Anfangswert von φ und ψ: $\frac{\eta}{\xi} = 0$, sodass die Curve die Abscissenaxe in A tangirt.

Für $\varphi = \psi$ ergiebt sich aus:

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = e^{-\sec\varphi}$$

also ist dann, wie Gleichung $19)_a$ zeigt: $\varphi = \psi = \beta$ und daher $\xi = 2g\operatorname{tg}\beta$, $\eta = g$.

Ist endlich $\varphi = \frac{\pi}{2}$, so folgt aus 58) oder 59) $\psi = 0$ und daher $\xi = \infty$, $\eta = \infty$, aber nach 74:

$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{-1}{\psi \cdot \log\left(\frac{\psi}{2}\right)}\Bigg]_{\psi = 0} = \infty$$

Die Curve steigt schliesslich also steil in die Höhe und gewinnt, wenn wir noch den links liegenden congruenten Teil hinzufügen im allgemeinen die in Fig. 8) dargestellte Gestalt. Nunmehr können wir die Frage: „Lässt sich durch zwei in bestimmter Lage zur Rotationsaxe gegebene Punkte eine Kettenlinie, welche eine Minimal-Oberfläche erzeugt, legen?“ präcise beantworten. Nennen wir nämlich einen beliebigen der beiden Punkte C_1, den andern D_1, fällen die Lote zur Rotationsaxe, C_1A_1, D_1B_1 und vergrössern oder verkleinern die Figur $C_1A_1B_1D_1$, sodass C_1A_1 in das CA der Be-

---

d) $$Y = \tfrac{1}{3}\frac{\sin\psi}{\sin\varphi} = 1$$

so ergiebt sich $lY = 0{,}0009$ statt 0, was genügen mag. — Der andere Wert von u ist nahe an 2,37, also als der grössere nicht zu brauchen. Die Gleichung 61) der Kettenlinie heisst somit:

e) $$\frac{y}{f} = \frac{1}{2v}\left(e^{\left(v\frac{x}{f} - u\right)} + e^{-\left(v\cdot\frac{x}{f} - u\right)}\right); \quad \left\{\begin{matrix} u = 1{,}8 \\ v = 2{,}060 \end{matrix}\right\}$$

grenzungscurve übergeht (Fig. 8), zeichnen sie dann an CA heran, sodass die Figur $CABD \sim C, A_1 B_1 D_1$ entsteht, — so lautet die Antwort bejahend, falls D innerhalb der Begrenzungscurve liegt, verneinend, falls D ausserhalb oder auf der Begrenzungscurve sich befindet.

Aus der ersten Entstehungsweise derselben entspringt noch eine interessante Beziehung zwischen den Ordinaten je zweier mit C auf gerader Linie liegenden Punkte. Denken wir uns nämlich in Fig. 6a) den Punkt P nach p, symmetrisch zu Q_1 herunterrückend, so gelangt Q_1 in die Lage von q_1 symmetrisch zu P. Sind dann in Fig. 8. CE und CF die in den Verbindungslinien PQ_1, pq_1 entsprechenden und daher letzteren parallelen, so bilden sie mit der Horizontalen gleiche Winkel; es ist aber auch, wenn ich EI und FK fälle, die ganze Figur $CAIE \sim PSTQ_1$ und ebenso $CAKF \sim pstq_1$ (wenn ich die betreffenden Linien in Fig. 6a) gezogen denke). Da die letzteren Figuren aber congruent sind, so ist auch: $CAIE \sim FKAC$ oder wenn ich EC bis E_1 verlängere und $E_1 I_1$ fälle. $CAIE \sim E_1 I_1 AC$; folglich findet die Proportion statt:

$$EI : CA = CA : E_1 I_1$$

oder wenn ich die Ordinaten der mit C auf gerader Linie liegenden Punkte E und E_1 mit η und η_1 bezeichne:

$$\eta \eta_1 = g^2$$

Dies wollen wir auch analytisch nachweisen. Bezeichne ich (in Fig. 8) die Coordinaten von E mit ξ und η, von F mit ξ_1 und η_1 (da $FK = E_1 I_1$ ist) so ist, wenn ich durch C eine Horizontale ziehe, die von den Loten aus E und F in G und getroffen wird, Wkl. ECG = Wkl. FCH und daher

$$\frac{g - \eta}{\xi} = \frac{\eta_1 - g}{\xi_1}$$

folglich wenn ich für η und ξ die Werte von φ und ψ aus 60) und für η_1 und ξ_1 die entsprechenden in φ_1 und ψ_1 einsetze:

$$75) \qquad \frac{\sin\psi - \sin\varphi}{\sin\varphi \sin\psi (\sec\varphi + \sec\psi)} = \frac{\sin\varphi_1 - \sin\psi_1}{\sin\varphi_1 \sin\psi_1 (\sec\varphi_1 + \sec\psi_1)}$$

dabei gilt ausser 59) noch die Gleichung:

$$76) \qquad \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\psi}{2} = e^{-(\sec\varphi_1 + \sec\psi_1)}$$

Nun wird 75) identisch erfüllt, und 76) geht in die richtige Gleichung 59) über, wenn wir:

$$77) \qquad \varphi_1 = \psi, \quad \psi_1 = \varphi$$

setzen; dann wird aber:

78) $$\frac{\eta_1}{g} = \frac{\sin\psi}{\sin\varphi}$$

und somit $\eta\eta_1 = g^2$.

Zu wichtigeren Resultaten führt jedoch die Betrachtung des Differentialquotienten. Um $\frac{d\eta}{d\xi}$ auszudrücken, betrachte ich φ als die unabhängige Variable und habe also zuerst $\frac{d\psi}{d\varphi}$ zu bestimmen. Durch Differentiation der Gleichung 58) nach φ folgt:

$$-\frac{1}{\sin\varphi} - \frac{1}{\sin\psi}\cdot\frac{d\psi}{d\varphi} = -\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} + \frac{\sin\psi}{\cos^2\psi}\cdot\frac{d\psi}{d\varphi}$$

woraus leicht:

79) $$\frac{d\psi}{d\varphi} = -\frac{\sin\psi\cos^2\psi}{\sin\varphi\cos^2\varphi}$$

Daraus lässt sich ableiten, was wir indessen nicht direct brauchen, $\frac{d\psi}{d\varphi} = -\infty$ für $\varphi = 0$, $\frac{d\psi}{d\varphi} = 0$ für $\varphi = \frac{\pi}{2}$.[1] Differentiirt man jetzt die Gleichungen 60) nach φ, so erhält man:

$$\frac{1}{g}\frac{d\eta}{d\varphi} = \frac{\sin\psi\cos\varphi - \sin\varphi\cos\psi\frac{d\psi}{d\varphi}}{\sin^2\psi}$$

$$\frac{1}{g}\frac{d\xi}{d\varphi} = \cos\varphi(\sec\varphi + \sec\psi) + \sin\varphi\left(\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} + \frac{\sin\psi}{\cos^2\psi}\frac{d\psi}{d\varphi}\right)$$

d. i. mittelst 79) und nach geringen Reductionen:

80) $$\begin{cases} \frac{1}{g}\frac{d\eta}{d\varphi} = \frac{\cos^3\varphi + \cos^3\psi}{\sin\psi\cos^2\varphi} \\ \frac{1}{g}\frac{d\xi}{d\varphi} = \frac{\cos^3\varphi + \cos^3\psi}{\cos\psi\cos^2\varphi} \end{cases}$$

und daher:

81) $$\frac{d\eta}{d\xi} = \cot\psi$$

---

1) Denkt man sich überhaupt φ $\left(\text{von } 0 \text{ bis } \frac{\pi}{2}\right)$ als Abscisse und das zugehörige ψ als Ordinate aufgetragen, so erhält man eine im allgemeinen zutreffende Vorstellung der entstehenden Curve, wenn man sich den zwischen den positiven Coordinaten-Halbaxen gelegenen Teil der sternförmigen Curve:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

vergegenwärtigt.

d. h. die Tangente in dem Punkte (ξ, η) der Begrenzungscurve bildet mit der Verticalen den Winkel ψ.

Gehen wir aber nochmals auf die Figuren 6a und b zurück und betrachten den willkürlichen Punkt E als (ξ, η), so ist das Curvenstück CE ähnlich dem Curvenstück PQ_1. Die Tangenten des letzteren bilden aber gemäss der Deutung der Gleichungen 57) mit den Verticalen auch die Winkel ψ in Q_1, φ in P; dasselbe ist also auch bezüglich der Tangenten an die Kettenlinie CE und zwar zunächst in E der Fall, also folgt: die Kettenlinie und die Begrenzungscurve berühren einander. Ebenso ist, wenn ich (in Fig. 8) wie schon früher AI_1 mit ξ_1, E_1I_1 mit η_1 bezeichne:

$$\frac{d\eta_1}{d\xi_1} = \cot\psi_1$$

d. i. wegen 77):

82) $$\frac{d\eta_1}{d\xi_1} = \cot\varphi$$

Ziehen wir also in E_1 eine Tangente und in C eine Parallele dazu, so erkennen wir mit Hülfe der Vorstellung, dass die ganze Figur 6b (in richtig verändertem Maassstab) an das CA der Fig. 8 angefügt sei, (sodass E und E etc. zusammenfallen), dass diese Linie zur Tangente an die in Rede stehende Kettenlinie wird, und dass sie mit der an Kettenlinie und Begrenzungscurve gelegten gemeinsamen Tangente sich auf der Linie AI schneidet. Ebenso kann man durch C und E_1 eine Kettenlinie legen, deren in C gezogene Tangente mit der in E parallel läuft, deren in E_1 gezogene zugleich eine solche an die Begrenzungscurve ist, und wobei diese beiden Tangenten sich auf AI_1 schneiden.

Von diesen Ergebnissen ist das zuerst gewonnene das wichtigste. Denn es zeigt, dass die Begrenzungscurve die Enveloppe aller durch C gehenden und dem Problem genügenden Kettenlinien ist, und wir erhalten somit ein schönes Beispiel zu dem Ausspruche Jacobi's (im 15ten Bande des Crelle'schen Journals), dass man auf einer Einzelcurve derjenigen Curvenschaar, die einem bestimmten Problem der Variationsrechnung genügt und durch einen gegebenen Punkt hindurchgeht, den anderen Grenzpunkt nur bis dahin hinausschieben darf, wo die Curve von der benachbarten oder, was dasselbe ist, von der Enveloppe aller getroffen wird.

Königsberg, den 24. Juni 1885.

VI.

Die sphärische Schleifenlinie.

Von

Franz Schiffner.

Wenn ein Punkt A um die feste Gerade G rotirt, so beschreibt er einen Kreis vom Radius $AO = r$; dreht sich aber die Gerade G gleichzeitig in demselben Masse wie A um die Gerade G_1, welche in O auf der Ebene (A, G) senkrecht steht, so erzeugt der Punkt A eine Raumcurve C, die hier näher untersucht werden soll.

Um die Linie C leicht darstellen zu können, nehmen wir die Gerade G als Projectionsachse XX_1, den Punkt A in der horizontalen Bildebene an; die Gerade G_1 liegt dann in der verticalen Bildebene. Die Projectionen eines Punktes P der C finden wir nun, wenn wir erst die eine und dann die andere Drehung verfolgen. Dreht sich G um den Winkel α nach rechts, so tut dies auch AO und kommt nach pO oder A nach p; von hier hat A um G eine dem Winkel α entsprechende Drehung nach aufwärts bis nach P zu machen, so dass Wkl. $pOP = AOp = \alpha$ wird. Denken wir uns den Wkl. pOP um pO nach links umgelegt, so deckt er sich mit dem Winkel AOp, und P fällt auf A. Die Normale aus A zu Op trifft Op in P', und AP' gibt den Abstand des Punktes P von der horizontalen Bildebene an. Wie der Figur zu entnehmen ist, sind die Punkte P' die Scheitel der über AO möglichen rechten Winkel und bilden somit den Kreis, welcher $AO = r$ zum Durchmesser hat. Mit anderen Worten: Der Grundriss C' der Raumcurve C ist der Kreis über dem Durchmesser AO, oder C liegt auf einem Rotationscylinder C_1 mit zu G_1 parallelen Erzeugenden und dem Querschnitte C'.

Alle die Kreise, welche der erzeugende Punkt bei jedesmaliger vollständiger Rotation um G für alle Lagen dieser Geraden beschreibt, bilden eine Kugel K, deren Centrum O und deren Halbmesser $AO = r$ ist. Auf dieser Kugel muss C auch liegen. So erscheint denn C als die Schnittlinie des Rotationscylinders C_1 und der Kugel K. Als solche muss sie eine Raumcurve 4. Ordnung sein. Sie projicirt sich auf die horizontale Bildebene nur deshalb als Linie der 2. Ordnung, weil diese Ebene eine Symmetrieebene von C_1 und K ist. Da die Normalebene zu G durch O ebenfalls eine Symmetrieebene beider Flächen ist, so wird auch die Kreuzrissprojection C''' von C eine Kegelschnittslinie sein. Sie gibt sich als Parabel zu erkennen; denn construirt man C''' so, dass man mit A''' beginnt, dann lassen sich fernere Punkte P''' finden, indem man $A'L = A'''L_1$ und $A'P' = L_1P'''$ macht, was einer bekannten Parabel-Construction entspricht. Die Parabel C''' hat eine horizontale Achse, A''' ist ihr Scheitel, r ihr Parameter. C liegt also auch auf einem zweiten Cylinder C_2, dessen Erzeugenden zu G parallel sind, und dessen Querschnitt eine Parabel ist.

Die drei Flächen K, C_1, C_2 berühren sich im Punkte A; ihre Schnittlinie C muss aus diesem Grunde in A einen Doppelpunkt haben. Jede durch A gelegte Ebene kann dann C nur noch in zwei Punkten schneiden: die Verbindungsgeraden von A mit allen Curvenpunkten erfüllen somit einen Kegel der zweiten Ordnung K_1. Derselbe wird von der verticalen Bildebene in einer Hyperbel H geschnitten, weil er zwei zu dieser Ebene parallele Erzeugende enthält. (Die Tangenten der C in A projiciren sich nämlich horizontal als Parallele zur Projectionsachse).

In anderer Auffassung heisst das: Für das Projectionscentrum A ist die stereographische Projection der Raumcurve C die Hyperbel H.

Der Kegel K_1 liegt wie C zur ersten und dritten Projectionsebene symmetrisch, daher hat die Hyperbel H die Geraden G und G_1 zu Achsen, in O den Mittelpunkt und in B einen Scheitel. Um über die Asymptoten näheren Aufschluss zu bekommen, betrachte man die Erzeugenden AP des Kegels K_1. Sie sind, da nach der oben angeführten Construction von P stets $AP' = P'P$ ist, alle zur horizontalen Bildebene unter Winkeln von 45^0 geneigt — diejenigen, welche A mit seinen beiderseitigen Nachbarpunkten verbinden, werden hiervon keine Ausnahme machen. Das sind aber jene Erzeugende von K_1, welche zur verticalen Bildebene parallel sind und die Asymptotenrichtung der Hyperbel H angeben. Sie stehen auf einander senkrecht, also ist H eine gleichseitige Hyperbel.

Der Umstand, dass die Geraden AP eine gleiche Neigung von 45^0 zur horizontalen Bildebene haben, deutet uns an, dass der Kegel K_1 eigentlich ein Rotationskegel ist, dessen Erzeugenden mit seiner verticalen Achse Winkel von 45^0 bilden. Er wird in der Höhe r nach dem horizontalen Kreise vom Halbmesser r geschnitten.

Die Raumcurve C liegt sonach auf den vier Flächen der zweiten Ordnung: K, K_1, C_1, C_2 und kann als Schnitt von je zweien nach bekannten Methoden dargestellt werden. So wird man die Aufrissprojection C'', welche eine Linie der vierten Ordnung ist, mit Benutzung der Kugel K und des Cylinders C_1 suchen, indem man horizontale Hilfsebenen e legt. Solche schneiden K und C_1 nach Kreisen, deren gemeinschaftliche Punkte in C liegen.

Auch die Tangenten T der Raumcurve C, welche in ihrer Gesamtheit die abwickelbare Fläche F bilden, sind nun bestimmt. Man erhält sie als die Schnittgeraden von Berührungsebenen der Flächen K, K_1, C_1, C_2 in ihren gemeinschaftlichen Punkten. So wurde in der Figur für den Punkt P_1 die Tangente T_1 an C als Schnitt der den Cylinder C_1 längst $P_1'P_1$ berührenden Ebene mit der Ebene, welche den Kegel K_1 längst AP_1 tangirt, dargestellt. Weil C die Ebenen (A, G) und (A, G_1) zu Symmetrieebenen hat, so sind sie es auch für die developpable Fläche F, und dieso wird deshalb in der ersten und dritten Projectionsebene Doppelcurven Σ_1 und Σ_3 haben. Einzelne Punkte derselben ergeben sich als die betreffenden Spurpunkte S_1 oder S_3 der Tangente T; davon fallen, wie die Figur zeigt, für Σ_1 die Spurpunkte der Tangenten in den zwei Punkten B, für Σ_3 die Spurpunkte der Tangenten in den vier Punkten $\mathfrak{P}$ ins Unendliche. Der Symmetrie halber hat Σ_1 nur die eine im Abstande $+2r$ zu G Parallele, Σ_3 die zwei Spuren $\mathfrak{E}_3$ der in den Punkten $\mathfrak{P}$ osculirenden Ebenen (von denen später die Rede sein wird) zu Asymptoten.

Die Rechnung bestätigt nicht allein das Gesagte, sondern liefert auch noch nähere Details.

Nehmen wir ein rechtwinkliges Coordinatensystem so an, dass G die Achse der x, OA die Achse der y und G_1 die Achse der z wird, dann ergeben sich für den Punkt P die Coordinaten:

$$x = r\sin\alpha\cos\alpha, \quad y = r\cos^2\alpha, \quad z = r\sin\alpha.$$

Diese Werte lassen erkennen, dass alle Punkte P oder die Curve C auf der Kugel

$$K \ldots x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

liegen (oder C eine sphärische Curve ist), dass y nie negativ werden kann (oder C ganz auf der vorderen Kugelhälfte verläuft), und dass jedem Werte von y zwei entgegengesetzt gleiche Werte von x und z entsprechen (oder C zu der yz-Ebene und der xy-Ebene symmetrisch liegt). Wir können uns deshalb bei den folgenden Untersuchungen auf den ersten Raum mit positiven Coordinaten beschränken. Für ein zunehmendes α wächst in diesem x von null bis zum Maximum $\frac{r}{2}$ im Punkte $\mathfrak{P}$ $\left(\frac{dx}{d\alpha} = 0, \text{ wenn } \alpha = \frac{\pi}{4}\right)$, nimmt dann aber ab bis null; y durchläuft die Werte von r bis null; z wächst von null bis r. Der die Curve C erzeugende Punkt erhebt sich sonach von A aus auf der Kugel K und nähert sich fortwährend der Ebene XOZ, während er sich anfangs von der Ebene YOZ entfernt, sich ihr aber von $\mathfrak{P}$ an nähert, bis er sie in B trifft.

Die übrigen Teile von C sind diesem symmetrisch; es sieht also C wie eine auf der Kugel K beschriebene 8 aus und verdient deshalb den Namen sphärische Schleifenlinie.

Aus obigen drei Gleichungen für C findet man als Gleichung für den Grundriss

$$C' \ldots x^2 + y^2 - ry = 0$$

C' ist daher richtig ein Kreis mit dem Durchmesser $r = AO$. Als Gleichung für den Kreuzriss C''' ergibt sich

$$z^2 + ry - r^2 = 0$$

C''' ist somit wirklich eine Parabel mit der Achse AO, dem Scheitel A und dem Parameter r, und es bestätigt sich, dass C auf den zwei früher erwähnten Cylindern C_1 und C_2 liegt.

Um in der Parabel C''' jenen Punkt P''' zu finden, welcher dem z entspricht, zeichne man über $A'''O$ einen Kreis, mache Wkl. $A'''Ol_1 = \alpha$ und $A'''l_1 = L_1P'''$; oder construire Wkl. $A'''Ol_0 = \alpha$, l_0m_0 parall. $A'''O$, m_0P_0 parall. Ol_0, $m_0P_0 = m_0l_0$ und P_0P''' senkr. auf l_0m_0. Beidemal hat man

$$OL_1 = r \cdot \cos^2\alpha = y \quad \text{und} \quad L_1P''' = r \sin\alpha = z.$$

In der Ebene XOZ ist die Projection von C eine krumme Linie C'' mit der Gleichung

$$x^4 - r^2x^2 + r^2z^2 = 0.$$

Wie C' und C''', so lässt sich auch der Aufriss C'' direct construiren. Es ist nämlich

$$r.x = z.\sqrt{r^2 - z^2}$$

oder es besteht die Proportion

$$r : \sqrt{r^2 - z^2} = z : x,$$

woraus die Construction folgt: Ziehe OM beliebig, BJ parall. OX, MQ senkr. auf OX, QP'' parall. OX, und P'' ist ein Punkt der Linie C''. Man kann P'' auch so finden, dass man BN beliebig, NQ senkr. auf OX, QU parall. OX, UR parall. BN und RP'' senkr. auf OX zeichnet.

In beiden Constructionen erscheint P'' als der Schnittpunkt der vierten Seiten zweier flächengleichen Rechtecke $ORSB$ und $ONQU$, welche den Winkel O gemein haben, und von denen das eine die Breite r, das andere die Diagonale r hat.

Aus den Gleichungen für

$$C'' \ldots (x = r\sin\alpha\cos\alpha, \quad z = r\sin\alpha)$$

folgt

$$\sin\alpha = \frac{z}{r}, \quad \cos\alpha = \frac{x}{z}$$

was uns bequem Punkte construiren lehrt, die gegebenen Winkeln α entsprechen. Zeichnet man Wkl. $XOQ = \alpha$, so ist $QN = z$; macht man $OD = z$, DR senkr. auf OX, so ist $OR = x$, und die zu OX Parallele QP'' schneidet RD in P''. Aber selbst das lässt sich noch vereinfachen. Weil $\triangle OBD \cong \triangle OQN$, so muss bei D ein rechter Winkel sein, und alle Punkte D liegen in dem Kreise mit dem Durchmesser OB. Man braucht deshalb nur diesen Kreis, den Winkel α dann QP'' parall. OX und DP'' senkr. auf OX zu zeichnen.

Alle Punkte P'' gehen dann die Curve P'' in der Form einer 8 eine ebene Linie der vierten Ordnung, welche in O einen Doppelpunkt hat.

Die Grenzwerte von z sind $\pm r$;

$$x = \pm\frac{z}{r}\sqrt{r^2 - z^2}$$

hat, da

$$\frac{dx}{dz} = \frac{r^2 - 2z^2}{r\sqrt{r^2 - z^2}} \quad \text{für} \quad z = \pm\frac{r}{\sqrt{2}}$$

null wird, die Grenzwerte $\pm\frac{r}{2}$. Alle lassen sich leicht construiren.

Wendepunkte besitzt C'' nur in O, denn es wird

$$\frac{d^2x}{dz^2} = \frac{2z^3 - 3r^2z}{r(r^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{wo} \quad \text{für} \quad z = 0 \text{ und } z = \pm r\sqrt{\frac{3}{2}}$$

gleich null, aber für letzteren Wert ist x imaginär, während für ersteren auch $x = 0$ wird.

Die Tangenten in den nach O fallenden Wendepunkten müssen mit beiden Achsen Winkel von 45^0 bilden, weil $\frac{dx}{dz}$ für $(x=0,\ z=0)$ die Werte ± 1 annimmt. Da sie zugleich die Asymptoten jener Hyperbel H sein müssen, nach welcher der früher erwähnte Kegel K_1 die verticale Bildebene schneidet, so folgt, dass H eine gleichseitige Hyperbel ist.

Auch die Gleichung des Kegels K_1 liefert uns dieses Resultat. Gerade, welche durch den Punkt

$$A \ldots (x = 0, \quad y = z, \quad z = 0)$$

und einen Curvenpunkt P gehen, haben die Gleichungen ...

$$\frac{\xi - r\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\eta - r\cos^2\alpha}{-\sin\alpha} = \zeta - r\sin\alpha$$

und bilden einen Kegel, welcher von der Ebene ... $\zeta = r$ nach dem Kreise ... $(\xi = r\cos\alpha,\ \eta = r - r\sin\alpha)$ oder ... $\xi^2 + (\eta - r)^2 = r^2$ geschnitten wird und mit der Ebene ... $\eta = 0$ eine Linie gemein hat, deren Gleichung ...

$$\left(\xi = r\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \zeta = \frac{r}{\sin\alpha}\right) \quad \text{oder} \ldots \zeta^2 - \xi^2 = r^2$$

auf eine gleichseitige Hyperbel deutet.

Die Strecke zwischen A und einem Punkte P der Linie hat die Länge

$$AP = z.\sqrt{2} = r\sin\alpha\sqrt{2};$$

zwischen A und dem Schnittpunkte π

$$\left(\xi = \frac{r\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \zeta = \frac{r}{\sin\alpha}\right)$$

des Strahles AP mit der Ebene XOZ liegt die Strecke

$$A\pi = \frac{r}{\sin\alpha}\sqrt{2}$$

es ist also immer

$$AP \times A\pi = 2r^2$$

eine constante Grösse.

Nach dem Principe der reciproken Radien könnte deshalb C in die Hyperbel H nnd nmgekehrt transformirt werden, oder auch: Für das Inversionscentrum A nnd die Inversionspotenz $2r^2$ entspricht der Linie C invers die Hyperbel H. Die Ranmcurve C nnd die Kegelschnittslinie H sind darum in ihren kleinsten einander entsprechenden Teilen ähnlich.

Wir wollen nnn den Anfriss C'' der C weiter verfolgen. Seine Tangenten haben die Gleichung

$$\zeta(4z^3 - 2r^2 z) + 2r^2 x\xi = 2z^4,$$

worin x nnd z die Coordinaten des Berührungspnnktes, ξ und ζ die laufenden Coordinaten bedeuten. Zur constrnctiven Bestimmung von T'' eignet sich die Strecke α, welche T'' auf der Achse OX abschneidet. Es ist

$$\alpha = \frac{2z^4}{2r^2 x} = \frac{z^3 - x^3}{x}$$

und lässt sich nach der Proportion

$$\alpha : (z + x) = (z - x) : x$$

construiren, indem man

$$OV = (x + z), \quad OV_1 = x, \quad OW_1 = (z - x)$$

und $W_1 W$ parall. $V_1 V$ zieht; WP'' ist dann T''. Mit Benutzung von α erhält man für T'' die Gleichung

$$\zeta(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) + \xi\cos\alpha = r\sin^3\alpha$$

und für die Strecke α den Ansdrnck

$$\alpha = \frac{r\sin^3\alpha}{\cos\alpha} = r\,\mathrm{tg}\,\alpha - x,$$

nach welchem α noch leichter gezeichnet werden kann: es ist

$$\alpha = nq - x.$$

Diese Gleichnng für T'' sagt aber auch, dass

$$\mathrm{tg}\,(T'', OX) = \frac{r\cos\alpha}{r\cos 2\alpha}$$

ist, weshalb T'' die Richtnng OR_1 haben muss, wenn

$$ON_1 = r\cos 2\alpha \quad \text{und} \quad N_1 R_1 = ON = r\cos\alpha$$

gemacht wird.

Wir können somit bei jeder der drei Projections-Curven von C nicht nur direct Punkte, sondern auch Tangenten daselbst construiren. Die Gestalt der drei Projectionen von C bestärkt das, was wir im Vorgehenden über den Verlauf der Curve C im Raume gesagt haben. Auch die Tangenten T von C sind uns nun mehr als hinreichend klar gelegt, weil die Projectionen T', T'', T''' bekannt sind.

So müssen z. B. im Doppelpunkte A die beiden Tangenten der C zur Ebene XOZ parallel sein und mit den Ebenen XOY und YOZ Neigungswinkel von 45° haben, weil die Tangente T' in A' an C' zu OX, die Tangente T''' in A''' an C''' zu OZ parallel ist und die den Winkel der Achsen halbirenden Geraden als Tangenten in A'' an C'' gefunden wurden. Uebrigens lassen sich auch die Spurpunkte S_1, S_2, S_3 der Tangenten T in den drei Bildebenen durch Rechnung feststellen.

Die Tangenten T haben nämlich die Gleichungen:

$$\frac{\xi - r\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{\eta - r\cos^2\alpha}{-2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\zeta - r\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

woraus für den Spurpunkt S_1 die Coordinaten folgen:

$$\xi = r\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}, \quad \eta = r + r\sin^2\alpha, \quad \zeta = 0,$$

welche auch in der Form:

$$\xi = r\,\mathrm{tg}\,\alpha - x, \quad \eta = 2r - y, \quad \zeta = 0$$

geschrieben werden können, in welcher sie am leichtesten construirbar sind. Wie einleuchtet, muss ξ mit α übereinstimmen, η der Parabeltangente T'' entsprechen.

Beides ist der Fall, denn T''' erhält man bekanntlich auch durch Uebertragen von $A'''L_1$ nach $A'''l$ und Verbinden von l mit P'''; dann ist ja

$$Ol = \eta = 2r - y.$$

Der Spurpunkt S_2 hat die Coordinaten:

$$\xi = \frac{r\cos\alpha}{2\sin\alpha}, \quad \eta = 0, \quad \zeta = \frac{r}{2\sin\alpha} + \frac{r}{2}\sin\alpha.$$

Die Gleichung

$$\frac{r}{2} = \xi\,.\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

war zu erwarten, weil ξ von der Tangente T' an den Kreis C' auf

OX abgeschnitten werden muss; auch die Normale von m_1 auf OP' tut dies, ζ ergibt sich als Summe von $\frac{1}{2}QN$ und Om, wenn $Om_2 = \frac{r}{2}$, $m_2 m$ senkr. auf Om_2 und Wkl. $m = \alpha$ ist.

Die Coordinaten des Spurpunktes S_3 sind:

$$\xi = 0, \quad \eta = \frac{r\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}, \quad \zeta = -\frac{r\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$$

oder auch:

$$\xi = 0, \quad \eta = \frac{y}{\cos 2\alpha}, \qquad \zeta = \frac{z}{2} - \frac{z}{2\cos 2\alpha}.$$

Die Zeichnung liefert $Or = \eta$, wenn Wkl. $LOr = 2\alpha$, $OL = y$, Lr senkr. auf OL, und $uv = -\zeta$, wenn $Ow = Ov = \frac{z}{2}$, Wkl. $uOw = 2\alpha$, wu senkr. auf Ow gemacht wird.

So liessen sich die drei Spurpunkte direct auffindon; doch wird man zumeist die Tangenten T' und T''' benutzen, durch deren leichte und präcise Darstellung sowol T'' als auch S_1, S_2 und S_3 einfach und genau erhalten werden.

In ihrer Gesamtheit bilden die Punkte S_1, S_2, S_3 die drei Spurcurven Σ_1, Σ_2, Σ_3 der abwickelbaren Tangentenfläche unserer Raumcurve C in den drei Projectionsebenen. Behält man den Wkl. α als Veränderliche bei, dann gelten die oben angeführten Ausdrücke für die Coordinaten von S_1, S_2, S_3 als Gleichungen der Curven Σ_1 Σ_2, Σ_3; eliminirt man aber die Grösse α, so resultirt als Gleichung für Σ_1

$$\xi^2(2r - \eta) - (\eta - r)^2 = 0,$$

für Σ_2

$$\zeta^2(4\xi^2 + r^2) - 4\xi^2(\xi^2 + r^2) - r^4 = 0,$$

für Σ_3

$$\zeta^2(2\eta - r) - (\eta - r)^2 = 0.$$

Der Widerspruch, dass Σ_1 und Σ_3 Curven der dritten Ordnung Σ_2 eine Curve der vierten Ordnung ist, wird behoben, wenn man bedenkt, dass S_1 für α und $\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$, S_3 für α und $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ gleichwertige Coordinaten hat, und somit Σ_1 und Σ_3 Doppelcurven der Fläche F sind, während Σ_2 einfach zu zählen ist und durch die Tangenten der C in B und dem zu B symmetrisch gelegenen Punkte (welche beide in der Ebene XOZ liegen und zum Schnitte von F mit XOZ dazu zu zählen sind) zur Curve der sechsten Ordnung ergänzt wird.

Die Schmiegungsebene oder osculirende Ebene E in einem Punkte der Raumcurve C, welche zugleich die Berührungsebene längst einer Erzeugenden T der Fläche F ist, wird man entweder durch T und eine Tangente der Spurcurven, oder durch T und die parallele Tangentenebene des Directionskegels der Fläche F bestimmen.

Die Gleichung der Ebene E ist

$$2\xi\cos^3\alpha - \eta\sin\alpha(1+2\cos^2\alpha) - 2\zeta = r\sin\alpha(\sin^2\alpha - 3)$$

und zeigt uns, dass die Spur E_2 von E in der zweiten Bildebene (zugleich eine Tangente der Σ_2) am einfachsten dargestellt werden kann. E_2 hat nämlich nebst $\eta = 0$ die Gleichung

$$\zeta = \cos^3\alpha\,\xi - \frac{r}{2}\sin\alpha(\sin^2\alpha - 3),$$

welche verlangt, dass

$$\operatorname{tg}\,(E_2,\ OX) = \cos^2\alpha.$$

Für die Construction wird man diesem Werte entweder die Form $\frac{r\,.\cos^2\alpha}{r}$ oder $\frac{y\,.\cos\alpha}{r}$ geben. Wenn $On = r$ und $ni = r\cos^3\alpha = y\cos\alpha$ ist, so gibt Oi die Richtung der Geraden E_2 an, welche Σ_2 in S_2 berührt. Die osculirende Ebene E für den Punkt P geht durch T und E_2.

Die Erzeugenden t des Directionskegels k aus dem Punkte B

$$(x = 0,\quad y = 0,\quad z = r)$$

haben als zu T parallele Gerade die Gleichungen

$$\frac{\xi}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{\eta}{-2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\zeta - r}{\cos\alpha},$$

aus denen sich für die Coordinaten des Schnittpunktes s einer Erzeugenden mit der Ebene XOY die Werte ergeben:

$$\xi = \frac{r(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)}{\cos\alpha},\quad \eta = 2r\sin\alpha,\quad \zeta = 0.$$

Alle Spurpunkte s bilden die Spurcurve α des Directionskegels k in der horizontalen Bildebene. Dieselbe hat einfache Polarcoordinaten. Für den Radiusvector $\varrho = \sqrt{\xi_1^2 + \eta^2}$ erhält man nach einfacher Umformung:

$$\xi = \pm\frac{r}{\cos\alpha},$$

und da

$$\sin(t', OX) = \frac{\eta}{\varrho} = \sin 2\alpha$$

ist, für den Polarwinkel zwischen ϱ und OX oder t' und OX:

$$u = 2\alpha.$$

Die Gleichung von α in Polarcoordinaten lautet deshalb, wenn wir vom Zeichen absehen:

$$\varrho = \frac{r \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{1+\cos u}}.$$

Ob für α der positive oder negative Wert von ϱ zu nehmen ist, zeigen die obigen Werte von ξ und η an. ξ ist für $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ negativ, für $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$ positiv etc. Die Ausdrücke $u = 2\alpha$ und $\varrho = \frac{r}{\cos\alpha}$ eignen sich besonders zur Bestimmung von s durch die Zeichnung. Man zieht t' durch O so, dass mit OX der Wkl. 2α gebildet wird, und überträgt $Oq = \frac{r}{\cos\alpha}$ nach Os, wobei die Qualität von ξ und η gehührende Beachtung finden muss.

Die Tangente τ an σ bildet mit ϱ einen Winkel φ, welcher im allgemeinen bekanntlich der Bedingung

$$\operatorname{tg}\varphi = \varrho : \frac{d\varrho}{du}$$

genügt. Hier ist

$$\operatorname{tg}\varphi = 2\operatorname{cotg}\alpha$$

oder für die Construction passender:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2r}{\varrho \sin\alpha}.$$

Zieht man $A'''q_1$ senkr. auf OX, so ist

$$A'''q_1 = p_1 q_1 = \varrho \sin\alpha$$

und da

$$p_1 Q_1 = 2r$$

ist, so muss

$$\text{Wkl. } p_1 q_1 Q_1 = \varphi$$

sein. Nach der Figur ist $p_1 q_1$ eine Normale von t', es wird deshalb τ auf $q_1 Q_1$ senkrecht stehen müssen.

Die durch t und τ gelegte Ebene berührt den Directionskegel k längst der Erzeugenden t. Man kann nun die Schmiegungsebene

für den Punkt P der C auch construiren, indem man die in P berührende Tangente T sucht, die zu T parallele Erzeugende t des Kegels k samt deren Berührungsebene bestimmt und zu letzterer eine parallele Ebene durch T legt.

Ausser den Osculationsebenen, welche zwei unmittelbar auf einander folgende Tangenten der Raumcurve enthalten, gibt es noch Tangentialebenen der C, die zwei Tangenten enthalten, deren Berührungspunkte nicht auf einander folgende Punkte der Raumcurve C sind. Derartige Ebenen berühren C in zwei verschiedenen Punkten und umhüllen die sogenannte doppeltumschriebene Developpable der Raumcurve C. In unserem Falle erkennt man sofort, dass die Tangentenebenen der Cylinder C_1 und C_2 in zwei symmetrisch gelegenen Curvenpunkten berühren, dass also die beiden Cylinder C_1 und C_2 die doppelt umschriebene Developpable Fläche der Raumcurve C bilden.

Pola, im November 1884.

VII.

Ueber Construction von Hyperbeln.

Von

Herrn Dr. **Heinrich Seipp,**
Ingenieur in Eckernförde.

Eine einfache Lösung der Aufgabe:

> Eine Hyperbel zu construiren, wenn ein Punkt derselben und die Asymptoten gegeben sind —

beruht bekanntlich auf der Gleichheit der zwischen der Hyperbel und den Aymptoten liegenden Abschnitte einer beliebigen Geraden. Ein anderes Verfahren gründet sich darauf, dass das Parallelogramm aus den zu den Asymptoten parallelen Coordinaten eines beliebigen Hyperbelpunktes constant ist.

Eine dritte Lösung der Aufgabe ist in Folgenden enthalten:

„Man verbinde den gegebenen Hyperbelpunkt P mit dem Schnittpunkt A der Asymptoten und verlängere die Strecke $\overline{PA}$ um sich selbst bis O. Durch den Endpunkt O lege man Parallelen I und II zu beiden Asymptoten. Werden hierauf durch P Strahlen gezogen, und deren von jenen Parallelen begrenzte Strecke halbirt, so ist der geometrische Ort der Halbirungspunkte die geforderte Hyperbel."

Dieselbe geht durch Punkt O und — wie verlangt — durch Punkt P.

Anmerk. Die in O halbirte Strecke hat die Länge $= 0$; der in P halbirte Strahl ist die Hyperbeltangente in P.

Wird Punkt O als Ursprung eines rechtwinkligen Coordinaten-Systems gewählt, dessen X-Axe mit den Geraden I und II bzhw. die Winkel $\operatorname{arctg} m$ und $\operatorname{arctg} n$ bildet, so lauten die Gleichungen der letzteren:

$$(1) \qquad \begin{cases} y = m.x \\ y = n.x \end{cases} \text{ bzhw.}$$

Die Coordinaten von P seien α und β.

Eine beliebige durch P gelegte gerade Linie wird dargestellt durch:

$$(2) \qquad y - \beta = \lambda(x - \alpha).$$

Die Coordinaten ihrer Schnittpunkte mit den beiden Geraden I und II sind bzhw.

$$(3) \qquad \left\{ \begin{matrix} x_I = \dfrac{\beta - \lambda\alpha}{m - \lambda} \\ y_I = \dfrac{m(\beta - \lambda\alpha)}{m - \lambda} \end{matrix} \right\} \text{ und } \left\{ \begin{matrix} x_{II} = \dfrac{\beta - \lambda\alpha}{n - \lambda} \\ y_{II} = \dfrac{n(\beta - \lambda\alpha)}{n - \lambda} \end{matrix} \right\}.$$

Die Halbirungspunkte der zwischen den letzteren gelegenen Strecken der schneidenden Geraden: Gl. (2), haben die Coordinatenwerte:

$$(4) \qquad \left\{ \begin{matrix} \xi = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{(\beta - \lambda\alpha)[n + m - 2\lambda]}{2(m - \lambda)(n - \lambda)} \\ \eta = \dfrac{y_1 + y_2}{2} = \dfrac{(\beta - \lambda\alpha)[2mn - m\lambda - n\lambda]}{2(m - \lambda)(n - \lambda)}, \end{matrix} \right. \text{ und}$$

Durch Elimination des variabelen λ aus diesen Ausdrücken wird die verlangte Ortsgleichung erhalten.

Man findet zunächst durch Division beider:

$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{2mn - m\lambda - n\lambda}{(m - \lambda) + (n - \lambda)},$$

also

$$\lambda = \frac{(m + n)\eta - 2mn\xi}{2\eta - (m + n)\xi}$$

und damit

$$m - \lambda = \frac{(m - n)(\eta - m\xi)}{2\eta - (m + n)\xi},$$

$$n - \lambda = \frac{-(m - n)(\eta - n\xi)}{2\eta - (m + n)\xi}$$

und

$$\beta - \alpha\lambda = \frac{\eta[2\beta - \alpha(m+n)] + \xi[2\alpha mn - \beta(m+n)]}{2\eta - (m+n)\xi}.$$

Die Substitution dieser Werte in einen der Ausdrücke liefert:

(5) $2(m+n)xy - 2mnx^2 - 2y^2$
$+[2\alpha mn - \beta(m+n)]x + [2\beta - \alpha(m+n)]y = 0,$

die Gleichung einer Hyperbel $\{(m+n)^2 - 2.2mn > 0\}$, welcher in der Tat die Coordinatenwerte

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \end{cases} \text{ sowie } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ genügen.}$$

Um die Gleichung der Asymptoten dieser Hyperbel zu erhalten, substituire man in ihre Gleichung $y = k.x$ und bestimme den Grenzwert von k für ein unendlich wachsendes x.

Man findet:

$$k^2 - (m+n)k + mn = 0,$$

also

$$k^1_2 = \begin{cases} m \\ n \end{cases}.$$

Wird jetzt $y = m.x + l$ in Gl. (5) eingeführt, so folgt für ein unendlich zunehmendes x:

$$2l - \beta + \alpha m = 0,$$

d. h.

$$l = \frac{\beta - \alpha m}{2}.$$

Analog ist für die zu $k = n$ gehörige Asymptote:

$$l = \frac{\beta - \alpha n}{2}.$$

Die Hyperbelasymptoten besitzen folglich die Gleichungen:

$$(6) \quad \begin{cases} y = mx + \dfrac{\beta - \alpha m}{2} \text{ oder } y - \dfrac{\beta}{2} = m\left(x - \dfrac{\alpha}{2}\right) \\ y = nx + \dfrac{\beta - \alpha n}{2} \text{ oder } y - \dfrac{\beta}{2} = n\left(x - \dfrac{\alpha}{2}\right). \end{cases} \text{ und}$$

Ihre Richtungstangenten stimmen mit denen der Geraden *I* und *II* überein; ihr Schnittpunkt hat die Coordinaten:

$$(7) \quad \begin{cases} x = \dfrac{\alpha}{2}, \\ y = \dfrac{\beta}{2}, \end{cases}$$

in Uebereinstimmung auch mit den aus ihrer Gleichung sich berechnenden Centrumscoordinaten der Hyperbel. Dersolbe halbirt also die Strecke PO, und die Richtigkeit des angegebenen Verfahrens zur Construction der Hyperbel durch einen gegebenen Punkt bei gegebenen Asymptoten ist analytisch dargetan.

Wählt man zu Coordinaten-Axen speciell die Halbirungslinien des Winkels θ der beiden Geraden I und II bzhw. seines Nebenwinkels, so ist in der vorigen Entwicklung

$$m = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2},$$

$$n = -\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$$

zu setzen. Die Hyperbelgleichung vereinfacht sich dann zu

$$\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}x^2 - y^2 - \alpha\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}x + \beta y = 0$$

und geht durch Transformation mittelst der Formeln

$$x = \frac{\alpha}{2} + x',$$

$$y = \frac{\beta}{2} + y'$$

über in

$$x^2\sin^2\frac{\theta}{2} - y^2\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{\alpha^2\sin^2\frac{\theta}{2} - \beta^2\cos^2\frac{\theta}{2}}{4}$$

(8) oder

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{\alpha^2\sin^2\frac{\theta}{2} - \beta^2\cos^2\frac{\theta}{2}}}{2\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{\alpha^2\sin^2\frac{\theta}{2} - \beta^2\cos^2\frac{\theta}{2}}}{2\cos\frac{\theta}{2}}\right)^2} = 1.$$

Da die Asymptotengleichung

$$x^2 + y^2 = \frac{A^2 + B^2}{4},$$

ist (wobei A und B die Axenabschnitte bedeuten), so nimmt sie hier die Form an:

(9)
$$xy = \frac{\alpha^2\sin^2\frac{\theta}{2} - \beta^2\cos^2\frac{\theta}{2}}{16\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

Die Bedingung dafür, dass die Hyperbel Gl. (5) in ein Linienpaar degenerirt, nämlich das Verschwinden der Discriminante.

$$D=\begin{vmatrix} 2mn & m+n & \frac{1}{2}[2\alpha mn-\beta(m+n)] \\ m+n & -2 & \frac{1}{2}[2\beta-\alpha(m+n)] \\ \frac{1}{2}[2\alpha mn-\beta(m+n)] & \frac{1}{2}[2\beta-\alpha(m+n)] & 0 \end{vmatrix}$$

liefert die Bedingungsgleichungen:

$$\alpha m-\beta=0 \quad \text{und} \quad \alpha n-\beta=0.$$

Obige Construction ergibt also statt einer eigentlichen Hyperbel ein Linienpaar, nämlich die Asymptoten selbst, wenn entweder

$$m=\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{oder} \quad n=\frac{\beta}{\alpha},$$

d. h. wenn der gegebene Curvenpunkt P auf einer der beiden Asymptoten liegt, wie ohnedies evident.

Im ersteren Fall zerfällt Gl. (5) in die linearen Factoren:

$$\begin{cases} y-\frac{\beta}{\alpha}x=0 \quad \text{und} \\ y-\frac{\beta}{2}-n\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)=0 \end{cases}$$

im anderen Falle in:

$$\begin{cases} y-\frac{\beta}{\alpha}x=0 \text{ und} \\ y-\frac{\beta}{2}-m\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)=0. \end{cases}$$

Eine dritte Bedingung für das Zerfallen der Hyperbel ist: $m=n$ oder: Asymptoten-Winkel $=0$.

Da das Asymptotenpaar als eine degenerirte Hyperbel aufgefasst werden kann, so stellt sich die betrachtete Hyperbel-Construction als specieller Fall eines allgemeineren, von einer gegebenen Hyperbel oder überhaupt von einem beliebigen Kegelschnitt ausgehenden Verfahrens dar.

Unter Zugrundelegung der Gleichung

$$b^2x^2\pm a^2y^2=a^2b^2$$

der Ellipse resp. Hyperbel, bezogen auf das Coordinaten-System der Axen, gelangt man leicht durch eine der obigen analoge Rechnung auf die Gleichung des Mittelpunktsorts der durch den gegebenen Curvenpunkt gezogenen Sehnenschaar, in folgender Form:

(10a) für Ell. $a^2\eta^2 + b^2\xi^2 - (\beta a^2\eta + \alpha b^2\xi) = 0$

(10b) für Hyp. $a^2\eta^2 - b^2\xi^2 - (\beta a^2\eta - \alpha b^2\xi) = 0$

An die Stelle des obigen Linienpaars (*I*, *II*) ist hier nur die Ell. bzhw. Hyp. getreten.

Für $a = b$ stellt Gl. (10a) einen Kreis dar.

Die so erhaltenen Kegelschnitte sind mit don gegebenen gleichartig und gehen durch den Coordinaten-Anfangspunkt O und den gegebenen Punkt P.

Auf die Parabel:

$$y^2 = px$$

das in Rede stehende Princip anwendend, erhält man wiederum eine Parabel

$$\eta^2 - \beta\eta - \frac{p}{2}\xi + \alpha\frac{p}{2} = 0, \tag{11}$$

welche jedoch nicht durch den Coordinaten-Ursprung geht.

VIII.

Einige Sätze über Massenmittelpunkte.

Von

Heinrich Seipp.

I.

Befinden sich in den Eckpunkten

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

eines beliebigen räumlichen (oder ebenen) n-Ecks gleichgrosse Massen, dann besitzt der Mittelpunkt E derselben oder der Schwerpunkt des materiellen Punktsystems die Coordinaten:

$$x_E = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},$$

$$y_E = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n}$$

und

$$z_E = \frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_n}{n}.$$

Das dem Folgenden zu Grunde gelegte Coordinatensystem möge ein rechtwinkliges sein.

Teilt man nun die Verbindungslinie eines beliebigen Eckpunktes, z. B. n, mit dem Massenmittelpunkt n' der übrigen $n-1$ Punkte in n Teile, so berechnen sich die Coordinatenwerte des dem Punkt n' zunächst gelegenen Teilpunktes:

$$x = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}{n-1} + \frac{1}{n}\left\{x_n - \frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}{n-1}\right\},$$

$$y = \frac{y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}}{n-1} + \frac{1}{n}\left\{y_n - \frac{y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}}{n-1}\right\},$$

$$z = \frac{z_1+z_2+\ldots+z_{n-1}}{n-1} + \frac{1}{n}\left\{z_n - \frac{z_1+z_2+\ldots+z_{n-1}}{n-1}\right\}.$$

Diese Werte sind aber mit den obigen identisch. Verfährt man in gleicher Weise hinsichtlich der übrigen Eckpunkte 1, 2, 3 ... $n-1$ des gegebenen n-Ecks und bezeichnet die Massenmittelpunkte der betreffenden $(n-1)$-Ecke mit $1'$, $2'$, $3'$, ... $(n-1)'$, so berechnen sich die Coordinaten der den letzteren zunächst liegenden Teilpunkte der Verbindungslinien $11'$, $22'$, $33'$, ... $(n-1)(n-1)'$ der Reihe nach, wie folgt:

$$\frac{x_2+x_3+\ldots+x_n}{n-1} + \frac{1}{n}\left\{x_1 - \frac{x_2+x_3+\ldots+x_n}{n-1}\right\},$$

$$\frac{x_3+x_4+\ldots+x_n+x_1}{n-1} + \frac{1}{n}\left\{x_2 - \frac{x_3+x_4+\ldots+x_n+x_1}{n-1}\right\},$$

$$\frac{x_4+x_5+\ldots+x_n+x_1+x_2}{n-1} + \frac{1}{n}\left\{x_3 - \frac{x_4+x_5+\ldots+x_n+x_1+x_2}{n-1}\right\},$$

. . . . . .

$$\frac{x_{n-1}+x_n+x_1+x_2+\ldots+x_{n-3}}{n-1} + \frac{1}{n}\left\{x_{n-2} - \frac{x_{n-1}+x_n+x_1+x_2+\ldots+x_{n-3}}{n-1}\right\},$$

$$\frac{x_n+x_1+x_2+\ldots+x_{n-2}}{n-1} + \frac{1}{n}\left\{x_{n-1} - \frac{x_n+x_1+x_2+\ldots+x_{n-2}}{n-1}\right\}.$$

Ganz entsprechend die y und z.

Diese 3 mal $n-1$ Werte ergeben sich einfach aus den vorigen, indem man die Indices successive um 1 zunehmen lässt. Sie stimmen mit den Coordinatenwerten x_ε, y_ε, z_ε gleichfalls überein und es gilt der Satz:

> „In jedem (räumlichen oder ebenen) n-Eck von gleichschweren Ecken schneiden sich die n Verbindungslinien der Eckpunkte mit den bezüglichen Massenmittelpunkten der übrigen $n-1$ Eckpunkte in einem und demselben Punkt, dem Massenmittelpunkt des ganzen n-Ecks und werden in ihm im Verhältniss von $1:n-1$ geteilt".

Die kleinere Teilstrecke, welche sich zur ganzen Verbindungslinie (Schwerpunktstransversale) wie $1:n$ verhält, liegt stets an dem der betr. Ecke ferneren Ende der Verbindungslinie. Liegen die n Massenpunkte in derselben Ebene, dann kommen die z in Wegfall.

Der bekannte Satz von den Medianen (Schwerpunktstransversalen) des Dreiecks ist ein specieller Fall des vorstehenden. Die $(n-1)$-Ecke sind die Dreiecksseiten, ihre Massenmittelpunkte $1'2'3'$ die Mitten der letzteren. Beim Dreieck fällt der Massenmittelpunkt der homogenen Fläche mit demjenigen der gleichschweren Eckpunkte zusammen.

Die Punkte $1'2'3'\ldots n'$ bilden ein dem gegebenen ähnliches, bzhw. symmetrisch-ähnliches n-Eck, dessen Umfang bzhw. Kantensumme, Flächeninhalt bzhw. Oberfläche und Rauminhalt sich zu den gleichseitigen Grössen des gegebenen n-Ecks verhalten wie $1:n-1$, bzhw. $1:(n-1)^2$ und $1:(n-1)^3$. Der Schwerpunkt des zweiten n-Ecks (bei gleichschweren Ecken) ist gleichfalls der Punkt ε.

Beim Vieleck von gerader Seitenzahl ($2m$-Eck) erhält man den Punkt ε auch als Massenmittelpunkt eines Vielecks von der halben Seitenzahl (eines m-Ecks), dessen Ecken die Halbirungspunkte der Verbindungslinien der Mitten je zweier solchen Gegenseiten [1]) sind, deren Anfangs- oder Eckpunkte sich im Index um m von einander unterscheiden. Beispielsweise sind beim vollständigen 6-Eck: $\overline{23}$ und $\overline{56}$ (oder auch $\overline{26}$ und 35 sowie $\overline{25}$ und $\overline{36}$), ferner $\overline{34}$ und $\overline{61}$ (auch $\overline{13}$ und $\overline{46}$, $\overline{14}$ und $\overline{36}$) etc. solche Gegenseitenpaare.

Die Eckpunkte jenes Vielecks von der halben Seitenzahl sind nämlich nichts anderes, als die Massenmittelpunkte der durch die genannten Gegenseitenpaare bestimmten m vollständigen 4-Ecke. Die Coordinaten dieser m Eckpunkte berechnen sich:

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_{1+m}+x_{2+m}}{2}\right\};$$

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{x_2+x_3}{2}+\frac{x_{2+m}+x_{3+m}}{2}\right\};$$

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{x_3+x_4}{2}+\frac{x_{3+m}+x_{4+m}}{2}\right\};$$

. . . . . .

1) Das vollständige n-Eck besitzt $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$ Gegenseitenpaare.

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{x_{m-2}+x_{m-1}}{2}+\frac{x_{2m-2}+x_{2m-1}}{2}\right\};$$

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{x_{m-1}+x_m}{2}+\frac{x_{2m-1}+x_{2m}}{2}\right\};$$

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{x_m+x_{m+1}}{2}+\frac{x_{2m}+x_1}{2}\right\}.$$

Entsprechend die y und z.

Ganz dieselben Werte hätten sich offenbar auch bei Benutzung der beiden anderen Gegenseitenpaare (darunter das Diagonalenpaar) der genannten m vollständigen 4-Ecke ergeben.

Da die in den vorstehenden Ausdrücken vorkommenden x_i paarweise auftreten und sich also verdoppeln, so ergiebt sich für den Massenmittelpunkt des m-Ecks, dessen Ecken ebenfalls mit beliebigen, aber gleichen Massen erfüllt zu denken sind:

$$x = \frac{1}{2m}\left\{x_1+x_2+\ldots+x_{m-1}+x_m+x_{m+1}+\ldots+x_{2m}\right\}$$

und ganz entsprechend

$$y = \frac{2}{2m}\left\{y_1+y_2+\ldots+y_{2m}\right\},$$

$$z = \frac{1}{2m}\left\{z_1+z_2+\ldots+z_{2m}\right\}.$$

Der in Rede stehende Massenmittelpunkt ist also zugleich der des gegebenen $2m$-Ecks.

Beim 4-Eck, wo das Vieleck von der halben Seitenzahl ein 2-Eck, (also eine begrenzte gerade Linie) sein müsste, erhält man statt der 2 Eckpunkte nur einen, nämlich den Massenmittelpunkt

$$\begin{cases} x_e = \frac{1}{2}\left(\frac{x_1+x_3}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x_2+x_3}{2}+\frac{x_4+x_1}{2}\right) \\ \quad = \frac{1}{2}\left(\frac{x_1+x_3}{2}+\frac{x_2+x_4}{2}\right) = \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}, \\ y_e = \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}. \end{cases}$$

des 4-Ecks. Dies hat seinen Grund darin, dass die durch die betreffenden Gegenseiten bestimmten vollständigen 4-Ecke, hier 2 an der Zahl, beim 4-Eck zusammenfallen. Der bekannte Satz, dass die 3 Geraden, welche die Mitten je zweier Gegenseiten des vollständigen

4-Ecks verbinden, sich in demselben Punkt treffen und hier halbiren, ist also ein besonderer Fall des vorstehenden allgemeineren Satzes. Desgleichen der allgemeinere Satz vom Raum-4-Eck der Tetraeder, **wonach die Verbindungslinien der Mitten je zweier Gegenkanten sich in demselben Punkt schneiden und hier halbiren.** Erwähnt sei noch, dass, wenn das $2m$-Eck ein 8-Eck, das m-Eck ein Parallelogramm ist.

II.

Das Quadrat der Distanz zwischen Punkt E und irgend einem Eckpunkt i des n-Ecks berechnet sich:

$$\overline{Ei}^2 = \left[\frac{x_1+x_2+\ldots+x_i+\ldots+x_n}{n} - x_i\right]^2 + \left[\frac{y_1+y_2+\ldots+y_i+\ldots+y_n}{n} - y_i\right]^2 + \left[\frac{z_1+z_2+\ldots+z_i+\ldots+z_n}{n} - z_i\right]^2.$$

Hieraus folgt:

$$n^2.\overline{Ei}^2 = [(x_1-x_i)+(x_2-x_i)+(x_3-x_i)+\ldots+(x_{i-1}-x_i)+(x_{i+1}-x_i) +\ldots+(x_n-x_i)]^2 +[(y_1-y_i)+(y_2-y_i)+(y_3-y_i)+\ldots+y_n-y_i)]^2 +[(z_1-z_i)+(z_2-z_i)+(z_3-z_i)+\ldots+(z_n-z_i)]^2$$

oder:

$$n^2.\overline{Ei}^2 = \overline{i1}^2+\overline{i2}^2+\overline{i3}^2+\ldots+\overline{ii-1}^2+\overline{ii+1}^2+\ldots+\overline{in}^2 +2[(x_1-x_i)(x_2-x_i)+(x_2-x_i)(x_3-x_i)+\ldots+(x_{i-1}-x_i)(x_{i+1}-x_i)+\ldots +(x_1-x_i)(x_3-x_i)+(x_2-x_i)(x_4-x_i)+\ldots+(x_{i-1}-x_i)(x_{i+1}-x_i)+\ldots +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +(x_1-x_i)(x_{i-1}-x_i)+(x_2-x_i)(x_{i+1}-x_i)+\ldots+\ldots\ldots\ldots +(x_1-x_i)(x_{i+1}-x_i)+\ldots\ldots\ldots+(x_{i-1}-x_i)(x_n-x_i) +|\ldots\ldots\ldots+(x_2-x_i)(x_n-x_i) +(x_1-x_i)(x_n-x_i)$$

$$\ldots+(x_{n-2}-x_i)(x_{n-1}-x_i)+(x_{n-1}-x_i)(x_n-x_i) \ldots+(x_{n-2}-x_i)(x_n-x_i)]+$$

den entsprechenden Productensummen für die y und für die z.

Ferner:

$$n^2 . \overline{Ei}^2 = \Sigma \overline{ik}^2$$
$$+ 2\{[(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+\ldots+x_1x_{i-1}+x_1x_{i+1}+\ldots+x_1x_n)$$
$$+(x_2x_3+x_2x_4+x_2x_5+\ldots+x_2x_{i-1}+x_2x_{i+1}+\ldots+x_2x_n)$$
$$+(x_3x_4+x_3x_5+\ldots+x_3x_{i-1}+x_3x_{i+1}+\ldots+x_3x_n)$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+(x_{n-2}x_{n-1}+x_{n-2}x_n)$$
$$+x_{n-1}x_n]$$
$$+[-(n-2)x_1x_i-(n-3)x_2x_i-(n-4)x_3x_i-\ldots-(n-i)x_{i-1}x_i-\ldots$$
$$-1\,x_2x_i-2x_3x_i-\ldots-(i-2)\,x_{i-1}x_i-\ldots$$
$$\ldots-2x_{n-2}x_i-1\,x_{n-1}x_i$$
$$\ldots-(n-4)x_{n-2}x_i-(n-3)x_{n-1}x_i\Big]$$
$$+x_i^2[(n-2)+(n-3)+(n-4)+\ldots+2+1]\}+$$

den entsprechenden Ausdrücken für die y nnd z

oder

$$n^2 . \overline{Ei}^2 = \Sigma \overline{ik}^2 + 2\Big\{\Sigma_1 x_ix_k-(n-2)[x_1x_i+x_2x_i+x_3x_i+\ldots+x_{n-2}x_i$$
$$+x_{n-1}x_i]+\frac{(n-2)(n-1)}{1.2}\cdot x_i^2\Big\}+$$

den entsprechenden Ausdrücken für die y nnd z.

Legt man in dieser Formel dem Index i alle Werte von 1 bis n bei nnd addirt die so erhaltenen Gleichungen, so folgt:

$$n^2.[\overline{E1}^2+\overline{E2}^2+\overline{E3}^2+\ldots+\overline{En-1}^2+\overline{En}^2]$$
$$= 2[\overline{12}^2+\overline{13}^2+\overline{14}^2+\ldots+\overline{1n}^2$$
$$+\overline{23}^2+\overline{24}^2+\overline{25}^2+\ldots+\overline{2n}^2$$
$$+\overline{34}^2+\overline{35}^2+\ldots+\overline{3n}^2$$
$$+\ldots\ldots\ldots$$
$$+\overline{n-2,n-1}^2+\overline{n-2,n}^2$$
$$+\overline{n-1,n}^2]-2(n-2)[x_1x_2+x_1x_3+\ldots x_1x_n$$
$$+x_2x_3+x_2x_4+\ldots x_2x_n$$
$$+x_3x_4+x_3x_5+\ldots x_3x_n$$
$$+\ldots\ldots\ldots$$
$$+x_{n-1}x_n]+2\frac{(n-2)(n-1)}{1.2}\times$$
$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots+x_n^2)$$

$$-2(n-2)\,\Sigma y_i y_k + (n-2)(n-1)\,\Sigma y_i^2$$
$$-2(n-2)\,\Sigma z_i z_k + (n-2)(n-1)\,\Sigma z_i^2.$$

Da nämlich in den Summanden des Gliedes $\Sigma x_i x_k$ alle Indices, mit Ausnahme von i vorkommen, so fallen, wenn $i = 1$ gesetzt wird, alle den Zeiger 1 aufweisenden Posten aus. Ist $i = 2$, so verschwinden alle, die den Index 2 enthalten u. s. f. Während nun bei der vorgedachten Summation jedes der Producte $x_r x_s$ in Folge der Variation von i in der Parenthese $[x_1 x_i + x_2 x_i + \ldots]$ zweimal auftritt, sich also verdoppelt, so kommt es nach dem Vorigen in dem Summenglied $\Sigma x_i x_k$ bei der gedachten Summation zweimal in Wegfall (nämlich für $i = r$ sowol als für $i = s$). Es erscheint mithin im Resultat nur noch $-2(n-2) + (n-2) = -(n-2)$ mal und das Glied

$$\begin{bmatrix} x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots \\ + x_2x_3 + \ldots \end{bmatrix}$$

erhält also in der Tat den Factor $-2(n-2)$.

Die Glieder $-2(n-2)\,\Sigma x_i x_k + (n-2)(n-1)\,\Sigma x^{i2}$ lassen sich nur vereinigen und umformen wie folgt:

Man stelle ihre Summanden zu je 3 zusammen und zwar so, dass zu jedem der $2(n-2)$ fachen, negativen Producte $x_i x_k$ diejenigen beiden Quadrate zu stehen kommen, aus deren Wurzeln die ersteren gebildet sind. Man erhält so $(n-1)$ vollständige Quadrate: $(x_1 - x_2)^2$, $(x_1 - x_3)^2$ etc., sämtlich multiplicirt mit $n-2$; ebenso $n-2$ vollständige Quadrate: $(x_2 - x_3)^2$, $(x_2 - x_4)^2$ u. s. f., im Ganzen $\frac{n(n-1)}{1.2}$ vollständige Quadrate:

$$\begin{array}{llll}
+(n-2)x_1^2 & +(n-2)x_1^2 & +(n-2)x_1^2 & +(n-2)x_1^2 \\
 & & & +(n-2)x_2^2 \\
-2(n-2)x_1x_2 & -2(n-2)x_1x_3 & -2(n-2)x_1x_4 - \ldots & -2(n-2)x_1x_{n-1} \\
 & & & -2(n-2)x_1x_n \\
+(n-2)x_2^2 & +(n-2)x_3^2 & +(n-2)x_4^2 & +(n-2)x_{n-1}^2 \\
 & & & +(n-2)x_n^2 \\
+(n-2)x_2^2 & +(n-2)x_2^2 & +(n-2)x_3^2 & +(n-2)x_3^2 \\
-2(n-2)x_2x_3 & -2(n-2)x_2x_4 & -2(n-2)x_2x_5 - \ldots & -2(n-2)x_2x_n \\
+(n-2)x_3^2 & +(n-2)x_4^2 & +(n-2)x_5^2 & +(n-2)x_n^2 \\
+(n-2)x_3^2 & +(n-2)x_3^2 & +(n-2)x_3^2 & \\
-2(n-2)x_3x_4 & -2(n-2)x_3x_5 - \ldots & -2(n-2)x_3x_n & \\
+(n-2)x_4^2 & +(n-2)x_5^2 & +(n-2)x_n^2 &
\end{array}$$

$+(n-2)x_4^2 \qquad +(n-2)x_4^2$
$-2(n-2)x_4x_5 - \ldots - 2(n-2)x_4x_n$
$+(n-2)x_5^2 \qquad +(n-2)x_n^2$
$\ldots\ldots\ldots\ldots$
$+(n-2)x_{n-2}^2 \qquad +(n-2)x_{n-2}^2$
$-2(n-2)x_{n-2}x_{n-1} - 2(n-2)x_{n-2}x_n$
$+(n-2)x_{n-1}^2 \qquad +(n-2)x_n^2$
$+(n-2)x_{n-1}^2$
$-2(n-2)x_{n-1}x_n$
$+(n-2)x_n^2$

Es sind nämlich $n-1$ Producte vorhanden, welche den Index 1 aufweisen, so dass zur beabsichtigten Zusammenstellung das Glied x_1^2 $n-1$ mal erforderlich ist; da es aber überhaupt $(n-2)(n-1)$ mal vorkommt, so kann jedes der Glieder x_1^2 in der ersten Horizontalspalte den Factor $n-2$ erhalten. Producte mit dem Index 2 sind $1+(n-2) = n-1$, mit dem Index 3: $2+(n-3) = n-1$ und mit dem Zeiger n: $(n-1)+(n-n) = n-1$ vorhanden. Mithin können die $(n-2)(n-1)$ Quadrate in der Tat so auf die negativen, doppelten, mit dem Factor $n-2$ behafteten Producte verteilt werden, wie es in vorstehender Tabelle geschehen ist. Man erhält sonach:

$$-2(n-2)\,\Sigma x_i x_k + (n-2)(n-1)\,\Sigma x_i^2$$
$$= (n-2)\,[(x_1-x_2)^2 + (x_1-x_3)^2 + (x_1-x_4)^2 + \ldots + (x_1-x_n)^2$$
$$+ (x_2-x_3)^2 + (x_2-x_4)^2 + \ldots + (x_2-x_n)^2$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ (x_{n-2}-x_{n-1})^2 + (x_{n-2}-x_n)^2$$
$$+ (x_{n-1}-x_n)^2]$$
$$+(n-2)\,[\Sigma(y_1-y_2)^2 + \Sigma(y_2-y_3)^2 + \Sigma(y_3-y_4)^2 + \ldots]$$
$$+(n-2)\,[\Sigma(z_1-z_2)^2 + \Sigma(z_2-z_3)^2 + \Sigma(z_3-z_4)^2 + \ldots]$$

d. i.

$$= (n-2)\,[\overline{12}^2 + \overline{13}^2 + \overline{14}^2 + \overline{15}^2 + \ldots + \overline{1n}^2$$
$$+ \overline{23}^2 + \overline{24}^2 + \overline{25}^2 + \ldots + \overline{2n}^2$$
$$+ \overline{34}^2 + \overline{35}^2 + \ldots + \overline{3n}^2$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$
$$+ \overline{n-2,\,n-1}^2 + \overline{n-2,\,n}^2$$
$$+ \overline{n-1,\,n}^2].$$

Hiermit ergiebt sich endlich:

$$n.(\overline{E1}^2+\overline{E2}^2+\overline{E3}^2+\ldots+\overline{En}^2) = \overline{12}^2+\overline{13}^2+\overline{14}^2+\ldots+\overline{1n}^2$$
$$+\overline{23}^2+\overline{24}^2+\overline{25}^2+\ldots+\overline{2n}^2$$
$$+\overline{34}^2+\overline{35}^2+\ldots+\overline{3n}^2$$
$$+\ldots\ldots\ldots$$
$$+\overline{n-1,n}^2$$

oder in symbolischer Schreibweise:

$$n.\Sigma\overline{Ei}^2 = \Sigma\overline{i,k}$$

d. h. „In jedem räumlichen oder ebenen n-Eck ist die n-fache Quadraten-Summe der von dem Punkt E nach den Eckpunkten gezogenen Geraden gleich der Summe der Qnadrate sämtlicher Seiten dos vollständigen n-Ecks".

Als Specialsätzo erhält man

für das 2-Eck, d. h. oine begrenzte gerade Linie $\overline{12}$: dio Identität

$$2\left\{\left(\frac{\overline{12}}{2}\right)^2+\left(\frac{\overline{12}}{2}\right)^2\right\}=\overline{12}^2;$$

für das Dreieck:

$$3(\overline{E1}^2+\overline{E2}^2+\overline{E3}^2)=\overline{12}^2+\overline{13}^2+\overline{23}^2;$$

für das Viereck:

$$4(\overline{E1}^2+\overline{E2}^2+\overline{E3}^2+\overline{E4}^2) = \overline{12}^2+\overline{13}^2+\overline{14}^2$$
$$+\overline{23}^2+\overline{24}^2+$$
$$+\overline{34}^2$$

u. s. f.

Für das gleichseitige Dreieck ergiebt sich, wenn der Radins des umschriebenen Kreises mit r und die Seite mit s bezeichnet wird:

$$s=r\sqrt{3};$$

für das Qnadrat — bei gleicher Bezeichnnng —

$$s=r\sqrt{2};$$

für das reguläre Fünfeck

$$s^2=5r^2-d^2$$

(wobei noch d die Länge der Diagonalen darstellt)

u. s. f.

Der im Vorigen direct bewiesene Satz kanu übrigens einfacher dnrch Specialisirnng aus dem Steinor'schen Satz, der jedoch in folgender Form zu schreiben ist:

$$\Sigma m_i . \overline{oi}^2 = p^2 \Sigma m + \frac{1}{\Sigma m} \Sigma m_i m_k . \overline{ik}^2$$

erhalten werden.

Darin bedenten m_i nnd m_k die Massen irgend zweier Systempnnkte,

$\overline{ik}$ ihre Entfernnng,

Σm die Gesamtmasse des Pnnktsystems, $\overline{oi}$ die Entfernnng des beliebigen Pnnktes o von irgend einem der Massenpnnkte.

Endlich ist $r = \overline{Eo}$.

Lässt man o mit E znsammenfallen, setzt also in dieser für ganz beliebige Massen giltigen Formel $r = 0$, $\overline{oi} = \overline{Ei}$, und nimmt ferner die n Massen nnter sich gleich ($= m$) an, so folgt:

$$m \Sigma \overline{Ei}^2 = \frac{1}{nm} \cdot m^2 . \Sigma \overline{ik}$$

oder

$$n . \Sigma \overline{Ei} = \Sigma \overline{ik}^2.$$

III.

Alle diejenigen Dreiecke in einem beliebigen ebenen n-Eck, welche von einer seiner Seiten nnd je 2 der nach seinen Eckpnnkten von E ausgezogenen Geraden begrenzt sind, sollen Nachbardreiecke heissen, sobald sie eine dieser Geraden als Seite gemein haben. Im n-Eck giebt es $n-1$ solcher Dreiecke für jede der Geraden $\overline{Ei}$. Wir betrachten beispielsweise diejenigen, welche an $\overline{E2}$ liegen. Man findet:

$$\pm 2 \Delta (E21) = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n} . (x_2 - x_1) + y_2 \left(x_1 - \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \right) + y_1 \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} - x_2 \right)$$

oder:

$$\begin{aligned} \pm 2n \triangle (E21) = (n-2)(y_2 x_1 - x_2 y_1) &+ (x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 x_2 - y_2 x_3) \\ &+ (x_4 y_1 - x_1 y_4) + y_4 x_2 - y_2 x_4) \\ &+ (x_5 y_1 - x_1 y_5) + (y_5 x_2 - y_2 x_5) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ (x_{n-1} y_1 - x_1 y_{n-1}) + (y_{n-1} x_2 - y_2 x_{n-1}) \\ &+ (x_n y_1 - x_1 y_n) + (y_n x_2 - y_2 x_n). \end{aligned}$$

Hieraus leiten sich durch successives Wachsenlassen des variabelen Index die folgenden Ausdrücke ab:

$$\begin{aligned}\pm 2n.\Delta(E23) = (n-2)(y_2x_3-x_2y_3)&+(x_1y_3-x_3y_1)+(y_1x_2-y_2x_1)\\&+(x_4y_3-x_3y_4)+(y_4x_2-y_2x_4)\\&+(x_5y_3-x_3y_5)+(y_5x_2-y_2x_5)\\&+\cdots\cdots\cdots\\&+(x_{n-1}y_3-x_3y_{n-1})+(y_{n-1}x_2-y_2x_{n-1})\\&+(x_ny_3-x_3y_n)+(y_nx_2-y_2x_n);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pm 2n.\Delta(E24) = (n-2)(y_2x_4-x_2y_4)&+(x_1y_4-x_4y_1)+(y_1x_2-y_2x_1)\\&+(x_3y_4-x_4y_3)+(y_3x_2-y_2x_3)\\&+(x_5y_4-x_4y_5)+(y_5x_2-y_2x_n)\\&+\cdots\cdots\cdots\\&+(x_{n-1}y_4-x_4y_{n-1})+(y_{n-1}x_2-y_2x_{n-1})\\&+(x_ny_4-x_4y_n)+(y_nx_2-y_2x_n);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pm 2n.\Delta(E25) = (n-2)(y_2x_5-x_2y_5)&+(x_1y_5-x_5y_1)+(y_1x_2-y_2x_1)\\&+(x_3y_5-x_5y_3)+(y_3x_2-y_2x_3)\\&+(x_4y_5-x_5y_4)+(y_4x_2-y_2x_4)\\&+\cdots\cdots\cdots\\&+(x_{n-1}y_5-x_5y_{n-1})+(y_{n-1}x_2-y_2x_{n-1})\\&+(x_ny_5-x_5y_n)+(y_nx_2-y_2x_n)\end{aligned}$$

u. s. f.

$$\begin{aligned}\pm 2n.\Delta(E2n) = (n-2)(y_2x_n-x_2y_n)&+(x_1y_n-x_ny_1)+(y_1x_2-y_2x_1)\\&+(x_3y_n-x_ny_3)+(y_3x_2-y_2x_3)\\&+(x_4y_n-x_ny_4)+(y_4x_2-y_2x_4)\\&+\cdots\cdots\cdots\\&+(x_{n-2}y_n-x_ny_{n-2})+(y_{n-2}x_2-y_2x_{n-2})\\&+(x_{n-1}y_n-x_ny_{n-1})+(y_{n-1}x_2-y_2x_{n-1})\end{aligned}$$

Da in diesen Ausdrücken jedes der mit dem Factor $n-2$ behafteten Glieder ausserdem noch $n-2$ mal, aber mit entgegengesetztem Vorzeichen vorkommt und da ferner jedes der übrigen, in der ersten Verticalspalte stehenden Glieder ausserdem noch einmal und zwar mit entgegengesetztem Vorzeichen vorhanden ist, so geben diese $n-1$ Ausdrücke zusammen die Summe null:

$$2n\,\Sigma\Delta(E2i) = 0$$

oder:

$$\Sigma\Delta(E2i) = 0$$

wobei i für die einzelnen Summenglieder der Reihe nach die Werte von 1 bis n, mit Ausnahme von 2 anzunehmen hat.

In dieser Summe sind die Vorzeichen der Glieder teils positiv, teils negativ, wie es der geometrische Sinn der Summe und die jeweilige Beschaffenheit der Figur fordern.

Die Flächeninhalte der auf der einen Seite der Geraden $\overline{E2}$ gelegenen Nachbardreiecke sind mit dem +, die auf die andere Seite fallenden mit dem — Zeichen zu versehen.

Beim Dreieck reducirt sich die Zahl der Nachbardreiecke für $\overline{Ei}$ auf 2, welche stets zu verschiedenen Seiten jener Geraden liegen. Man hat also hier den specielleren, bekannten Satz: „Durch seine 3 Medianen (Schwerpunktstransversalen) wird das Dreieck in 3 Teildreiecke von gleichem Flächeninhalt zerlegt".

Da die obige Formel sich für jede der Geraden $\overline{Ei}$ anschreiben lässt, so gilt der Satz:

> „Im ebenen n-Eck ist die algebraische Summe der Flächeninhalte aller derjenigen Dreiecke gleich null, welche eine der Verbindungslinien des Punktes E mit den Ecken als Seite gemein haben und deren dritter Eckpunkt einer der übrigen Polygonpunkte ist".

Auf den Raum übertragen, würde der Satz als Specialfall den bekannten Satz liefern, wonach das Tetraeder durch die Verbindungslinien seines Schwerpunkts mit den Ecken in 4 inhaltsgleiche Tetraeder zerlegt wird.

IX.

Beweis des quadratischen Reciprocitätsgesetzes durch Umkehrung.

Von

J. Hermes.

Im Anschlusse an die Jacobi'sche Verallgemeinerung des quadratischen Reciprocitätsgesetzes wird gezeigt, dass diejenigen Zahlen t, für welche in Rücksicht auf eine gegebene s das Symbol $\left(\frac{s}{t}\right) = +1$, 0, oder -1 ist, in bestimmten Linearformen, also in arithmetischen Reihen ersten Grades mit der Differenz s, $2s$, $4s$ enthalten sind. (vgl. Dirichlet: Zahlentheorie 3. Anfl. § 52. u. Disqn. arithm. art. 147.)

Man könnte nun aber auch umgekehrt, indem man diese hierin ausgesprochene Periodicität mit der ursprünglich durch die jedesmalige Congruenz ($\equiv \bmod t$) vorhandenen verbindet, von einer solchen doppelten Periodicität ausgehen und aus dieser Voraussetzung den Reciprocitätssatz folgern.

Man erhält hiedurch einen Beweis, der durch eine erhebliche Menge an sich freilich recht leichter Schlüsse, ziemlich umständlich[1]) wird, jedoch, wie mir scheint, eine diesem Gegenstande natnrgemässe

1) Durch besondere Kürze zeichnet sich z. B. der Eisenstein'sche aus. Crelle 29. pag. 177 Applications de l'Algébre à l'Arithmétique transcendante. Es ist hier aber ausser dem trigonometrischen Apparat

$$\frac{\sin(pv)}{\sin v} = 0, \qquad \frac{\sin(qv)}{\sin v} = 0$$

etc. noch der Beweis von der Zerlegbarkeit einer g. rat. Function in Factoren vorausgesetzt.

Form der Behandlnng darbietet, kein fremdes [1]) Element in die Betrachtung zieht und so der von Kronecker [2]) gegebenen Formel, inhaltlich dem ersten Beweis von Ganss in der Dirichlet'schen [3]) Fassung am nächsten steht nnd die Jacobi'sche Verallgemeinerung ebenfalls in sich begreift.

Bedenten s, m, n beliebige positive oder negative ganze Zahlen, t zunächst eine ungerade nicht zugleich mit s negative ganze Zahl und denken wir nns durch

$$(s:3) = 0 \quad \{\text{ansser } (1:1) = +1\}$$

und durch

I) $$(s:t) = (s + tm : t)$$

II) $$\begin{aligned} (s:t) &= (s: \pm t + sn), && s \equiv 0 \bmod 4, \\ &= (s: \pm t + 2sn), && s \equiv 1 \bmod 4, \\ &= (-1)^n (s: \pm t + 2sn), && s \equiv \tfrac{2}{3} \bmod 4, \end{aligned}$$

---

1) Gauss: Beweise aus der Kreisteilung. Vgl. Summatio qu. ser. sing. 33, Disq. Arithm. Sect. IV. Art. 133 sequ. und Gauss' Werke II. pag. 4 {Comment. soc. r. s. Gott. Vol. XVI. pag. 70}. — Sed omues hae demonstratlones etiamsi respectu rigoris uihil desiderandum relinquere videantur, e priucipiis nimis heterogeneis derivatae suut, prima forsan excepta, ... —

2) Vgl. Kronecker: Monatsberichte der Berliner Akademie 1876 pag. 331, wo $\left(\frac{u}{t}\right)$ als das Vorzeichen von $\Pi\left(\frac{h}{u} - \frac{k}{t}\right)$,

$$h = 1, 2, \ldots \frac{u-1}{2}; \quad k = 1, 2, \ldots \frac{t-1}{2}$$

für ungerade u und t definirt wird. Es ist leicht zu sehen, in wie weit dies für Primzahlen p und q auf den dritten Beweis von Gauss zurückführbar ist. Da es sich nämlich um die $\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}$ Differenzen $hp - kq$ handelt, von denen $\sum_1^{\frac{1}{2}(q-1)} \left[\frac{hp}{q}\right] = N$ Differenzen > 0 sind, so wird das Symbol

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{q-1}{2} \cdot \frac{p-1}{2} - N} = (-1)^M$$

und

$$\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{q-1}{2} \cdot \frac{p-1}{2} - M} = (-1)^N,$$

wo $M = \sum_1^{\frac{1}{2}(p-1)} \left[\frac{kq}{p}\right]$. Dass $M + N = \frac{q-1}{2} \cdot \frac{p-1}{2}$ ist, wird dort (Gauss' Werke II. pag. 7) eben nachgewiesen (leicht durch Gitterpunkte; siehe Anm.).

3) G. Lejeune Dirichlet: Crelle 47 pag. 139. Ueber den ersten der von Gauss geg. Beweise des Reciprocitätsgesetzes in der Theorie der qu. Reste.

alle Werte für $(s:t)$ successive als $+1$, oder -1 in der Art ermittelt, dass I) zuerst für $t = 1$, s variabel dann II) für $s = 1$ und für $s = 2$ in Bezug auf alle ungeraden t angewandt wird, dann, indem ja nun $(1:3)$, $(2:3)$, $(3:3)$ bekannt, nämlich $+1$, -1, 0 sind, wieder I) für $t = 3$ in Bezug auf alle s, II) für $s = 3$ und $s = 4$, I) für $t = 5$, II) für $s = 5$ und $s = 6$ und so fort ... {indem also immer zwei Colonnen abwechselnd mit einer dem ungeraden t entsprechenden Reihe ausgefüllt werden}, so ist der Reprocitätssatz bewiesen, sobald III) gezeigt werden kann, dass in einer mit einer Quadratzahl $s = \sigma^2$ oder $t = \tau^2$ bezifferten Colonne oder Reihe nie ein Minus auftritt, jedoch in jeder anderen vorkommt, was darauf hinausläuft, dass bei einer Primzahl p die erforderliche Anzahl der Minus, nämlich $\frac{p-1}{2}$ erhalten wird, und somit die übrigen $\frac{p-1}{2}$ Plus auf quadratische Reste hinweisen.

Dass die durch I) und II) in doppelter Richtung gesetzte Periodicität keinen Widerspruch in sich birgt, ist ersichtlich durch die eindeutige Art, wie die Werte 1, 0, -1 ermittelt werden; s giebt an, die wievielte Colonne, und t, die wievielte Reihe sich in einem beliebigen Felde $(s:t)$ schneiden, wenn man der Vorstellung durch eine Tafel zu Hilfe kommen will.[1])

1) Ist q eine ungerade positive Zahl, so folgt, indem Formel II) für $s = q - v$ und $t = q$ angewendet wird, (was durch die beigefügte *II* angedeutet werden mag) und indem δ, δ_1 ... Factoren $+1$ oder -1 bedeuten, als $+1$ aber unterdrückt werden,

$$(q-v:q) = \delta(q-v:-q+2(q-v))_{II} = \delta(v:q-2v)_I = \delta\delta_1(v:q)_{II}$$

Hiebei tritt δ_1 nur bei $v \equiv \frac{3}{4} \bmod 4$ auf, also wird $\delta\delta_1 = +1$, bei $q - v \equiv \frac{3}{4} \bmod 4$, mithin bei $q \equiv 1 \bmod 4$, im andern Falle $= -1$.

---

1) Zieht man auch negative s und t in Betracht, so enthält die ganze Tafel drei Quadranten. Bei wirklicher Ausführung eines Quadranten wird man zweckmässig zuerst nur ungerade, positive s und t berücksichtigen. Es lassen sich dann die Gesetze der Construction für eine Periode kurz als a) einfache oder b) doppelte Spiegelung c) ohne oder d) mit Zeichenumkehrung bei der ersten Spiegelung aussprechen;

bei Horizontalen: $\begin{cases} t \equiv 1 \bmod 4; & a, c \\ t \equiv 1 \bmod 4; & a, d \end{cases}$

bei Verticalen: $\begin{cases} s \equiv 1 \bmod 4 \text{ auch } a, c \\ s \equiv 1 \bmod 4 \qquad\quad b, d \end{cases}$

[vgl. die Zeichen der Function cosinus].

Dies kann, da $(q-v:q)=(-v:q)_I$ ist, in die Formel

$$\text{IV)}\qquad (-v:q)=(-1)^{\frac{q-1}{2}}(v:q)$$

zusammengefasst werden.

2) Es gelte bereits für alle ungeraden und positiven Zahlen u und t beide $<q$ die Beziehung:

$$\text{V)}\qquad (u:t)=(-1)^{\frac{u-1}{2}\cdot\frac{t-1}{2}}(t:u),$$

so kann man $q=\mp u+2tn$ setzen, und es folgt, wie auch t angenommen werde[1]),

$$(q:t)=(\mp u:t)_I=\mathfrak{z}\,.\,(u:t)_{IV}=\mathfrak{z}(-1)^{\frac{u-1}{2}\cdot\frac{t-1}{2}}(t:u)_V$$

$$=\mathfrak{z}\mathfrak{z}_1(-1)^{\frac{u-1}{2}\cdot\frac{t-1}{2}}(t:\mp u+2tn)=(-1)^{\frac{q-1}{2}\cdot\frac{t-1}{2}}(t:q),$$

denn bei $t\equiv 1 \bmod 4$ sind überhaupt alle Vorzeichen positiv, und bei $t\equiv 3 \bmod 4$ treten $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}_1$ nur dann gleichzeitig auf, wenn für $q=-u+2nt$ die Zahl n ungerade, also

$$\frac{q-1}{2}=\frac{u-1}{2}+nt-u\equiv\frac{u-1}{2}\bmod 2$$

ist, oder gleichzeitig nicht auf, wenn für $q=+u+2nt$ die Zahl n gerade, also $\frac{q-1}{2}\equiv\frac{u-1}{2}\bmod 2$ ist etc.[2]) Mithin ist V für alle ungeraden und positiven Zahlen giltig. {Eine der beiden kann auch negativ sein.}

3) Es möge für die ungerade Zahl t schon

$$\text{VI)}\qquad (2v:t)=(-1)^{\frac{t^2-1}{8}}(v:t)$$

gelten, so folgt für ungerades $q>t$

---

1) Ist t zum Beispiel $=q-2$, so wird für $n=1$ der numerische Wert von $(\mp u)=q-4$ also $<q$.

2) Die gegenteilige Annahme über $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}_1$ lässt den Schluss offenbar ungeändert.

$$(2v:q) = \pm (q-2v:q)_{IV} = \mathfrak{z}(q:q-2v)_V = \mathfrak{z}(2v:q-2v)_I$$
$$= \mathfrak{z}(-1)^{\frac{t^2-1}{8}}(v:q-2v[=t])_{VI}$$
$$= \mathfrak{z}\mathfrak{z}_1(-1)^{\frac{t^2-1}{8}}(v:q)_{II} = (-1)^{\frac{q^2-1}{8}}(v:q),$$

denn $\mathfrak{z}$ tritt nur auf, wenn $q \equiv 3 \bmod 4$ und zugleich $t = q-2v \equiv 1 \bmod 4$, also $2v \equiv 2 \bmod 4$, mithin $v \equiv \frac{1}{3} \bmod 4$ ist, und $\mathfrak{z}_1$ tritt nur auf, wenn $v \equiv \frac{3}{3} \bmod 4$; es treten also $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}_1$ gleichzeitig auf, wenn $q \equiv 3$ und $v \equiv 3 \bmod 4$, also $q \equiv \frac{3}{3}$ und $2v \equiv 6 \bmod 8$, mithin $q \equiv \pm t \bmod 8$ ist, denn t war $\equiv \frac{5}{1} \bmod 8$, oder $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}_1$ treten gleichzeitig nicht auf, wenn

A) $q \equiv 3 \bmod 4$, $v \equiv 0 \bmod 4$, $2v \equiv 0 \bmod 8$,
B) $q \equiv 1 \bmod 4$, $v \equiv \frac{0}{1} \bmod 4$, $2v \equiv \frac{0}{2} \bmod 8$,

also ebenfalls $q \equiv \pm t \bmod 8$ wird, etc. Mithin ist *VI* für jedes ungerade t giltig.

4) Findet bereits für ungerades t die Beziehung

VII) $$(v:t)(w:t) = (vw:t)$$

statt, woraus nach V), da $\frac{v-1}{2}+\frac{w-1}{2} = \frac{vw-1}{2} \bmod 2$ und auch $\frac{v^2-1}{8}+\frac{w^2-1}{8} \equiv \frac{v^2w^2-1}{8} \bmod 2$ ist, für ungerade v und w

VIII) $$(t:v)(t:w) = (t:vw)$$

zugleich mit

IX) $$(\pm 2^\mu t:v)(\pm 2^\mu t:w) = (\pm 2^\mu t:vw)$$

folgt, so lässt sich auch $(v:q)(w:q) = (vw:q)$ für ungerades $q > t$ und beliebige v und w nachweisen.

Man kann zunächst, ohne der Allgemeinheit Eintrag zu thun, v und w ungerade und $< \frac{q-1}{2}$ beim Beweise voraussetzen, ja es möge sogar v zuerst eine Primzahl r sein, die keinen der Primfactoren von $w = r'r'' \ldots$ an Grösse übertrifft.

Denkt man sich nun ein ungerades Vielfache von q so bestimmt, dass $x = qx \mp rw$ eine mindestens durch 4 teilbare Zahl $= \pm 2^\mu t$

wird, und das t und $\varkappa$ beide $< q$ und relativ prim [1]) zu einander sind, so ist:

$$(q:r)(q:w)(\varkappa:r)(\varkappa:w) = (q\varkappa:r)(q\varkappa:w)_{VII} = (\tau:r)(\tau:w)_I$$
$$= (\tau:rw)_{IX} = (\tau:q\varkappa)_{II} = (\tau:q)(\tau:\varkappa)_{IX} = (\mp rw:q)(\mp rw:\varkappa)_I$$
$$= \mathfrak{z}\,(q:rw)(\varkappa:rw)_{IV \text{ und } V.}$$

wobei $\mathfrak{z} = +1$, denn ist $\varkappa$ nicht $\equiv q \bmod 4$, so ist auch

$$rw \equiv -1 \bmod 4$$

etc. Wird beiderseits durch

$$(\varkappa:r)(\varkappa:w) = (\varkappa:rw)_{VIII}$$

dividirt, so folgt:

$$(q:r)(q:w) = (q:rw).$$

Ist nun v zusammengesetzt $= rr'''\ldots$ so auch nach dem eben bewiesenen

$$(q:r)(q:r''')\ldots = (q:v),$$

ebenso für

$$w = r'r''\ldots (q:r')(q:r'')\ldots = (q:w)$$

also:

$$(q:r)(q:r')(q:r'')(q:r''')\ldots = (q:v)(q:w).$$

Ist hierin $\ldots r''' \gtrless r'' \gtrless r' \gtrless r$, so gilt

$$(q:r'')(q:r'''\ldots) = (q:r''r'''\ldots)$$

dann wieder

$$(q:r')(q:r''r'''\ldots) = (q:r'r''r'''\ldots),$$

endlich

$$(q:r)(q:r'r''r'''\ldots) = (q:rr'r''r'''\ldots) = (q:vw),$$

also auch

VII) $$(q:v)(q:w) = (q:vw)$$

und

$$(v:q)(w:q) = (vw:q),$$

wobei nun, wenn I) und VI) angewendet werden, v und w auch beliebige Zahlen sein können.

---

1) Ist q im Producte rw kelumal enthalten, so wird für das obere oder untere Zeichen und für $\varkappa = 1$ die Zahl $\tau = q\varkappa \mp rw$ durch 4 teilbar; ist aber q in rw eine gerade Anzahl $x' > 0$ male enthalten, wobei der Rest $\tau' < q$ sei, so kann, um $\tau \equiv 0 \bmod 4$ zu machen, im ungünstigsten Falle ein $\varkappa = [x'-3]$ zu wählen sein, doch wird auch dann $[\tau] = [\tau' \pm 3q] < 4q$, mithin $t < q$. Da $w < q$, so ist $\varkappa'$ umsomehr $\varkappa < r$ und, weil r eine Primzahl, auch relativ prim zu r, somit auch zu w, dessen Primfactoren $\gtrless r$ sind, endlich auch zu τ, denn sonst könnte $\pm rw = \tau - q\varkappa$ nicht relativ prim zu $\varkappa$ sein, wie eben gezeigt wurde.

5) Ist $(s:p) = -1$ [1]), worin p eine Primzahl, so muss auch für

$$h = 1, 2, \ldots p-1 \quad \text{und} \quad h_1 \equiv sh \bmod p$$

die Relation

$$-(h:p) = (s:p)(h:p) = (sh:p)_{VII} = (h_1:p)_I$$

für $h_1 = 1, 2, \ldots p-1$ statthaben, und es werden die Zeichen innerhalb einer Periode der $p$ten Reihe ihren entgegengesetzten in andrer Ordnung wiederum gleich, also sind $\frac{p-1}{2}$ Minus vorhanden. {Bezeichnet daher ε eine primitive Wurzel, so muss $(\varepsilon:p) = -1$ sein, ein Satz, der bekanntlich nur für solche Primzahlen umgekehrt werden darf, bei denen $\varphi(\varphi(p)) = \frac{p-1}{2}$ ist.}

Würde nun $(\sigma^2:t) = -1$ sein, so stände dies im Widerspruch Widerspruch mit VII), mithin gilt

III) $$(\sigma^2:t) = +1$$

{auch $(s:\tau^2) = +1$} und es sind, falls $(s:t) = -1$, die s quadratische Nichtreste zu t, denn $s + mt = \sigma^2$ würde ja auf

$$-1 = (s:t) = (s+mt:t)_I = (\sigma^2:t) = +1$$

nach III) führen. Hieraus ist jedoch nur für eine Primzahl p zu

---

1) Dass $(s:p) = -1$ existirt, ist für $p \equiv -1 \bmod 4$ und $p \equiv 5 \bmod 8$ nach dem Obigen (IV und VI) klar, bedarf aber für $p \equiv +1 \bmod 8$ insofern eines Nachweises, als die Quadratzahlen σ^2 auch $\equiv 1 \bmod 8$ sind. Nach Gauss schliesst man dann folgendermassen indirect: Wäre $(p:t) = +1$ für jedes t, so auch nach III), für $p' < p$ schon giltig, so wäre $p \equiv x^2 \bmod t = 1.2\ldots(p-2)$ und daher (vgl. Sect. IV. art 129):

$$x(p-1^2)(p-2^2)\ldots\left(p-\left(\frac{p-3}{2}\right)^2\right)$$
$$\equiv x(x^2-1^2)(x^2-2^2)\ldots\left(x^2-\left(\frac{p-3}{2}\right)^2\right), \bmod t.$$

Nun geht t als Product der $(p-2)$ ersten Zahlen in die rechte Seite auf, die ja auch ein Product von $(p-2)$ aufeinanderfolgenden Zahlen ist, links kann t aber nicht aufgehn, da $t = 2(p-2).3.(p-3)\ldots\left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{p+1}{2}\right)$ relativ prim zu x und $> (p-1^2).(p-2^2)\ldots\left(p-\left(\frac{p-3}{2}\right)^2\right)$ ist. Daher giebt es Werte s, wofür $(p:s)$ also auch $(s:p)_V = -1$ wird, und müssen schliesslich auch in jeder Reihe $(s:t)$ (s variabel), oder Colonne (t variabel) Minus vorkommen, wenn weder s noch t Quadratzahlen sind. [Umkehrung von III.]

schliessen, dass die übrigen $\frac{1}{2}\varphi(p) = \frac{p-1}{2}$ Plus zu quadratischen Resten gehören, d. h. ist $(s:p) = +1$, so muss $s+mp = \sigma^2$ für ein passendes m stattfinden.

Ist aber für beliebiges

$$t' = p'p'' \ldots \qquad (s:t) = +1$$

so wird $s+mt = \sigma^2$ nur dann, wenn

$$(s:p') = +1, \qquad (s:p'') = +1 \ldots$$

gleichzeitig gelten, durch

$$\begin{aligned} \sigma &\equiv \sigma_1 \bmod p' \\ &\equiv \sigma_2 \bmod p'' \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

auflösbar, und so ist denn $(s:t)$ mit dem Legendre'schen und Jacobi'schen Zeichen $\left(\frac{s}{t}\right)$ identisch, und gelten daher für dieses die Sätze I) bis IX).

7) Es können jetzt auch die gerade bezifferten Horizontalreihen nach der Formel

X) $$(s:2^\mu t) = (s:2)(s:t)$$

ausgefüllt werden, und ist hierin $(s:2) = 0$ für alle geraden s, für ungerade dagegen $= +1$, so dass also $(s:2^\mu t)$ mit $(s:t)$ übereinstimmt, nur dass alle an gerader Stelle befindlichen Felder null werden, muss ja doch überhaupt

XI) $$(sk:sh) = 0$$

sein nach I) und II), indem $(s:s) = 0$ die Diagonale bildete.[1]) Für

---

1) Anm. Wird $k = 1, 2, \ldots \frac{t-1}{1}$; $h = 1, 2, \ldots \frac{u-1}{2}$ gesetzt, so bilden die Nullen $(uk:uh)$ als Gitterpunkte aufgefasst, und andrerseits $(th:tk)$ zwei Rechtecke von je $\left(\frac{t-1}{2}\right)\left(\frac{u-1}{2}\right)$ Punkten. Die erste, 2te, 3te ... Verticale des einen teilt die erste, 2te, 3te ... Horizontale des andern so, dass die Gesamtzahl der hiedurch von einander gesonderten Punkte links und rechts N und M beim ersten Rechtecke A, dagegen M und N beim zweiten B wird, überdies $M+N = \frac{u-1}{2}\cdot\frac{t-1}{2}$ ist. Es ist also

V′) $$M \equiv N \bmod 2$$

wenn beide oder auch nur eine der Rechtecksseiten eine gerade Anzahl Punkte hat, M nicht $\equiv N \bmod 2$, wenn die Punkteanzahl jeder Seite eine ungerade ist.

gerades t behalten nur die Sätze *I*, *III* (aber nicht die Umkehrung von *III*) *VII*, *VIII*, ihre Fassung unverändert bei.

Zum Schlusse sei unter mehreren anderen derartigen Relationen nur

$$(\nu+\mu : 8\nu+1) = (\mu+\nu : 8\mu-1)$$

erwähnt, d. h. also: Zieht man aus der Tafel alle Reihen von der Form $8\mu-1$ heraus, so werden auch sämtliche zu den Zahlen $8\nu+1$ gehörigen Zeichen in den unter 45° zur Horizontalen geneigten Reihen anzutreffen sein. Eine solche Reihe enthält kein Minus, sobald ν eine Triangularzahl.

Es sei $u_1 = u + 2tm$ und m zunächst $= 1$, so werden auf den ersten beiden Horizontalen des Rechtecks A_1, auf jeder $\frac{t-1}{2}$, zusammen also $(t-1)$ Punkte, auf der 3ten und 4ten Horizontalen zusammen $(t-3)$ Punkte, ... im ganzen $(t-1)+(t-3)+\ldots 4+2 = \frac{t^2-1}{4}$ also eine gerade Anzahl zu den in gleicher Anzahl wie vorhin entstehenden Punkten M hinzutreten, mithin wird, (auch für beliebige m) die Congruenz

I′) $$M_1 \equiv M \bmod 2$$

gelten. Aus V′) I′) V) und I) kann man denn $(u:t) = (-1)^M$ folgern.

Königsberg i/P., den 4. November 1886.

X.

Einige Anwendungen der Methode der wiederholten Substitutionen.

Von

W. Laska in Prag.

Die Methode der wiederholten Substitutionen ist eine instinctiv gegebene Methode; einige Anwendungen derselben finden sich zerstreut in verschiedenen Schriften (1.) Sie sind jedoch der allereinfachsten Art nnd auf ihre theoretische Giltigkeit kommt es eben nicht an, es wird nur das Resultat gefordert, welches sie anch in allen jenen Fällen liefern muss.

In diesem Anfsatze soll die Methode der wiederholten Substitutionen auf die Berechnung der Wurzelwerte der nnmerischen Gleichungen, sowie anf jene der transcendenten angewendet werden. Ehe wir auf die Einzelheiten übergehen, wollen wir eine Gesamtübersicht geben.

Aus der gegebenen Gleichnng

1) $$F(x) \equiv x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_n = 0$$

wird durch die Methode der wiederholten Snbstitutionen eino neno gebildet,

2) $$\theta(x) \equiv x^{n+\theta} + B_1 x^{n-1} + B_2 x^{n-2} + \ldots + B_n = 0$$

der alle Wurzeln der ersten Gleichnng genügen. Da es sich hier um die Darlegung des Grundgedankens handelt, so können wir so viele Annahmen machen, als uns zu diesem Zwecke nötig erscheinen.

Wir wollen annehmen, die Gleichnng 1) habe lanter verschiedene Wurzeln, die mit Ansnahme einer einzigen alle grösser als 1 sind.

Sodann wird gezeigt, dass die Gleichung 2) auch nebst dieser einzigen Wurzel, die kleiner als 1 ist, nur Wurzelwerte besitzt, die grösser als 1 sind.

Ist aber $x_1 < 1$, so wird

$$\lim \theta(x_1) \underset{\lim \theta = \infty}{\equiv} B_1 x_1^{n-1} + B_2 x_1^{n-2} + \ldots + B_n = 0$$

Es haben sodann die Gleichungen

$$F(x_1) = 0 \quad \lim \theta(x_1) \underset{\lim \theta = \infty}{=} 0$$

die Wurzel x_1 gemeinsam. Wie dieser Umstand zur Berechnung von x_1 benutzt werden könne, wird im Folgenden gezeigt.

Auch die grösste Wurzel der Gleichung 1) kann man leicht finden, wenn man bedenkt, dass alle Wurzeln der Gleichung 1) zugleich der Gleichung 2) genügen müssen, und dass für

$$x_1 > x_2 > x_3 > \ldots x_n$$
$$\lim \left[x_1^{\theta} + x_2^{\theta} + \ldots x_n^{\theta}\right] \underset{\lim \theta = \infty}{=} x_1^{\theta}.$$

Um auch die Anwendung auf Berechnung der Wurzeln transcendenter Gleichungen zu berühren, wollen wir bemerken, dass die gegebene Gleichung zunächst in eine unendliche Reihe von der Form:

$$a = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots \qquad |x| < 1$$

zu bringen ist. Die Methode der wiederholten Substitutionen liefert:

$$A = Bx + Cx^{\theta} + Dx^{\theta+1} + \ldots \qquad x < 1.$$

also $\qquad A = Bx \quad$ für $\lim \theta = \infty$

woraus $x = \dfrac{A}{B}$ folgt.

Zur Illustration wurden einige Beispiele angeführt; endlich wird diese Methode auf die Differentialgleichungen angewendet.

I.

Es sei die Gleichung

1) $$f(x) \equiv x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots a_n = 0$$

gegeben, und es werde vorausgesetzt, man habe sich von dem Vorhandensein einiger reellen Wurzeln überzeugt. So können zwei Fälle eintreten: entweder liegt nur eine einzige oder es liegen mehrere Wurzelwerte zwischen zwei aufeinander folgenden Zahlen α und $\alpha + 1$.

Nehmen wir zunächst an, in dem Intervalle α und $\alpha+1$ liege nur eine einzige Wurzel. Sodann führt die Substitution

$$x = \alpha + u \quad \text{oder} \quad x = \alpha + 1 - u'$$

zu einer neuen Gleichung

$$2) \qquad \varphi(u) \equiv u^n + A_1 u^{n-1} + A_2 u^{n-2} + \ldots A_n = 0$$

die eine reelle Wurzel, die kleiner ist als 1, besitzt ausserdem $n-1$ Wurzeln, die sämtlich grösser als 1 sind.

Im Falle, dass in einem solchen Intervalle mehrere Wurzeln sich vorfinden, ist diese Methode, wie überhaupt alle Näherungsmethoden nur dann anwendbar, wenn man schon ziemlich nahe Näherungswerte besitzt.

Wir nehmen also an, die Gleichung

$$f(x) \equiv x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots a_n = 0$$

besitze eine reelle Wurzel, die kleiner ist als 1, und nur eine solche. Alle Coefficienten mit Ausnahme des letzten a_n sind dann notwendiger Weise ganze Zahlen, gleichviel ob positiv oder negativ.

Wir bezeichnen die Wurzeln dieser Gleichung mit

$$x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Bilden wir nun

$$xf(x) = x^{n+1} + a_1 x^n + \ldots + a_n x = 0$$

und setzen aus 1)

$$x^n = -a_1 x^{n-1} - a_2 x^{n-2} - \ldots - a^n$$

so folgt

$$xf(x) = x^{n+1} + (a_2 - a_1 a_1) x^{n-1} + (a_3 - a_1 a_2) x^{n-2} + \ldots - a_1 a_n = 0$$

und die Wurzeln dieser Gleichung sind

$$x_1, \; x_2 \ldots x_n, \; -a_1$$

also die neue Gleichung besitzt wieder nur eine Wurzel, die kleiner ist als 1. Wir setzen

$$xf(x) = x^{n+1} + A_{1,1} x^{n-1} + A_{1,2} x^{n-2} + \ldots + A_{1,n} = 0$$

und bilden auf gleiche Weise,

$$x^{n+2} + A_{2,1} x^{n-1} + A_{2,2} x^{n-2} + \ldots A_{2,n} = 0$$

und allgemein

$$(n+\vartheta) \equiv x^{n+\vartheta} + A_{\vartheta,1} x^{n-1} + A_{\vartheta,2} x^{n-2} + \ldots + A_{\vartheta,n} = 0$$

wobei für die Coefficienten die Recursionsformel:

$$A_{\vartheta+1,\,\theta} = A_{\vartheta,\,\theta+1} - a_\theta . A_{\vartheta,\,\theta}$$

gilt, wobei die neu hinzukommende Wurzel durch den Quotienten

$$\frac{A_{\vartheta+1,\,n}}{A_{\vartheta,\,n}}$$

gegeben ist. Da aber stets $A_{\vartheta+1,n} > A_{\vartheta,n}$, so ist diese Wurzel auch grösser als 1. Auf diese Weise bilde man sich die Gleichungen:

3) $$(n+\vartheta),\quad (n+\vartheta+1),\quad \ldots\quad (2n+\vartheta-1)$$

Ist nun $x < 1$ und $\lim \vartheta = \infty$, so wird

$$\lim x^{n+\vartheta} = 0$$

wir können daher näherungsweise für hinreichend grosses ϑ an die Stelle der Gleichungen 3) folgende setzen:

4)
$$\begin{aligned}
&A_{\vartheta,1}x^{n-1} + A_{\vartheta,2}x^{n-2} + \ldots A_{\vartheta,n} = 0\\
&A_{\vartheta+1,1}x^{n-1} + A_{\vartheta+1,2}x^{n-2} + \ldots A_{\vartheta+1,n} = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&A_{\vartheta+n-1,1}x^{n-1} + A_{\vartheta+n-1,2}x^{n-2} + \ldots A_{\vartheta+n-1,n} = 0
\end{aligned}$$

aus welchen sich x linear elimiuiren lässt. Bei den wirklichen Anwendungen muss man darauf sehen, dass die Coefficienten A nicht allzu gross werden, weil sonst ihr Product mit dem zu vernachlässigenden Gliede eine nicht zu vernachlässigende Zahl gibt.

Die Anwendung der vorstehenden Betrachtungen wollen wir an der Gleichung:

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

erproben. Die eine Wurzel dieser Gleichung liegt zwischen 2 und 3. Wir setzen:

$$x = u + 2$$

und erhalten die Reducirte

$$u^3 + 6u^2 + 10u - 1 = 0$$

für die Darstellung der Gleichungen 4) benutzen wir die oben gegebene Reductionsformel, mit ihrer Hilfe lässt sich die ganze Rechnung bedeutend vereinfachen.

Wir schreiben zunächst die Coefficienten der gegebenen Gleichung, den ersten ausgenommen, in eine Reihe; also

$$6 \quad 10 \quad -1$$

und multipliciren diese mit dem entgegengesetzt genommenen ersten Gliede. Dies gibt

$$-36 \quad -60 \quad +6$$

und setzen diese Reihe unter die erste so, dass das erste Glied der letzteren unter das zweite der ersteren zu stehen kommt. Die übereinander stehenden Zahlen werden hierauf addirt und geben die Coefficienten der transformirten Gleichung

$$u^4 - 26u^3 - 61u + 6 = 0.$$

Die wiederholte Anwendung dieser Regel gibt der ganzen Rechnung folgende Gestalt:

6	10	−1			
	−36	−60	+6		
	−26	−61	+6		
		156	260	−26	
		95	266	−26	
			−570	−950	+95
			−304	−976	+95

Bleiben wird bei den letzteren Zahlen stehen, so wird

$$u^5 + 95u^3 + 266u - 26 = 0$$
$$-u^6 + 304u^3 + 976u - 95 = 0$$

Hier ist u sicher kleiner als 0,5, vernachlässigen wir also u^5 und u^6, so ergibt sich:

$$u = \frac{1121}{11856} = 0{,}0945513$$

Um sich zu überzeugen, wie genau man die Wurzel erhalten hat, eliminire man u^3 aus den letzten beiden Gleichungen.

Dies gibt:

$$\frac{304u^5 + 95u^6}{11856} + u = \frac{1121}{11856}$$

setzt man

$$\varrho = \frac{304u^5 + 95u^6}{11856}$$

so wird u sicher kleiner als $\frac{1}{2}$

$$\varrho < \frac{1}{2^6} \cdot \frac{2.304 + 95}{11856}$$

oder

$$\varrho < 0{\cdot}001$$

also

$$u = 0{,}094$$

sicher. Daraus folgt aber, dass

$$u < \frac{1}{10}$$

also

$$\varrho < 0{,}0000001$$

demnach ist

$$u = 0{,}094551$$

bis auf die letzte Decimale genau.

Wir wollen nun zeigen, dass diese Methode zugleich die grösste Wurzel der gegebenen Gleichung liefert. Aus

$$x^{n+\vartheta} + A_{\vartheta,1}\, x^{n-1} + A_{\vartheta,2} x^{n-2} + \ldots A_{\vartheta,n} = 0$$

folgt, da $x_1\, x_2 \ldots x_n$ dieser Gleichung genügen:

$$\sum_{x=1}^{x=n} x_x{}^{n+\vartheta} + A_{\vartheta,1} \sum_{x=1}^{x=n} x_x{}^{n-1} + A_{\vartheta,2} \sum_{x=1}^{x=n} x_x{}^{n-2} + \ldots + n A_{\vartheta,n} = 0$$

Ist nun

$$x_1 > x_2 > x_3 \ldots x_{n-1} > x_n$$

so wird

$$\lim \sum_{x=1}^{x=n} x_x{}^{n+\vartheta} = x_1$$

für

$$\lim \vartheta = \infty$$

und daher näherungsweise für hinreichend grosse ϑ

$$x_1 = \sqrt[n+\vartheta]{-1} \left\{ A_{\vartheta,1} \sum_{x=1}^{x=n} x_x{}^{n-1} + \ldots + n A_{\vartheta,n} \right\}$$

Nun ist aber bekanntlich:

$$p_1 = \sum_{x=1}^{x=n} x_x = -a_1$$

$$p_2 = \sum_{x=1}^{x=n} x_x{}^2 = a_1{}^2 - 2a_2$$

. . . . . .

wir haben also

$$x_1 = \sqrt[n+\vartheta]{-1} \{ A_{\vartheta,1} p_{n-1} + A_{\vartheta,2} p_{n-2} + \ldots + n A_{\vartheta,n} \}$$

einen Näherungswert von x_1.

Wir wollen die vorstehende Bemerkung anwenden auf die Gleichung

$$x^n = ax + b \tag{5}$$

erheben wir diese Gleichung zur $n$ten Potenz, so folgt:

$$(x^n)^2 = x^{n^2} = a^n x^n + n a^{n-1} x^{n-1} b + \ldots + b^n$$

oder wenn $x^n = ax + b$ gesetzt wird

$$x^{n^2} = n a^{n-1} x^{n-1} b + \ldots + b^n + a^n b.$$

Da nun

$$\Sigma x = 0 \quad \Sigma x^2 = 0 \quad \Sigma x^3 = 0 \ldots \Sigma x^{n-2} = 0$$
$$\Sigma x^{n-1} = n a$$

so wird

$$x' = \sqrt[n^2]{a^n b n^2}$$

ein Näherungswert der grössten Wurzel der Gleichung 5) sein. Ist z. B. gegeben

$$x^5 = 6x + 10$$

(Schlöm. alg. Anal. p. 389), so wird

$$x' = \sqrt[25]{6^5 . 10 . 25} = 1{,}784 \ldots$$

Die wahre Wurzel ist

$$x = 1{,}83\,90125$$

Wir erhalten also

$$x - x' = 0{,}055$$

Wir erlauben uns an dieser Stelle eine nachträgliche Bemerkung, betreffend die kubischen Gleichungen hinzuzufügen.

Um alle drei Wurzeln zu erhalten, setze man

$$x^3 + ax^2 + bx^2 + c = (x + m)(x^2 + nx + p)$$

so wird:

$$m + n = a$$
$$p + mn = b$$
$$mp = c$$

wobei n aus der Gleichung

$$n^3 - 2an^2 + (a^2 + b)n - (ab - c) = 0$$

zu bestimmen ist. Löst man anstatt der gegebenen Gleichung diese nach unserer Methode auf, so wird

$$x_1 = -(a-n)$$
$$\left.\begin{matrix} x_2 = \\ x_3 = \end{matrix}\right\} -\frac{n}{2} \pm \sqrt{\frac{n^2}{4} - \frac{c}{a-n}}$$

wodurch man alle drei Wurzeln der vorgelegten Gleichung erhält.

Bei Gleichungen, deren Grad grösser ist als 3, lässt sich dieser Kunstgriff nicht mehr in Anwendung bringen.

II.

Wir wollen nun die Methode der fortgesetzten Substitutionen auf die Gleichungen I. und II. Grades anwenden.

Was die lineare Gleichung anbetrifft, so kann dieselbe immer auf die Form:

$$x = a + bx \qquad b < 1$$

gebracht worden. Aus dieser folgt

$$x = a + b(a + bx) = a + ab + b^2(a + bx)$$
$$= a\{1 + b + b^2 + \ldots\}$$

oder

$$x = \frac{a}{1-b}.$$

Besitzt die quadratische Gleichung

$$x^2 = px + q$$

eine Wurzel die kleiner als 1 ist, und ist

$$x^{n+2} = p_n x + q_n$$

so wird

$$x = -\lim \frac{q_n}{p_n}_{\lim n = \infty}$$

Nun ist

$$p_n = p_{n-1} p + q_{n-1}$$
$$q_n = p_{n-1} q$$

also

$$\frac{q_n}{p_n} = -\frac{q}{p + \frac{q_{n-1}}{p_{n-1}}}$$

demnach

$$x = -\lim \cfrac{q}{p + \cfrac{q}{p + \cfrac{q}{p + \ldots}}}$$

Wir können zugleich den Fehler bestimmen, welchen wir begehen, wenn wir statt der unendlichen Anzahl der Brüche $\frac{q}{p}$ im letzten Kettenbruch, nur eine endliche nehmen.

Es ist nämlich

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{q}{p}, \frac{q}{p}, \frac{q}{p}, \ldots (n+1)\,\text{mal}$$

die vollständige Gleichung lautet aber

$$x + \frac{q_n}{p_n} = \frac{x^{n+2}}{p_n}$$

nehmen wir also $n+1$ glieder, so vernachlässigen wir $\frac{x^{n+2}}{p_n}$ oder wenn x^{n+2} näherungsweise $-\left(\frac{q_n}{p_n}\right)^{n+3}$ gesetzt wird, das Glied $-\frac{{q_n}^{n+2}}{{p_n}^{n+3}}$, woraus man schon entnehmen kann, dass in dem Falle, wo die obigo Entwickelung anwendbar sein soll, $q < p$ sein muss.

III.

In diesem Abschnitt soll die Anwendung der obigen Methode zur Herstellung von Näherungswerten gezeigt werden.

Um einen Näherungswert für $\sqrt{x}$ zu finden, sei

$$x^2 = a - \alpha^2 + \beta$$

Setzt man

$$x = \alpha + u$$

so wird

$$u^2 = -2\alpha u + \beta$$

daraus

$$u^4 = -4\alpha\{2\alpha^2 + \beta\}u + \beta\{4\alpha^2 + \beta\}$$

es ist also:

$$u = \frac{\beta}{4\alpha} \cdot \frac{4\alpha^2 + \beta}{2\alpha^2 + \beta} - u^4 \frac{1}{4\alpha(2\alpha^2 + \beta)}$$

oder näherungsweise:

$$x = \alpha + \frac{\beta}{4\alpha} \cdot \frac{4\alpha^2 + \beta}{2\alpha^2 + \beta}$$

Man findet in ungünstigstem Falle, d. h. für $a = 2$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$

$$\sqrt{2} = 1{,}416 \ldots$$

also erst in der 3ten Decimale abweichend.

Wir wollen nun einen Näherungswert der Grösse x in der Reihe

$$S = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots \qquad x < 1$$

und die Reihe convergent, berechnen,

Multipliciren wir die Reihe mit $a_2 x$, so kommt:

$$a_2 S x = a_1 a_2 x^2 + a_1 a_2 x^3 + a_2 a_3 x^4 + \ldots$$

Nun ist aber

$$(S - a_1 x) a_1 = a_1 a_2 x^2 + a_1 a_3 x^3 + a_1 a_4 x^4 + \ldots$$

Demnach ergibt sich durch Subtraction

$$x\{a_2 S + a_1^2\} = a_1 S + (a_2 a_2 - a_1 a_3) x^3 + (a_2 a_3 - a_1 a_4) x^4 + \ldots$$

so dass

$$x = \frac{a_1 S}{a_2 S + a_1^2} + \alpha x^3$$

wird, wo

$$\varrho = \frac{a_2 a_2 - a_1 a_3}{a_2 S + a_1^2} + x \frac{a_2 a_3 - a_1 a_4}{a_2 S + a_1^2} + \ldots$$

Es ist also

$$x = \frac{a_1 S}{a_2 S + a_1^2}$$

ein Näherungswert.

Anf dieselbo Art kann man fortfahren.

IV.

Man kann mit Hilfe des Princips dor fortgesetzten Substitntionen auch Differentialgleichungen integriren oder mindestens in Reihen entwickeln, welche ihre Integrale darstellen; was wir an einfachen Beispielen zeigen wollen.

Es sei gegeben

$$\frac{dy}{dx} = xy$$

so wird

$$y = c + \int y x dx$$

demnach

$$\frac{dy}{dx} = x\{c + \int y x dx\}$$

$$= x\{c + \int x\{c + \int x y dx\} dx\}$$

$$\frac{dy}{dx} = x\{c + c\int x dx + c\int x \int x dx + c\int x \int x \int x dx + \ldots$$

$$\frac{dy}{dx} = xc\left\{1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.4} + \frac{x^6}{2.4.6} + \frac{x^8}{2.4.6.8} + \ldots\right.$$

da nnn

$$\frac{dy}{dx} = xy\ ,$$

so wird

$$y = c\left\{1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2.4}+\frac{x^6}{2.4.6}+\cdots\right\} = c\,e^{\frac{1}{2}x^2}$$

was auch mit der directen Integration übereinstimmt. Um

$$\lim \frac{dy}{dx} = y+x^{n-1}$$

zu integriren, bilde man:

$$y = c+\frac{x^n}{n}+\int y\,dx$$

so wird

$$\frac{dy}{dx} = x^{n-1}+c+\frac{x^n}{n}+\int y\,dx$$

$$= x^{n-1}+c+\frac{x^n}{n}+\int dx\left\{c+\frac{x^n}{n}+\int y\,dx\right\}$$

oder nach fortgesetzter Anwendnng der Methode

$$\frac{dy}{dx} = x^{n-1}+c\left\{1+x+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{x^n}{n}+\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}+\frac{x^{n+2}}{n(n+1)(n+2)}+\cdots\right\}$$

so dass man wegen

$$\frac{dy}{dx} = y+x^{n-1} = x^{n-1}+ce^x+\frac{x^n}{n}+\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}+\frac{x^{n+2}}{n(n+1)(n+2)}+\cdots$$

hat:

$$y = ce^x+\frac{x^n}{n}+\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}+\frac{x^{n+2}}{n(n+1)(n+2)}+\cdots$$

Liegt die lineare Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\varphi\frac{dy}{dx}+y\theta = 0$$

vor, wo φ und θ Functionen von x sind, so kann dieselbe unter bestimmten Voraussetzungen auf die Form

$$\frac{dy}{dx}+\Phi(x)y = \psi(x)$$

gebracht werden, wo $\Phi(x)$ nm $\psi(x)$ durch Reihen gegeben sind.

Um dies zu zeigen, multipliciren wir die erstere Gleichung mit dx und integriren, dies gibt:

$$\frac{dy}{dx}+\int\varphi\frac{dy}{dx}dx+\int y\theta\,dx = c_1$$

da nun

$$\int y\,\theta\,dx = y\theta_1 - \int \theta_1 \frac{dy}{dx}dx$$

wobei

$$\int \theta\,dx = 0$$

gesetzt wurde, so wird

$$\frac{dy}{dx} + y\theta_1 + \int (\varphi - \theta_1)\,\frac{dy}{dx}\,dx = c_1$$

demnach

$$\frac{dy}{dx} + y\theta_1 + \int (\varphi - \theta_1)\left\{c_1 - y\theta_1 - \int (\varphi - \theta_1)\,\frac{dy}{dx}dx\right\}dx = c_1$$

woraus, wenn

$$\int (\varphi - \theta_1)\,\theta_1\,dx = \theta_2$$

gesetzt wird:

$$\frac{dy}{dx} + y\left\{\theta_1 + \theta_2\right\} + c_1\int(\varphi - \theta_1)\,dx - \int \theta_2 \frac{dy}{dx}\,dx$$
$$- \int(\varphi - \theta_1)dx \int (\varphi - \theta_1)\,\frac{dy}{dx}dx = c_1.$$

Setzt man dieses Verfahren fort, so gelangt man zu Ausdrücken, die sich immer mehr und mehr der Grenze

$$\frac{dy}{dx} + y\,\Phi(x) + \psi(x) = 0$$

nähern.

Im speciellen Falle

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + xy = 0$$

ergibt sich:

$$\frac{dy}{dx} + y\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.4} - \frac{x^5}{2.2.5} - \frac{x^6}{2.2.4.6} + \cdots\right)$$
$$+ c_1\left\{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} - \frac{x^5}{2.4.5} + \frac{x^6}{2.2.5.6}\cdots\right\} = 0.$$

Dieses Verfahren kann mit Vorteil dann angewandt werden, wo es sich um Näherungswerte der Integrale gegebener Differentialgleichungen handelt, wie dies z. B. in den Naturwissenschaften oft der Fall ist.

XI.

Miscellen.

1.

Lehrsatz von den Kegelschnitten.

Auf der Hauptaxe einer Curve II. O. gibt es im allgemeinen zwei Paare von Punkten R, S und R', S' von der ausgezeichneten Lage, dass für einen beliebigen Curvenpunkt P die Gerade $\overline{PS}$ (resp. $\overline{PS'}$) senkrecht steht zu derjenigen Tangente, welche den zweiten auf der Geraden $\overline{PR}$ (resp. $\overline{PR'}$) gelegenen Curvenpunkt P_1 (resp. P_1') zum Berührungspunkt hat.

Ist Q der Schnittpunkt von $\overline{PS}$ mit der Tangente in P_1, dann hat das Product $\overline{PS}.\overline{SQ}$ einen constanten Wert.

Die Punkte S, R (und ebenso S', R') sind durch die Brennpunkte der Curve harmonisch getrennt.

Dieser Satz ergibt sich ziemlich einfach, wenn man eine Curve II. O. im Zusammenhang mit einem sie projicirenden rechtwinkeligen Rotationskegel betrachtet. Es ist bekannt, dass die Mittelpunkte aller eine gegebene Curve II. O. $\varkappa$ projicirenden Rotationskegel in der durch die Hauptaxe der Curve gehenden Normalebene ν liegen und zwar hier auf einer Curve II. O. λ, der Focalcurve, welche die Brennpunkte von $\varkappa$ zu Scheitelpunkten und die Scheitelpunkte von $\varkappa$ zu Brennpunkten hat. Unter diesen Rotationskegeln gibt es vier rechtwinkelige. Die Mittelpunkte derselben bestimmen sich als die Durchschnittspunkte der Curve λ mit demjenigen Kreise in der Ebene

ν, welcher das zwischen den Scheitelpunkten von $\varkappa$ gelegene Stück der grossen Axe zum Durchmesser hat. O sei einer von diesen 4 Punkten, und die grosse Axe von $\varkappa$ werde von der Axe des Rotationskegels im Punkte R und von der Normalen aus O auf die Ebene von λ im Punkte S geschnitten.

Bezeichnet ferner P einen beliebigen Punkt von $\varkappa$, dann berührt die Ebene τ, die zum Kegelschnitt OP im Punkte O normal ist, den Rotationskegel, ihr Schnittstrahl t mit der Ebene $\varkappa$ ist folglich Tangente dieser Curve. Der Berührungsstrahl von τ ist der zweite in der Ebene $\overline{POR}$ gelegene Kegelstrahl, also der Berührungspunkt von t der Schnittpunkt P_1 der Geraden PR mit t. Weil aber diese Tangente t sich als Schnittstrahl der Ebene τ mit der Ebene von $\varkappa$ darstellt, so ist sie normal zu der Ebene $\overline{POS}$, welche die Normalstrahlen $\overline{OP}$ und $\overline{OS}$ jener beiden Ebenen verbindet, mithin ist auch die Tangente t normal zu der Geraden $\overline{PS}$.

Wir haben hiermit auf der Hauptaxe der Curve II. O. eins von den Punktpaaren, R, S nachgewiesen, es ist aber leicht einzusehen, dass noch ein zweites mit ersterem bezüglich des Mittelpunktes symmetrisch gelegenes Punktepaar R', S' vorhanden ist. Die Annahme von mehr als zwei dieser Punktepaare führt zu Widersprüchen.

Nennen wir R den Schnittpunkt von t mit $\overline{PS}$, so ist $\overline{PS}.\overline{SQ} = \overline{SO}^2$, also constant. Damit ist auch der zweite Teil des Satzes bewiesen.

Um die Richtigkeit des dritten Teiles einzusehen, müssen wir beachten, dass die Rotationsaxe $\overline{OR}$ Tangente der Curve λ ist, und dass die Tangenten einer Curve II. O. von der durch ihren Berührungspunkt nach einer Axe gehenden Normalen harmonisch getrennt ist durch die beiden Scheitelpunkte der Curve auf dieser Axe.

Es erübrigt uns nun noch die einzelnen Kegelschnitte mit Rücksicht auf jene beiden Punktepaare zu unterscheiden.

I. Die Ellipse.

Wenn

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

die Gleichung der Ellipse ist, dann ergibt sich als Gleichung für die Focalhyperbel λ

$$\frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{z^2}{b^2}=1.$$

Der Kreis in der Ebene ν, welcher das zwischen den Scheitelpunkten der Ellipse gelegene Stück der grossen Axe zum Durchmesser hat, besitzt die Gleichung

$$x^2+z^2=a^2.$$

Eliminiren wir aus den beiden letzten Gleichungen z^2, so erhalten wir als Abscissen für die Durchschnittspunkte des Kreises und der Hyperbel

$$x^2=\frac{(a^2+b^2)(a^2-b^2)}{a^2}$$

also

$$x=+\frac{\sqrt{a^2+b^2}\,\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

und

$$x=-\frac{\sqrt{a^2+b^2}\,\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

Diese beiden Werte für x sind auch die Abscissen der Punkte S und S' auf der Hauptaxe der Ellipse. Die Abscissen von R und R' kann man auf verschiedene Weise bestimmen; man erhält

$$x=+\frac{a\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

und

$$x=-\frac{a\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Wir erkennen, dass die Ellipse stets zwei reelle Punktepaare RS und $R'S'$ besitzt. Für den Kreis fallen die 4 Punkte in den Mittelpunkt zusammen.

II. Die Hyperbel.

Die Gleichung der Focalellipse λ in der Ebene ν ist:

$$\frac{x^2}{a^2+b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1,$$

wenn

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

die Gleichung der Hyperbel $\varkappa$ ist. Als Abscissen für S und S' ergeben sich wie vorhin die Werte

$$x=+\frac{\sqrt{a^2-b^2}\,\sqrt{a^2+b^2}}{a}$$

und

$$x = -\frac{\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{a^2+b^2}}{a}$$

Für R nnd R' findet man die Abscissen

$$x = +a\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

nnd

$$x = -a\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

Ans dieson Gleichnngen ersehen wir, was übrigens anch auf geometriscbem Wege sofort einlenchtet, dass nicht für alle Hyperbeln jene Punktepaare reell sind, sie werden imaginär für Hyperbeln mit stnmpfen Asymptotenwinkeln.

Wenn die Hyperbel gloichseitig ist, so vereinigen sich die beiden Pnnktepaare in ein's nnd zwar fallen S nnd S' in den Mittelpnnkt der Hyperbel nnd R nnd R' in den nnendlich fernen Pnnkt der Hanptaxe.

III. Die Parabel.

Ist $y^2 = 2px$ die Gleichung der Parabel, dann lantot dio der zngebörigen Focalparabel

$$z^2 = 2p\left(\frac{p}{2} - x\right),$$

Der Kreis in der Ebene ν gebt jetzt in die Normale der Ebene von x im Scheitelpnnkt der Parabel über, also in die z-Axo. Die Parabel besitzt, ebenso wie die gleicbseitige Hyperbel nnr ein Paar jener ausgezeichneten Pnnkte nnd zwar ist die Abscisse von S ebenfalls $= 0$, während man für R den Wert $x = p$, also die doppelte Bronnweite findet.

Ans dem Vorbergehenden erbellt, dass für alle Kegolschnitte mit Ansnabme der Hyperbeln mit stnmpfen Asymptotenwinkeln jene Pnnktepaare sich reell bestimmen lassen. Besonders einfach ist die Ermittelung derselben für den Kreis, die gleicbseitige Hyporbel und die Parabel. Wenn in einem Kegelschnitte eins von diesen Pnnktepaaren bostimmt ist, so baben wir eine einfache Lösnng für die Aufgabe in den Pnnkten der Cnrve die Tangenten zn ziehen. Mit dem Eingangs dieser Arbeit anfgestellten Satze ist daber zngleich eine neue Methode für die Tangentenconstruction in Punkten einer Cnrve II. O. gegeben.

Strassbnrg, im Jannar 1887.

Dr. Theodor Meyer.

2.

Darstellung der ersten Gattung elliptischer Integrale durch Curvenbogen zweiten Grades.

Unter den verschiedenen Arten die genannte Function durch Summen oder Differenzen algebraischer Curvenbogen darzustellen zeichnet sich die folgende durch Einfachheit der geometrischen Beziehungen aus.

Die Rectification der Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

ergibt unmittelbar den Bogen

$$s = c\left(k'^2 u - \mathrm{el}\, u + \frac{\mathrm{sn}\, u\, \mathrm{dn}\, u}{\mathrm{cn}\, u}\right)$$

wo c die Excentricität,

$$k = \frac{a}{c}, \qquad k' = \frac{b}{c}$$

die conjugirten Modnln bezeichnen, nnd

$$x = a\,\frac{\mathrm{dn}\, u}{\mathrm{cn}\, u}$$

gesetzt ist, und zwar hat der Bogen s 'seinen Anfang im Scheitel ugl eich mit u.

Ferner ist $c\,\mathrm{el}\, u$ der Begen σ einer Ellipse, deren grosse Halbaxe $= c$, deren kleine $= ck' = b$, und deren Excentricität $= ck = a$, deren Gleichung mithin

$$\frac{\xi^2}{c^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1 \tag{2}$$

ist, anfangend im flachen Scheitel der Ellipse. Beide Curven lassen sich also concentrisch mit gemeinsamer Hanptaxe denken, haben dann auch die Länge der zweiten Halbaxe gemein, und die Brennpunkte einer jeden sind Scheitel der andern.

Zur Bestimmnng ihrer Endpunkte hat man:

$$x = a\,\frac{\mathrm{dn}\, u}{\mathrm{cn}\, u}; \qquad y = \frac{b^2}{c}\,\frac{\mathrm{sn}\, u}{\mathrm{cn}\, u} \tag{3}$$

$$\xi = c\,\mathrm{sn}\, u; \qquad \eta = b\,\mathrm{cn}\, u$$

woraus:

$$\frac{y}{b} = \frac{b^2 \xi}{a^2 \eta} = \operatorname{tg} \vartheta \tag{4}$$

wenn ϑ den Winkel zwischen der Tangente der Ellipse und der Hauptaxe bezeichnet. Ausserdem ergibt sich:

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{\cos \vartheta}$$

Endlich enthält die Formel noch die Gerade:

$$\frac{c \operatorname{su} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u} = \frac{x \xi}{a}$$

und lautet nun:

$$ck'^2 = \frac{b^2}{c} \int_0^s \frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}} = s + \sigma - \frac{x\xi}{a}$$

Sofern das Integral als beliebiges 1. Gattung gegeben ist, kennt man die obere Grenze

$$z = \frac{\xi}{c}$$

und die conjugirten Moduln k, k'; ferner ist eine constante Linie willkürlich; diese sei c. Aus ihr ergeben sich

$$a = ck, \quad b = ck'; \quad \xi = cz$$

und hiermit die Ellipse und Hyperbel in angegebener Lage (2) (1), mit den Haupthalbaxen

$$MC = c, \quad MA = a$$

und der zweiten Halbaxe

$$MB = b$$

sowie der Punkt Π auf der Ellipse, bestimmt durch die Abscisse

$$MN = \xi$$

Schneidet nun die Tangente ΠE die Hauptaxe in E, und man trägt auf EM die Strecke $EF = b$, auf $E\Pi$ die Strecke $EG = a$, und errichtet auf der Halbaxe das Lot FH, auf der Tangente das Lot GJ bzhw. bis zur Tangente und Hauptaxe, zieht ferner HP parallel MA bis an die Hyperbel, und trägt auf der Hauptaxe EJ nach MK, so ist erstens P der dem Π entsprechende Hyperbelpunkt, und zweitens K seine Projection auf der Hauptaxe, das ist

$$MK = x; \qquad KP = y$$

Ist ferner MK vierte Proportionale zu

$$MA,\quad MN,\quad MK$$

und MD zu

$$MC,\quad MA,\quad MB$$

so ist das gegebene Integral die Summe der Bogen AP und BII minus der Geraden ML, gemessen in Linienelnheiten = MD.

Den Punkt P kann man offenbar auch ohne Gebrauch der Tangente nach Gl. (4), auch unabhängig von ξ direct nach der zweiten Gl. (3) construiren. R. Hoppe.

3.

Ueber die Pseudosphäre.

In den Fortschritten der Mathematik, Jahrg. 1884 Heft 1. S. 464 wird kurz Erwähnung getan über eine Arbeit von Cayley, welche sich auf die hyperbolische Geometrie der imaginären Kugelfläche

$$x^2+y^2+z^2=-1$$

bezieht. Dabei wird bemerkt, dass dieso imaginäre Oberfläche in eine reelle verhogen worden kann, und dass die Gleichung dieser Pseudosphäre definirt werde durch

$$x=\log\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\Theta-\cos\Theta,\quad \sqrt{y^2+z^2}=\sin\Theta.$$

Für diejenigen, welche sich mit dieser Art von Geometrie beschäftigen, möchte ich bemerken, dass man zu dioser Gleichung auch auf ganz anderm Wege gelangen kann, und zwar vermittelst der Kettenlinie.

Die Gleichung dieser Curve ist

$$y=\tfrac{1}{2}(e^x+e^{-x}).$$

Wir ziehen durch don Punkt (xy) derselbon oino Tangente, fällon vom Fusspunkt der Ordinate y auf sie eine Senkrechte und hezeichnen ihren Schnittpunkt durch $x_1 y_1$.

Bildet die Tangento mit der X-Achse den Winkel Θ, so bestehen folgende Relationen:

$$x_1=x-\cos\Theta,$$
$$y_1=\sin\Theta,$$
$$y=\frac{1}{\sin\Theta},\quad e^x=y+\sqrt{y^2-1},$$

$$e^x = \frac{1+\cos\Theta}{\sin\Theta} = \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\Theta,$$

also

$$x_1 = \log\cot\tfrac{1}{2}\Theta - \cos\Theta,$$
$$y_1 = \sin\Theta.$$

Um die Verwandtschaft dieser Gleichungen mit den oben angegebenen zu zeigen, gehen wir auf den Raum über.

Wir lassen die eben abgeleitete Curve eine Rotation um die X-Achse vollführen, woran auch die Kettenlinie mit teilnehmen kann, und man erkennt, dass

$$x_1 = x \quad \text{und} \quad y_1 = \sqrt{y^2+z^2}$$

wird.

Daher ist die Gleichung der Rotationsfläche:

$$x = \log\cot\tfrac{1}{2}\Theta - \cos\Theta, \quad \sqrt{y^2+z^2} = \sin\Theta$$

welche mit der von Beltrami betrachteten identisch ist.

Sie ist demnach mit der Kettenlinie verknüpft und kann auch als eine Art von Fusspunktenflächen der Rotationskettenlinie, welche Catenoid heissen könnte, angesehen werden.

E. Oekinghaus.

4.

Eine Reihenentwicklung für π.

In den „Transformationen der elliptischen Integrale“ etc. haben wir auf Seite 258. folgende Reihe abgeleitet:

$$\frac{1}{4}\sqrt{2\pi} = 1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\cdots$$

welche noch einer Umgestaltung fähig ist.

Der Ausdruck $\frac{1}{4}\sqrt{2\pi}$ stellt das Verhältniss eines Kreisquadranten zur zugehörigen Sehne dar.

Rechter Hand kann man die Glieder $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{15}$ herausheben und zur Bildung einer neuen Reihe verwenden:

$$\frac{1}{4}\sqrt{2\pi} = \tfrac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots\right)+1-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}\cdots .$$

Da diese aber gleich der ursprünglichen ist, so folgt durch Transposition

$$\frac{1}{24}\sqrt{2\pi} = \frac{1}{5}-\frac{1}{7.11}-\frac{1}{13.17}+\frac{1}{19.23}+\frac{1}{25.29}-\frac{1}{31.35}-\ldots$$

oder auch

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{72} = \frac{1}{1.3.5}-\frac{3}{7.9.11}-\frac{5}{13.15.17}+\frac{7}{19.21.23}+\frac{9}{25.27.29}-\cdots$$

Die vorletzte Reihe lässt sich durch Zusammenziehen zweier Glieder auch noch wie folgt schreiben

$$\frac{\sqrt{2}}{1728}\pi = \frac{1}{1.5.7.11}-\frac{3}{13.17.19.23}+\frac{5}{25.29.31.35}-\frac{7}{37.41.43.47}+\cdots$$

deren Bildungsgesetz leicht ersichtlich ist.

E. Oekinghaus.

5.

Bemerkung zu einer Reihe.

Die in T. IV. S. 258. Gl. (127) entwickelte Reihe

$$\frac{1}{4}\sqrt{2.\pi} = 1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\cdots$$

kann durch Zusammenziehung der Glieder

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{15}-\frac{1}{21}+\frac{1}{27}+\cdots$$

übergeführt werden in

$$\frac{1}{4}\sqrt{2.\pi} = 1+\tfrac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\ldots\right)-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+\cdots$$

das ist in

$$\frac{1}{4}\sqrt{2}.\pi = 1+\frac{1}{12}\sqrt{2}.\pi - \frac{1}{5} - \frac{1}{7}+\frac{1}{11} - \frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}-\cdots$$

daher folgt:

$$\frac{1}{6}\sqrt{2}.\pi = \frac{4}{5} - \frac{4}{7.11} - \frac{4}{13.17}+\frac{4}{19.23}+\frac{4}{25.29}-\cdots$$

oder auch

$$\frac{1}{24}\sqrt{2}.\pi = \frac{1}{1.5} - \frac{1}{7.11} - \frac{1}{13.17}+\frac{1}{19.23}+\frac{1}{25.29}-\cdots$$

und wenn man wieder 2 Glieder in eins zusammenzieht:

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{1728} = \frac{1}{1.5.7.11} - \frac{3}{13.17.19.23}+\frac{5}{25.29.31.35} - \frac{7}{37.41.43.47}+\cdots$$

Gräfrath bei Solingen, November 1886.

E. Oekinghaus.

6.

Eine Lösung der gemischten quadratischen Gleichung.

Die allbekannten Gleichungen

$$y^2+z=m, \quad z^2+y=n \quad \text{und} \quad z^2-y=m, \quad zy=n$$

führen bei gewöhnlicher Behandlung auf eine biquadratische, hier soll ihre allgemeinere Form

$$u^2-2v=a$$
$$v^2-2\sqrt{c}.u=b$$

wo a, b, c beliebige Zahlen sind, auf eine kubische Gleichung reducirt werden und zwar mit Hülfe der Identitäten

$$(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3})^2 = x_1+x_2+x_3+2(\sqrt{x_1x_2}+\sqrt{x_1x_3}+\sqrt{x_2x_3})$$
$$(\sqrt{x_1x_2}+\sqrt{x_1x_3}+\sqrt{x_2x_3})^2 = x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 + 2\sqrt{x_1x_2x_3}(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3})$$

Wird hier

$$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3}=u$$

$$\sqrt{x_1x_2}+\sqrt{x_2x_3}+\sqrt{x_1x_3}=v$$

gesetzt, so wird

$$x_1+x_2+x_3=a$$
$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=b$$
$$x_1x_2x_3=c$$

zu setzen sein: $x_1x_2x_3$ sind dann die Wurzeln der kubischen Gleichung

$$x^3-ax^2+bx-c=0.$$

Es sei mir hier erlaubt auf eine sehr einfache, wenn auch vielleicht, eben wegen ihrer Einfachheit nicht unbekannte Lösung einer reducirten kubischen Gleichung hinzuweisen. Setzt man

$$z=\sqrt[3]{x+iy}+\sqrt[3]{x-iy},$$

so folgt

$$z^3=2x+3z\sqrt[3]{x^2+y^2}$$

dies mit

$$z^3=pz+q$$

verglichen liefert

$$p=2x.\left(\frac{2}{3}\right)^2=x^2+y^2.$$

Um bei der zweiten Gleichung die kubische zu umgehen, setze man

$$z=\xi+\eta$$
$$y=\xi^2-\xi\eta+\eta^2$$

wodurch

$$z^2-y=3\xi\eta$$
$$zy=\xi^3+\eta^3$$

wird.

Prag. W. Laska.

7.

Untersuchung der Zahl $2^{37}-1$.

Nachdem ich bestätigt gefunden hatte, dass die von Euler durch Division erprobte Zahl $2^{31}-1$ eine Primzahl ist, lag es nahe, das Augenmerk auf den nächstfolgenden ähnlichen Zahlenausdruck $2^{37}-1$ zu wenden, um im günstigen Falle die Grenze der vollkommenen Zahlen weiter hinausschieben zu können, da ja bekanntlich $2^n.(2^{n+1}-1)$

eine „vollkommene Zahl“ ist, wenn $2^{n+1}-1$ eine Primzahl ist, und da die Reihe dieser Zahlen bis jetzt mit der aus $2^{31}-1$ abgeleiteten zu Ende geht.

Weil aber das von mir eingeschlagene Verfahren von dem obigen in wesentlichen Punkten abweicht und wegen der speciellen Natur der Aufgabe abweichen musste, so wird es vielleicht interessiren, wenn ich dasselbe hier kurz mitteile.

Bei dem Ausziehen der Quadratwurzel aus dieser Zahl

$$2^{37}-1 = 137\,438\,953\,471$$

fand ich dieselbe gleich $370727+444942$, so dass -444942 als Determinante für die Form 1, 0, 444942 gewählt werden konnte. Nun ist $444942 = 2.9.19.1301$. Die Charaktere der dieser Determinante entsprechenden Zahlen sind, wenn ihr Verhältniss zu 3, 19, 1301, ob sie Rest oder Nichtrest hierzu ist, kurz durch $+$ oder $-$ bezeichnet wird, in derselben Reihenfolge

$$\begin{array}{l}
+\ +\ +\ (8n+1,\ 7)\\
-\ -\ -\ (8n+1,\ 7)\\
-\ +\ +\ (8n+1,\ 7)\\
+\ -\ -\ (8n+1,\ 7)\\
+\ -\ +\ (8n+3,\ 5)\\
-\ +\ -\ (8n+3,\ 5)\\
-\ -\ +\ (8n+3,\ 5)\\
+\ +\ -\ (8n+3,\ 5)
\end{array}$$

Sofort auszuschliessen sind also die Gesamtcharaktere, welche man durch Vertauschung von $(8n+1, 7)$ mit $(8n+3, 5)$ erhalten würde.

Weil ferner der Ausdruck die Form $2^{37}-1$ hat, so muss ein möglicher Primdivisor $= 74z+1$ sein und weil man ihn durch Multiplication mit 2 in die Form x^2-2y^2 bringen kann, so kann $74z+1$ nur die Form $8n+1$ oder $8n+7$ haben; hieraus folgt also zugleich, dass von den obigen acht Geschlechtern nur die vier ersten zur Geltung kommen, so dass man von den 16 Combinationen der Einzelcharaktere nur den vierten Teil in Rechnung zu ziehen hat. Da endlich die Zahl 137438953471 die Form $8n+7$ besitzt, also wenn sie zusammengesetzt ist, wenigstens einen Factor von gleicher Form haben muss, so reducirt sich der Reihe nach die Zahl der Primen, welche Divisor sein können, indem ja von den 18 Resten für 37 nur einer herangezogen wird, auf $\frac{1}{18}.\frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{1}{2} = \frac{1}{288}$. Diese Anzahl ist aber bis zu der Quadratwurzel $= 31568$, so dass man es nur-

fähr mit 100 Divisoren zu thun hat. Die angestellte Division ergiebt, dass 223 Divisoren, und dass die Zahl also zunächst $= 223.616317177$ ist. Führt man für den zweiten Factor die Division bis zu Ende und nimmt noch, wie es ja jetzt sein muss, die Factoren von der Form $8n+1$ bis zur $\sqrt{616318177}$ hinzu (auch die ersteren von der Form $8n+7$ brauchten nicht mehr weiter berücksichtigt zu werden), so führen diese, nur noch wenige an der Zahl, zu dem Resultate, dass 616318177 eine Primzahl ist, und es ist also

$$2^{37}-1 = 223.616318177$$

Die zweite Darstellung für die Determinante -444942 ist

$$32.38210^2+40\{38210,1671\}+5431.1671^2 = 137438953471.$$

P. Seelhoff.

8.

Ein merkwürdiges Dreieck.

Versteht man unter r, ϱ, ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c die Halbmesser der dem Dreieck ABC um-, ein-, anbeschriebenen Kreise, unter h_a, h_b, h_c, h_a^0, h_a^u ... die Höhen auf a, b, c bzhw. ihre obern und untern Abschnitte, und löst man man die Aufgabe, ein Dreieck aufzulösen, in welchem 1) $h_a = \varrho_a - \varrho$, $h_b = \varrho_b + \varrho$, so erhält man u. a.:

1) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{(3\sqrt{6}+5\sqrt{2}-4\sqrt{3}-7)}$, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{(3\sqrt{6}-5\sqrt{2}+4\sqrt{3}-7)}$

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{(3\sqrt{6}-5\sqrt{2}-4\sqrt{3}+7)}.$$

2) $\cot\frac{\alpha}{2} = \sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{2}+1)}$, $\cot\frac{\beta}{2} = \sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{2}+1)}$,

$$\cot\frac{\gamma}{2} = \sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{2}-1)}$$

3) $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{(1+\sqrt{3}-\sqrt{2})}$, $\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}$,

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\sqrt{6}-\sqrt{2}}.$$

4) $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3-\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, $\cos\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3+\sqrt{3}-\sqrt{2}}$,

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{4-\sqrt{6}+\sqrt{2}}.$$

5) $\sin\alpha = \sqrt{\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}-1)}{2}}$, $\sin\beta = \sqrt{\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}+1)}{2}}$,

$$\sin\gamma = \sqrt{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})}.$$

6) $\cos\alpha = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$, $\cos\beta = \frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$,

$$\cos\gamma = \frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} = \cos\alpha\sqrt{2}.$$

7) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$, $\operatorname{tg}\beta = \sqrt{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$,

$$\operatorname{tg}\gamma = \sqrt{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}+1)}.$$

8) $\operatorname{cot}\alpha = \sqrt{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$, $\operatorname{cot}\beta = \sqrt{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$,

$$\cot\gamma = \sqrt{\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-1)}{2}}$$

In diesen Formeln kehren dieselben Grössen bald additiv, bald subtractiv wieder und folgen einem offenbaren Gesetze.

Mit Hilfe derselben ergeben sich zwischen den einzelnen Stücken des Dreieckes interessante und z. T. sehr einfache Beziehungen, von denen hier nur einige angeführt werden sollen:

9) $h_c = r\sqrt{2}$.

10) $h_a^0 = r(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})$, $h_b^0 = r(1+\sqrt{3}-\sqrt{2})$,

$$h_c^0 = r(2+\sqrt{2}-\sqrt{6}).$$

d. h. $h_c^0 = h_a^0\sqrt{2}$, $h_a^0+h_b^0 = 2r$.

11) $h_a^u = 2r(\sqrt{3}-\sqrt{2})$, $h_b^u = r(\sqrt{3}-1)(\sqrt{6}-2)$,

$$h_c^u = r(\sqrt{6}-2)$$

d. h. $h_c^u = \frac{1}{2}h_a^u\sqrt{2}$, $h_a^u+h_b^u+h_c^u = r\sqrt{2} = h_c$.

12) $\triangle ABC = 2r\cot\beta\sqrt{2}$.

13) Umfang des Höhenfusspunktendreieckes $2r\cot\beta\sqrt{2}$.

14) $h_a^0+h_b^0+h_c^0 = 4r\cos^2\frac{\gamma}{2}$.

15) w_c (Halbirungslinie von γ) $= 2r\sin\frac{\gamma}{2}\sqrt{2}$.

Halle a. S. Hermann Stade.

XII.

Ueber Algorithmen und Calculn.

Von

Ernst Schröder

in Karlsruhe.

In einem bei den Math. Annalen im Druck befindlichen Aufsatze („Tafeln der eindeutig umkehrbaren Functionen zweier Variabeln auf den einfachsten Zahlengebieten") gehe ich eine vollständige Uebersicht der Gattungen, Arten und Formen von Functionen zweier Variabeln, welche in einem Zahlengebiete von 1, 2, 3 und 4 Elementen als eindeutig umkehrbare existiren. Diese Functionstafeln scheinen das ihnen individuell zukommende Interesse erst zu gewinnen, wenn man die durch sie (auf allerdings sehr beschränktem, discreten und endlichen Zahlengebiete) definirten Functionen untersucht auf die Gruppen von Functionalgleichungen die sie erfüllen; und dieses Interesse wird sich noch steigern, wenn man — wie ich es als bequem ausführbar nachweisen werde — sie benutzt, um Lösungen solcher Functionalgleichungengruppen auch für das ganze zweidimensional continuirliche Gebiet der complexen Zahlen aus ihnen abzuleiten.

Wir werden Anlass finden, dergleichen Functionalgleichungengruppen bald als Algorithmen, bald als Calculn zu bezeichnen, je nachdem dieselben nur auf eine einzige Tafel mit ihren Umkehrungen — auf ein einziges „Tafelnsystem" — Bezug haben, oder aber auch zwischen den durch verschiedene Tafelnsysteme definirten Functionen einen gesetzmässigen Zusammenhang ausdrücken, mögen letztere auch immerhin zur gleichen Art gehören.

Ich werde in dieser Hinsicht in anderweitigen Mitteilungen noch mehrfach auf die Tafeln zurückzukommen haben. Doch will ich hier schon ein

paar besonders frappante Beispiele hervorheben, nicht nur, um im Anschluss an die Mitteilung der Tafeln sogleich eine Idee von ihrer Verwendbarkeit (in einer Hinsicht wenigstens) zu geben, sondern auch, um die erwähnten Begriffe des Algorithmus und des Calculs zu illustriren und deren Aufstellung zu rechtfertigen.

Diese Rechtfertigung kann allerdings auch ganz selbständig geschehen, wozu ich zunächst schreiten will.

§. 1. Begriff von Calcul und Algorithmus.

Wird gesprochen von dem „Calcul" der vier Species, so dürfte jedermann diesen Ausdruck angemessen finden, in Anbetracht, dass ja historisch an diesem als dem ersten Beispiele der allgemeine Begriff des Calculs seinen Ursprung genommen hat.

Das auf der Basis dieses ersten Calculs errichtete wissenschaftliche Gebäude ist nun so über alle Beschreibung grossartig, dass es der Mühe wert erscheint, zu fragen, ob nicht auch noch andere Calculn möglich sind, von einer ähnlichen oder gar noch grösseren Tragweite? Man wird sehen, dass, in formaler Hinsicht wenigstens, diese Frage zu bejahen ist! Aber selbst wenn sie in jeder andern Hinsicht zu verneinen wäre, so verdient eine solche Frage doch zur Entscheidung gebracht zu werden.

Um vor allem zu einem allgemeineren Begriffe zu gelangen, ist es nötig, den schon erwähnten Calcul der arithmetischen vier Species erst etwas näher in's Auge zu fassen. Vom Inbegriff der Merkmale dieses speciellen Calculs werden wir ja beim Verallgemeinern einiges aufzugeben haben. Es erscheint zunächst angezeigt, die formale Seite des Calculs von der materialen zu trennen.

Zum materialen Inhalte gehören: Die Begriffserklärung von Summe und Product, deren Anwendungen, und die Methoden selbige numerisch auszurechnen für die verschiedenen Arten von Zahlen (wie natürliche, negative, gebrochene, irrationale und complexe). Leicht werden wir den ganzen materialen Teil des Calculs ausschliessen, wenn wir übereinkommen, die in diesem Calcul geltenden Gleichungen nur insoweit zu betrachten, als sie keine numerischen, sondern lediglich allgemeine Buchstabenzahlen enthalten, wenn wir uns nämlich beschränken auf die Betrachtung von Formeln des Calculs, welche im ganzen Zahlengebiete unumschränkt gelten.

Beispielsweise wird so die Beziehung zwischen Addition und Multiplication, welche das natürliche Product definirt:

$$a.b = \underset{\widehat{1}}{a} + \underset{\widehat{2}}{a} + \ldots + \underset{\widehat{b}}{a}$$

als noch zum materialen Inhalt des Calculs gehörig erscheinen, da sie wesentlich auf der Voraussetzung beruht, dass der Multiplicator b eine ganze positive Zahl sei.

Der formale Teil des Calculs, welcher hiernach übrig bleibt, wird nun also bestehen aus all' den allgemeinen Formeln der beiden ersten Operationsstufen, welche in der gewöhnlich so genannten „allgemeinen Arithmetik" Geltung haben. Diese sind, nebenbei gesagt, logische Folgerungen einer kleinen Untergruppe von Gleichungen sehr einfachen Baues, welche die fundamentalen Gesetze des Calculs oder die Grundeigenschaften der Operationen darstellen.

An diesem formalen Inhalt unsers Calculs sind nun wieder Bestandteile von zweierlei Art zu unterscheiden.

Bei einer Umschau bemerken wir einerseits solche Formeln, welche nur auf eine einzige Operationsstufe Bezug haben, z. B. auf die Multiplication und ihre Umkehrung, die Division. So das Commutationsgesetz $ab = ba$, woraus auch folgt $a:b = \frac{a}{b}$, desgl. das Associationsgesetz $a(bc) = (ab)c$, weiter die, einen Quotienten definirende Gleichung $\frac{a}{b}b = a$ und — um auch eine Folgerung aus diesen combinirten Voraussetzungen namhaft zu machen — die Regel für die Reduction eines Bruches:

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$$

— diese alle beziehen sich offenbar nur auf die Operationen der zweiten Stufe.

Eine Gruppe von derartigen Gleichungen zusammen mit allen denen, welche sie noch mit logischer Notwendigkeit nach sich ziehen, möge ein „Algorithmus" genannt werden. (Um einen gewissen wesentlichen Teil eines Calculs zu bezeichnen, erscheint dieser Name sicherlich nicht unpassend).

Alsdann werden der „Algorithmus $O_1^{\cdot}$ der Multiplication" und ebenso der „Algorithmus O_1^{+} der Addition", welcher letztere aus analog gebauten Formeln wie jener — nur für die erste Stufe gebildet — besteht, diese beiden Algorithmen werden als zwei scharf gesonderte Bestandteile des Calculs erscheinen, Teile, die nichtsdestoweniger von derselben, nämlich von der ersterwähnten Art sind.

Im Gegensatz zu diesen bemerken wir aber andrerseits auch Formeln, die auf die Operationen der ersten und zweiten Stufe zugleich Bezug haben, in ihrer Verbindung miteinander. Von jeder solchen „gemischten" Formel lässt sich nachweisen, dass sie ableitbar ist aus dem einen Distributionsgesetze:

$$a(b+c) = ab+ac$$

in Verbindung mit den innerhalb der Algorithmen bereits gegebenen Sätzen und Formeln, sodass man sagen könnte, dass die Formeln unserer zweiten Art in diesem Distributionsgesetze $\Delta\cdot+$ alle logisch zusammengefasst erscheinen.

Würden wir symbolisch etwa schreiben:

$$K = O_1{}^{+} + O_2{}^{\cdot} + O_1{}^{\cdot +},$$

so wäre damit übersichtlich ausgedrückt, aus welchen Bestandteilen der Calcul K der vier Species sich in formaler Hinsicht zusammensetzt.

Wollen wir nun dazu schreiten, diese Tatsachen zu verallgemeinern, so scheint es zunächst geboten, für die Summe $a+b$ irgend eine Function von ihren Gliedern, als Argumenten, also $f(a,b)$, zu substituiren, und desgleichen das Product $a.b$, wo immer ein solches auftritt, zu ersetzen durch eine beliebige andere Function $\varphi(a,b)$ von zwei Variabeln.

Darnach würde z. B der distributive Zusammenhang zwischen Addition und Multiplication die folgende Gestalt annehmen:

$$\alpha) \qquad \varphi\{a, f(b,c)\} = f\{\varphi(a,b),\ \varphi(a,c)\}$$

und jetzt einen distributiven Zusammenhang zwischen irgend zwei Functionen zweier Variabeln ausdrücken. Ebenso würde das Associationsgesetz (der Multiplication) nunmehr so aussehen:

$$\beta) \qquad \varphi\{a, \varphi(b,c)\} = \varphi\{\varphi(a,b), c\}.$$

Jede allgemeine Formel des Calculs wird sich fortan als eine Functionalgleichung darstellen.

Hiemit ist aber unser allgemeiner Begriff des „Calculs" gewonnen: In formaler Hinsicht ist der Calcul nichts anderes als eine durch Herbeiziehung ihrer Consequenzen vervollständigte Gruppe von Functionalgleichungen, welche mindestens auf zwei Functionen zweier Argumente nebst deren Umkehrungen Bezug haben. [Jeden auf nur eine solche Function nebst ihren Umkehrungen sich

beziehenden Teil des Calculs nannten wir Algorithmus]. Einen realen Inhalt wird der Calcul aber gewinnen, sobald wir für die Functionalgleichungen desselben ein System von Lösungen ausfindig machen, wie z. B. für den Calcul der vier Species die beiden speciellen Functionen

$$f(a, b) = a + b, \quad \varphi(a, b) = a.b$$

es vorstellen.

Würde zu den vier Species noch die Potenzirung mit ihren beiden Umkehrungen hinzugezogen, so erhielten wir den „Calcul der sieben algebraischen Operationen", und ähnlich wird auch beim verallgemeinerten Begriff des Calculs eine grössere Zahl von „Operationsstufen" zuzulassen sein, d. h. eine beliebige Menge von Functionen $f(a, b)$, $\varphi(a, b)$, ... nebst deren Umkehrungen. Die Functionalgleichungen werden auch nicht mehr durchaus oder überhaupt dieselben zu sein brauchen, welche — gewissermassen zufällig — bei den genannten 7 Operationen zutreffen; sie mögen vielmehr von irgend welcher Art sein, vorbehaltlich der Forderung, dass sie vorerst nur allgemeine Zahlen und Functionen enthalten. Und will man in der Verallgemeinerung noch weiter gehen, so kann man auch mehr als zwei Argumente überall zulassen. Endlich kann man davon absehen, dass die Argumente a, b, c, ... gerade Zahlen aus dem Gebiet der gemeinen complexen Zahlen bedeuten sollten; man kann sie beliebige Elemente irgend einer Mannigfaltigkeit bedeuten lassen, welche — in Gestalt von $f(a, b)$ z. B. — nach einer bestimmten Vorschrift verknüpfbar sind, sei es zu neuen Elementen derselben Mannigfaltigkeit, oder sei es auch zu irgend welchen Gebilden, welche anzusehen wären als Elemente einer noch umfassenderen Mannigfaltigkeit.

Das Studium der Calculn wird sich demnach decken mit einer allgemeinen Theorie der Verknüpfung; und als die einfachsten Verknüpfungen werden sich in der Tat vor allem diejenigen zum Studium empfehlen, bei welchen jeweils aus zwei Elementen ein drittes erzeugt wird. Es sei indes bemerkt, dass ich ein Verlassen des gewöhnlichen Zahlengebietes hiernächst nicht beabsichtige.

Wer nun aber unsre letzten Formeln α), β) mit den früheren vergleicht, wird zugeben, dass sie entschieden verwickelter erscheinen. Um die Vorzüge der Einfachheit und Uebersichtlichkeit, welche bisher ein wertvolles Attribut unserer fundamentalen Formeln bildeten, auch fernerhin zu geniessen, schlage ich vor, den vorhin vollzogenen Schritt in der entgegengesetzten Richtung auszuführen, nämlich anstatt der Functionen $f(a, b)$ und $\varphi(a, b)$ hinfort symbolisch

zu schreiben $a+b$ und $a.b$ oder ab, auf diese Weise also unter Festhaltung der früheren Bezeichnung für diese Operationen deren Sinn beträchtlich zu erweitern, ja zu verändern.

[Erfahrungsmässig hat dieser Vorschlag einen gewissen Widerstand zu gewärtigen. Es wird ja durch denselben in der Tat dem Leser zugemutet, von einer langgewohnten und berechtigten Gedankenverbindung zwischen Namen und dem durch sie Benannten sich zeitweilig frei zu machen. Auf der andern Seite sind aber Präcedenzfälle hierzu genugsam vorhanden. Es ist dem Chemiker auch nicht verboten worden, mit *CO* das Kohlenoxydgas zu bezeichnen, weil etwa durch den schon zwei Jahrtausende älteren Usus des Geometers sanctionirt war, unter diesem Zeichen die Verbindungsstrecke zweier Punkte *C* und *O* zu verstehen, und füglich darf dem Leser eines Buches zugetraut werden, dass er wisse, wovon in demselben die Rede ist. Eine gewisse Leichtigkeit, Bezeichnungsweisen zu wechseln, noch mehr, solche umzudeuten, sie von einem Gebiet auf ein anderes zu übertragen, hat sich auf vielen Gebieten schon förderlich oder unentbehrlich erwiesen; und jedenfalls kann es nicht untersagt werden, unter einer besonderen Ueberschrift eine abweichende, sei es Bezeichnung bekannter Dinge, sei es Interpretation bekannter Zeichen, zu verwenden, und zwar immer demjenigen Verfahren den Vorzug zu geben, welches sich dem zu behandelnden Gegenstande am besten anbequemt.

Die Werte einer Function $\varphi(a, b)$, z. B., können nun in der Tat nicht kürzer ausgiebig bezeichnet werden, als durch ab, nämlich durch das einfache Nebeneinanderstellen der Namen beider Argumente.

Beim Studium der Calculn wird es sich, wie oben gezeigt, unzweifelhaft empfehlen, die Functionsbuchstaben vertreten zu lassen durch irgendwelche Verknüpfungszeichen von Operationen, welche wir eventuell, als in einem uneigentlichen Sinne gedeutet, als „symbolische" zu bezeichnen haben. Dem von andern Autoren, wie neuerdings Herrn O. Stolz betätigten oft ganz praktischen Vorschlage, hiebei eigene Zeichen der Knüpfung, (wie ○ für.) zu verwenden, schliesse ich mich ebenfalls an, wo irgend eine Verwechselung der symbolischen mit den eigentlichen Operationen zu besorgen steht. Ich kann mich aber bei Untersuchungen, wie den vorgesetzten, wo man buchstäblich mit Myriaden von Formeln zu tun hat, schon dazu nicht immer bequemen, und noch weniger mich dazu verstehen, auf die Vorteile der Uebersichtlichkeit, welche durch die Verwendung auch des Bruchstrichs — zufolge der dadurch bedingten Ersparniss an Klammern bei Ausdrücken in ungefähr einem Dritteil aller Fälle — erzielbar sind, zu verzichten!]

Hierbei ist nicht zu übersehen, dass die beiden inversen Functionen von $a+b$, welche wir mit $a \dot{-} b$ (lies: a weniger b) und $a-b$ (a minus b) bezeichnen mögen, jetzt im allgemeinen nicht mehr einerlei sein werden, desgl. nicht die beiden Umkehrungen von ab nämlich

$$a:b \ (a \text{ zu } b) \text{ und } \frac{a}{b} \ (a \text{ durch } b) \text{ oder auch } b \mid a \ (b \text{ in } a).$$

Vielmehr wird es jetzt zweierlei Divisionen, z. B., geben, und werden wir also bei einem Calcul einfachster Art nicht vier, sondern sechs Operationen der beiden Stufen im allgemeinen zu gewärtigen haben.

§ 2. Programm für das Studium der Calculn.

Ich habe mir nun die Aufgabe gestellt, alle möglichen Calculn aufzusuchen, welche zwischen den letzterwähnten sechs symbolischen Operationen (eventuell auch deren mehreren) bestehen können, und zwar innerhalb solcher Grenzen, die lediglich bestimmt sind durch die Anforderung, dass die „fundamentalen" Gesetze des Calculs einen gewissen Grad von Complicirtheit nicht überschreiten dürfen.

So beträchtlich die Menge dieser Calculn sich bis jetzt darstellt, gibt sie doch der Hoffnung Raum, dass es einst möglich sein wird, sie völlig zu übersehen. Obwol die dieshezüglichen Untersuchungen noch lange nicht abgeschlossen sind, ist es doch bereits ausser allem Zweifel, welcher von diesen Calculn der „umfassendste" ist, d. h. bei welchem von ihnen auf den einfachsten Gebieten überhaupt denkbarer Gleichungen deren die allermeisten als Formeln Geltung haben. Ich werde diesen Calcul als ein bemerkenswertes Paradigma in § 11. auseinandersetzen.

Inzwischen müssen wir uns vor allem nach den Gesichtspunkten umsehen, unter welchen die zunächst immense Aufgabe naturgemäss einzuschränken ist, und darauf einen Plan der Untersuchungen gründen.

Gefahndet sollte werden auf solche Calculn, welche in Hinsicht auf Einfachheit und Allgemeinheit der „fundamentalen" Formeln dem Calcul der vier Species resp. dem der 7 algebraischen Operationen ebenbürtig sein könnten.

In den fundamentalen Gesetzen der letztern treten nun höchstens sieben (teilweise unter sich gleiche) allgemeine Zahlen als

Operationsglieder auf — so in dem schon erwähnten Distributionsgesetze, so auch in den fundamentalen Gesetzen:

$$a^b . a^c = a^{b+c}, \quad b^a . c^a = (bc)^a, \quad (a^b)^c = a^{b.c}$$

der dritten Operationsstufe.

Wir werden demnach nur solche Functionalgleichungen auf ihre Consequenzen und Lösungen untersuchen, in denen nicht mehr als sieben Zahlen durch die symbolischen Operationen verknüpft erscheinen. —

Eine Vorbedingung für das Studium der Calculn bildet offenbar dasjenige der Algorithmen, deren Formeln ja einen isolirbaren Bestandteil der Calculn ausmachen. Hiedurch wird es gerechtfertigt erscheinen, wenn wir uns in nächster Zeit vorwiegend mit Algorithmen beschäftigen, vor allem also die gesetzmässigen Beziehungen untersuchen, welche eine Function $f(a, b)$ oder ab zu ihren eigenen Umkehrungen sowie zu sich selber haben kann.

Für diese Algorithmen können wir uns die Aufgabe noch etwas weiter einschränken auf Grund der Wahrnehmung, dass bei den vier Species in die fundamentalen Gesetze (wie Associations- und Commutationsgesetz) nur höchstens sechs Operationsglieder eingehen; desgl. überhaupt bei den 7 Operationen, indem auch auf der dritten Stufe kein Grundgesetz [ich erinnere an $(a^b)^c = (a^c)^b$] mehr als diese Anzahl enthält. Wir werden uns also bei den Algorithmen ebenfalls mit bis zu sechs Operationsgliedern begnügen.

In der Tat werden so bei den „reinen" sowol als bei den „gemischten" Formeln gerade die vier einfachsten Fälle ihre Erledigung finden, welche ersichtlichermassen möglich sind, nämlich die Fälle, wo 3, 4, 5, 6 resp. 4, 5, 6, 7 Operationsglieder auftreten.

Bis auf den Specialfall der Division durch 0 sind die vier Species eindeutig, die Potenzirung nebst Umkehrungen im complexen Gebiete allerdings schon im allgemeinen unendlich vieldeutig.

Uns wird es sich empfehlen, die Aufgabe zunächst weiter einzuschränken durch die Annahme, dass die Grundoperationen, resp. die Functionen samt ihren Umkehrungen, vollkommen eindeutig seien.

Für einen auf symbolische Multiplication bezüglichen Algorithmus werden dann unbedingt als Gleichungen die sechs sogenannten „Fundamentalrelationen" gelten:

$$a(b:a) \qquad \frac{b}{a}a$$

1) $$\frac{a}{a:b} \qquad b \qquad a:\frac{a}{b}$$

$$\frac{ba}{a} \qquad (ab):a$$

als Sechseck mit Seiten und Diagonalen zu denken, wobei die Linien Gleichheitszeichen vorstellen, und nur diejenigen hervorgehoben sein sollen, welche den Mittelpunkt b mit den Ecken verbinden. Dieselben definiren die beiden Divisionen als Umkehrungen der Multiplication oder bringen den Gegensatz der 3 Grundoperationen zum Ausdruck.

Als Motiv für jene Einschränkung können wir die Ueberlegung anführen: Wenn unter Beihülfe der genannten Voraussetzung der Eindeutigkeit aus einer Formel alle diejenigen gefolgert werden, welche sie in einem bestimmten Formelgebiete notwendig mitbedingt, so muss man jedenfalls den Rahmen erhalten, innerhalb dessen die Consequenzen eben dieser Formel sich halten werden im Falle eventueller Vieldeutigkeit der Operationen, das ist nämlich beim Wegfall jener so folgenreichen Prämisse, als welche wir die Voraussetzung der Eindeutigkeit kennen lernen werden.

Um eine jede Formel aber alle ihre Consequenzen zu schauen, und vor allem diejenigen Formeln, welche etwa noch mit ihr „äquivalent" sind, ist nötig. Es erscheint dies nicht nur angezeigt, damit wir einen Ueberblick über die Umformungen von Ausdrücken gewinnen, welche der Algorithmus gestattet, sondern auch, um die Zahl der schliesslich selbständig anfzulösenden Functionalgleichungen nach Möglichkeit zu verringern. Aequivalent nennen wir Formeln, wenn sie auf Grund der vorausgesetzten Eindeutigkeit und der obigen „Fundamentalrelationen" einzeln einander gegenseitig bedingen. Eine auf dem Formelgebiet vollständige solche Gruppe von unter sich äquivalenten Formeln bildet immer das „Prämissensystem" eines zugehörigen Algorithmus; der letztere umfasst ausserdem noch diejenigen Formeln des Gebietes, welche aus jenen (einzeln) folgen, ohne dass selcher Schluss umkehrbar wäre.

Bedenken wir freilich, dass bei den namhaftesten „Calculn" (der 7 Operationen, dem logischen, dem Quaternionencalcul, u. a.) auch vieldeutige Operationen auftreten, so erscheint unser nächstes Vorhaben nur der Erforschung eines Stromlaufs vergleichbar, an dessen Ufern vielleicht erst die fruchtbaren Gefilde liegen. —

Wie ferner durch die „Vertauschungsprincipien" die Menge der zu untersuchenden Algorithmen oder Prämissensysteme

auf eine viel geringere zurückzuführen ist, habe ich schon Math. Annalen, Bd. 10., S. 306. sq., sowie Borchardt's Journal Bd. 90. S. 192 sq. (sowie in den daselbst citirten Schriften) auseinandergesetzt. Es wird darnach nur darauf ankommen, von jeder „Art" von Algorithmen einen Repräsentanten zu erledigen, und da die Arten 1, 2, 3 oder 6-gliedrig sind, zerfallen sämtliche Prämissensysteme in vier Gruppen derart, dass die erste ganz, von der zweiten nur die Hälfte, von der dritten (nebenbei gesagt viel zahlreicheren) nur das Drittel und von der vierten nur der sechste Teil zu studiren ist.

Aehnliches gilt für die Calculn, wo man sogar für jede Operationsstufe ein besonderes System von Vertauschungsprincipien haben wird, sodass — bei zwei Stufen — bereits eine Reduction zu studirender Mengen von Formelgruppen auf ihren 36ten Teil eintreten kann, und so weiter.

§ 3. Ueberblick des Formelgebiets der Algorithmen.

Nach dem Vorhergehenden haben wir Gleichungen zu betrachten, in welchen lauter allgemeine Zahlen a, b, c ... beiderseits verknüpft erscheinen durch irgendwelche von den drei Grundoperationen, als deren Verknüpfungszeichen wir symbolisch mal, zu und durch genommen haben.

Wir wollen sagen, dass eine Gleichung zur Classe (m, n) gehöre, wenn auf ihrer einen Seite m, auf ihrer andern n solche Operationsglieder vorkommen. So wird z. B. die Formel

$$a(b:a) = b$$

zur Classe (3, 1), die

$$a(bc) = (ab)c$$

zur Classe (3, 3), dagegen die

$$\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}$$

zur Classe (4, 2) gehören. Eine jede Formel der Classe (m, n) werden wir mitunter auch durch

$$a_1, a_2, \ldots a_m = b_1, b_2, \ldots b_n$$

abgekürzt darstellen, wobei also die Klammerstellung und die Natur der verknüpfenden Operationszeichen, desgleichen aber auch Reihenfolge und Wertverteilung der Operationsglieder offen gelassen bleibt.

Wir haben drei Kategorien von denkbaren Formeln zu unterscheiden, je nachdem solche (mit Notwendigkeit) stets, nur manchmal (eventuell), oder nie (unmöglich) allgemeine Geltung haben. Doch ist es zweckmässig, erstere Kategorie nochmals zu zerlegen und so zu reden von reinen Identitäten, dazu von analytischen Formeln, sodann auch von synthetischen, sei es zulässigen, sei es unzulässigen Formeln.

Die „Identitäten", wie

$$a:(bc) = a:(bc),$$

in denen beiderseits genau dasselbe steht, sollen dem Formelgebiet nicht zugezählt werden.

Die „analytischen Formeln", wie

$$a(b:a) = \frac{bc}{c},$$

gelten kraft der „Fundamentalrelationen" für alle symbolischen Operationen, die überhaupt im Gegensatz zu einander stehen oder eine Stufe bilden; sie können daher nicht verwendet werden, um eine besondere Stufe von Operationen zu bestimmen. Zum eigentlichen Formelgebiete zählen wir sie daher ebenfalls nicht mit.

Die „synthetischen" sind die übrigen Formeln; sie drücken formale Eigenschaften aus, die nur gewissen Classen von Functionen zukommen können. Tun sie dies wirklich, so nennen wir sie zulässige oder wirksame Formeln, andernfalls unzulässige. (Beispiele weiter unten).

Einerlei sollen zwei Formeln heissen, wenn sie durch blossen Buchstabenwechsel in einander übergehen, wie etwa

$$ab = ba \quad \text{und} \quad cd = dc.$$

Ebenso sind aber z. B. auch die Formeln

$$\frac{a}{bc} = \frac{b}{ca} \quad \text{und} \quad \frac{a}{bc} = \frac{c}{ab}$$

einerlei, weil durch cyklische Vertauschung von a, b, c in einander übergehend.

Als verschiedene sollen Formeln nur dann gezählt werden, wenn jenes nicht der Fall ist.

In jedem Ausdruck hat man „freie" und „gebundene" Operationsglieder zu unterscheiden. Unter letztern verstehen wir die

in einer Klammer mit andern verknüpften, wobei nur zu beachten ist, dass der Bruchstrich als Vinculum oft eine Klammer vertritt. Z. B. in $a(a:b)$ ist das erste a (sowie $a:b$) ein freies, dagegen das zweite a, sowie b ein gebundenes Operationsglied; ganz ebenso in $a\frac{a}{b}$. Ein „binärer" oder zweifächeriger Ausdruck enthält nur zwei Operationsglieder, welche beide in ihm als freie zu bezeichnen sind.

Von vornherein beschränkten wir uns nun auf die Betrachtung „binärer" Operationen, d. i. solcher, die immer nur zwei Zahlen (zu einer dritten) verknüpfen. Jeder Ausdruck, in welchem mehr als zwei Operationsglieder vorkommen, muss deshalb durch eine „Cäsur" in zwei Teile geschieden erscheinen, die, eventuell von Klammern umschlossen, stets mittelst eines bestimmten Operationszeichens verknüpft sind. Das letztere bestimmt die Natur des Ausdrucks als Product, Verhältniss oder Bruch.

Durch die anderwärts motivirte Vorschrift, die Brüche hier jeweils von unten nach oben, Producte und Verhältnisse aber wie üblich, zu lesen, erhalten — nebenbei gesagt — alle Operationsglieder eines Ausdrucks auch eine bestimmte Reihenfolge.

Auf Grund der Definition, welche irgend zwei von den drei Grundoperationen als die Umkehrung der dritten charakterisirt, kann nun jedes freie Operationsglied transponirt, d. i. auf die andre Seite der Gleichung gebracht werden.

Das nämliche kann auch nach den Fundamentalrelationen bewerkstelligt werden auf Grund des Princips, dass gleiche Zahlen, durch dieselbe Operation mit gleichen Zahlen verknüpft, gleiche Resultate liefern müssen. Irgend ein bestimmtes Operationsglied kann folglich auch stets auf einer Seite der Gleichung isolirt werden, indem man nach und nach (von aussen nach innen fortschreitend) alle mit ihm verknüpften Operationsglieder hinüberschafft.

Solche Gleichungen, welche durch blosses Transponiren von Operationsgliedern auseinander ableithar sind, lassen wir nicht als wesentlich verschieden gelten und sehen sie „bei der engeren Zählung" immer als eins an. Z. B. die Gleichungen

$$b:(aa) = ab \quad \text{und} \quad \frac{b}{ab} = aa$$

werden nur „bei der weiteren Zählung" als zwei verschiedene zu gelten haben.

Durch jenes Hinüberschaffen von Operationsgliedern kann eine Formel der Classe (m, n) oft in eine solche umgeschrieben werden,

welche einer andern Classe (m', n') angehört. Dabei wird natürlich immer

$$m+n = m'+n'$$

die Gesamtzahl der Glieder nämlich ungeändert bleiben. Diejenige Form der Gleichung erscheint als die übersichtlichste, bei welcher die Differenz $m-n$ die kleinere ist.

Wir brauchen nur solche Formelclassen zu untersuchen, bei welchen $m-n$ seinen Minimalwert hat. Wie sich unschwer zeigen lässt, wird dieser höchstens die Hälfte der grösseren von den beiden Zahlen m, n betragen.

Ist nämlich $m = n$, so hat $m-n$ bereits seinen Minimalwert 0. Sind m, n verschiedene Zahlen, so können wir unter m die grössere verstehen, sodass $m > n$. Ist dann $n \geqq \frac{m}{2}$ so folgt bereits $m-n \leqq \frac{m}{2}$. Daher muss obige Behauptung nur noch für die Annahme $n < \frac{m}{2}$ bewiesen werden. Nun wird die „m-fächerige" d. h. m Operationsglieder enthaltende, linke Seite der Formel durch die Cäsur in einen r-fächerigen und einen $(m-r)$-fächerigen Teil geschieden, wo jedenfalls $r \geqq 1$ ist, und etwa $m-r \geqq r$ gedacht werden möge, sodass $r \leqq \frac{m}{2}$. Transponirt man den r-fächerigen Teil, so gerät die Formel in die Classe

$$(m-r,\ n+r) = (m',\ n'),$$

wo nun

$$m' = m-r \geqq \frac{m}{2} \quad \text{und} \quad n' = n+r < m \text{ ist.}$$

Ist jetzt etwa $m' \leqq n'$, so ist der Betrag

$$|\, m'-n' \,| = n'-m' = 2r+n-m < \frac{m}{2}$$

wie zu zeigen war. Andernfalls aber, d. h. wenn noch immer $m' > n'$ ist, wird der Betrag

$$|\, m'-n' \,| = m'-n' = m-n-2r$$

doch mindestens um zwei Einheiten kleiner als $m-n$ sein. Sofern dann $n' \geqq \frac{m'}{2}$ ist, sind wir ebenfalls bereits am Ziele, indem $m'-n' \leqq \frac{m'}{2}$ und um so mehr $< \frac{m}{2}$ sein wird. Wenn dagegen noch

immer $n' < \frac{m'}{2}$ ist, so kann man dieselbe Methode, die Differenz der beiden Classenindices durch Transponiren zu verringern, noch weiter fortgesetzt anwenden, nämlich unsere letzte der Classe (m', n') angehörige Formel zunächst nochmals ebenso behandeln, wie wir dies für die ursprüngliche der Classe (m, n) angehörige Formel vorhin angegeben haben und so fort, bis diese Differenz endlich $< \frac{m}{2}$ geworden ist. Dass aber der Wert $\frac{m}{2}$ auch wirklich als Minimalwert der Differenz $m - n$ auftreten kann, lehren schon die Beispiele einer Formel $a, b = c$ der Classe (2, 1) sowie einer Formel $(a, b), (c, d) = e, f$ der Classe (4, 2), u. s. w., wo er sich durch Transponiren nicht weiter verringern lässt.

Jede allgemeine Zahl, die in eine Gleichung des zu untersuchenden Formelgebietes eingeht, muss in dieser mehr als ein mal als Operationsglied vorkommen. Denn käme eine Zahl a nur ein mal vor, so könnten wir, sie isolirend, die Gleichung auf die Form bringen:

$$a = b, c, d \ldots$$

wo dann rechts ein durch die Werte der übrigen Operationsglieder eindeutig bestimmter Zahlenwert, links aber — da die Gleichung als eine allgemeine oder „Formel" aufzufassen ist — eine unbestimmte, davon unabhängig hellebige Zahl steht. Darnach würde sich also ein Widerspruch zu der voraussgesetzten Eindeutigkeit der Grundoperationen ergeben.

Lassen wir also nicht mehr als 6 oder 7 Operationsglieder zu, so haben diese sich unter höchstens drei verschiedene Werte a, b, c zu teilen.

Eine Classe (1, 1) kann es nicht geben, denn zu ihr könnte nur die Gleichung $a = a$ oder die $a = b$ gehören; erstere bleibt als Identität ausser Betracht; letztere ist als allgemeine Formel unzulässig sobald das Zahlengebiet aus mehr als einer Zahl besteht (was wir stets annehmen).

Niederste Classe ist also die (2, 1). In ihr müssen alle drei Operationsglieder einander gleich sein, sodass jede Gleichung derselben die Form hat:

$$a, a = a.$$

Derart gibt es nun drei Gleichungen:

$$aa = a, \qquad a:a = a, \qquad \frac{a}{a} = a,$$

die einander gegenseitig bedingen und „im engeren Sinne“ als eine zu zählen sind. Sie haben den l. c. schon erwähnten Algorithmus λ_0 zur Folge.

Ausser der Classe (2, 1) brauchen wir keine Classe $(m, 1)$ zu berücksichtigen, weil jede Gleichung einer solchen sich verwandeln lässt in eine Gleichung einer der übrigen Classen (m', n'), wo $m' \geqq n' > 1$ ist, und zwar dadurch, dass man von den beiden $(m-r)$- und r-fächerigen Teilen des m-fächerigen Ausdrucks, welche die Cäsur scheidet, den wenigstfächerigen transponirt.

Darnach schliesst sich an: die Classe (2, 2) als die einzige Classe, in deren Gleichungen 4 Operationsglieder eingehen.

Sodann folgt die Classe (3, 2) als einzige mit 5 Operationsgliedern.

In den Gleichungen beider können höchstens zwei verschiedene Zahlen a, b als Operationsglieder vorkommen, von denen bei Classe (2, 2) jedes zwei mal, dagegen bei (3, 2) das eine drei, das andere zwei mal aufzutreten hätte.

Zwischen 6 Operationsgliedern kommt erstlich die Classe (3, 3) in Betracht; sodann aber nur noch von der Classe (4, 2) diejenige Partie, worin der vierfächerige Ausdruck durchweg die Cäsur in der Mitte hat („symmetrisch“ geteilt erscheint in zwei binäre Teile). Denn sonderte ihn die Cäsur in einen ternären und einen einfächerigen Teil, so käme ja durch Hinüberschaffen des letzteren (des freien Buchstabens) die Gleichung auf eine solche der Classe (3, 3) hinaus.

Dies der Ueberblick der auf Algorithmen zu studirenden Formelclassen.

§ 4. Fortsetzung. Auszählung des Gebietes.

Je nach der Art, wie nun die vorkommenden Operationsglieder in Gruppen von unter sich gleichen zerfallen, je nach der Cäsur oder Klammerstellung der beiderseits in einer Gleichung vorkommenden Ausdrücke, und endlich nach der Art, wie sich diese Zahlen in die verschiedenen Fächer verteilen, zerfallen die aufgezählten Classen von Formeln noch in verschiedene Ordnungen und Sorten, und ist

es eine leichte combinatorische Aufgabe, mit Rücksicht auf die möglichen Anordnungen der Operationszeichen und die Reihenfolge der Argumente, die Zahl der „verschiedenen" Gleichungen zu ermitteln, welche eine Sorte umfasst. Wir stellen einfach die Resultate zusammen, wobei die eingeklammerten Factoren [2×] oder [3×] sich auf die „weitere" Zählung beziehen, und bei der engeren fortzulassen sind, desgl. was überhaupt in eckigen Klammern stehn wird.

Die Classe (2, 1) enthält nur die eine Sorte $a, a = a$ mit [3×]1 Gleichung.

Die Classe (2, 2) enthält die drei Sorten:

$a, b = a, b$ mit 9 Gleichungen, ungerechnet 3 Identitäten;

$a, a = b, b$ mit 6 Gleichungen;

* $a, a = a, a$ mit 3 Gleichungen, ungerechnet 3 Identitäten.

Die Classe (3, 2) enthält folgende sechs Sorten.

$a, (a, b) = a, b$ mit [2×] 108 Gleichungen, wovon jedoch [2×]45 als unzulässige, nämlich nachweisbar mit der Eindeutigkeit der Operationen unverträgliche abgehen werden (siehe unten).

$(a, a), b = a, b$ mit 108 Gleichungen
[$(a, b), b = a, a$ mit 108 Gleichungen]

$a, (b, b) = a, a$ mit 54 Gleichungen, wovon 36 unzulässig
[$a, (a, a) = b, b$ mit 54 Gleichungen, wovon 36 unzulässig]

* $a, (a, a) = a, a$ mit [2×] 27 Gleichungen.

Als Beispiel einer „unzulässigen" Gleichung der Classe (3, 2), deren Gesamtzahl [2×] 81 sein wird, sei angeführt:

$$a\,b = a\,(a\,b);$$

nennte man

$$a\,b = c,$$

so käme sie auf

$$c = a\,c \quad \text{oder} \quad \frac{c}{c} = a$$

hinaus, was unmöglich, weil $\frac{c}{c}$ einen durch c eindeutig bestimmten und nicht mehr beliebigen Wert haben wird. Desgleichen ist

$$a\,b = a\,(b\,a)$$

unzulässig weil auf

$$(a\,b) : a = b\,a \quad \text{oder} \quad b = b\,a,$$

das ist

$$b : b = a$$

hinauslaufend. Etc.

---

*) Der Zweck des Sterns wird weiter unten angegeben.

Classe (2, 1) enthält hienach $[3\times]1 = 1$ [resp. 3], Classe (2, 2) enthält $9+6+3 = 18$ wirksame Formeln, wovon 15 unbesternte; daneben 6 Identitäten.

Classe (3, 2) zunächst überhaupt $[2\times]108+108+54+27=297$ [resp. 594] denkbare Gleichungen, und nach Abzug der $[2\times]81[=162]$ unzulässigen noch $[2\times]216[=432]$ wirksame Gleichungen, wovon unbesternte: 189.

Die Classe (3, 3) enthält vierzehn Sorten. Sorte:

$a, (b, c) = a, (b, c)$ mit 324 Gleichungen, bei denen 18 Identitäten nicht eingerechnet sind; Sorte:

$(a, b), c = (a, c), b$ mit 666 Gleichungen.

Diese zwei Sorten bilden die Ordnung $a, b, c = a, b, c$ mit 990 Gleichungen (ohne 18 Identitäten). Sorte:

$a, (a, b) = (b, c), c$ mit 666 Gleichungen, wovon aber 21 analytische, also nur 645 wirksame Formeln sind. Sorte:

$(a, a), b = (b, c), c$ mit 648 Gleichungen; Sorte:

$(a, a), b = b, (c, c)$ mit 171 Gleichungen.

Diese drei Sorten bilden die Ordnung $a, a, b = b, c, c$ mit zusammen 1464 wirksamen und 21 analytischen Formeln. Sorte:

* $a, (a, b) = a, (a, b)$ mit 615 wirksamen Gleichungen, dazu 15 analytischen und 36 Identitäten;

* $a, (a, b) = (a, a), b$ mit 648 Gleichungen;

* $(a, a), b = (a, a), b$ mit 153 Gleichungen, ungerechnet 18 Identitäten.

Diese drei Sorten machen zusammen die Ordnung $a, a, b = a, a, b$ aus mit 1416 wirksamen, 15 analytischen und 54 identischen Gleichungen. Sorte:

* * $a, (a, b) = (a, b), b$ mit 666 Gleichungen, wovon 213 als unzulässige abgehen, 453 bleiben;

* * $a, (a, b) = a, (b, b)$ mit 648 Gleichungen, wovon 216 unzulässige abgehen, 432 bleiben;

* * $(a, a), b = a, (b, b)$ mit 171 Gleichungen.

Diese drei Sorten machen zusammen die Ordnung $a, a, b = a, b, b$ aus mit 1485 Gleichungen, wovon 429 unzulässig sind, also 1056 zulässig erscheinen. [Von 12 Hexaden der letztern ist noch der

Beweis ausständig, ausständig, dass sie wirklich Lösungen besitzen]. Sorte:

* (a, b), $b = a$, (a, a) mit 612 wirksamen und 36 analytischen Gleichungen;

* a, $(b, b) = a$, (a, a) mit 324 Gleichungen.

Diese zwei Sorten bilden die Ordnung a, b. $b = a$, a, a mit 936 wirksamen und 36 analytischen Gleichungen. Sorte:

* a, $(a, a) = a$, (a, a), zugleich Ordnung a, a, $a = a$, a, a mit 138 wirksamen, dazu 15 analytischen und 18 identischen Gleichungen.

Die Classe (3, 3) umfasst somit 6606 Gleichungen, wovon 429 als unzulässig, 90 als Identitäten und 87 als analytische Gleichungen abgehen, sonach 6000 wirksame Formeln bleiben, davon unbestimmt 2454.

Von der Classe (4, 2) mit „symmetrischer" Cäsur kommen zwölf Sorten in Betracht. Sorte:

(a, c), $(b, c) = a$, b mit [3×] 216 Gleichungen;

$\left\{\begin{array}{l}(b, c),\ (b, c) = a,\ a \text{ mit } 162 \text{ Gleichungen,}\\ [(a, a),\ (b, c) = b, c \text{ mit } 324 \text{ Gleichungen}];\end{array}\right.$

(a, a), $(b, b) = c, c$ mit [3×] 27 Gleichungen

* * (a, b), $(a, b) = a, b$ mit [3×] 108 Gleichungen;

* * $\left\{\begin{array}{l}(a, a),\ (b, b) = a, b \text{ mit } 162 \text{ Gleichungen,}\\ [(a, a),\ (a, b) = b, b \text{ mit } 324 \text{ Gleichungen}]\end{array}\right.$

* $\left\{\begin{array}{l}(a, b),\ (a, b) = a, a \text{ mit } 324 \text{ Gleichungen,}\\ [(a, a),\ (a, b) = a, b \text{ mit } 648 \text{ Gleichungen}];\end{array}\right.$

* $\left\{\begin{array}{l}(a, a),\ (a, a) = b, b \text{ mit } 81 \text{ Gleichungen,}\\ [(a, a),\ (b, b) = a, a \text{ mit } 162 \text{ Gleichungen}];\end{array}\right.$

* (a, a), $(a, a) = a, a$ mit [3×] 27 Gleichungen.

Zusammen in dieser Classe [3×] 1107 [= 3321] Formeln, wovon unbestimmte [3×] 405.

An wirksamen Formeln haben wir demnach in der engeren Zählung, den angeführten fünf Classen entsprechend:

$$1 + 18 + 216 + 6000 + 1107 = 7342 \text{ Gleichungen.}$$

Für eine erste Inangriffnahme wird dieses Untersuchungsfeld immer noch eher zu ausgedehnt erscheinen. Wir reduciren dasselbe noch weiter unter einem Gesichtspunkt, den wir bezeichen können als das Bestreben, das Beste vorwegzunehmen. Eine Formel, wie

$$a(ab) = (aa)b,$$

oder gar

$$a(aa) = (aa)a,$$

wird jedenfalls einen Algorithmus von geringerer Tragweite bedingen, als z. B. die Formel

$$c(ab) = (ac)b,$$

von welcher sie einen speciellen Fall vorstellt; ebenso wird die Annahme

$$a:a = \frac{a}{a}$$

gewiss ärmer an Consequenzen sein, als die Annahme

$$a:a = \frac{b}{b}.$$

Verlangen wir also, dass in den Formeln unsres Untersuchungsfeldes jeweils die grösste Anzahl von einander verschiedener also unabhängig beliebiger Operationsglieder auftrete, welche nach der Gesamtmenge dieser Operationsglieder überhaupt zulässig ist, so werden von obigem Gebiete alle die besternten Sorten ausgeschieden. Lassen hiervon auch die mit zwei Sternen bezeichneten den unbesternten sich nicht auf die angegebene Art subsumiren, so bilden jene doch in der Tat zusammen die weniger interessante (etwas grössere) Hälfte, und müssen deren Consequenzen, mindestens bei den mit einem Stern bezeichneten, sich zudem halten innerhalb des Rahmens der formelreicheren Algorithmen aus dem unbesternten Gebiete.

Nur mit den letzteren, welche natürlich in der Umformung von Ausdrücken auch die beträchtlichere Mannigfaltigkeit, Freiheit und Leichtigkeit gewähren, werden wir uns nunmehr befassen, und unser Formelgebiet wird hienach definitiv aus den

$$1 + 15 + 189 + 2454 + 405 = 3064$$

Gleichungen der unbesternten Sorten bestehen; es möge fortan kurz als „das Gebiet“ bezeichnet werden.

In erster Linie kommt es nun darauf an, zu ermitteln, in wie viele „Prämissensysteme“ oder Gruppen von einander äquivalenten Formeln, also sozusagen selbständige logische Einheiten, dieses Gebiet zerfällt. Ebenso viele „primäre“ Algorithmen werden auf diesem Gebiete denkbar sein, wenn wir primitiv oder primär einen jeden Algorithmus nennen, bei dem es möglich ist, eine ausreichende Prämisse in Gestalt einer einzigen Formel des Gebietes anzugeben.

Erst nach diesen primitiven werden die „Combinationsalgorithmen“ aufzusuchen sein, welche in secundäre, tertiäre, quartäre (etc.?) zerfallen, je nachdem mindestens zwei, drei oder vier Formeln des Gebietes als simultan gültige angenommen werden müssen, um alle übrigen Gleichungen des Algorithmus nach sich zu ziehen. Es versteht sich, dass diese Benennungen nur relative Geltung haben in Bezug auf ein bestimmtes zu Grunde liegend gedachtes Formelgebiet: ein auf einem solchen als ein combinirter zu bezeichnender Algorithmus kann für ein anderes Formelgebiet primär sein und umgekehrt.

Um erkennen zu lassen, dass die gestellte Aufgabe keine masslose ist, sei hier schon angeführt, dass die 3064 Formeln unsres Gebietes nur 54 Arten von 167 primitiven Algorithmen liefern, und zwar sind es 12 eingliedrige, 1 zweigliedrige, 31 dreigliedrige und 10 sechsgliedrige Arten, wobei in der Tat:

$$12 \times 1 + 1 \times 2 + 31 \times 3 + 10 \times 6 = 167.$$

Einen ähnlichen Ueberblick über das Gebiet der auf Calculn zu untersuchenden „gemischten“, also auf mehrere Operationsstufen bezüglichen Formeln behalte ich mir vor, bei einer andern Gelegenheit zu geben, und schreite jetzt dazu, einige Paradigmata hervorzuheben.

§ 5. Algorithmus O_1 auf discreten Zahlengebieten.

Der Algorithmus O_1 — definirt als die Gesamtheit der Formeln, welche für die eigentliche Multiplication nebst Divisionen gelten — nimmt unter den primären Algorithmen unsres Formelgebietes hinsichtlich seiner „Tragweite“, nämlich seines Formelreichtums, erst die fünfte Stelle ein. Bei Berücksichtigung auch der Combinationsalgorithmen würde er noch viel später rangiren. Eine nach gewissen Vorarbeiten sehr leicht zu bewerkstelligende Auszählung würde dartun, dass in ihm 494 von den 3064 Formeln ausschliesslich Geltung haben. 80 von jenen Formeln bilden das Prämissensystem von O_1,

und sei als Beispiel einer solchen sowol Commutativität (C_1), als Associativität (A_1) in sich schliessenden Prämisse angeführt die Gleichung:

$$O_1^{p)} \qquad (ab)c = b(ca).$$

Zweckmässiger aber, als die Berufung auf eine solche einzige Prämisse, ist meistens der Hinweis darauf, dass O_1 durch die Combination jener beiden Eigenschaften C_1 und A_1 gegeben ist, wie dies aus den Elementen der Arithmetik bekannt.

Besagter Algorithmus ist besonders leicht zu begrenzen, indem der in Arithmetik Orientirte augenblicklich einer jeden Formel ansieht, ob sie zu jenem gehört, nämlich ob sie in dem gewöhnlichen Sinne des Wortes „richtig" ist, oder nicht. Beschränkt man sich, behufs Ausschlusses der Division durch Null, etwa auf das Gebiet der positiven Rationalzahlen (ohne die 0), so führen die Operationen der (zweiten) Stufe niemals aus diesem Zahlenkreise heraus und sind in ihm vollkommen eindeutig. Dann ist es leicht, die Falschheit einer jeden nicht zu O_1 gehörigen Formel an beliebigen Beispielen darzutun — „Falschheit" selbstverständlich nur für die als „eigentliche" aufgefassten Operationen.

Eine Function, welche im Formelgebiete ausschliesslich die Functionalgleichungen des Algorithmus O_1 erfüllt, ist die durch die Tafel $9_{1,1})^4$ meines vorigen Aufsatzes definirte. Erniedrigen wir sämtliche Elemente um eine Einheit und ersetzen das Mal- durch ein Plus-Zeichen, so lautet die Tafel:

$$9_{1,1})^4 \begin{cases} 0 = 0+0 = 2+2 = 1+3 = 3+1 \\ 1 = 1+0 = 0+1 = 2+3 = 3+2 \\ 2 = 2+0 = 0+2 = 1+1 = 3+3 \\ 3 = 3+0 = 0+3 = 1+2 = 2+1. \end{cases}$$

Aehnlich umgeformt, wird die Tafel $3_{1,1})^3$ lauten:

$$3_{1,1})^3 \begin{cases} 0 = 0+0 = 1+2 = 2+1 \\ 1 = 2+2 = 0+1 = 1+0 \\ 2 = 1+1 = 2+0 = 0+2. \end{cases}$$

Hier ebenfalls gelten die Formeln O_1, daneben jedoch auch einige (in der Arithmetik ungültige) Gleichungen der Classe (3, 2), im ganzen nämlich ein O_1 unter sich begreifender Combinationsalgorithmus O_{01} von 508 Gleichungen des Gebietes.

Wir haben durch die ausgeführte Umformung der Tafeln augenscheinlich den Vorteil erreicht, dass jetzt auch die Formel

$$a+0=0+a=a$$

in Uebereinstimmung mit der gewöhnlichen Arithmetik gilt (auf beiden Zahlengebieten 0, 1, 2 und 0, 1, 2, 3).

Für jedes endliche Zahlengebiet von discreten Elementen lässt sich auf mindestens eine Weise eine Function so definiren, dass sie den Functionalgleichungen des Algorithmus O_1 genügt. Es gibt m. a. W. hier jeweils eine „Lösung" von O_1.

Um diese Lösung für ein Zahlengebiet von n Elementen zu finden, nenne man 0, 1, 2, ... $(n-1)$ die Elemente des Gebietes. Man definire als symbolische Summe $a(+)b$ den Rest, welchen die eigentliche Summe $a+b$ bei der (eigentlichen) Division durch n lässt, also einfach die mit $a+b$ bezüglich des Moduls n congruente Zahl des Gebietes.

Die beiden angeführten Tafeln sind augenscheinlich nach diesem Princip gebildet.

Um aber allgemein einzusehen, dass man so eine Lösung von O_1 erhalten muss, braucht man blos — da die Operation offenbar commutativ ist — die Associativität derselben zu beweisen. Nun ist laut Definition:

$$a(+)b=\begin{cases} a+b \text{ falls } a+b<n, \\ a+b-n \text{ falls } a+b\overset{=}{>}n. \end{cases}$$

Und demnach ist auch:

$$\{a(+)b\}(+)c=\begin{cases} a+b+c \text{ falls dies } <n, \\ a+b+c-n \text{ falls } a+b+c\overset{=}{>}n \text{ aber } <2n \\ a+b+c-2n \text{ falls } a+b+c\overset{=}{>}2n \end{cases}$$

und genau dasselbe ist auch $a(+)\{b(+)c\}$, somit Associativität in der Tat vorhanden.

Wie laut Definition die directe, so ist nun auch die inverse Operation (symbolische Subtraction) vollkommen eindeutig, m. a. W. ist $\alpha(+)\beta=\alpha(+)\gamma$, so folgt $\beta=\gamma$. Denn sind $\alpha+\beta$ und $\alpha+\gamma$ gleichrestig in Bezug auf den Modul n, so müssen nach bekanntem

Satze auch β und γ es sein, woraus — da sie, als dem obigen Zahlengebiet angehörig, ihre eigenen Reste vorstellen — deren Gleichheit folgt.

Es ist hier ferner stets:

$$\underset{\widehat{1}}{a}(+)\underset{\widehat{2}}{a}(+)\ldots(+)\underset{\widehat{n}}{a}=0, \quad \text{oder} \quad a_n=0,$$

wenn allgemein zur Abkürzung die Bezeichnung eingeführt wird:

$$\underset{\widehat{1}}{a}(+)\underset{\widehat{2}}{a}(+)\ldots(+)\underset{\widehat{m}}{a}=a_m,$$

kraft welcher auch:

$$a(+)a_{m-1}=a_{m-1}(+)a=a_m$$

sein wird.

Hiernach lässt sich zu jedem a des Zahlengebietes der Wert a_{n-1} leicht unmittelbar angeben. Für $a=0$ ist nämlich $a_{n-1}=0$; dagegen für a nicht $=0$ ist a_{n-1} diejenige Zahl, welche a zur (eigentlichen) Summe n ergänzt, d. h. $n-a$. Dies folgt wegen der Eindeutigkeit der inversen Operation mit Leichtigkeit daraus, dass für den angegebenen Wert von a_{n-1} die Probe $a(+)a_{n-1}=0$ jeweils stimmt.

§ 6. Der Algorithmus Q_0.

Dieser (in Math. Annalen Bd. 10 noch C_{0123} von mir genannte) Algorithmus umfasst 978 Formeln unsres Gebietes und nimmt mit dieser Zahl unter den primitiven Algorithmen desselben die zweite Stelle ein. Nicht weniger als 396 von den genannten Gleichungen sind für sich allein ausreichende Prämissen desselben. Als Beispiel einer solchen Prämisse sei hier nur angeführt die Gleichung:

$Q_0^{\,p})$ $$a(ab)=(bc)c,$$

welche (neben noch andern) sich als ein reines Multiplicationsgesetz darstellt.

Auch hier jedoch dringt man schneller in das Wesen des Algorithmus ein, wenn man denselben aus einer Combination einfacher algorithmischer Eigenschaften hervorgehen lässt. Dazu empfehlen sich vor allem zwei, nämlich einerseits das Commutationsgesetz:

$C_1)$ $$ab=ba, \quad a:b=\frac{a}{b},$$

andrerseits der schon l. c. von mir eingeführte Algorithmus C_0, dessen Prämisse eine beliebige der fünf Formeln

$$ab=a:b=\frac{b}{a}=ab, \quad a(ba)=b=(ab)a$$

bildet, und dessen Wesen auch ebensogut die Regel ausdrückt, dass so oft etwa $\beta\gamma = \alpha$ ist, dann auch immer $\gamma\alpha = \beta$ und $\alpha\beta = \gamma$ sein muss.

Für Q_0 ist also charakteristisch, dass

$$ab = ba = a:b = b:a = \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$$

ist, d. h. die drei zu einander inversen Grund-Operationen sind hier, vor- und rückwärts ausgeführt, miteinander identisch. Jeder Factor der einen Seite einer Gleichung kann deshalb wiederum als solcher, nämlich als erster oder nach Belieben auch zweiter Factor auf die andre Seite gebracht werden.

Auf jedem Zahlengebiet von n Elementen gibt es mindestens eine Lösung des Algorithmus Q_0, und zwar eine solche, die der in § 5 beschriebenen Lösung von O_1 in gewissem Sinne zugeordnet ist. Definirt man nämlich das symbolische Product

$$a.b = a_{n-1}(+)b_{n-1},$$

so ist diese Operation notwendig den Gesetzen Q_0 unterworfen.

Beweis. Erstens gilt offenbar das Commutationsgesetz. Zweitens, wenn $\alpha.\beta = \gamma$, so muss auch $\beta.\gamma = \alpha$ sein, mithin C_0 gelten. Denn ist $\alpha.\beta = \gamma$, so ist $\gamma = \alpha_{n-1}(+)\beta_{n-1}$. Wegen $0 = \gamma(+)\gamma_{n-1}$ folgt hieraus:

$$0 = \alpha_{n-1}(+)\beta_{n-1}(+)\gamma_{n-1}.$$

Mit Rücksicht auf $0 = \alpha(+)\alpha_{n-1}$ und die schon erwähnte Eindeutigkeit der symbolischen Subtraction gibt dies wieder:

$$\alpha = \beta_{n-1}(+)\gamma_{n-1} \quad \text{oder} \quad \alpha = \beta.\gamma,$$

q. e. d.

In diesem Sinne erweisen sich nun die Tafeln, welche durch Erniedrigung sämtlicher Indices um 1 aus den gleichchiffrirten der vorigen Abhandlung hervorgehen:

$$2_{0,0})^4 \begin{cases} 0 = 0.0 = 2.2 = 1.3 = 3.1 \\ 1 = 1.2 = 2.1 = 0.3 = 3.0 \\ 2 = 2.0 = 0.2 = 1.1 = 3.3 \\ 3 = 3.2 = 2.3 = 0.1 = 1.0 \end{cases}$$

und

$$1_{0,0})^3 \begin{cases} 0 = 0.0 = 1.2 = 2.1 \\ 1 = 1.1 = 2.0 = 0.2 \\ 2 = 2.2 = 0.1 = 1.0 \end{cases}$$

als denen 9)[4] und 3)[3] des vorigen Paragraphen bezüglich zugeordnet.

Lässt man in den Betrachtungen dieses und des vorigen Paragraphen die natürliche Zahl n beständig grösser werden, so sieht man leicht, dass die symbolische Addition $a(+)b$ des § 5 übergeht in die eigentliche $a+b$. Der Ausdruck a_{n-1}, wenn a von 0 verschieden, geht über in die Ergänzung des Wertes a zu ∞, oder, wenn man will, auch zu 10^∞, d. h. in das „arithmetische Complement" von a, und kann, als diesem eindeutig entsprechend, ersetzt werden durch dessen entgegengesetzten Betrag $-a$; das dem Gesetze Q_0 genügende symbolische Product $a.b$ wird dadurch zu $-a-b$, was in der Tat auch leicht direct als eine Particularlösung der Functionalgleichungen Q_0 in dem ganzen (auch dem complexen) Zahlengebiete zu erkennen ist.

Dem Algorithmus Q_0 genügen indes auch noch andere von den durch unsre Tafeln dargestellten Functionen, so namentlich die $2_{0\vee 0})^3$, und zwar gilt für diese, sowie für $2_{0\vee 0})^4$, ausschliesslich Q_0, wogegen für die oben angeführte Tafel $1_{0\vee 0})^3$ neben Q_0 noch andre Formeln unsres Gebietes — im Ganzen 1087 — erfüllt sind, die einen zusammengesetzten Algorithmus $\lambda_0 + Q_0$ ausmachen.

Hier gilt nämlich auch noch der (Bd. 90, Borchardt's Journal schon von mir in Betracht gezogene) Algorithmus λ_0, welcher die einfachste aller denkbaren Formeln zur Prämisse hat, nämlich die Gleichung $a.a = a$, die das specifische Gesetz der Operationen des Logikcalculs ausdrückt. [Für sich umfasst λ_0 doch 19 Gleichungen des Gebietes].

Und weiter steht die durch die Tafel $1)^3$ definirte symbolische Multiplication zu sich selbst noch in distributiver Beziehung, d. h. es ist stets:

$$(b.c).a = (b.a).(c.a)$$

— desgl. mit irgend wie umgestellten Factoren. Dies hat noch eine Menge formaler Eigenschaften im Gefolge, die aber sämtlich nicht mehr dem Formelgebiete angehören, auf welches wir uns beschränken wollten.

Dass die gleiche Eigenschaft (Distributivität in Bezug auf sich selbst) den beiden directen Operationen in der Algebra der Logik ebenfalls zukommt, ist eine naheliegende Bemerkung, welche zuerst von Herrn Ch. S Peirce ausgesprochen wurde.[1])

Ich habe schon l. c. (Math. Annalen Bd. 10) ein geometrisches und im bilinearen Functionsgebiet auch ein analytisches Substrat für, den Gesetzen O_1 resp. Q_0 genügende operative Verknüpfungen nachgewiesen.

---

1) American Journal of Math. Vol. III, pag. 33.

§ 7. Der umfassendste Algorithmus: U_0.

Die Tafeln $1_{0\cdot 0})^2$ und $1_{0\cdot 0})^4$ stellen Lösungen vor für einen noch viel umfassenderen Algorithmus — wie meine Untersuchungen dartun werden, den umfangreichsten (in formaler Hinsicht) den es giht. In ihm sind die vorerwähnten Algorithmen O_1 und Q_0 als gleichzeitig geltende vereinigt. Ich nenne denselben U_0. Er umfasst 2874 Formeln unsres Gebietes — über welche wir sogleich einen Ueberblick gewinnen werden — und von diesen bilden 208 das Prämissensystem des Algorithmus. Ich will die Gleichung:

$U_0{}^p)$ $$(ba)(ac) = bc$$

als Beispiel einer solchen Prämisse von U_0 hier anführen. [Es versteht sich, dass schon die geringste Abänderung hiebei von Einfluss ist; so hat z. B. die Gleichung $(ba)(ac) = cb$ nur 342 Gleichungen unsres Gebietes zur Folge].

Es sei mir hier verstattet, beispielsweise einmal aus obiger Prämisse die drei Grundeigenschaften A_1, C_1 und C_0 wirklich abzuleiten[1]), was immerhin nicht ganz naheliegend erscheint. Um dabei noch möglichst Klammern zu sparen, verwenden wir gelegentlich ausdrückliche Malzeichen, schreiben z. B. die Gleichung $U_0{}^p)$ noch übersichtlicher:

$$ba \,.\, ac = bc.$$

Dann ist:

$$(ab \,.\, bc) \,.\, cd = ab \,.\, (bc \,.\, cd)$$

da diese Gleichung durch beiderseitige Anwendung von $U_0{}^p)$ sich in

$$ac \,.\, cd = ab \,.\, bd$$

und ebenso weiter in die Identität $ad = ad$ zusammenzieht. Wenn nun α, β, γ ganz beliebig gegebene Werte haben, so kann man hinbringen, dass

$$ab = \alpha, \quad bc = \beta \quad \text{und} \quad cd = \gamma$$

wird. Zu dem Ende braucht man z. B. nur, a beliebig lassend:

$$b = \alpha : a, \quad c = \beta : b = \beta : (\alpha : a) \quad \text{und} \quad d = \gamma : c = \gamma : \{\beta : (\alpha : a)\}$$

anzunehmen, was wegen der unbedingten Ausführbarkeit der Divisionen angeht. Darnach ist dann die Formel $\alpha\beta \,.\, \gamma = \alpha \,.\, \beta\gamma$ oder A_1 allgemein bewiesen.

Durch dreimalige Anwendung von $U_0{}^p)$ ergiht sich:

---

1) Ich habe dies mitgeteilt in der mathematischen Section der Naturforscherversammlung zu Berlin, 1886.

$$ab \,.\, cd = (ab \,.\, bc)(bc \,.\, cd) = ac \,.\, bd$$

und dieses Resultat $abcd = acbd$, worin wegen A_1 nun Klammern nach Belieben gesetzt oder weggelassen werden dürfen, lässt sich auch ansehen als:

$$(a \,.\, bc)\, d = (a \,.\, cb)\, d;$$

es darf deshalb wegen vorausgesetzter Eindeutigkeit der Divisionen erst d, hernach a beiderseits gestrichen werden und bleibt: $bc = cb$, d. h. es ist C_1 bewiesen, und damit gilt auch $A_1 + C_1 = O_1$.

Nunmehr können wir $U_0{}^p$) schreiben: $(ab \,.\, a)c = bc$, woraus nach Kürzung durch c folgt: $ab \,.\, a = b$. Hiermit ist eine Prämisse von C_0 gewonnen, und muss nun auch der Algorithmus $C_1 + C_0 = Q_0$ gelten. q. e. d.

Die Gesamtheit der unter U_0 geltenden Formeln lässt sich leicht wie folgt charakterisiren. Von all' den Gleichungen, in welchen (specielle oder allgemeine) Zahlen beiderseits irgendwie durch die drei Grundoperationen „mal", „zu" und „durch" verknüpft erscheinen wird eine beliebige immer dann bei U_0 richtig sein, wenn jedes in ihr vorkommende Zahlzeichen eine gerade Anzahl mal in der ganzen Gleichung auftritt.

Man beweist dies leicht mit Rücksicht darauf, dass in jedem Ausdruck laut Q_0 alle Operationsglieder ohne Unterschied als Factoren angesetzt werden dürfen, und zwar wegen der Associativität A_1 ohne Klammern, und wegen der Commutativität C_1 in beliebiger Reihenfolge. Uebereinstimmende Factoren zu beiden Seiten der Gleichung dürfen (nachdem sie etwa beiderseits in Gedanken vorangestellt worden) wegen der Eindeutigkeit der Division — zunächst nur hüben und drüben gleich oft — gestrichen werden. Hiernach lässt sich hinbringen, dass ein jedes Operationsglied nur mehr auf einer Seite der Gleichung vorkommt, ausgenommen den Fall, wo ein Operationsglied auf der einen Seite allein noch übrig bleiben sollte, und deshalb nicht vollends gestrichen werden könnte.

Schliesslich kommt aber noch (eventuell wiederholt) in Betracht, dass, gleichwie unter O_1 bekanntlich $a(b:b) = a$ nebst $b:b = c:c$ gilt, so hier auch $a \,.\, bb = a$ nebst $bb = cc$ allgemein gelten muss. Jedes Paar von übereinstimmenden Factoren, mit welchem eine Zahl verknüpft erscheint, kann daher ohne weiteres unterdrückt werden, und muss deshalb die betrachtete Gleichung entweder in eine Identität, wie $a = a$, oder in eine solche von der Form $bb = cc$ endlich übergehn. —

Käme aber eine allgemeine Zahl a eine ungerade Anzahl mal in einer Gleichung als Operationsglied vor, so würde sie durch den

ohigen Reductionsprocess entweder nur ein mal in derselben übrig bleiben, oder aber die Formel würde sich in die Gleichung $a = aa$ [1]) zusammenziehen, welche λ_0 hedingt. Offenbar ist aber der Algoritbmus λ_0 unverträglich mit U_0, denn nach diesem ist $aa = bb$, nach jenem aber $aa = a$ und $bb = b$, woraus $a = b$ als allgemeine Formel folgen würde.

Weitere formale Eigenschaften, als die in U_0 bereits zusammengefassten, können daher einer U_0 genügenden Function nicht mehr zugemutet werden; dieser Algoritbmus ist mit keinem andern mehr combinirbar oder verträglich; er ist ein „in formaler Hinsicht gesättigter".

Da ich mich in einer späteren Abhandlung darauf zu berufen habe, muss ich insbesondere hervorheben, dass bei U_0 die 990 Gleichungen der Ordnung $a, b, c = a, b, c$ sämtlich durchaus erfüllt werden, von denen bei O_1 nur 150 gelten. Es darf wol als überraschend bezeichnet werden, dass soviele Eigenschaften mit einander verträglich sind. In dem weiteren Gehiete der 7342 Formeln des § 4 gelten bei U_0 volle 5799, also beinahe 79 Procent aller denkbaren (zulässigen) Formeln.

§ 8. Lösung von U_0 in discreten Zahlengebieten.

Wir reproduciren jetzt die Tafeln $1)^3$ und $1)^4$, indem wir sämtliche Indices wieder um 1 vermindern. Dabei ist zu bemerken, dass die erstere selbst nur einen Teil der letztern (das erste Viertel derselben) vorstellt, und dass die letztere ebenso angesehen werden kann als Teil einer Functionstafel, welche für ein Zahlengebiet von acht Elementen 0,1, ... 7 eine Lösung des Algorithmus U_0 definirt. Diese wollen wir zunächst hinsetzen:

$1_{0>0})^8$ $1_{0>0})^4$ $1_{0>0})^2$

$0 = 00 = 11$	$= 22 = 33$	$= 44 = 55 = 66 = 77$	
$1 = 01 = 10$	$= 23 = 32$	$= 45 = 54 = 67 = 76$	
$2 = 02 = 20$	$= 13 = 31$	$= 46 = 64 = 57 = 75$	
$3 = 03 = 30$	$= 12 = 21$	$= 47 = 74 = 56 = 65$	
$4 = 04 = 40$	$= 15 = 51$	$= 26 = 62 = 37 = 73$	
$5 = 05 = 50$	$= 14 = 41$	$= 27 = 72 = 36 = 63$	
$6 = 06 = 60$	$= 17 = 71$	$= 24 = 42 = 35 = 53$	
$7 = 07 = 70$	$= 16 = 61$	$= 25 = 52 = 34 = 43$	

1) Wenn hier rechts oder links noch weitere Factoren stünden, würde der vorige Fall eintreten.

wobei zwischen je zwei Ziffern ein Verknüpfungszeichen $\circ$ gesetzt zu denken ist.

Im Anschluss hieran lässt sich zeigen, dass auf jedem Zahlengebiet von 2^n Elementen eine Lösung des Algorithmus U_0 existirt, und zwar kann man jeweils aus der für 2^n Elemente bereits bekannten die Functionstafel für 2^{n+1} Elemente recurrirend ableiten, indem man jene Tafel mit 2^n Elementen zunächst hinsetzt, darauf alle Factoren der in jeder Zeile vorhandenen symbolischen Producte durchweg um 2^n vermehrt und zu neuen „Producten" vereinigt dahinter schreibt, endlich aus der so gewonnenen ersten (oberen) Hälfte der Tafel die untere nach dem Princip ableitet, dass jeder „Factor" auch vor oder hinter die linke Seite geworfen werden könne, nämlich dass aus $\alpha = \beta \circ \gamma$ auch $\beta = \alpha \circ \gamma = \gamma \circ \alpha$ und $\gamma = \alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$ folge.

Um zu beweisen, dass für die so erhaltene Tafel mit 2^{n+1} Elementen der Algorithmus U_0 gelten muss, wenn dies für die zum Ausgangspunkt genommene Tafel mit 2^n Elementen der Fall war, bemerke man, dass C_1 augenscheinlich und C_0 nach der Erzeugungsweise der Tafel durchweg erfüllt ist. Es kommt also nur noch darauf an, zu zeigen, dass auch das Associationsgesetz A_1, nämlich

$$b \circ (a \circ c) = (b \circ a) \circ c$$

erfüllt sein muss.

Zu dem Ende bezeichne man die Elemente $0, 1, \ldots 2^n - 1$ der ersten Hälfte $\mathfrak{H}_1$ aus unserm Zahlengebiete von 2^{n+1} Elementen consequent mit griechischen, die $2^n, 2^n + 1, \ldots 2^{n+1} - 1$ der zweiten Hälfte $\mathfrak{H}_2$ durchweg mit lateinischen Buchstaben, und zwar entsprechend so, dass a aus α, a' aus α', b aus β, etc. durch die Erhöhung um 2^n hervorgegangen. Dann ist nach der Entstehung der Tafel ein „Product" zweier lateinischen stets gleich dem der gleichnamigen griechischen Buchstaben, also

$$a \circ b = \alpha \circ \beta, \quad b' \circ c = \beta' \circ \gamma,$$

etc. Desgleichen, wenn $\alpha = \beta$, so ist auch $a = b$, und umgekehrt Und ferner bildet es einen Teil unsrer Voraussetzung, dass für die griechischen Buchstaben das Associationsgesetz schon erfüllt sein wird.

Dann ist zu zeigen, dass diese Formel auch richtig bleibt, wenn man einen, zwei oder alle drei griechischen Buchstaben durch lateinische ersetzt, und dies kommt, in Anbetracht, dass in ihr der mittlere Buchstabe bevorzugt erscheint, die beiden andern aber nach der Commutativität ihre Rollen austauschen können, hinaus auf den Nachweis der fünf Gleichungen:

$\beta\circ(\alpha\circ\gamma) = (\beta\circ\alpha)\circ\gamma$, $b\circ(\alpha\circ c) = (b\circ\alpha)\circ c$, $b\circ(\alpha\circ c) = (b\circ\alpha)\circ c$.

$b\circ(\alpha\circ\gamma) = (b\circ\alpha)\circ\gamma$, $\beta\circ(\alpha\circ c) = (\beta\circ\alpha)\circ c$,

Die letzte von diesen Gleichungen ist wegen $\alpha\circ c = \alpha\circ\gamma$ und $b\circ\alpha = \beta\circ\alpha$ bewiesen, wenn gezeigt ist, dass $b\circ(\alpha\circ\gamma) = (\beta\circ\alpha)\circ c$ sein muss. Nun muss $\alpha\circ\gamma = \gamma'$ und $\beta\circ\alpha = \beta'$ wieder eine Zahl der Gruppe $\mathfrak{H}_1$, dagegen $b\circ\gamma' = \alpha'$ und $\beta'\circ c = \alpha''$ eine Zahl der Gruppe $\mathfrak{H}_2$ sein. [Ganz ebenso wird auch bei den folgenden Beweisen, sobald wir einen Namen für ein specielles „Product" einführen, willkürlich nur der Buchstabe und Accent rechterhand sein, das Alphabet aber, dem er angehören muss, sich durch die Data bestimmt erweisen.] Zu zeigen ist nun, dass $\alpha' = \alpha''$. Da C_0 gilt, haben wir aber

$$\gamma' = \alpha'\circ b, \quad \beta' = \alpha''\circ c,$$

also auch

$$\gamma' = \alpha'\circ\beta, \quad \beta' = \alpha''\circ\gamma,$$

und hieraus

$$\alpha' = \beta\circ\gamma', \quad \alpha'' = \beta'\circ\gamma.$$

Da nun

$$\beta\circ(\alpha\circ\gamma) = (\beta\circ\alpha)\circ\gamma \quad \text{oder} \quad \beta\circ\gamma' = \beta'\circ\gamma,$$

so folgt $\alpha' = \alpha''$, somit auch $\alpha' = \alpha''$, q. e. d.

Hienach wird man auch die noch ausstehenden vier Beweise, die wir in abgekürzter Darstellung geben, leicht verstehen:

Beweis, dass

$$\beta(\alpha\gamma) = (\beta\alpha)\gamma.$$

Sei

$\alpha\gamma = c'$, $\beta\alpha = b'$, $\beta c' = \alpha'$, $b'\gamma = \alpha''$,

so ist:

$\gamma = \alpha c' = \alpha\gamma'$, $\beta = ab' = \alpha\beta'$,

$\gamma' = \alpha\gamma$, $\beta' = \alpha\beta$, $\beta(\alpha\gamma) = (\beta\alpha)\gamma$,

$\beta\gamma' = \beta'\gamma$; $\beta = \alpha' c' = \alpha'\gamma'$,

$\gamma = \alpha'' b' = \alpha''\beta'$, $\alpha' = \beta\gamma'$, $\alpha'' = \beta'\gamma$,

also $\alpha' = \alpha''$ und $\alpha' = \alpha''$, q. e. d.

Beweis, dass

$$b(\alpha c) = (b\alpha)c.$$

Sei

$$\alpha c = c', \quad b\alpha = b',$$

so ist:

$$bc' = \beta\gamma', \quad b'c = \beta'\gamma,$$

aber:

$$\alpha = cc' = \gamma\gamma', \quad \alpha = bb' = \beta\beta',$$

also $\gamma' = \alpha\gamma$, $\beta' = \beta\alpha$, und da $\beta(\alpha\gamma) = (\beta\alpha)\gamma$, so folgt $\beta\gamma' = \beta'\gamma$ und $bc' = b'c$, q. e. d.

Beweis, dass $b(\alpha\gamma) = (b\alpha)\gamma$.

Sei

$\alpha\gamma = \gamma'$, $b\alpha = b'$, $b\gamma' = \alpha'$, $b'\gamma = \alpha''$,

so ist

$\gamma' = \alpha' b = \alpha'\beta$, $\gamma = \alpha'' b' = \alpha''\beta'$,

also $\alpha' = \beta\gamma'$, $\alpha'' = \beta'\gamma$, dazu

$$\alpha = bb' = \beta\beta', \quad \beta' = \beta\alpha;$$

aber $\beta(\alpha\gamma) = (\beta\alpha)\gamma$, oder $\beta\gamma' = \beta'\gamma$,

$\alpha' = \alpha''$, $\alpha' = \alpha''$ q. e. d.

Beweis, dass

$\beta(\alpha c) = (\beta\alpha)c$ oder $\beta(\alpha\gamma) = (\beta\alpha)c$.

Sei $\beta\alpha = b'$, so ist $(\beta\alpha)c = b'c = \beta'\gamma$;

aber $\beta = ab' = \alpha\beta'$, woraus

$$\beta' = \beta\alpha, \quad \beta'\gamma = (\beta\alpha)\gamma,$$

welches $= \beta(\alpha\gamma)$ laut Voraussetzung ist, q. e. d.

Da nun für $n = 0$ die „Tafel" $0 = 0 \circ 0$ eine Function definirt, welche jeden Algorithmus [1]) somit auch den U_0 erfüllt, so muss auch die aus ihr auf die geschilderte Art abgeleitete Tafel $1_{0\circ 0})^2$, desgl. dann die aus dieser abgeleitete $1_{0\circ 0})^4$, hernach die $1)^8$, u. s. w. ein Lösungsgebiet ebendieses Algorithmus sein. —

Nun frägt sich aber, ob man nicht, wenn n unendlich gross genommen wird, das symbolische Product zweier ganzen Zahlen auch independent herstellen kann, ohne die ganze Tafel bis über dessen Factoren hinaus recurrirend fortgesetzt zu haben. In Beantwortung ergibt sich die folgende höchst einfache Regel.

Um für irgend zwei natürliche Zahlen a, b den Wert der Function $a \circ b$ zu finden, welche den Functionalgleichungen des Algorithmus U_0 genügt, stelle man jene beiden als dyadische Systemzahlen dar, wobei bekanntlich nur die Ziffern 0 und 1 auftreten, und schreibe sie mit den gleichstelligen Ziffern untereinander. Man bilde hierauf die „Producte" der gleichstelligen Ziffern nach der Vorschrift des symbolischen Einmaleinses $1_{0\circ 0})^2$, indem man also eine 0 ansetzt so oft zwei gleiche, und eine 1 so oft zwei ungleiche Ziffern zusammentreffen. Die so erhaltene dyadische Systemzahl, gewünschtenfalles in's dekadische System zurückverwandelt, ist das gesuchte „Product" $a \circ b$.

Exempel. Sei $a = 36 = \overline{100100}$, $b = 23 = \overline{(0)10111}$, wobei der Strich über einer Zahl andeuten soll, dass sie als dyadische Systemzahl aufzufassen, so ist $a \circ b = \overline{110011} = 41$.

Um die behauptete Regel zu beweisen, kann man $a > b > 0$ annehmen; denn für $a = b$ ist nach der Regel sowol, wie direct ersichtlich, dass $a \circ b = a \circ a = 0$ sein muss; und ist einer der „Factoren" gleich 0, so ist (hienach kraft C_0) auch $a.0 = 0.a = a$, das „Product" also gleich dem andern „Factor", und das nämliche ergibt dann augenscheinlich auch die Regel.

Wir denken uns a und b dyadisch dargestellt.

Erster Fall. Beide haben in dieser Darstellung gleich viel — sagen wir $n+1$ — Ziffern. Dann beginnt also a sowol als b in der $n+1$ ten Stelle (von rechts) mit einer 1 und ist:

$$2^{n+1} > a > 2^n, \qquad 2^{n+1} > b \geq 2^n.$$

---

1) Auf einem Zahlengebiet, bestehend aus nur einem Elemente, sind alle Algorithmen miteinander verträglich und auch die bislang als „unzulässig" charakterisirten Formeln erfüllt.

Nach der Entstehung der Tafel muss dann das symholische Product $a \circ b = \alpha \circ \beta$ sein, wo sowol $\alpha = a - 2^n$ als $\beta = b - 2^n$ dyadisch mindestens eine Ziffer weniger hat. Dieses $\alpha \circ \beta$ findet sich demnach in der oberen Hälfte der auf 2^{n+1} Elemente hezüglicheu Tafel, und mnss selhst $< 2^n$ sein, d. h. dyadisch in der $n+1$ ten Stelle von rechts eine 0 haben (desgl. in jeder noch weiter links hefindlichen Stelle) in Bestätigung dessen, was die Regel hiefür ergiht.

Hahen nnn α nnd β abermals gleichviel Ziffern, so lässt sich dasselbe Verfahren der Reduction noch weiter anwenden, und ergehen sich Nullen auch in den folgenden Stellen des dyadisch dargestellten „Productes“ in fortgesetzter Bestätignng der Regel his zu derjenigen Stelle hin, wo gleichstellige Ziffern von α und β also anch von a nnd b nicht übereinstimmten. Eine solche Stelle muss sich dem von links nach rechts Fortschreitenden einmal darhieten, da nach der Annahme a nnd b nicht durchaus übereinstimmen konnten. Für diese Stelle tritt dann die Ueherlegung des folgenden Falles ein.

Zweiter Fall. a hat $n+1$, b aber weniger dyadische Ziffern. So heginnt a wieder an dor $n+1$ ten Stelle von rechts mit 1, b aber hat an dieser Stelle noch eine 0, welche allerdings als eine den werthahenden Ziffern seiner dyadischen Darstellnng vorangehende nicht geschrieben zu werden pflegt. Dann gehört das „Product“ $x = a \circ b$ der zweiten Hälfte der auf 2^{n+1} Elemente hezüglichen Tafel an, d. h. es ist selher $> 2^n$ nnd heginnt soine dyadische Darstellnng an der $n+1$ ten Stelle von rechts mit einer 1, in Bestätlgnng dessen, was für diese Stelle die Regel llefert. Nach C_0 folgt aber, dass dann $b = x \circ a$ lst, wo nun x nnd a (wie im vorigen Falle a nnd b) zwischen 2^n und 2^{n+1} liegen, weshalb denn dieses „Prodnct“ sich redneiren lässt zu $b = (x - 2^n) \circ (a - 2^n)$. Daraus aher folgt wiederum nach C_0:

$$x - 2^n = (a - 2^n) \,.\, b$$

und dies lässt erkennen, dass nunmehr die folgenden Ziffern der dyadischen Systemzahl $a \circ b$ aus den folgenden Ziffern von a nnd b sich in derselben Weise weiter ergeben werden, entweder nach dem Verfahren des ersten, oder nach dem des zweiten Falles, immer aber in Bestätignng der angegebenen Regel.

Um die Definition der Fnnction über alle ganzen Zahlen anszndehnen, könnte man so verfahren: man schreihe, m positiv ganz gedacht, α_m statt m, führe den Bezeichnungswechsel ein:

$$\alpha_{2n} = \beta_{+n}\,, \qquad \alpha_{2n+1} = \beta_{-n}\,,$$

wo n desgl. eine natürliche Zahl ist. Endlich für β_m, wo jetzt m beliebig (positiv oder negativ) ganz ist, schreibe man wieder m; so ist die Function (wenn dies sowol bei den Argument- wie bei den Functionswerten durchweg ausgeführt ist) auch für negative ganze Argumente explicirt.

Doch werden sich nachher bessere Methoden für eine derartige Ausdehnung darbieten.

§ 9. Lösung von U_0 für das (continuirliche) Gebiet der complexen Zahlen.

Wir haben im Vorigen eine Lösung des Algorithmus U_0 gefunden innerhalb des Gebietes der natürlichen Zahlen, welches — im Sinne Georg Cantor's — eine Mannigfaltigkeit erster Classe bildet. Es ist jedoch leicht, die Lösung auch für eine Mannigfaltigkeit zweiter Classe, ein continuirliches Zahlengebiet herzustellen.

Um dies zunächst für das Gebiet der reellen positiven Zahlen zu tun, denken wir uns diese sämtlich in Form von dyadischen Systembrüchen dargestellt. Für die Zahlen der Form

$$\frac{m}{2^n}$$

brechen die Systembrüche ab, für die übrigen Rationalzahlen sind sie unendliche periodische, für die Irrationalzahlen unendliche unperiodische.

Um $a \circ b$ zu finden, schreibe man die Systembrüche für a und b mit dem Komma untereinander und ziehe die gleichstelligen Ziffern nach der Vorschrift des Einmaleinses:

$$0 = 0 \circ 0 = 1 \circ 1$$

1)[2]

$$1 = 0 \circ 1 = 1 \circ 0$$

(sie symbolisch multiplicirend) zusammen, d. h. man wende die Regel des vorigen Paragraphen auch auf die Stellen hinter dem Komma an. Auf diese Weise wird die Function $a \circ b$, wenn für sie auch kein analytischer Ausdruck vorliegt doch für das positive Zahlengebiet wol definirt sein.

Dass sie die Gesetze U_0 erfüllt, ist am schnellsten so zu sehen.

Wegen $0 \circ 1 = 1 \circ 0$ gilt Commutativität C_1; Gleichheit oder Ungleichheit zweier Ziffern ist in der Tat unabhängig von deren Reihenfolge.

Dass $a \circ b$ dem Algoritbmus C_0 genügt, folgt aus dieser Ueberlegung. In dem Scbema:

a)	0	0	1	1
b)	0	1	0	1
c)	0	1	1	0

gibt das „Product" irgend zweier von den in einer Colonne stehenden Ziffern immer die dritte. Das Scbema zeigt aber die verscbiedenen Möglicbkeiten, wie eine bestimmte Stelle der dyadiscben Systemzabl bei den „Factoren" a, b und dem Product" $a \circ b = c$ mit Ziffern überbaupt besetzt sein kann. Befindet sicb an dieser gedacbten Stelle bei a die Ziffer α, bei b die β, sonach bei $c = a \circ b$ die Ziffer $\gamma = \alpha \circ \beta$, so steht an ebendieser Stelle bei $b \circ c$ die Ziffer $\beta \circ \gamma = \alpha$ und bei $c \circ a$ die $\gamma \circ \alpha = \beta$. Und da das Gesagte nun für jede Stelle zutrifft, so wird an allen Stellen, d. i. durchaus mit $a \circ b = c$ auch $b \circ c = a$ und $c \circ a = b$ gleichzeitig sein.

Endlicb die Associativität A_1 oder die Geltung des Satzes

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$$

ekrennt man zunächst für jede Stelle der drei Systemzablen einzeln daraus, dass in dem Schema:

0	0	0	1	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1

das Facit der drei untereinander stebenden „Factoren" immer das nämlicbe, und zwar bezüglicb:

0	1	1	1	0	0	0	1

ist, einerlei, ob man zuerst die beiden obersten oder zuerst die beiden untersten symbolisch multiplicirend verknüpft, d. i. ob man von oben nacb unten oder aber von unten nacb oben „multiplicirt". Von den Ziffern an jeder Stelle überträgt sicb diese Bemerkung auf die Zahlen, die aus den Ziffern besteben.

Sonacb gilt in der Tat:

$$U_0 = C_1 + C_0 + A_1.$$

Unsere Function $a \circ b$ ist jedocb überall unstetig[1]). Um dies einzusehen, betracbte man sie zunächst etwa für ein variables a bei constantem b.

---

1) Genauer: die Unstetigkeitsstellen der Function sind „überall dicht".

In jedes noch so kleine Intervall a' bis a'' des α fallen — wie sich leicht eingehender nachweisen liesse — unendlich viele Werte der Form $\frac{m}{2^n}$, wo n eine ganze und m eine natürliche Zahl bedeutet. Alle diese Stellen, und nur sie, sind Unstetigkeitsstellen unsrer Function, und zwar solche, wo sie einen angebbaren Sprung von endlicher Grösse macht, für den sich auch eine obere Grenze allgemein bestimmen lässt.

Während nämlich alle andern positiven Zahlen nur eine Darstellung als dyadische Systembrüche zulassen, sind für die unter die genannte Form $a = \frac{m}{2^n}$ fallenden Rationalzahlen zwei solche Darstellungen möglich: eine, die wir die exacte nennen können, die andere in Form eines Grenzwertes.

Es beruht dies darauf, dass wir für die Einheit neben der exacten Darstellung

$$1 = \overline{1,\ 000000\ldots}$$

im dyadischen System auch noch die folgende haben:

$$1 = \overline{0,\ 11111\ldots}$$

Und zwar gilt diese doppelte Darstellbarkeit allerdings für die Einheit irgend einer Stelle, wobei nur, wenn das Systemkomma schon anderwärts seinen Platz gefunden hat, das vorliegende Komma nicht weiter zu markiren ist. Ersetzt man aber in einem unendlichen dyadischen Systembruch, der also in eine unbegrenzte Succession von bald Nullen, bald Einern in irgendwelchem Wechsel ausläuft, die Einheit irgend einer Stelle durch die Ziffernfolge $\overline{0111\ldots}$, so ergibt sich, wie leicht zu sehen, durch deren additive Vereinigung mit den nachfolgenden Ziffern unfehlbar wieder genau die ursprüngliche Ziffernfolge.

Anders aber, wenn die dyadische Systemzahl abbricht. Wird mit $\overline{\alpha, \beta}$ die ihrer letzten 1 vorangehende Zifferngruppe bezeichnet, so haben wir für eine solche Zahl a einmal die exacte Darstellung:

A) $$a = \overline{\alpha,\ \beta 1000000\ldots}$$

und andrerseits auch die Darstellung in Form des Grenzwerts:

B) $$a = \overline{\alpha, \beta 011\,111\ldots} = \lim_{r=\infty} a_r, \quad \text{wo} \quad a_r = \overline{\alpha, \beta 0111\ldots \underbrace{11}_{r}}$$

für ein $> n$ gedachtes die Stelle des letzten Einers markirendes r.

Beide Darstellungen führen nun zu verschiedenen Werten der Function $a.b$, wie zunächst ein Beispiel zeigen möge. Für

$$b = \tfrac{1}{3} = \overline{0,\,010\,101\,\ldots}$$

wird

$$\overline{1,\,000\,\ldots} \circ b = \overline{1,\,010\,101\ldots} = \tfrac{4}{3},$$

dagegen

$$\overline{0,\,111\,\ldots} \circ b = \overline{0,\,101\,010\,\ldots} = \tfrac{2}{3},$$

beide also um

$$\tfrac{2}{3} = \overline{0,\,101\,010\,\ldots}$$

differirend.

Der aus der Darstellung A) des Argumentes a hervorgehende Wert von $a \circ b$ kann als der Endwert oder eigentliche Functionswert von $a \circ b$ an der gedachten Stelle definirt werden. Dagegen ist alsdann der aus der Darstellung B) nach der Regel hervorgehende Wert von $a \circ b$ genauer zu bezeichnen als der bei einer bestimmten Weise der Annäherung an die Stelle daselbst erreichbare Grenzwert:

$$\lim_{r=\infty} . (a_r \circ b).$$

Dass solch' ein Grenzwert der Function von der Function des Grenzwerts:

$$a \circ b = (\lim_{r=\infty} . a_r) \circ b$$

differirt, macht aber bekanntlich das Wesen der Unstetigkeit aus[1]).

Zur Unterscheidung von diesem will ich den vorgenannten Wert kürzer mit $\lim a.b$ nachher bezeichnen.

---

1) Um dies auf Grund der Definition der Stetigkeit einer Function $f(x)$ an einer Stelle c:

$$\lim_{\varepsilon=0}\{f(c+\varepsilon) - f(c)\} \quad \text{oder} \quad \lim_{x=c}\{f(x) - f(c)\} = 0$$

nachzuweisen, bemerke man, dass, weil $f(c)$ bezüglich x constant ist, es seinen eigenen Grenzwert

$$\lim_{x=c} . f(c) = f(c)$$

vorstellt, daher die Gleichung geschrieben werden kann als:

$$\lim_{x=c} . f(x) = f(c),$$

oder, da ja

$$\lim x = c$$

sein soll, als:

$$\lim f(x) = f(\lim x).$$

Findet an eine nicht abbrechende Systemzahl a eine Annähorung irgend einer Variabeln x statt, sodass

$$\lim x = a,$$

so kann

$$\lim(x \circ b) \text{ von } (\lim x) \circ b = a \circ b$$

nicht abweichen. Denn von der dyadischen Darstellnng des veränderlichen x müssen mehr nnd mohr Stellen mit den entsprechenden von a endgültig übereinstimmen; also anch hei den „Prodncten" $x \circ b$ nnd $a \circ b$. Ein verhältnissmässig hedentender Sprnng in der Aenderung des $x \circ b$ tritt allerdings immer da ein, wo eine Sequenz von Einern in der dyadischen Darstellung des x dnrch Vermehrung des letzten dieser Einer um 1 nmschlägt in lanter Nnllen mit vorangehender 1 — so nämlich, falls man x wachsen lässt; desgl. umgekehrt, bei Abnahme des x, wenn eine Sequenz von Nnllen dnrch Subtraction einer 1 an der Stelle der letzten dieser Nnllen nmschlägt in Einer znfolge „Entlehnnng" der dieser Seqnenz vorangegangenen 1. Und zwar ist, wenn x sich ändert nm eine Zahl von der Ordnung der letzten Stelle der Sequenz, der Sprung des $x \circ b$ von der Ordnnng ihrer ersten Stelle. Allein ans dem angeführten Grnndo muss jede soiche Seqnenz nach rechts nnendlich weit hinansrücken. Die angeführten Unstetigkeitsstellen von $x \circ b$ sind daher in der Tat die einzigen; sie sind jedoch „überall dicht" anf der Linie der x nnd desgl. bei $x \circ y$ in jedem Teile der xy Ebene.

Vom positiven Zahlengehiete lässt sich dio Explication nnsrer Function $a \circ b$ anch anf das negative nnd somit über das ganzo reolle Zahlengehiet ansdehnen.

Zu dem Ende hrancht man hlos jede negative Zahl $-a$ dnrch ihr arithmetisches Complement im dyadischen System:

$$2^\infty - a = \overline{10}^\infty - a$$

zu ersetzen, welches mit „Punkte 111" heginnt, nnd — in Analogie zur bekannten „dekadischen Ergänznng" — als eine nach beiden Seiten unbegrenzte Ziffernfolge sich darstellt.

Bei der Bildnng von $a \circ b$ ist dann dnrchweg nach der alten Vorschrift zu verfahren.

Offenbar gestaltet sich die „Zeichenregel" für nnsre symbolische Multiplication übereinstimmend mit der für dio eigentliche geltendon.

Beispielsweise ist:

$$-\tfrac{1}{2} = \overline{\ldots 111, 1000}\ldots, \quad -\tfrac{1}{3} = \overline{\ldots 111, 101010}\ldots$$

also:

$$(-\tfrac{1}{2})\circ(-\tfrac{1}{3}) = \overline{\ldots 000, 0010101\ldots} = +\tfrac{1}{6},$$

$$(+\tfrac{1}{2})\circ(-\tfrac{1}{3}) = \overline{\ldots 111, 0010101}\ldots = -\overline{0, 1101010}\ldots = -\tfrac{5}{6}.$$

Für 0 hat man die beiden Darstellungen:

$$+0 = \overline{\ldots 000, 0000\ldots} \quad \text{und} \quad -0 = \overline{\ldots 111, 1111\ldots}$$

welche, wenn man bei ersten links eine 1 in unendlicher Ferne vorangehend denkt, als Minuenden über irgend eine Zahl gesetzt den nämlichen Rest lassen, jedoch, falls letztere abbricht, einen verschieden geformten Rest, der nach dem Ende zu das eine mal in lauter Nullen, das andere mal in lauter Einser ausläuft. Benutzt man neben der (bisherigen) ersten auch die zweite Darstellung der 0, so sieht man leicht, dass beim Passiren der 0 (seitens des x) im positiven Sinne die Function $x \circ b$ von $-b$ zu $+b$ springt.

Folgendes liegt noch auf der Hand.

Das symbolische Product zweier ganzen Zahlen ist wieder eine ganze Zahl. Gerade „mal" gerade sowie ungerade „mal" ungerade giebt gerade; gerade „mal" ungerade giebt ungerade.

Bei ganzen Zahlen hängen die möglichen Sprünge ab, sind von der Ordnung der höchsten in ihnen enthaltenen Potenz der 2; sie können deshalb über jedes Mass wachsen, wenn ein Factor gross genug wird. (Vergl. noch § 10).

Das „Product" zweier abbrechenden dyadischen Brüche ist wieder ein solcher. Bricht nur ein „Factor" nicht ab, so auch das „Product" nicht.

Nachdem bis jetzt die Existenz einer Lösung von U_0 im Gebiet der reellen Zahlen bewiesen ist, lässt sich leicht zeigen, dass es sogar unendlich viele Lösungen von U_0 daselbst geben muss.

Denn bildet man die Linie der reellen Zahlen nach irgend einem Princip ein-eindeutig in sich selbst ab — einerlei, ob in stetiger oder unstetiger Weise — und ersetzt in der tabellarischen Darstellung der schon bekannten Lösung $c = a \circ b$ sowol Functions- als Argumentwerte c, a, b durch deren Bilder c', a', b', so muss auch das Functionszeichen $\circ$, sagen wir in $\odot$, abgeändert werden, denn es ergibt sich in Gestalt von $c' = a' \odot b'$ die tabellarische Darstellung einer neuen, von der $a \circ b$ im allgemeinen durchaus verschiedenen Function, welche ebenfalls die Gesetze U_0 erfüllen wird.

War z. B. stets

$$a\circ(b\circ c) = (a\circ b)\circ c,$$

so wird nun auch

$$a'\odot(b\odot' c') = (a'\odot b')\odot c'$$

allgemein sein müssen, weshalb man hierin auch [unter Aufgeben des Bezugs auf die vorhergehende Gleichung] die Accente wieder weglassen kann.

Zu obigem Zwecke hätte es sogar schon genügt, auch nur einen Teil der Zahlenlinie eineindeutig in die ganze abzubilden.

Sei allgemein die Abbildung vermittelt durch die Functionen:

$$a = \varphi(a'), \quad a' = \varphi^{-1}(a)$$

so ist

$$c = a\circ b$$

laut Definition umzuschreiben in

$$c' = a'\odot b'$$

und da nun

$$\varphi(c') = \varphi(a')\circ\varphi(b'),$$

so muss

$$c' = \varphi^{-1}\{\varphi(a')\circ\varphi(b')\},$$

also nach Fortlassung der Accente:

$$a\odot b = \varphi^{-1}\{\varphi(a)\circ\varphi(b)\}$$

sein. Und um hienach die Uebertragung beispielsweise des associativen Princips von der einen Verknüpfung $\circ$ auf die andere $\odot$ direct nachzuweisen, brauchen wir in der Tat blos aufzustellen:

$$a\odot(b\odot c) = \varphi^{-1}[\varphi(a)\circ\varphi\varphi^{-1}\{\varphi(b)\circ\varphi(c)\}] = \varphi^{-1}[\varphi(a)\circ\{\varphi(b)\circ\varphi(c)\}]$$

in Anbetracht, dass $\varphi\varphi^{-1}$ sich hebt, desgl.:

$$(a\odot b)\odot c = \varphi^{-1}[\varphi\varphi^{-1}\{\varphi(a)\circ\varphi(b)\}\circ\varphi(c)] = \varphi^{-1}[\{\varphi(a)\circ\varphi(b)\}\circ\varphi(c)].$$

Laut Annahme sind nun die Argumente von φ^{-1} in den beiden letzten Ausdrücken rechterhand einander gleich und folglich auch diese selber.

Das symbolische Product zweier complexen Zahlen definire ich wie folgt:

$$(a+ib)\circ(c+id) = (a\circ c)+i(b\circ d).$$

Für $b = d = 0$ reducirt sich dies wegen $0\circ 0 = 0$ auf die bisherige Function. Beispielsweise wird:

$$a\circ(ib) = (a+i.0)\circ(0+ib) = (a\circ 0)+i(0\circ b) = a+ib$$

von $(ai)\circ b = b+ia$ verschieden sein.

Aeusserst leicht ist dann nachzuweisen, dass die so definirte „Multiplication" ebenfalls die Eigenschaften C_1, C_0 und A_1 somit U_0 besitzt.

C_1 ist ersichtlich. Ad C_0 ist zu zeigen, dass wenn

$$a = a' + ia'', \quad b = b' + ib'', \quad c = c' + ic''$$

complexe Zahlen sind, aus der Annahme:

$$a \circ b = c \quad \text{auch} \quad b \circ c = a$$

folgt. Diese Annahme:

$$(a' \circ b') + i(a'' \circ b'') = c' + ic''$$

lehrt aber, dass:

$$a' \circ b' = c', \quad a'' \circ b'' = c'',$$

und da im reellen Zahlengebiete C_0 längst erwiesen ist, hieraus also auch

$$b \circ c' = a', \quad b'' \circ c'' = a''$$

folgt, so haben wir in der Tat:

$$(b' \circ c') + i(b'' \circ c'') = a' + ia'', \quad \text{also} \quad b \circ c = a.$$

Ad A_1 hat man

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$$

für beliebige a, b, c zu zeigen. Die linke Seite ist

$$= a' \circ (b' \circ c') + i\{a'' \circ (b'' \circ c'')\},$$

die rechte wird

$$= (a' \circ b') \circ c' + i\{(a'' \circ b'') a \circ c''\},$$

und diese beiden müssen gliedweise übereinstimmen, weil im reellen Gebiete, dem die a', a'', b', etc. angehören, die Associativität der Operation bereits erwiesen ist.

Es giht also auch unendlich viele Lösungen der Functionalgleichungen des Algorithmus U_0 im Gebiete der complexen Zahlen.

§ 10. Integrabilität der gefundenen Function.

Ich will mich nun wieder auf das Gebiet der positiven Zahlen beschränken.

Sei der Bruch

$$a = \frac{m}{2^n}$$

ein reducirter, sonach

$$m = 2\mu + 1$$

ungerade, so haben wir uns zunächst über den „Sprung“ S, d. h. den Betrag des Unterschieds der beiden Werte $a.b$ und $\lim(a.b)$ — vergl. pag. 260. — genauere Rechenschaft zu geben.

Ist $n > 0$, so nimmt die letzte 1 des abbrechenden dyadischen Systembruches a in A) des § 9. die $n$te Stelle hinter dem Komma ein. Es fallen jedoch auch alle ganzen Zahlen unter die Form $\frac{2\mu+1}{2^n}$, der Annahme $n \leqq 0$ entsprechend. Dann wird die Zifferngruppe β in A) fehlen, und jene letzte 1 die $n+1$te Stelle vor dem Komma einnehmen. Für diesen Fall werden die Betrachtungen so leicht zu modificiren sein, dass ich nur mehr den ersten Fall ($n>0$) weiter durchspreche.

Abermals sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem b an der $n$ten Stelle (hinter dem Komma) eine 0 oder eine 1 hat. Jenachdem möge es b' oder b'' heissen, d. h. es bedeute:

$$b' = \overline{\gamma, \delta 0 \text{ etc.}}, \quad b'' = \overline{\gamma, \delta 1 \text{ etc.}}$$

Die durch operative Vereinigung der Zifferngruppen $\overline{\alpha, \beta}$ und $\overline{\gamma, \delta}$ entstehende Zifferngruppe $\overline{\varepsilon, \zeta}$ ist dann nach der Regel unzweideutig bestimmt, und bleibt die nämliche in $a \circ b$ sowol als in $\lim a \circ b$ und für $b = b'$ wie für $b = b''$.

Um eine Schätzung des Sprunges S zu gewinnen, genügt es nun, die vier extremen Fälle in's Auge zu fassen, wo die folgenden Stellen von b' resp. b'' mit lauter Nullen oder mit lauter Einern besetzt sind:

$b' = \overline{\gamma, \delta 000\,00\,..}$	$b'' = \overline{\gamma, \delta 100\,00\,..}$
$a \circ b' = \overline{\varepsilon, \zeta 100\,00\,..}$	$a \circ b'' = \overline{\varepsilon, \zeta 000\,00\,..}$
$\lim a \circ b' = \overline{\varepsilon.\zeta 011\,11\,..}$	$\lim a \circ b'' = \overline{\zeta, \zeta 111\,11\,..}$
$S = \overline{0,0^{n-1}000\,00\,..} = 0$	$S = \overline{0,0^{n-1}1111} = \frac{1}{2^{n-1}}$
$b' = \overline{\gamma, \delta 011\,11\,..}$	$b'' = \overline{\gamma, \delta 111\,11\,..}$
$a \circ b' = \overline{\varepsilon, \zeta 111\,11\,..}$	$a \circ b'' = \overline{\varepsilon, \zeta 011\,11\,..}$
$\lim a \circ b' = \overline{\varepsilon, \zeta 000\,00\,..}$	$\lim a \circ b'' = \overline{\varepsilon, \zeta 100\,00\,..}$
$S = \overline{0,0^{n-1}111\,11\,..} = \frac{1}{2^{n-1}}$	$S = \overline{0,0^{n-1}0000\,..} = 0$

Die zwischen diesen extremen Fällen liegenden Ziffernbesetznngen hinter der $n$ten Stelle von b' resp. b'' können auch nur zwischenliegende Resultate für S geben.

Wir können also sagen, dass wonn a bei der $n$ten Stolle abbricht, der Sprnng von $a \circ b$ sichor $\leq \frac{1}{2^{n-1}}$ soin muss; dass er — je nach dem Werte von b — eine nntere Grenze nicht besitzt, während Sprüngo $> \frac{1}{2^n}$ allordings vorkommon.

Es ist nnn eine theoretisch interessante Frage, ob die Function $x \circ b$ nach dx integrabel ist.

Ich will dies beispielsweise für das Intervall von 0 bis 1 zur Entscheidung bringon.

Für specielle Werte von b ist es in der Tat der Fall. Z. B. da $x \circ 0 = x$ ist, so haben wir:

$$\int_0^1 (x \,.\, 0)\, dx = \int_0^1 x\, dx = \tfrac{1}{2} = \overline{0,1}.$$

Da ebenso für ein echt gebrochenes x:

$$x \circ 1 = 1 + x$$

ist, so entsteht:

$$\int_0^1 (x \circ 1)\, dx = \int_0^1 (1+x)\, dx = \tfrac{3}{2} = \overline{1,1}.$$

Im Gegensatz hiezn ist aber:

$$\lim_{r=\infty} \int_0^1 (x \circ \overbrace{0,111..11}^{r})\, dx = \int_0^1 (1-x)\, dx = \tfrac{1}{2} = \overline{0,1},$$

also von $\int_0^1 (x \circ \lim_{r=\infty} \overbrace{0,111\,..\,11}^{r})\, dx$ um 1 differirend. [Dio symbolische Multiplication des dyadischen echten Bruches x mit $\overline{0,111\,\ldots}$ bewirkt nämlich die Umwandlnng aller Nullen hinter dem Komma bei x in Einer und aller Einer in Nnllon, d. h. sie hat znm Ergebniss $1-x$].

Existirt nnn aber anch $\int_0^1 (x \circ b)\, dx$ in jedem andern Falle?

Bejahendenfalles muss die Einteilung so fein, müssen dio Elementarintervalle dx des Integrals so klein genommen werden können, dass die Summe derjenigen Intervalle, in welchen die Schwankung der Function einen positiven Betrag σ überschreitet, beliebig klein wird, wie klein auch σ von vornherein angenommen worden. Nach Herrn Thomae's bekannten Untersuchungen ist dies die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz des Integrals.

Denkt man sich $\sigma = \frac{1}{2^{n-1}}$, und teilt das Intervall von 0 bis 1 in lauter Elementarintervalle $dx < \frac{1}{2^\omega}$, so kann ein Sprung $> \sigma$ nur vorkommen in denjenigen Elementarintervallen dx, welche mindestens eine Zahl der Form $\frac{2\mu+1}{2^{n-\nu}}$ enthalten, wo

$$\nu = 0, 1, 2, \ldots n-1$$

bedeutet. Denn schon bei $\frac{2\mu+1}{2^{n+1}}$ kann der Sprung nur höchstens $\frac{1}{2^n}$ nach dem Vorhergehenden betragen.

Ist aber $dx < \frac{1}{2^n}$, sonach nur $\omega \overset{=}{>} n$, so können keine zwei Zahlen $\frac{2\mu+1}{2^n}$ und $\frac{2\mu+2}{2^n}$ in diesem Elementarintervall zusammen liegen, da deren Abstand $\frac{1}{2^n}$ schon grösser als die Breite dieses Intervalls sein würde.

Wird also $\omega = n+r$ genommen, so kann in kein Elementarintervall $dx < \frac{1}{2^{n+r}}$ mehr als eine Zahl $\frac{m}{2^n}$ fallen. Die Summe derjenigen Intervalle, worin ein Sprung und folglich auch eine Schwankung (der Function $x \circ b$) $> \sigma$ eventuell stattfindet, ist demnach kleiner als $\frac{1}{2^{n+r}}$ multiplicirt mit deren Anzahl. Es sind dies diejenigen dx, welche die Zahlen enthalten:

$$\frac{1}{2}; \frac{1}{4}, \frac{3}{4}; \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}; \ldots; \frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \frac{5}{2^n}, \ldots \frac{2^n-1}{2^n}, 1,$$

m. a. W. die Zahlen:

$$\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \ldots \frac{2^n-2}{2^n}, \frac{2^n-1}{2^n}, 1,$$

deren Anzahl $= 2^n$ ist. Mithin ist die Summe der Elemente dx mit einem Sprung, welcher $> \sigma$ bleiben kann, wie klein dieselben auch

gemacht werden mögen, selbst kleiner als $2^n \cdot \frac{1}{2^{n+r}} = \frac{1}{2^r}$, und indem man r immer grösser werden lässt, kann dies in der Tat unter jeden Betrag herabgedrückt werden.

Sobald aber ein Intervall $dx < \frac{1}{2^{n+r}}$ keinen der Werte $\frac{m}{2^n}$ enthält, kann nun auch die Schwankung der Function $x \circ b$ innerhalb desselben den Betrag σ nicht erreichen oder übersteigen. Denn alsdann stimmen alle Zahlen x im Innern des dx bis zur $n+1$ ten Stelle hinter dem Komma der dyadischen Darstellung mit einander überein, und folglich auch die Functionswerte $x \circ b$. Eine Verschiebung des Functionswertes an einer früheren als der $n+1$ ten (an der $n-\nu$ ten) Stelle könnte in der Tat nur dadurch eintreten, dass bei einem gewissen in dx gelegenen x eine Einerreihe $\overline{..\overbrace{0111..11}^{n-\nu}.}$ bis vor die $n$te Stelle hereinragt, welche, wenn x das Intervall dx wachsend durchläuft, zufolge Herübernehmens der Zweier umschlägt in die Nullenreihe mit vorangehender 1:

$$\overline{...\overbrace{1000..00..}^{n-\nu}}$$

Dann aber würde ja das Intervall eine Zahl $\frac{m}{2^{n-\nu}}$ enthalten haben — im Widerspruch zu der Annahme.

Die Function $x \circ b$ ist daher als nach x über jedes endliche Gebiet integrabel zu erklären, und analog würde sich auch die Existenz des Doppelintegrals $\iint (x \circ y)\, dx\, dy$ über jedes Flächengebiet von endlicher Erstreckung beweisen lassen.

Die Ermittelung eines solchen Integrals bietet freilich schon in den einfachsten Fällen Schwierigkeiten. Die Möglichkeit derselben will ich durch ein Beispiel dartun:

$$\int_0^1 (x \circ \tfrac{1}{3})\, dx, \quad \text{wo} \quad \tfrac{1}{3} = \overline{0{,}010101\ldots}$$

Hier wird man x in zwei Teile zu zerlegen haben: $x = x_1 + x_2$, wo

$$x_1 = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{a_\lambda}{2^{2\lambda+1}}$$

die aus den ungeradstelligen Ziffern $a_\lambda = 0$ oder 1 der dyadischen Darstellung von x gebildete Zahl vorstellt, und

$$x_2 = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \frac{b_\varkappa}{2^{2\varkappa}}$$

die aus den geradstelligen Ziffern $b_x = 0$ oder 1 des x gebildete Zahl (die successiven je durch eine zwischenstehende 0 getrennt gedacht).

Die ersteren erhalten sich, als mit den Nullen von $\frac{1}{3} = \overline{0{,}010101\ldots}$ zusammentreffend, im symbolischen Product $x \circ \frac{1}{3}$ unverändert. Die Glieder von x_2 dagegen zerfallen in zwei Gruppen $x_2 = x_2' + x_2''$, wo

$$x_2' = \sum_{x'} \frac{b_{x'}}{2^{2x'}} = 0$$

die mit den Ziffern $b_{x'} = 0$ besetzten geraden Stellen des x zusammengefasst, dagegen:

$$x_2'' = \sum_{x''} \frac{b_{x''}}{2^{2x''}}$$

die mit Einsern $b_{x''} = 1$ besetzten geraden Stellen des x begreift.

Beim Zusammentreffen all' dieser Ziffern b_x mit den Einsern von $\overline{0{,}010101\ldots}$ werden die Nullen $b_{x'}$ in Einer, die Einer $b_{x''}$ in Nullen verwandelt; somit kommt der Teil x_2'' im „Product" $x \circ b$ in Wegfall, wogegen x_2' ersetzt wird durch:

$$\sum_{x'} \frac{1}{2^{2x'}} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2x}} - \sum_{x''} \frac{1}{2^{2x''}} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} - x_2'' = \frac{1}{3} - x_2\,,$$

und folglich ist:

$$x \circ \tfrac{1}{3} = x_1 + (\tfrac{1}{3} - x_2)$$

von 0 bis 1 zu integriren.

Integrirt man aber $x = x_1 + x_2$ selber, so kommt, wie schon erwähnt:

$$\int_0^1 x_1\,dx + \int_0^1 x_2\,dx = \tfrac{1}{2}.$$

Nun ist allerdings für ein bestimmtes x durchaus nicht dessen x_2 gleich $\frac{1}{3}x_1$. Dagegen muss:

$$\int_0^1 x_2\,dx = \tfrac{1}{3}\int_0^1 x_1\,dx$$

sein [1]), weil x_2 genau die nämlichen Folgen von Ziffern im ganzen durchläuft, wie x_1, welche nur, als um eine dyadische Stelle weiter

---

1) Dieser Schluss möchte wol zu seiner Sicherstellung noch eingehendere Betrachtungen erfordern.

rechts befindliche, eine halb so grosse Benennung haben. Darnach bestimmt sich:

$$\int_0^1 x_1\,dx = \tfrac{1}{3}, \quad \int_0^1 x_2\,dx = \tfrac{1}{6}$$

und:

$$\int_0^1 (x \circ \tfrac{1}{2})\,dx = \int_0^1 x_1\,dx + \int_0^1 (\tfrac{1}{2} - x_2)\,dx = \tfrac{1}{3} + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6}) = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{2},$$

was zu finden gewesen. —

Das vorliegende dürfte vielleicht das erste Beispiel wirklich vollzogener Integration einer überall springenden Function sein.

§ 11. Der umfassendste und allerbequemste Calcul.

Wir bezeichnen die in § 8 bis 10 betrachtete Function $a.b$ jetzt symbolisch mit $a(+)b$ und stellen dem ihrer Ausrechnung zu Grunde liegenden Einsundeins das (symbolische) Einmaleins gegenüber:

$0 = 0(+)0 = 1(+)1$	$0 = 0.1 = 1.0$
$1 = 0(+)1 = 1(+)0$	$1 = 0.0 = 1.1$

Ebenso wie ersteres, so benutzen wir auch das letztere als eine Vorschrift zur Vereinigung der gleichstelligen dyadischen Ziffern aller reellen Operationsglieder a und b. Wir erhalten so zwei für das ganze Zahlengebiet wohldefinirte — mit $a(+)b$ und $a.b$ zu bezeichnende — Functionen. Beide sind, je für sich, den Gesetzen U_0^+ resp. $U_0^\cdot$ unterworfen und gelten obendrein für sie, wie leicht zu sehen, noch die Formeln:

$$a(+)0 = a, \quad a(+)a = 0, \quad a \circ 1 = a, \quad a \circ a = 1,$$

somit:

$$a(+)a(+)a = a = a \circ a \circ a.$$

Um die Zufälligkeit zu vermeiden, dass dann gerade:

$$a(+)b = -(a \circ b)$$

allgemein sein würde, benutzen wir noch eine eineindentige Abbildung des reellen Zahlengebietes in sich selbst, und zwar bei den positiven Zahlen nach einem andern Princip, als bei den negativen. Man kann z. B. die Function:

$$a' = \begin{cases} \alpha \lg(1+\beta a) & \text{für } a > 0 \\ -\gamma \lg(1+\delta a) & \text{für } a < 0 \end{cases},$$

zur Abbildung jeder reellen Zahl a in wieder eine solche a' verwenden, indem man α, β, γ, δ positiv und ungleich voraussetzt.

Die durch diese Abbildungen sich ergebenden Functionen, deren jede ebenfalls die Gesetze U_0 erfüllen muss, mögen für den Augenblick schlechtweg mit $a+b$ und ab selbst bezeichnet werden. Die beiden stehen allerdings nicht in distributivem Zusammenhange, dafür aber in einem noch einfacheren von noch grösserer Tragweite, welchen die Formeln ausdrücken:

$$\Delta_0) \quad a(b+c) = b(c+a) = c(a+b) = c+ab = b+ca = a+bc.$$

Um sich hiervon zu überzeugen, hat man nach dem Bisherigen nur nötig, etwa bei der Gleichung

$$a(b+c) = ab+c$$

nachzusehen, dass dieselbe auf Grund des vorangestellten Abacus sich bewahrheitet, auf welche Weise man auch den a, b und c die Werte 0 oder 1 beilegt. Wenn darnach die Formel erfüllt ist an jeder Stelle der dyadischen Zahlen, so wird sie es auch für diese Zahlen selbst sein, zu welchen sich die Stellenziffern zusammensetzen, und so weiter.

Es liegt hier also ein Calcul[1]) vor:

$$K = U_0^+ + U_0^\cdot + \Delta_0,$$

welcher die Gesetze der Verknüpfung umfasst für die 6 Species zweier Operationsstufen, deren drei Grundoperationen aber je in eine zusammenfallen, und dieser Calcul von zwei Species ist (nach meinen Untersuchungen) unter allen denkbaren der formelreichste, die meisten und leichtesten Transformationen gestattende. So weit Buchstabenrechnung in Betracht gezogen wird, ist er auch der bequemste. Dies wird plausibel erscheinen, wenn ich noch einige seiner Eigenschaften hervorhebe. — Klammern können in ihm stets weggelassen oder auch ganz nach Belieben angebracht werden. Gemäss U_0 ist dies ohnehin beim Multipliciren von Producten und beim Addiren von Summen der Fall; dazu kommt aber noch kraft Δ_0, dass es auch beim Multipliciren von Summen zutrifft; wir haben hier die höchst bequeme „Multiplicationsregel für Polynome“:

$$(a+b)(c+d) = a+bc+d.$$

---

1) Ich habe denselben erstmalig auf dem Meeting der British Association in Southport mitgeteilt. Vergl. die kurze Notiz in den Reports für 1883 pag. 411 sq.

Die Reihenfolge aller Operationsglieder ist beliebig, und können Summanden, wie Factoren, auch als solche über das Gleichheitszeichen hinübergeschafft werden (ohne Zeichenänderung bei jenen und ohne dass diese in Nenner zu verwandeln wären). Auch die Aufeinanderfolge der Operationen steht in unserm Belieben: man kann irgend ein vorkommendes Additionszeichen mit einem speciellen Multiplicationszeichen vertauschen!

Erledigen wir noch das Problem der Auflösung irgend einer Gleichung nach einer Unbekannten in diesem Calcul.

Da bei unsrer Abbildung die Null sich selbst entsprach, musste die Formel $a+0=a$ sich erhalten. Man kann darnach die rechte Seite einer Gleichung auch hier auf 0 bringen, indem man diese ihr erst zufügt und dann die übrigen Terme nach links wirft. Bei der nach x aufzulösenden Gleichung bringen wir, nachdem alle Klammern fortgelassen sind, die Terme, die x enthalten, nach links, die andern nach rechts (soferne solches Transponiren nicht durch das Nachfolgende schon entbehrlich gemacht wird). Wegen $abb=a$ (vergl. U_0) lässt sich bewirken, dass kein Term mehr als einen Factor x enthält, desgl. nach dem Satze $a+b+b=a$, dass kein Term mehr als einmal vorkommt. Die Gleichung hat also die Form einer solchen ersten Grades:

$$ax+bx+cx+\ldots=k$$

wo die Coefficienten links durchweg verschieden sind. Nun ist nach Δ_0 etc.:

$$ax+bx=(ax+b)x=(b+ax)x=b+axx=b+a=a+b,$$

was nach rechts zu werfen ist. Es wird also bei irgend zwei Gliedern links das x herausfallen, und die Gleichung nur auflösbar sein, wenn sie x eine ungerade Anzahl mal als Operationsglied enthielt. Dann aber kommen wir zuletzt auf $mx=n$, woraus sich $x=mn$ bestimmt.

§ 12. Allgemeine Sätze.

In Analogie zu den Betrachtungen des § 9 ist leicht zu beweisen:

Wenn die Functionalgleichungen eines Algorithmus eine Lösung besitzen innerhalb eines begrenzten Zahlengebietes von discreten Elementen, so gibt es auch unendlich viele Lösungen, welche sie im ganzen Gebiet der complexen Zahlen befriedigen.

Um solche zu gewinnen, bezeichne man die Zahlen des begrenzten und discreten Gebietes als „Ziffern“ mit 0, 1, 2, ... $n-1$, indem

man eventuell für die Zahlen über 9 einfache Zeichen einführt, wie α für zehn, β für eilf, γ für zwölf, und so weiter.

Für die den Formeln A eines Algorithmus genügende Function $a \circ b$ ist dann, laut Voraussetzung eine tabellarische Darstellung bekannt, welche die Form eines symbolischen Einmaleinses besitzt, woraus also ein jedes „Product" (desgl. jeder „Quotient") zweier „Ziffern" sich entnehmen lässt.

Es kommt nun lediglich darauf an, jene Lösung auf das Gebiet der reellen Zahlen auszudehnen; denn ist dies nur auf eine Weise vollbracht, so erhalten wir daraus durch jede gegenseitig eindeutige Abbildung der reellen Zahlenlinie in sich selbst (cf. § 9) eine neue Lösung für ebendieses Zahlengebiet, und aus jeder von diesen (nach dortiger Methode) auch eine eigene Lösung für das complexe Gebiet.

Zu jenem Zwecke denke man sich alle reellen Zahlen a, b als Systembrüche dargestellt in einem Zahlensystem von der Basis n, in welchem also $n-1 = \nu$ der Neun des dekadischen Systems entspricht.

Das weitere gestaltet sich nun verschieden einfach, je nach dem „Zahlenkörper", welchen in Hinsicht auf unsre symbolische Multiplication die beiden „Ziffern" 0 und ν bestimmen, sozusagen aus dem Zahlengebiet der n „Ziffern" herausschneiden.

Verknüpft man nämlich 0 und ν mit sich selbst und miteinander in jeglicher Reihenfolge, so gelangt man eventuell zu neuen „Ziffern" als „Product"werten, und wenn man diese ebenso mit sich selbst unter sich und mit den früheren verknüpft, zu wieder neuen Werten, und so fort. Es kann sein, dass man auf diese Weise jede „Ziffer" des ursprünglichen Gebietes 0 bis $n-1 = \nu$ zu erreichen vermag. Es kann aber auch sein, dass der Process schon vorher abschliesst, man nämlich zu einer Gruppe von $m < n$ „Ziffern" aus diesem Gebiete gelangt, derart, dass durch Verknüpfung irgend welcher von ihnen nie ein „Product"wert erhalten werden kann, welcher dieser Gruppe nicht bereits angehörte.

Diese Gruppe wird dann der durch die Anfangselemente (hier 0 und ν) bestimmte „Zahlenkörper" zu nennen sein.

Der einfachste Fall ist der, wo der Körper schon mit diesen zwei „Ziffern" abschliesst, d. h. Beziehungen bestehen von der Gattung der Tafel $1_{0,0})^2$:

$$0 = 0 \circ 0 = \nu \circ \nu, \quad \nu = 0 \circ \nu = \nu \circ 0,$$

oder aber 0 und ν vertauscht.

Dieser Fall ist auch der günstigste, in welchem es keiner vorgängigen Abbildung der Zahlenlinie bedarf, sondern nach Erlass der Vorschrift, dass, wenn $a = -\mathfrak{a}$ negativ sein sollte, man dafür die „Ergänzung", das „arithmetische Complement"

$$n^{\infty} - \mathfrak{a} = \overline{10}^{\infty} - \mathfrak{a},$$

welches mit $\ldots \nu\nu\nu$ beginnen wird, zu schreiben habe, nun ohne weiteres definirt werden kann:

$a \circ b$ solle diejenige Systemzahl bedeuten, welche erhalten wird dadurch, dass man die gleichstelligen Ziffern" der Systemzahlen a und b — in der hierdurch bestimmten Ordnung — symbolisch multiplicirend verknüpft nach der Vorschrift des gegebenen Einmaleins.

Alsdann wird nämlich jedes „Product" entweder mit $\overline{\ldots 000}$ oder mit $\overline{\ldots \nu\nu\nu}$ von links aus dem Unendlichen her beginnen, und daher dem Gebiete der positiven oder negativen Zahlen von selbst angehören.

Bestimmen jedoch 0 und ν einen Zahlenkörper von m Elementen: $a_1 (= 0), a_2, a_3, \ldots a_m (= \nu)$, welche $-2 < m \leqq n$ gedacht — beliebig aus dem Gebiet der n Elemente $0, 1, \ldots n-1$ herausgehoben sein können, eventuell auch mit letzterem ganz zusammenfallen, so würde man auf diesem Wege auch uninterpretable Zahlen als „Product"werte erhalten, die z. B. mit unendlich vielen Einern, resp. Zweiern oder Dreiern, nämlich mit

$$\overline{\ldots a_2 a_2 a_2}, \text{ resp. } \overline{\ldots a_3 a_3 a_3}, \text{ etc. bis } \overline{\ldots a_{m-1} a_{m-1} a_{m-1}}$$

beginnen.

Deshalb ist es nötig, alsdann der obigen Definition von $a \circ b$ erst eine Abbildung der Zahlenlinie vorangehen zu lassen.

Man teile diese willkürlich in m Intervalle, indem man sie z. B. schneidet mit den nach den Ecken gezogenen Radien (Durchmessern) eines regelmässigen $2m$ Ecks in der Zahlenebene. Die reellen Zahlen entsprechen dann eindeutig den Doppelstrahlen des zum Mittelpunkt des $2m$ Ecks gehörigen Strahlbüschels.

Jene Radien mögen an den Stellen $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$ einschneiden, so wird ein von x_x bis x_{x+1} sich bewegender Doppelstrahl einen Winkel ϑ mit seiner Anfangslage einschliessen, welcher hiebei von 0 bis $\frac{\pi}{m}$ wächst, und die Function $y = \operatorname{tg} \frac{m\vartheta}{2}$ wird die Zahlen x von x_x bis x_{x+1} eineindeutig abbilden durch die positiven Zahlen

von 0 bis $+\infty$. Dies gilt auch für den von x_m bis nach $+\infty$, dann von $-\infty$ bis x_1 gehenden Doppelstrahl, wobei diese beiden Teile der Zahlenlinie zusammen nur als eines der gedachten m Intervalle anzusehen sind.

Zählen wir die Intervalle mit einem beliebigen beginnend im Ringe herum, so können wir nun den in das erste Intervall fallenden Werten des x eineindeutig zuordnen alle denkbaren positiven, selbstverständlich also mit $\overline{\ldots 000}$ von links her beginnenden Zahlen y, den x im zweiten Intervalle wiederum ebendiese, in denen wir aber behufs Unterscheidung von denen des vorigen Intervalls die links von unendlich entfernter Stelle her ihren werthabenden Ziffern vorangehenden Nullen sämtlich ersetzt denken durch „Ziffern" α_1, z. B. durch lauter Einser, beim nächsten Intervall durch lauter α_2's, eventuell Zweier, und so fort, beim letzten Intervall durch lauter α_m.

Auf diese Weise wird hingebracht, dass das nach der alten Vorschrift gebildete „Product" $a \circ b$ nie mehr unendig wird, sondern stets einem bestimmten der m Intervalle der reellen Zahlenlinie ans gehört, indem in den „vorgängigen Ziffern" der Factoren immer nur Werte zusammentreffen, welche selbst und deren „Producte" also ebenfalls dem Zahlenkörper der m Elemente angehören.

Die eindeutige Umkehrbarkeit sowie die formalen Eigenschaften übertragen sich nunmehr in der früheren Weise von den „Ziffern" an jeder Stelle auf die Zahlen selbst, welche sie zusammensetzen — eine Bemerkung auf Grund deren also die verlangte Ausdehnung der Lösung von dem begrenzt discreten auf das ganze reelle Zahlengebiet geleistet sein wird. —

Es war bei dem angegebenen Verfahren — den vorausgeschickten günstigsten Fall angenommen — offenbar unwesentlich, dass ν gerade die „Ziffer" $n-1$ bedeutete; man durfte vielmehr darunter auch irgend eine von 0 verschiedene „Ziffer" von vornherein verstehen.

Beim Passiren der Grenzpunkte zwischen zwei successiven Intervallen seitens eines der „Factoren" werden sich verschiedene Grenzwerte des $a \circ b$ von der einen und von der andern Seite ergeben, und wird man einen von diesen beiden als den eigentlichen Functionswert an der Grenzstelle zu erklären haben. Dies stört weiter nicht, da die erhaltene Function $a \circ b$ ohnehin im reellen sowol als complexen Gebiete überall (dicht) unstetig sein muss — auf Grund des Umstandes, dass $\overline{1{,}0000\ldots}$ und $\overline{0{,}\nu\nu\nu\nu\ldots}$ bei der Verknüpfung verschiedene Resultate liefert — wenngleich diese Function integrabel sein wird.

Ferner ist die gewählte Art der Teilung der reellen Zahlenlinie und die specielle Weise der Zuordnung der Punkte eines jeden ihrer Intervalle zu den positiven Zahlen, für die wir uns behufs Fixirung der Vorstellungen entschieden hatten, dabei ganz nebensächlich: man kann ein jedes Intervall auf irgend eine Weise durch die positiven Zahlen eineindeutig abbilden, wofern man nur die Intervalle selbst auf die geschilderte Art vermittelst der „vergängigen Ziffern" unterscheidet.

Für die so explicirte Function würde, falls gemäss § 5. sie O_1 genügt, leicht zu zeigen sein, dass irgend zwei Zahlen immer einen „Zahlenkörper" bestimmen müssen von höchstens n^2 Werten.

Endlich liegt auf der Hand, wie das Verfahren zu übertragen ist auf die Ausdehnung einer Lösung von solchen Functionalgleichungen, welche einen Calcul constituiren, von einem begrenzt discreten auf das continuirliche Zahlengebiet.

Wenn z. B. die Formeln des Calculs sich beziehen auf zwei Functionen $a(+)b$ und $a \circ b$, für welche bereits eine tabellarische Darstellung innerhalb des begrenzten discreten Zahlengebietes aus n Elementen $0, 1, \ldots n-1$ bekannt ist in Gestalt eines Einsundeinses sowie eines Einmaleinses, so wird die damit gegebene specielle „Lösung (der Functionalgleichungen) des Calculs" sich sofort in der angegebenen Weise auf das ganze complexe Gebiet übertragen lassen, sobald nur die beiden Tafeln einen Zahlenkörper von mindestens zwei Elementen gemein haben, d. h., wofern es nur unter den n Elementen zwei gibt, welche durch „Addition" weiter verknüpft mit demselben Zahlenkörper abschliessen, wie wenn sie durch „Multiplication" weiter verknüpft werden.

Unter den Elementen des Gebiets kann man ja irgend eine Vertauschung — durchgängig in beiden Tafeln vornehmen, ohne dass dieselben deshalb aufhören, eine „Lösung des Calculs" vorzustellen, und so kann man, falls es nicht von vornherein der Fall gewesen sein sollte, immer bewirken, dass insbesondere die 0 jenem Körper angehört.

Schlussbetrachtung.

Aus dem Bisherigen ist folgendes ersichtlich.

Die hier in ihren ersten Anfängen betrachtete allgemeine Theorie der Verknüpfung, welche auch die Theorie der Functionalgleichungen unter sich begreift, eröffnet — unter anderm, und unerwarteter Weise — einen Eingang in das bisher von der Mathematik vernachlässigte Studium der überall unstetigen Functionen (beliebig vieler Variabeln).

Es zeigt sich, dass solche Functionen, nicht minder wie die im allgemeinen stetigen, einen grossen Reichtum formaler Eigenschaften besitzen, zahlreiche Gesetze einer Buchstabenrechnung allgemein erfüllen können — ja, es scheint, als ob in einigen Fällen der Vorzug der Stetigkeit nur durch Aufgeben eines Teils der formalen Eigenschaften erkauft werden könne. Ich möchte diese, wie erkannt, sich zuerst und am leichtesten darbietenden unstetigen Lösungen der Functionalgleichungen mit der Hülle der Nuss vergleichen, welche als Kern die stetigen Lösungen birgt.

Sollte die Betrachtung jener unstetigen Functionen für die angewandte Mathematik auch ohne directen Nutzen bleiben, so dürfte sie doch in verschiedener Hinsicht beitragen, die Begriffe der Mathematik überhaupt zu läutern.

Die Existenz von Lösungen der gedachten Art, welche überall unstetig, doch integrabel sind, ist für das gesamte complexe Zahlengebiet meist schon verbürgt, wenn man nur für ein begrenztes Zahlengebiet aus discreten Elementen eine Lösung des Calculs (in Gestalt eines Systems von Functionstafeln) gefunden hat.

Jedoch genügen schon die Lösungen der letzteren Art, um die Möglichkeit (Existenz) des Calculs, die Verträglichkeit seiner Functionalgleichungen miteinander, darzutun.

Desgleichen genügen solche begrenzt discreten Lösungen, um die Gliederung der Functionalgleichungen oder Formeln des Calculs in coordinirte oder (eine der andern) übergeordnete Gruppen von äquivalenten Formeln bewerkstelligen zu helfen, nämlich solche Gruppen hinsichtlich ihrer Consequenzen innerhalb eines bestimmten Formelgebiets zu limitiren: Wird von einer Lösung eine Formelgruppe A erfüllt, eine andere B aber nicht erfüllt, so kann B nicht aus A folgen.

Ist durch solche elementaren Mittel ein Ueberblick über die möglichen Algorithmen oder auch Calculn und deren „Structur", (Gliederung in untergeordnete) gewonnen, so kann man darauf ausgehen, auch stetige Lösungen derselben aufzusuchen.

Ich habe für sämtliche von mir untersuchten Algorithmen zunächst die Lösungen aufgesucht, welche im Gebiet der billnear gebrochenen Functionen existiren, also, dass die symbolischen Factoren oder Argumente a, b mit dem „Product"

$$c = a \circ b = f(a, b)$$

eine trilineare Relation eingehen. Und schon in diesem speciellen Teil des Gebietes der stetigen Functionen liess sich nachweisen, dass in der grossen Mehrzahl der Fälle solche Lösungen vorhanden sind. [Allerdings ist bei diesen die eindeutige Umkehrbarkeit, und, wo die Form $\S$ auftritt, auch die Eindeutigkeit mit singulären Ausnahmen behaftet].

Neben diesem Berührungspunkte unsrer Untersuchungen mit der Theorie der trilinearen Functionen sei noch auf deren Berührung mit ein paar andern Gebieten aufmerksam gemacht, nämlich einerseits auf den Zusammenhang mit der Theorie der Substitutionen — welcher ja in dem vorhergehenden Aufsatz schon genügend zu Tage tritt — und andrerseits endlich den mit Herrn Walter Dyck's Untersuchungen über Riemann'sche Flächen:

Man kann mit den „Ziffern" 1 bis n die Blätter einer n-blättrigen Riemann'schen Fläche numerirt denken. Schreibt man dann jede Zeile einer Functionstafel, wie z. B.:

$$1 = 1 \circ 1 = 2 \circ 2 = 3 \circ 4 = 4 \circ 3 = 5 \circ 6 = 6 \circ 7 = 7 \circ 8 = 8 \circ 5$$

abkürzend in:

$$1 = 1,\ 2,\ 34,\ 5678$$

nach der aus diesem Paradigma ersichtlichen Weise um, und lässt die Functionswerte linkerhand ebensoviel verschiedene Punkte der n-blättrigen Fläche vorstellen, so werden die „Ringe" oder „Cyklen, 1, resp. 2, resp. 34 und 5678 rechterhand ausdrücken, auf welche Weise die n Blätter an den als Verzweigungspunkte gedachten Stellen in einander übergehen — die angeführte Zeile nämlich aussagen, dass an der Stelle 1 das erste Blatt nur in sich selbst, desgleichen auch das zweite Blatt in kein anderes übergeht, dagegen Blatt 3 um den Punkt 1 herum in 4 und 4 in 3 einmündet, endlich Blatt 5 in 6, dieses in 7, 7 in 8 und 8 in 5 daselbst übergeht, und so weiter für die (hier nicht angegebenen) folgenden Zeilen der gedachten Tafel.

Darnach wird denn eine jede unsrer Functionstafeln einer bestimmten Verzweigungsmöglichkeit entsprechen.

Allerdings schliessen sich hier die längs der Ufer der Verzweigungsschnitte auszuführenden „Umgänge" im allgemeinen nicht, wie es bei den algebraischen Functionen wenigstens der Fall sein muss und auch wol bei den von Herrn W. Dyck untersuchten Verzweigungsmöglichkeiten durchweg der Fall ist.

Karlsruhe in Baden, im Januar 1887.

XIII.

Exacte Trennung der reellen Wurzeln numerischer algebraischen und transcendenten Gleichungen.

Von

Alfred Siebel.

Vorwort.

Die Trennung der reellen Wurzeln numerischer Gleichungen mit einer Unbekannten ist eines der interessantesten und zugleich wichtigsten Probleme der Theorie und Auflösung der Gleichungen.

Ist die Trennung einer reellen Wurzel bewirkt, d. h. hat man dieselbe zwischen zwei Grenzen eingeschlossen, innerhalb welcher nur diese eine Wurzel liegt, so kann man sie nach den bekannten Näherungsmethoden bis zu einem beliebig vorgeschriebenen Grade der Genauigkeit mit Leichtigkeit berechnen, und zwar ist für die algebraischen Gleichungen die Horner'sche Methode, (Philosophical Transactions, 1819), für die transcendenten Gleichungen die Fourier'sche Näherungsmethode (Fourier, Analyse des équations déterminées, Livre II) besonders hervorzuheben. Beide Verfahren sind im Grunde Verbesserungen der Approximationsmethode von Euler.

Sie sind in den bekannten Lehrbüchern ausführlich behandelt.

Weniger vollkommen ist das bedeutend schwierigere Problem der Trennung gelöst worden und mit diesem wollen wir uns in der vorliegenden Abhandlung beschäftigen.

Zunächst betrachten wir in den §§ 1—3. die wichtigsten der bekannten Methoden, die von Fourier, Budan, Sturm und Lagrange in ihren Hauptzügen, wobei wir uns einige der wesentlichsten Mängel ins Gedächtniss zurückrufen.

In § 4. giebt der Verfasser Verbesserungen der Lagrangeschen Methode, wodurch diese auch auf transcendente Gleichungen anwendbar gemacht wird, und geht sodann zur Behandlung von Trennungsmethoden über, welche im wesentlichen aus den Artikeln I—VII [1]) seiner Untersuchungen über algebraische Gleichungen, Grunert Archiv, Teil 56, 57, 57, 58, 60—65 hervorgehen oder sich daraus ableiten lassen.

Während aber dort Kriterien auf elementar-geometrischem Wege gefunden werden, leitet der Verfasser diese hier kürzer analytisch ab, in einer Weise, welche das Problem der Trennung von einem allgemeineren Gesichtspunkt aus erscheinen lässt. — Bei der Bearbeitung der Methoden und der Ausdehnung auf transcendente Gleichungen war der Verfasser besonders bestrebt, jene praktisch brauchbarer und die Darstellung übersichtlich zu machen. Wir verweisen den geneigten Leser insbesondere auf die Anleitung zur Trennung in § 23. und die Zahlenbeispiele in den §§ 24—28.

Diese Methoden möchten, namentlich in Verbindung mit dem Fourier'schen Theorem (§ 1.), im allgemeinen den bekannten vorzuziehen sein.

Düsseldorf, 31. Dezbr. 1885.

Der Verfasser.

Inhalt.

I. Ueber die wichtigsten bekannten Methoden.
- § 1. Die Methoden von Fourier und Budan.
- § 2. Die Methode von Sturm.
- § 3. Die Methoden von Lagrange und Cauchy.
- § 4. Verbesserung der Lagrange'schen Methode und Erweiterung auf transcendente Gleichungen. (Versuch, dieselbe praktisch brauchbar zu machen).

II. Gemeinsame Grundlagen für die Methoden des Verfassers.
- § 5. Trennungsprincip.
  Intervalle (xt), (tx) mit höchstens Einer Wurzel,
  x gegeben, t gesucht.
  Vorzüge der Methoden.

---

1) Artikel VIII enthält die Trennung (und Berechnung) der complexen Wurzeln algebraischer Gleichungen.

§ 6. Allgemeinste Formel zwischen x und t:

$$H(x, t) = 0.$$

Fnndamentalsätze zur Trennung (§ 6. V).

§ 7. I. Bosondere Form von $H(xt)$:

$$H(xt) = (t-x)F'(t) - F(t) + G(x),$$

wo

$$G(x) = F(x) - kf(x),$$

$F''(x) > 0$, $G''(x) > 0$ in einem Intervalle (cc').

II. Geometrische Bedeutung.

1) Construction der Wurzeln von' $f(x) = 0$ als Abscissen der Durchschnitte zweier in der Richtung der positiven y-Axe convexen Curven [1]):

$$y = F(x), \quad y = G(x).$$

2) t = Abscisse des Berührungspunktes der einen oder andern Tangente, die vom Punkte mit den Coordinaten x, $G(x)$ an die Curve $y = F(x)$ gezogen werden kann.

III. Andere Ableitung von $H(xt)$ ad I.

III. Fall I: $F(x) = x^3 + Ax + B$,
als Basis für die Trennungsmethoden I, I^a, I^b,

§ 8. Gemeinsame Formeln für diese Methoden.

§. 9 Hülfskriterien zu Methode I^a und I^b.

IV. Fall II: $F(x) = (x-c+a)^r$, wo $c < x$; $a > 0$; $r = 3, 4 \ldots$
als Basis für die Trennungsmethode II.

§. 10. Grundformeln für Methode II [2]).

Einführung der Hülfsgrösse: $z = \dfrac{t-c+a}{x-c+a}$

und der Function: $\varphi(z) = (r-1)z^r - rz^{r-1} + 1$.

§ 11. Ueber $\varphi(z)$ und $\log \varphi(z)$.

Erfüllung der Bedingnng: $\varphi(z) \leqq Q$ [3])

---

1) Ueber die Eigenschaften eines Systems zweier convexen Curven siehe des Verf. Unters. üb. algebr. Glg. in Grunert Archiv Teil LVII S. 74 s. f.

2) Unters. a. a. O. Teil LVII S. 351, 352..

3) Näheres Unters. a. a. O. Teil LX S. 147 s. f.

V. Fall III: $F(x) = e^{a(x-c)}$, wo $c < x$, $a > 0$, als Basis für die Trennnngsmethode III.

§ 12. Grundformel für Methode III [1]).
Einführung der Hülfsgrösse: $s = a(t-x)$
und der Fnnction: $\varphi(s) = 1 + (s-1)e^s$.

§ 13. Ueber $\varphi(s)$ und $\log(\varphi s)$.
Erfüllnng der Bedingung: $\varphi(s) \leqq Q$.

VI. Besondere Behandlnng der Fälle II und III.

§ 14. Berechnnng von k mittelst $\gtrless f''(x)$(obere,nntereGrenze von $f''(x)$ in Bezug auf (cc')).

§ 15. k ansgedrückt dnrch $\gtrless f''(x)$.

§ 16. k als Fnnction des Parameters a:
$$k = D_s a^s_-$$
wo s abhängig von a, $s = r-p$ ad Fall II
$s = p$ „ „ III.

§ 17. $T = t-x$ als Fnnction von s für den Fall:
$c = x$, $s =$ constant.

§ 18. Grösster Wert von $T = t-x$,
wenn $x = c$, a variabel [2]).

§ 19. Zwekmässige Wahl von a.

§§ 20. 21. Hülfswerte s''_p [3]).

§ 22. Intervalle $(x't)$, (tx) ohne Wnrzeln,
x gegeben, t gesncht.
(Geometrische Betrachtnng zn § 4.).

VII. Anleitnng znr Trennnng.

§ 23. Znsammenfassnng der Hauptresultate in die Methoden I, I^a, I^b; II; III.

§ 24. Algebraische Beispiele zu den Methoden I, I^a, I^b.

§ 25. Transcendente Beispiele hierzu.

---

1) Unters. a. a. O. T. LXV S. 396.

2) Unters. a. a. O. T. LXV S. 401.

3) Unters. a. a. O. T. LX S. 145, T. LXV S. 405.

§ 26. Algebraische Beispiele zu Methode II [1]).
§ 27. Algebraische Beispiele zu Methode III [2]).
§ 28. Transcendente Beispiele zu Methode III.
Tabelle zu Methode III. über $\log(\varphi z)$ (s. § 13.)

I.

Ueber die wichtigsten bekannten Methoden.

§ 1.

Die Methode von Fourier und Budan.

Ist $f(x)$ eine algebraische oder transcendente Function, bildet man die Reihe der „abgeleiteten" Functionen:

$$f^m(x),\ f^{m-1}(x) \ldots f^r(x) \ldots f'(x),\ f(x),$$

denkt sich x als Abscisse stetig wachsend von einem Anfangswert a bis zu einem Endwert $b\,(> a)$, zwischen welchen Grenzen

$$f^m(x)$$

sein Vorzeichen nicht ändern soll, so können in der obigen Reihe nur an solchen Stellen Zeichenwechsel verloren gehen (gewonnen werden keine), für welche eine der Functionen null wird.

Ein Zeichenwechsel-Verlust findet wirklich statt beim Durchgang von x durch:

1) einen i-fachen Wurzelpunkt von $f(x)$, d. h. wenn

$$f^{i-1}(x) = 0 \ldots f'(x) = 0,\quad f(x) = 0$$

2) einen solchen einer mittleren Function $f^r(x)$, d. h. wenn

$$f^{r+i-1}(x) = 0 \ldots f^{r+1}(x) = 0,\quad f^r(x) = 0;$$

und zwar gehen verloren:

ad 1) i Zeichenwechsel,
ad 2) falls a) i paar : i Wechsel,
„ b) i unpaar ist: $i \pm 1$ Wechsel,

---

1) Vergl. Unters. a. a. O. T, LXVIII S. 139 *s.* f.
2) Vergl. Unters. a. a. O. T. LXV S. 406 *s.* f.

je nachdem die letztere Funetionsreihe in der obigen Reihe: $f^m(x)$... ... $f'(x)$, $f(x)$ zwischen Gliedern

α) mit gleichen,

β) mit entgegenges. Vorzeichen für jenes x stehen, d. h. $f^{r+i}(x) f^{r-1}(x) \gtrless 0$.

Ad 2) geht also stets eine gerade Anzahl von Zeichenwechseln verloren.

Die Stellen, wo in der Reihe $f^m(x)$, $f^{m-1}(x)$ ... fx) zwei oder mehr Wechsel verloren gehen, wollen wir „kritische" nennen.

Fällt eine solche mit einer andern oder mit einer Wurzel von $f(x = 0$ znsammen, so hat man die entsprechenden, sich nach dem Vorstehenden ergebenden Zahlen zu addiren, nm den Gesamtzeichenwechselverlnst zu erhalten, der an der Stelle x stattfindet.

Es folgt hieraus das Fonrier'sche Theorem [1]):

Bezeichnet $W(x)$ die Anzahl der Wechsel der Reihe $f^m(x)$, $f^{m-1}(x)$ ... $f(x)$, so ist

$$W(b) \leqq W(a).$$

Ferner: Der Untersehied $W(a) - W(b)$ ist entweder gleich der Anzahl Z der Wnrzeln von $f(x) = 0$ zwischen a nnd b oder gleich dieser vermehrt nm eine gerado Zahl p, sodass

$$Z = W(a) - W(b) - p.$$

Zwischon a nnd b liegon also höchstens so viele reello Wnrzoln als heim Ueborgang von a nach b Zeichonwechsel verloron gehen, d. h. höchstens $W(a) - W(b)$.

Ist $f(x)$ algebraisch, so sind zwischen a nnd b genau p complexe, paarweise conjngirte Wnrzeln „angezeigt". Dasselbe gilt für jedes andere ausserhalb (ab) liegende Intervall $(a_1 b_1)$, nnd zwar, wenn wir hierfür p_1 dio analoge Bedentnng wie p heilegen, besitzt die Gleichnng weiter p_1 complexe Wurzeln.

---

1) siehe II, 2te Anmerkung.

Die Fourier'sche Methode[1]) beruht hauptsächlich auf der Anwendung der vorstehenden Sätze, sowie auf dem Fourier'schen Kriterium:

Ist zwischen zwei Zahlen a und $b\,(>a)$ (im allgemeinen von den obigen a und b verschieden) die 2te Derivirte der Function $f^r(x)$ $\left(\text{wo } r \gtreqless 0\right)$, d. i.

$$f^{r+2}(x), \quad \text{pos. oder negativ,}$$

desgleichen die a und b entsprechenden Functionswerte $f^r(a)$ und $f^r(b)$ beide positiv, bezüglich negativ, dagegen

$$f^{r+1}(a) < 0 \quad \text{und} \quad f^{r+1}(b) > 0 \quad \text{resp.} > 0 \text{ und } < 0$$

und ausserdem

$$\frac{f^r(a)}{-f^{r+1}(a)} + \frac{f^r(b)}{f^{r+1}(b)} \text{ nicht} < b-a,$$

so wird $f^r(x)$ für keinen reellen Wert von x zwischen a und b null.

Ferner bedarf die Methode von Fourier in gewissen Fällen der Bestimmung des grössten gemeinschaftlichen Masses nicht allein zwischen $f(x)$ und $f'(x)$, sondern auch zwischen mittleren Functionen $f^s(x)$ und ihren Derivirten $f^{s+1}(x)$ (siehe weiter).

Das Verfahren, die Wurzel zu trennen, beruht darauf, dass man das Intervall $(a\,b)$ so lange auf's ungewisse hin, durch blosses probiren in Partial-Intervalle zerlegt, bis die vorkommenden kritischen Stellen, bei denen in der Reihe $f^m(x)$, $f^{m-1}(x)$ ... $f(x)$ zwei oder mehr Zeichenwechsel verloren gehen, abgesondert sind, ihre Natur erkannt ist und den diese Stellen nicht enthaltenden Partialintervallen Zeichenwechsel-Verluste $= 0$ oder $= 1$ entsprechen.

Es sind dabei oft viele und unnütze Rechnungen nicht zu vermeiden.

Die praktische Brauchbarkeit der Fourier'schen Methode richtet sich unter anderm darnach, ob kritische Stellen vorkommen

---

1) Fourier, Analyse des équations déterminées publié par Navier, Paris 1831. und M. A. Stern: Ueber die Auflösung der transcendenten Gleichungen in Crelle's Journal für die Math., Bd. XXII, Berlin 1841, in welcher Preisschrift (der Königl. Dänischen Gesellschaft der Wissenschaften v. Jahre 1837) der Verfasser nach Fourier's Andeutungen, u. A. in dessen Exposé synoptique, weiter ausgeführt hat, wie die Fourier'sche Methode auch auf transcendente Gleichungen anwendbar ist.

oder nicht. Im letzteren Falle ist sie am brauchbarsten, indem alsdann das Fourier'sche Theorem genügt. Kommt aber obiger Fall 2) $b.\alpha$, wobei $i = 1$, vor, so muss das Fourier'sche Kriterium zu Hülfe genommen werden, und finden sich Stellen vor, entsprechend den Fällen: 1) wo $i = 2,3...$ oder: wo $i = 2,4 \ldots$ oder: 2) b, wo $i = 3,5...$, so bedarf man (im allgemeinen) der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Masses zwischen $f(x)$ und $f'(x)$ bezüglich mittlerer Functionen $f^s(x)$ und ihrer Derivirten, d. i. bekanntlich einer selbst bei einfachen algebraischen Zahlengleichungen, wenn die Coefficienten vielziffrig sind, und der Grad von $f(x)$ resp. $f^s(x)$ vier übersteigt, mühsamen Operation, welche noch zu nur eine Hilfsrechnung bildet, während sie bei der Sturm'schen Methode die Hauptarbeit ausmacht und nur für $f(x)$ und $f'(x)$ erfordert wird.

Wir bemerken noch, dass das Fourier'sche Kriterium in gewissen Fällen bekanntlich praktisch unbrauchbar ist.

II. Die Budan'sche Methode für algebraische Gleichungen [1])

bedient sich wie die von Fourier des Fourier'schen Theorems, auch der Budan'sche Satz [2]) genannt, aber im Gegensatz zur letzteren beruht sie auf der fast ausschliesslichen Anwendung desselben. Es wird nämlich jener Satz sowol auf die gegebene Gleichung $f(x)=0$ als zunächst auf gewisse Hülfsgleichungen von der Form

$$f\left(\frac{1}{x+r}+c\right) = 0$$

angewendet, und diese zweifache Anwendung wiederholt, indem man die Hülfsgleichung als gegeben betrachtet und hierzu, ähnlich wie vor, eine neue bildet u. s. w., und zwar ist das Verfahren im wesentlichen folgendes:

Findet man ein Intervall $\left(c,\ c+\frac{1}{r}\right)$, in welchem die Reihe $f^m(x)$, $f^{m-1}(x) \ldots f(x) : q = 2, 3 \ldots$ Wechsel verliert, so bildet man die

---

1) Budan, Nouvelle méthode pour la résolution des équations numériques, Paris 1807.

2) Von Fourier zuerst in seinen Vorlesungen an der polytechnischen Schule zu Paris 1796|97 mitgeteilt, von Budan in gleicher Weise 1803, dagegen veröffentlicht 1807 in obigem Werke „Nouvelle méthode ...“, also vor dem Erscheinen von Fourier's „Analyse des équations déterminées“ (1831).

Dieser Satz scheint sowol von Fourier als von Budan selbstständig gefunden worden zu sein.

nach c transformirte Gleichung $f(x+c)=0$, hierzu die Reciproke $f\left(\frac{1}{x}+c\right)$ und zu dieser die nach r transformirte

$$f\left(\frac{1}{x+r}+c\right)=0.$$

Diese Gleichung hat in dem unbegrenzten Intervall $(0, \infty)$ ebensoviele reelle Wurzeln als die ursprüngliche in dem begrenzten Intervall $\left(c, c+\frac{1}{r}\right)$. Hat daher jene Gleichung q' Wechsel, so ist die Anzahl der zwischen c und $c+\frac{1}{r}$ liegenden Wurzel höchstens q', und es ist

$$q' \leqq q.$$

Die Hülfsgleichung wird, wenn $q'>1$, nach 1, 2 ... transformirt u. s. f.

Auf vorstehende Weise geht man den kritischen Stellen ad I) aus dem Wege, ausgenommen den mehrfachen Wurzeln von $f(x)=0$.

Auch die Budan'sche Methode beruht auf Probiren und erfordert oft viele und mühsame Transformationen und überflüssige Rechnungen.

§ 2.

Die Sturm'sche Methode [1]).

$f(x)$ sei eine ganze, rationale, algebraische, oder eine transcendente Function, $f_1(x)=f'(x)$ ihre erte Derivirte.

Im letzteren Fall setzen wir beide Functionen nach steigenden Potenzen von x entwickelt voraus.

Die Functionen $f, f_1, f_2 \ldots g_1, g_2 \ldots \lambda$ seien an die Gleichungen gebunden:

$$\begin{aligned} f &= g_1 f_1 - \lambda f_2, \\ f_1 &= g_2 f_2 - \lambda f_3, \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \\ f_{m-2} &= g_{m-1} f_{m-1} - \lambda f_m \end{aligned}$$

und es sollen zwischen den Grenzen

$$a \text{ und } b > a$$

---

1) Von Sturm 1829 der Pariser Akademie vorgelegt. Ein Auszug der betreffenden Abhandlung befindet sich im II. Band von Ferussac, Bulletin des sciences math., phys. et chim. p. 419.

jene Fnnctionen endlich nnd stetig sein, ferner λ positiv, f_m positiv oder negativ bleiben.

Bedeutet

$$Z$$

der im Intervall (ab) liegenden verschiedenen Wurzeln von $f(x)=0$, d. h. die mehrfachen einfach gerechnet, nnd versteht man mit Sturm unter

$$\Delta \frac{f}{f_1}$$

den „Excess" von $\frac{f}{f_1}$ in Bezug anf jenes Intervall, d. h. die Zahl, nm welche, während x dasselbe von a nach b stetig dnrchläuft, $\frac{f}{f_1}$ beim Verschwinden mehr vom Negativen zum Positiven als von diesem zu jenem übergeht, so ist einersoits

$$Z = \Delta \frac{f}{f_1}$$

anderseits

$$\Delta \frac{f}{f_1} = \Delta \frac{f_1}{f_2} + \Delta f f_1 \text{ [1]}$$

nnd ähnlich

$$\Delta \frac{f_1}{f_2} = \Delta \frac{f_2}{f_3} + \Delta f_1 f_2$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\Delta \frac{f_{m-1}}{f_m} = \Delta \frac{f_m}{f_{m+1}} + \Delta f_{m-1} f_m$$

sodass man durch Additiou erhält:

$$Z - \Delta \frac{f}{f_1} = \Delta f f_1 + \Delta f_1 f_2 + \ldots \Delta f_{m-1} f_m$$

$$= W(a) - W(b),$$

wo $W(x)$ die Anzahl der Wechsel der Reihe

$$f x,\ f_1 x,\ \ldots\ f_n x$$

bezeichnet.

Allgemein ist:

$$\Delta \frac{F}{G} = \Delta \frac{F_1}{G_1} + \Delta F F_1$$

wo

$$F_1 = \alpha F + \beta G,\quad G_1 = \gamma F + \delta G,\quad \beta > 0,\quad D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} > 0$$

nnd sämtliche hier vorkommenden Functionen, F, G, ... α, . δ, zwischen a nnd b endlich nnd stetig sind.

Für die algebraischen Gleichungen giebt dieser Sturm'sche Satz eine einfache, exacte Regel an die Hand, die Anzahl der in einem beliebigen Intervall (ab) befindlichen verschiedenen Wurzeln zu bestimmen, indem man bei der Aufstellung jenes Gleichungssystemes so verfährt wie bei der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Masses zwischen f und f_1, mit dem Unterschiede, dass man

$$\lambda = +1 \quad \text{statt} \quad \lambda = -1$$

setzt [1]).

Ist $f(x)$ transcendent, so wähle man

$$\lambda = x^2$$

und verfahre in ähnlicher Weise [2]).

Der Sturm'sche Satz ist von hohem theoretischen Werte und hat eine ausserordentlich reichhaltige Litteratur hervorgerufen, eignet sich aber weniger zur Trennung der Wurzeln als zur Analyse der algebraischen Gleichungen.

Von geringer praktischen Brauchbarkeit ist derselbe bekanntlich für Gleichungen höherer Grade oder mit vielziffrigen Coefficienten, besonders wegen der umständlichen Bildung der Sturm'schen Functionen, von noch geringerer Brauchbarkeit ist er für transcendente Gleichungen.

Abgesehen davon leidet die Methode, bei der Exactheit ihrer Resultate', an demselben Uebelstande wie die von Fourier und von Budan, dass man bei der Wahl der Grenzen a und b und der Zerlegung in Partialintervalle auf probiren angewiesen ist, ohne ein leitendes Princip zu haben.

§ 3.

Die Methode von Lagrange.

I. Die Lagrange'sche Methode [3]) der Trennung der reellen Wur-

---

1) Mémoire sur la résolution des équations numériques par C. Sturm, in Mémoires prés. p. divers. Savans á l'Académie Royale des Sciences, T, 8.

2) „Ueber Anwendung der Sturm'schen Methode auf transcendente Gleichungen von M. A. Stern", Crelles Journal, Bd. 33. S. 363 ff.

3) Traité de la résol, des équat. num. de tous les degrés, Paris 1798 und 1808.

zeln numerischer algebraischen Gleichungen, welche keine mehrfachen Wurzeln besitzen, beruht auf folgendem Princip:

Ist $f(x)=0$ eine solche Gleichung, vom $n$ten Grade, Δ eine untere Grenze der Abstände je zweier reellen Wurzeln, so liegt zwischen $m\Delta$ und $(m+1)\Delta$ höchstens Eine Wurzel.

So theoretisch einfach und exact dieses Trennungsprincip ist, so praktisch wenig brauchbar wird die Methode durch das Verfahren, Δ zu ermitteln, indem Lagrange die sehr mühsam herzustellende Gleichung des $\frac{n(n-1)}{2}$ten Grades bildet, deren Wurzeln die Quadrate der Differenzen zwischen je zwei Wurzeln der gegebenen Gleichung sind, eine untere Grenze h der positiven Wurzeln jener Hülfsgleichung bestimmt und schliesslich

$$\Delta = \sqrt{h}.$$

Die praktische Anwendbarkeit beschränkt sich auf die Gleichungen des 3ten und 4ten Grades, bei denen keine zwei reellen Wurzeln, oder keine complexen von der Form $p+qi$ und p_1+qi, nahe aneinander liegen; der Fall gleicher Wurzeln ist ganz ausgeschlossen.

II. Canchy hat diese Methode dadurch vereinfacht, dass er Δ durch das von x unabhängige Glied $\pm P\left(\gtrless 0\right)$ jener Hülfsgleichung, ausdrückt, sodass diese also selbst nicht entwickelt zu werden braucht, und eine obere Grenze ρ der Moduln der Wurzeln von $f(x)=0$ und zwar

$$\Delta = \frac{P}{(2\rho)^{n(n-1)-2}}$$

Die Brauchbarkeit der Methode ist durch diese Modification nur wenig erhöht.

§ 4.

Versuch die Lagrange'sche Methode praktisch brauchbar zu machen.

I. Wir modificiren zunächst das Trennungsprincip in § 3. I.:

Es sei $f(x)=0$ eine algebraische oder transcendente Gleichung, $f(x)$ sowie die übrigen vorkommenden Functionen sollen zwischen den Grenzen a und $b>a$ endlich und stetig sein, und in (ab) keine

mehrfachen Wurzeln vorkommen, sodass nicht zugleich $f(x) = 0$ und $f_1(x) = f'(x) = 0$.

w und $w_1 > w$ seien zwei aufeinanderfolgende dieser Wurzeln, ferner

$$\Delta_1 \quad \text{oder} \quad \Delta'$$

eine untere Grenze der Wurzeldifferenz $(w_1 - w)$, je nachdem zwischen w und w_1

$$f(x) < 0 \quad \text{oder} \quad f(x) > 0.$$

Alsdann haben wir das Kriterium:

Zwischen einem beliebigen x und $t = x + \Delta'$ oder $x + \Delta_1$ befindet sich höchstens Eine Wurzel von $f(x) = 0$, je nachdem $f(x) < 0$ oder $f(x) > 0$.

II. Mit Hülfe des Taylor'schen Satzes und der, aus dem Sturm-schen Gleichungssystem in § 2. resultirenden, bekannten Relationen:

$$\begin{aligned} \lambda f_2 &= h_1 f_1 - l f \\ \lambda^2 f_3 &= h_2 f_1 - l_1 f \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \\ \lambda^{m-1} f_m &= h_{m-1} f_1 - l_{m-2} f, \end{aligned}$$

wo die Functionen h und l durch die Recursionsformeln:

$$\begin{aligned} h_r &= g_r h_{r-1} - \lambda h_{l-2} \\ l_r &= g_{r+1} l_{r-1} - \lambda l_{r-2} \end{aligned}$$

bestimmt sind, lassen sich, wie wir im Folgenden zeigen werden,

$$\Delta' \quad \text{und} \quad \Delta_1$$

auf verschiedene Weise berechnen.

Sämtliche in Klammern ( ) stehenden Ausdrücke sollen positive Grössen bedeuten.

Ferner, unter $F(x)$ eine Function verstanden, die in $(a\,b)$ positive Werte annimmt, d. h. nicht nur negativ ist, bezeichnen wir mit

$$<_{(Fx)}, \quad >_{(Fx)}$$

eine untere, obere Grenze der positiven Functionswerte (Fx) in Bezug auf das Intervall (a, b).

v sei eine zwischen w und w_1 liegende Wurzel von $f'(x) = 0$.

III. 1) Nach Taylor hat man:

$$f(w_1) = f(w) + (w_1 - w) f'(w) + (w_1 - w)^2 \frac{f''(u)}{2},$$

wo u zwischen w und w_1 und somit zwischen a und b liegt.

Daher mit Rücksicht auf die Relationen ad II.:

$$w_1 - w = \frac{2(\pm f'w)}{\mp f''u}$$

$$\Delta' = 2 \frac{\overset{<}{+} f'(w)}{\underset{>}{(-f''x)}}$$

$$= \frac{2(\pm \lambda^{m-1} f_m)}{\underset{>}{(\mp h_{m-1})} \cdot \underset{>}{(-f''x)}}$$

2) Hieraus erhalten wir einen 2ten Ausdruck für Δ', indem wir statt $\mp h_{m-1}$ setzen $\pm h_{m-1}$, wie sich ergiebt, wenn man w und w_1 miteinander vertauscht.

3) Einen 3ten Wert für Δ' findet man bei Zugrundelegung der Formeln:

$$f(w_1) = f(v) + (w_1 - v) f'(v) + (w_1 - v)^2 \frac{f''(u)}{2},$$

$$f(w) = f(v) - (v - w) f'(v) + (v - w)^2 \frac{f''(u_1)}{2}$$

nämlich

$$w_1 - w = \sqrt{2(\pm fv)} \left(\frac{1}{\sqrt{\mp f''u}} + \frac{1}{\sqrt{\mp f''u_1}} \right),$$

$$\Delta' = \sqrt{\frac{\overset{<}{8} (+fv)}{\underset{>}{(-f''x)}}}$$

$$= \sqrt{\frac{8(\pm \lambda^{m-1} f_m)}{\underset{>}{(\pm l_{m-2})} \cdot \underset{>}{(-f''x)}}}$$

4) Aehnlich einen 4ten wie folgt:

$$f(w_1) = f(v) + (w_1 - v) f'(u),$$

$$f(w) = f(v) - (v - w) f'(u_1).$$

Daher

$$w_1 - w = (\pm fv)\left(\frac{1}{\mp f'u} + \frac{1}{\pm f'u_1}\right).$$

$$\Delta' = \frac{(\pm \lambda^{m-1} f_m)}{(\mp l_{m-2})} \cdot \left(\frac{1}{(-f'(x)} + \frac{1}{(+f'x)}\right).$$

IV. 1) Δ_1 wie Δ' ad III. 1), mit dem Unterschied, dass im Nenner von Δ' die Vorzeichen in die entgegengesetzten zu verwandeln sind, um Δ_1 zu erhalten.

2)
3) Δ_1 analog wie vor aus III. 2), 3), 4).
4)

V. Durch wiederholte Anwendung des Kriteriums in I, wo Δ' und Δ_1 nach III und IV zu nehmen sind, können die reellen einfachen Wurzeln getrennt werden.

Erhöhen lässt sich die praktische Brauchbarkeit dieses Verfahrens durch Verbindung mit dem Sturm'schen Satz (§ 2.).

Anmerkung. Stellt sich heraus, dass die eingeklammerten Ausdrücke der Nenner von Δ' und Δ_1 zwischen a und b negativ bleiben, so ist damit angezeigt, dass zwischen a und x sowol als zwischen x und b höchstens je eine Wurzel enthalten ist.

In Betreff der Werte von Δ' und Δ_1 ad III 1), 2), 3) und IV 1), 2), 3) vergleiche § 22. III. —

Wir gehen zum Hauptgegenstand unserer Untersuchungen über.

II.

Gemeinsame Grundlage für die Methoden des Verfassers.

§ 5.

Trennungsprincip.

Es sei t eine einwertige Function von x, die sich zu jedem x leicht berechnen lasse und folgende Eigenschaften besitze:

$$x = w_r \quad \text{bedinge} \quad t = x$$

und

$$w_r < x < w_{r+1} \quad \text{bedinge} \quad t > x,$$

unter w_r, w_{r+1} zwei, der Grösse nach auf einanderfolgende Wurzeln von

$$fx = 0$$

verstanden.

Ferner: Wenn x von w_r bis w_{r+1} wächst, so nehme t, das wir uns wie x und die Wurzeln als Abscisse denken, zunächst ebenfalls zu, von w_r an, überschreite die Wurzel w_{r+1}, aber keine zweite, kehre in einem Werte t_0 wieder um und nehme ab bis w_{r+1}.

Angenommen, wir könnten eine solche Function t herstellen, so hätten wir folgenden Trennungsmodus gewonnen.

Zu einem beliebigen x (untere Grenze von w_{r+1}) berechnen wir t und finden so ein Intervall (xt), in welchem höchstens Eine Wurzel von $f(x) = 0$ liegt; zu t als $x = x_1$ bestimmen wir ein neues $t = t_1$ u. s. w. Auf diese Weise entsteht eine Reihe wachsender Zahlen:

$$x,\ t = x_1,\ t_1 = x_2,\ t_2 = x_3 \ldots$$

derart, dass zwischen je zwei auf einanderfolgenden sich keine oder eine Wurzel von $f(x) = 0$ befindet, je nachdem $f(x)$ für beide gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen hat.

Hiernach würden sich die einfachen Wurzeln der Reihe nach und zwar wie oben in positivem Sinne fortschreitend, trennen lassen.

Durch geringe Modification des Vorigen lässt sich ein Trennungsmodus denken, wobei man in negativem Sinne fortschreitet.

Solche Functionen t giebt es unendlich viele, wir stellen die einfachsten auf und behandeln darnach drei Methoden (siehe § 23.).

Obiges Trennungsprincip hat einige Aehnlichkeit mit dem von Lagrange (§§ 3., 4), nur dass die einzelnen Fortschritte $(t-x)$ nicht wie bei diesem einander gleich sind, sondern von x abhangen.

Bei nahezu gleicher Einfachheit und derselben Exactheit des Princips sind im Gegensatz zu der Lagrange'schen Methode die Rechenoperationen selbst bei algebraischen Gleichungen höherer Grade und und mit vielziffrigen Coefficienten leicht ausführbar, und die Methoden auch bei algebraischen und transcendenten Gleichungen, welche nahe aneinander liegende Wurzeln besitzen, praktisch brauchbar. (Siehe die Beispiele der §§ 24.—28.).

Im Falle zwei Wurzeln einander gleich sind, geht der Trennungsmodus in einen Annäherungsmodus über.

Die praktische Brauchbarkeit der Methoden lässt sich erhöhen durch Verbindung mit dem Fourier'schen Theorem (§ 1. I.) wie dies in den Beispielen teilweise geschehen. (Siehe die Anmerkungen zu § 23.).

§ 6.

Allgemeinste Formel zwischen x und t.

I. Wir gehen von einer Function

$$H(xt)]$$

der zwei von einander unabhängigen Variabeln x und t aus, mit folgenden Eigenschaften in den in Betracht kommenden Gebieten:

I) $H(xt)$ sei einwertig, endlich und stetig, desgl. die ersten und zweiten partiellen Differentialquotienten nach x und t:

$$\frac{\partial H}{\partial x} \cdots \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}$$

2) $\frac{dH}{\partial t}$ habe das Vorzeichen von $t-x$, sodass

$$\frac{\partial H}{\partial t}(xx) = \frac{\partial H}{\partial t}(tt) = 0.$$

3) $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$ sei > 0.

II. 1) Es ist allgemein:

$$H(xt) = \int \frac{\partial H}{\partial t}\, dt + \varphi(x)$$

$$= \int_x^t \frac{\partial H}{\partial t}\, dt + H(xx),$$

mithin

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \int_x^t \frac{\partial^2 H}{\partial t\, \partial x}\, dt = \frac{\partial H}{\partial t}(xx) + H'(xx),$$

wo $H'(xx)$ den ersten Differentialquotienten von $H(xx)$ nach x bezeichnet.

2) Die Eigenschaft ad I. 2) bedingt daher die folgende:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \int_x^t \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial x} dt + H'(xx),$$

sodass speciell

$$\frac{\partial H}{\partial x}(xx) = H'(xx).$$

Wir werden hiervon später Gebrauch machen.

III. 1) Die Eigenschaft der Function $H(xt)$ ad I. 2) bedingt ferner nachstehende:

Ist für ein gegebenes x

$$H(xx) < 0,$$

so hat $H(xt) = 0$, als Gleichung in t, eine und nur eine Wurzel, welche grösser als x, ebenso eine solche, die kleiner als x ist.

Ist $H(xx) = 0$, so fallen beide Wurzeln t mit x zusammen.

$(H(xx) > 0$ bedingt $H(xt) > 0.$

2) Eine weitere Eigenschaft ergiebt sich aus I. 3):

Ist für ein gegebenes t

$$H(tt) < 0,$$

so besitzt $H(xt) = 0$, als Gleichung in x, genau eine Wurzel grösser als t und eine kleiner als t.

3) Falls $H(tt) > 0$ ist, wird jene Gleichung höchstens durch zwei (reelle) Wurzeln x befriedigt, die beide grösser oder kleiner als t sind.

IV. 1) Sind x und t an die Gleichung

$$H(xt) = 0$$

gebunden; sehen wir x als unabhängige Variable an, so entspricht nach III. 1) jedem x für welches $H(xx)$ negativ ist, ein reelles $t > x$ und nur ein solches.

Im Folgenden soll unter t diese einwertige Function von x verstanden und $H(xx) \leqq 0$ vorausgesetzt sein.

Durch Differentiirung obiger Gleichung erhält man

$$\frac{\partial H}{\partial x} dx + \frac{\partial H}{\partial t} dt = 0.$$

Wenn

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \partial_{10}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = \partial_{01}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \partial_{20}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial t} = \partial_{11}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \partial_{02}$$

und die einwertigen Functionen von x, die ontstehen, wenn in

$$\partial_{10}, \ \partial_{01} \ \ldots \ \partial_{02}$$

statt t jone Fnnction von x gesetzt wird, mit

$$X_{10}, \ X_{01} \ \ldots \ X_{02}$$

bezeichnet werden, so folgt

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{X_{10}}{X_{01}}.$$

2) Differentirt man

$$X_{10} = \frac{\partial H}{\partial x}(xt)$$

nach x, so wird

$$X_{10}' = X_{20} + X_{11}\frac{dt}{dx}$$

und wegen 1):

$$X_{10}' = X_{20} - \frac{X_{11}}{X_{01}} \cdot X_{10}.$$

Hier ist $X_{20} > 0$ (s. I 3)) und der Factor von X_{10} endlich für jedes nicht mit einer Wnrzel von $H(xx) = 0$ zusammenfallendo x (s. III 1) nnd I 2)). Ist daher

$$X_{10} = 0, \quad \text{so ist} \quad X_{10}' = X_{20} > 0$$

und hieraus resultirt:

3) Die Gleichung $X_{10} = 0$ hat zwischen zwei anfeinander folgenden Wurzeln w_0 und w_1 von $H(xx)$, innerhalb welcher $H(xx) < 0$ ist, höchstens Eine Wurzel und wegen III 1) und II 2) genan eine solche:

x_0.

Denn X_{10} ist von der Form

$$X_{10} = \varphi(x) = \frac{\partial H}{\partial x}(x, \psi(x))$$

sodass

$$\varphi(w_0) = \frac{\partial H}{\partial x}(w_0, w_0) = H'(w_0, w_0)$$

und

$$\varphi(w_1) = \frac{\partial H}{\partial x}(w_1, w_1) = H'(w_1, w_1)$$

entgegengesetzte Vorzeichen haben.

V. Dies in Verbindung mit IV 1) und I 2) liefert folgende Fundamental-Sätze zur Trennung, worin w_0, w_1, x_0 die Bedeutung in IV haben.

1) Wächst x von w_0 bis x_0, so t (Wurzel $> x$ von $H(xt) = 0$) von w_0 bis t_0. Nimmt x weiter zu bis w_1, so t ab bis w_1; das t überschreitet also dabei die Wurzel w_1 von $H(xx) = 0$ und wegen III 3) nur diese.

2) Für die Wurzel $t < x$ der Gleichung in $t: H(xt) = 0$ gilt Aehnliches:

Nimmt x von w_1 bis zu einem gewissen x_0 ab, so t von w_1 bis t_0 ab; nimmt x weiter bis w_0 ab, so t bis w_0 zu.

Diese x_0, t_0 sind von denen ad 1) verschieden.

3) Zwischen zwei nach 1) oder 2) zusammengehörigen x und t hat hiernach die Gleichung

$$H(xx) = 0$$

höchstens Eine Wurzel; um so mehr in jedem Intervall (xt_1) oder $(t_1 x)$, dessen Grenzen an die Ungleichheiten

$$H(xx) < 0 \quad \text{und} \quad H(xt_1) < 0$$

gebunden sind.

§ 7.

Besondere Form von $H(xt)$.

I. Wir setzen

$$H(xx) = -\varkappa f(x),$$

wo $f(x)$ die gegebene Function, $\varkappa$ vorläufig eine beliebige Constante bedeutet, und

$$\frac{\partial H}{\partial t} = (t-x)\,\varphi(t) = (t-x)\,F''(t)$$

ist, sodass

$$\int \frac{\partial H}{\partial t}\,dt = (t-x)\,F'(t) - F(t) + \psi(x),$$

$$H(xt) = (t-x)\,F'(t) - F(t) + G(x)$$

wo

$$G(x) = F(x) - \varkappa f(x)$$

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass auf obige Function $H(xt)$ die Sätze in § 6 V anwendbar seien, lauten:

1) $\varkappa f(x) > 0$.

2) In einem das gegebene x und die gesuchte Wurzel t, $\gtrless x$, der Gleichung $H(xt) = 0$ einschliessenden Intervalle (cc') müssen

endlich und stetig,

$$F(x),\ F'(x),\ F''(x)$$

$$F''(x) > 0,$$

$$G''(x) = F''(x) - \varkappa f''(x) > 0$$

sein.

II. Geometrische Bedeutung.

1) die Curven

$$y = F(x)$$

und

$$y = G(x)$$

sind, in der Richtung der positiven Y-Achse gesehen, convex.

Die reellen Wurzeln von $f(x) = 0$ erhält man als Abscissen der Durchschnitte beider.

2) Das zu x gesuchte $t\left(\gtrless x\right)$, welches $H(xt) = 0$ befriedigt, ist die Abscisse des Berührungspunktes der vom Punkt mit den Coordinaten x und $G(x) = F(x) - \varkappa f(x)$ an die Curve $y = F(x)$ an[f] der positiven, bezüglich negativen Seite der Ordinate von x gezogenen Tangente.

III. Wir giengen ad I von der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial H}{\partial t} = (t-x)F''(t)$ aus und gelangten zu dem Resultat, dass $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$ eine Function nur von x sein muss.

Gehen wir umgekehrt hiervon aus, d. h. setzen wir

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = G''(x)$$

sodass

$$\frac{\partial H}{\partial x} = G'(x) - F'(t)$$

und schreiben

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \varphi(xt) \cdot F''(t)$$

so wird

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x\, \partial t} = \frac{\partial^2 H}{\partial t\, \partial x} = -F''(t) = F''(t) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

folglich

$$\varphi(xt) = \psi(t) - x$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = (\psi(t) - x) F''(t)$$

woraus wegen § 6 I 2)

$$\psi(t) = t,$$
$$\frac{\partial H}{\partial t} = (t-x)F''(t)$$

Demnach gelangen wir auf diese Weise zu derselben Form für $H(xt)$ und zu keiner andern.

III.

Fall I: $F(x) = x^2 + Ax + B$, als Basis für die Methoden I, I^a, I^b (§ 23).

§ 8.

Formeln für diese Methoden.

Substituiren wir in den Ausdruck für $H(xt)$ (§ 7 I)

$$F(x) = x^2 + Ax + B, \quad F'(x) = 2x + A, \quad F''(x) = 2$$

so wird

$$H(xt) = (t-x)(2t+A) - (t^2-x^2) - A(t-x) - \varkappa fx = (t-x)^2 - \varkappa f(x)$$

Diese Function wird null für

$$t = x \pm \sqrt{\varkappa f(x)}$$

und wir haben die Bedingungen:

$$\varkappa f(x) > 0 \quad \text{und} \quad 2 - \varkappa f''(x) (= G''x) > 0$$

in einem x und t einschliessenden Intervall $(c\,c')$.

Oder was dasselbe:

$$\varkappa = \frac{2}{g}$$

wo $g = \overset{>}{<} f''(x) = \left\{ \begin{matrix} \text{obere} \\ \text{untere} \end{matrix} \right\}$ Grenze von $f''(x)$ in Bezug auf $(c\,c')$, jenachdem $f(x) \overset{>}{<} 0$ und

$$gf(x) > 0$$

Anmerkung: Ist $f''(x) \lesseqgtr 0$ in (cc') und resp. $f(x) \gtreqless 0$, so liegt sowol zwischen x und c' als zwischen x und c höchstens Eine Wurzel.

§ 9.

Hülfskriterien zu Methode I^a und I^b (§ 23).

Wir greifen zu der allgemeinen Abhängigkeitsformel zwischen x und t in § 6

$$H(xt) = 0$$

zurück, unter Beibehaltung der dortigen Voraussetzungen und Bezeichnungen.

Wie in § 6 seien w_0 und w_1 zwei aufeinander folgende Wurzeln von

$$H(xx) = -xfx = 0,$$

$H(xx)$ zwischen denselben negativ.

Zu jedem x zwischen jenen Wurzeln gehören 2 reelle t, die der Gleichung $H(xt) = 0$ genügen, das eine $t > x$, das andere $t < x$ (§ 6 III 1)) und umgekehrt: zu jedem t gehören höchstens zwei x, genau zwei, wenn t sich zwischen w_0 und w_1 befindet (§ 6 III 2) und 3)), oder ausserhalb zwischen w_1 und t_{max}, bezüglich zwischen w_0 und t_{min} (§ 6 V 1) und 2)).

Es sei t beliebig zwischen w_1 und t_{max} gegeben, so ist $H(xt)$ eine Function nur von x, $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(xt) > 0$ (§ 6 I 3)) und nach dem Vorigen $H(xt) = 0$ für 2 Werte von x, die kleiner als t sind; daher $\frac{\partial H}{\partial x}(tt) > 0$ und wegen § 6 II 2)

$$xf'(t) > 0$$

Aehnlich zwischen w_0 und t_{min}:

$$xf'(t) < 0$$

Dies verbunden mit § 6 V 3) liefert folgende

Hülfssätze.

1) Liegt zwischen dem gegebenen x und der Wurzel t, $\gtrless x$, von $H(xt) = 0$ eine Wurzel w von $f(x) = 0$, so behält die erste Derivirte

$$f'(x)$$

zwischen diesem w und t ihr Vorzeichen.

2) Haben $f(x_1)$ und $f(x_2)$ $\left\{\begin{array}{l}\text{gleiche}\\ \text{entgegenges.}\end{array}\right\}$ Vorzeichen, und ist

$$x_1 < t_2 < t_1 < x_2$$

wo x_1, t_1 und x_2, t_2 zwei Paare zusammengehöriger x, t sind, so enthält das Intervall

$$(x_1 x_2)$$

$\left\{\begin{array}{l}\text{keine}\\ \text{eine}\end{array}\right\}$ Wurzel von $f(x) = 0$.

3) Ist

$$x_1 < t_1 < t_2 < x_2$$

nnd liegen zwischen x_1 nnd x_2 zwei oder mehr Wurzeln von $f(x) = 0$, so sind

$$t_1 \quad \text{nnd} \quad t_2$$

engere Grenzen für die zwischen der kleinsten und grössten jener Wnrzeln befindlichen Wurzeln von

$$f'(x) = 0.$$

Von diesen Sätzen werden wir später Gebrauch machen (§ 23).

IV.

Fall II: $F(x) = (x-c+a)^r$, wo $c < x$, $a > 0$, $r = 3, 4 \ldots$[1]), als Basis für Methode II.

§ 10.

Grundformeln für Methode II ($t > x$).

I. Hier ist (s. § 7 I):

$$H(xt) = r(t-x)(t-c+a)^{r-1} - (t-c+a)^r + (x-c+a)^r - \varkappa f(x)$$

$$\frac{H(xt)}{(x-c+a)^r} = r(z-1)z^{r-1} - z^r + 1 - \frac{\varkappa f(x)}{(x-c+a)^r}$$

wo

$$z = \frac{t-c+a}{x-c+a} > 1$$

Dio Wurzel $t, > x$, von $H(xt) = 0$ ist durch die Formeln gegeben:

$$t - x = (x-c+a)(z-1)$$
$$\varphi(z) = (r-1)z^r - rz^{r-1} + 1 = Q$$
$$Q = \frac{\varkappa f(x)}{(x-c+a)^r} > 0,$$

wo $\varkappa$, von demselben Vorzeichen wio fx, hinreichond klein ist und zwar so, dass zwischen c nnd c', $\geqq t$

$$G''(x) = r(r-1)(x-c+a)^{r-2} - \varkappa f''(x) > 0$$

II. Es genügt für unseren Zweck (s. § 6 V, 3) dio Bedingung

$$\varphi(z) < Q$$

zu erfüllen (statt t einen Nähernngswert t_1 anf der negativen Seite zn nehmen).

---

1) Die Annahme $r = 2$ führt auf Fall I.

§ 11.

Die Functionen $\varphi(z)$ und $\psi(z) = \log(\varphi z)$.

I. 1) Es ist

$$\varphi(z) = (r-1)z^r - rz^{r-1} + 1$$
$$= (z-1)^2(1 + 2z + 3z^2 + \ldots (r-1)z^{r-2})$$
$$\varphi'(z) = r(r-1)(z-1)z^{r-2}$$
$$\varphi''(z) = r(r-1)((r-1)z - (r-2))z^{r-2}$$

2) $$\psi(z) = \log(1 + z^{r-1}((r-1)z - r))$$
$$\psi'(z) = \frac{\varphi' z}{\varphi z}$$
$$\psi''(z) = -r(r-1)\frac{z^{r-3}}{(\varphi z)^2} \cdot G(z)$$

wo

$$G(z) = (r-1)z^{r+1} - 2(r-1)z^r + rz^{r-1} - (r-1)z + (r-2)$$
$$(G'(z) = r z^{r-2}(z-1)^2 + z^r - 1)$$

II. Man findet

1) $\varphi(1) = 0, \quad \varphi'(1) = 0, \quad \varphi''(1) = 0$

und für $z > 1$:

$$\varphi(z) > 0, \quad \varphi'(z) > 0, \quad \varphi''(z) > 0$$

2) $\psi(1) = -\infty, \quad \psi'(1) = +\infty, \quad \psi''(1) = -\infty$

ferner

für $z \lessgtr \frac{r}{r-1}$: $\psi(z) \lessgtr 0$

- $z > 1$: $\psi'(z) > 0, \quad \psi''(z) < 0$
(da $G'(z) > 0, \quad G(1) = 0$)

Hieraus erkennt man den Verlauf der Functionen $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ für $z > 1$.

III. Erfüllung der Bedingungen in § 10 II:

$$\varphi(z) < Q.$$

1) Ist $z' > 1, \quad z'' - 1 = (z'-1)\sqrt{\frac{Q}{\varphi(z')}}$

$$= 1 + \sqrt{\frac{Q}{1 + 2z' + \ldots (r-1)z'^{r-2}}}$$

so liegt die Wurzel, > 1, von $\varphi z = Q$ zwischen z' und z''.

Denn fassen wir z'' als Function von z' auf, und ist ein gegebenes $z' \lessgtr z''$, so nimmt, wenn z' grösser, bezüglich kleiner wird, gleichzeitig z'' ab, zu. Zwischen z' und z'' muss also $z' = z''$ werden, mithin $\varphi(z) = Q$.

2) Ist Q sehr klein (was der Fall ist, wenn sich x in der Nähe einer Wurzel befindet), so hat man näherungsweise für die Wurzel von $\varphi(z) = Q$:

$$z = 1 + \sqrt{\frac{2Q}{r(r-1)}}$$

3) Ist $Q > 1$, so wird $\varphi(z) < Q$ durch

$$z = \sqrt[r]{\left(\frac{r}{r-1}\right)^r + \frac{Q-1}{r-1}}.$$

4) Für die Fälle $r = 3, 4, 5$ und 6 hat der Verfasser in Grunert Archiv T. 60 eine Tabelle über $\log(\varphi_r z)$ gegeben (z zwischen 1,00001 und 100), aus der sofort brauchbare Werte von z abgelesen werden können.

Anmerkung: Die Werte $\log(\varphi_r z)$ wurden für $z < \frac{r}{r-1}$ um 10 erhöht.

V.

Fall III: $F(x) = e^{a(x-c)}$, wo $c \leqq x$, $a > 0$, als Basis für Methode III.

§ 12.

Grundformeln für Methode III.

I. Im vorliegenden Fall ist (s. § 7 I)

$$H(xt) = (a(t-x) - 1)e^{a(t-c)} + e^{a(x-c)} - \varkappa f(x) = 0$$

und die Wurzel t von $H(xt) = 0$ gegeben durch

$$t - x = \frac{z}{a} > 0$$

$$\varphi(z) = 1 + (z-1)e^z = Q > 0$$

$$Q = \frac{\varkappa f(x)}{e^{a(x-c)}} > 0$$

wo $\varkappa f(x) > 0$, $\varkappa$ hinreichend klein, sodass zwischen c und c', $\geqq t$:

$$G''(x) = a^2 e^{a(x-c)} - \varkappa f''(x) > 0.$$

II. Für unsern Zweck genügt:

$$\varphi(z) < Q$$

und zwar so, dass z ein Näherungswert des z ad I auf der negativen Seite ist.

§ 13.

Die Functionen $\varphi(z)$ und $\psi(z) = \log(\varphi z)$.

I. 1) Es ist:

$$\varphi(z) = 1 + (z-1)e^z$$
$$= \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{1!3}z^3 + \frac{1}{2!4}z^4 + \dots$$
$$\varphi'(z) = z e^z$$
$$\varphi''(z) = (z+1)e^z$$

2) $$\psi(z) = \log(1 + (z-1)e^z)$$
$$\psi'(z) = \frac{\varphi' z}{\varphi z}$$
$$\psi''(z) = \frac{1+z-e^z}{(\varphi z)^2} \cdot e^z$$

II. Der Verlauf der Functionen $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ ergiebt sich aus Folgendem.

1) $\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 0, \quad \varphi''(0) = +1$

Für $z > 0$ ist:

$$\varphi(z) > 0, \quad \varphi'(z) > 0, \quad \varphi''(z) > 0$$

2) $\psi(0) = -\infty, \quad \psi'(0) = +\infty, \quad \psi''(0) = +\infty$

Für $z \begin{matrix} = \\ < \\ > \end{matrix} 1$ ist $\psi(z) \begin{matrix} = \\ < \\ > \end{matrix} 0$

- $z > 0$ - $\psi'(z) > 0, \quad \psi''(z) < 0$

III. Zur Berechnung des z in § 12 II können folgende Sätze dienen:

1) Zwischen einem beliebigen z' und $z'' = 1 + \frac{Q-1}{e^{z'}}$ liegt die Wurzel von $\varphi(z) = Q$ (vergl. § 11 III 1)).

2) Ist Q sehr klein, so ist die Wurzel von $\varphi(z) = Q$ annähernd $= \sqrt{2Q}$.

3) Ist $Q < 1$, so befriedigt $z = \sqrt{Q}$ die Ungleichheit $\varphi(z) < Q$.

4) Aus der am Schlusse dieser Untersuchungen befindlichen Tabelle über $\log(\varphi z)$, für Werte von z zwischen 0,01 und 10, lässt sich $\varkappa$ ohne Weiteres ablesen.

VI.

Besondere Behandlung der Fälle II und III.

§ 14.

Berechnung von $\varkappa$ *mittelst* $\gtrless f''(x)$ [1].

Ist für das gegebene x: $f(x) \lesseqgtr 0$, so ist auch $\varkappa \gtreqless 0$; daher eine untere Grenze von $G''(x)$ in Bezug auf das Intervall (cc')

$$\lessgtr G''(x) = F''(c) - \varkappa \gtrless f''(x).$$

Es genügt somit, je nachdem $f(x) \gtrless 0$,

$$\varkappa = \frac{F''(c)}{g},$$

wo

$$g = \gtrless f''(x),$$

vorausgesetzt, dass $gf(x) > 0$, sonst

$$\varkappa \text{ beliebig } \gtrless 0.$$

Im Fall II ist $F''(c) = r(r-1)a^{r-2}$.

Im Fall III: $F''(c) = a^2$.

Wir werden hierauf nicht näher eingehen, weil diese Berechnung von $\varkappa$ nur ein theoretisches Interesse darbietet. (Vergl. Fall I).

§ 15.

$\varkappa$ *ausgedrückt durch* $\gtrless f^u(x)$.

I. 1) Wir denken uns die Functionen $F''(x)$ und $f''(x)$ nach steigenden Potenzen von $(x-c)$ entwickelt und zwar soweit, dass die Restglieder die v te bezüglich u te Derivirte enthalten, wo

---

1) $\gtrless f''(x)$ bedeute, wie früher, eine $\left\{\begin{matrix}\text{obere}\\\text{untere}\end{matrix}\right.$ Grenze von $f''(x)$ in Bezug auf (cc')

u nicht < 3 und nicht $> n$,

v - < 3 - - $> u$,

$= r$ ad Fall II (sodass $2 < r \leqq n$),

$n =$ Grad der Gleichung $f(x) = 0$,

$= \infty$, wenn $f(x)$ transcendent.

2) Ist $v = u$, so ist:

$$G''(x) = \sum_{2}^{u} (F^p(x_p) - \varkappa f^p(x_p)) \frac{(x-p)^{p-2}}{(p-2)!}$$

wo

$$x_2 = x_3 = \ldots = x_{u-1} = c$$
$$c < x_u < x < c'$$

Eine untere Grenze von $G''(x)$, bezogen auf das Intervall (cc') ist:

$$\lessgtr G''(x) = \sum_{2}^{u-1} (F^p(c) - \varkappa f^p(c)) \frac{(x-c)^{p-2}}{(p-2)!}$$
$$+ (F^u(c) - \varkappa \lessgtr f^u(x)) \frac{(x-c)^{u-2}}{(u-2)!}$$

je nachdem $f(x) \gtrless 0$.

3) Ist $v < u$, so ist:

$$G''(x) = \sum_{2}^{v} (F^p(\xi_p) - \varkappa f^p(x_p)) \frac{(x-c)^{p-2}}{(p-2)!} + \sum_{v+1}^{u} - \varkappa f^p(x_p) \frac{(x-c)^{p-2}}{(p-2)!}$$

wo

$$\xi_2 = \xi_3 = \ldots = \xi_{v-1} = c,$$
$$c < \xi_v < x < c',$$
$$x_p \text{ wie oben,}$$

$$\lessgtr G''(x) = \sum_{2}^{v} (F^p(c) - \varkappa f^p(c)) \frac{(x-c)^{p-2}}{(p-2)!}$$
$$+ \sum_{v+1}^{u-1} - \varkappa f^p(c) \frac{(x-c)^{p-2}}{(p-2)!} - \varkappa \lessgtr f^u(x) \frac{(x-c)^{u-2}}{(u-2)!}$$

wenn $f(x) \gtrless 0$.

II. 1) Ist $v = u$ und setzt man

$$x_p = \frac{F^p(c)}{f^p(c)} \text{ für } p = 2 \ldots u-1$$

$$x_u = \frac{F^u(c)}{\gtrless f^u(x)}, \text{ falls } fx \gtrless 0$$

so wird der Bedingung $G^n(x) > 0$ genügt durch $x =$ dem absolut kleinsten x_p unter den $\left\{\begin{matrix}\text{pos.}\\ \text{neg.}\end{matrix}\right\}$ Gliedern der Reihe:

$$x_2,\ x_3 \ldots x_u,$$

je nachdem $f(x) \gtrless 0$ für das gegebene x.

Es sei dies symbolisch bezeichnet durch

$$\begin{aligned} x &= (x_2, x_3, \ldots x_u)\pm \\ &= (x_p)_{2,u}\pm \\ &= x_{2,u}\pm \\ &= (x_{p_1}, x_{p_2} \ldots x_{p_m}), \end{aligned}$$

wo die in der letzten Klammer stehenden x_p der Reihe nach diejenigen sind, deren Vorzeichen mit dem von $f(x)$ übereinstimmen, bezüglich $\pm$, und das letzte Symbol das absolut kleinste dieser x_p bedeute.

2) Die Wahl $v < u$ bedingt, dass

$$f^{v+1}(c) \ldots f^{u-1}(c),\ \gtrless f^u(x)$$

sämtlich $\lessgtr 0$ seien, ausserdem das Vorzeichen von $f(x) = \pm$.

Ist unter der einen oder anderen dieser Voraussetzungen, in betreff obiger Reihe, bezüglich

$$f(x) \gtrless 0,$$

so genügt x wie ad 1), nur v statt u gesetzt, d. i.

$$\begin{aligned} x &= (x_2 \ldots x_v)\pm \\ &= (x_{p_1}, x_{p_2} \ldots x_{p_m}) \end{aligned}$$

wo

$$x_p = \frac{F^p(c)}{f^p(c)}$$

Anmerkung: In beiden Fällen ist, wenn $f(x) \gtrless 0$ und $x_2 \ldots x_u$ sämtlich $\left\{\begin{matrix}\text{neg.}\\ \text{pos.}\end{matrix}\right\}$ sind, bezüglich

$$x \text{ beliebig} \gtrless 0.$$

III. 1) Nach Taylor ist

$$f(x+c) = f(c) + \frac{f'(c)}{1}\cdot x + \frac{f''(c)}{2!}\cdot x^2 + \ldots \frac{f^u(x_u)}{u!}\cdot x^u$$

wo

$$x \gtrless c$$

sei, und hieraus bilden wir, falls

$$f(x) \gtrless 0$$

für das gegebene x, die Hülfsgleichung:

$$\gtrless f(x+c) = f(c) + \frac{f'(c)}{1} \cdot + \ldots \frac{f^{u-1}(c)}{(u-1)!} + \gtrless \frac{f^u(x)}{u!} x^u = \sum_0^u b_p x^p$$

und können hiernach schreiben:

$$x_p = \frac{F_p(c)}{p!\ b_{.p}}$$

somit ad Fall II: $x_p = \dfrac{(p^r)\, a^{r-p}}{b_p}$,

- Fall III: $x_p = \dfrac{a^p}{b!\ b_p}$.

Ist $v < u$, so stimmt b_p mit dem Coefficienten der $p$ten Potenz von x in obigem Ausdruck für $f(x+c)$ überein.

2) Die, bei der Berechnung von x nach II in Betracht kommenden Indices

$$p_1, p_2 \ldots p_u$$

sind diejenigen Exponenten, grösser als 1, der Gleichung

$$\gtrless f(x+c) = 0$$

zu welchen $\left\{ \begin{matrix} \text{pos.} \\ \text{neg.} \end{matrix} \right\}$ Coefficienten b_p gehören.

§ 16.

x als Function von a.

I. Je nachdem

$$f(x) \gtrless 0$$

ist, hat man:

$$K = \pm x = (\pm x_2, \pm x_3 \ldots \pm x_v)^+$$
$$= (\pm x_{p_1}, \pm x_{p_2} \ldots \pm x_{p_m})$$

wo die Glieder in dem letzten Symbol positiv sind, $p_1 \ldots p_u$ die Bedeutung in § 15 haben.

Jene sind von der Form:

$$\pm x_p = C_s a^s = K_s \quad (> 0)$$

und wenn wir sie nach fallenden Potenzen von a ordnen, so entsteht:

$$K = (K_h \dots K_s \dots K_g),$$

wo

ad Fall II: $s = r - p$

$$C_s = \pm \frac{(r_p)}{b_p}, \text{ wenn } b_p \gtrless 0$$

$$h = r - p_1$$

$$g = r - p_m$$

ad Fall III: $s = p$

$$C_s = \pm \frac{1}{p!\, b_p}, \text{ wenn } b_p \gtrless 0$$

$$h = p_m$$

$$g = p_1.$$

2) Machen wir dio obige Reihe der K_s zu oiner vollständigen, indem wir Glieder mit unendlich grossen positiven Coefficienten einschalten, so können wir setzen:

$$K = (K_h,\ K_{h-1} \dots K_{g+1},\ K_g).$$

II. 1) Es möge mit

$$a_{s,t} \quad \text{oder} \quad a_{t,s}$$

dasjonige a bezeichnet werden, welches

$$K_s = K_t$$

erfüllt, ferner mit

$$a_s$$

das grösste a unter $a_{s,s+1}$, $a_{s,s+2}$, $\dots$ $a_{s,h}$, mit

$$a_s'$$

das kleinste a nnter $a_{s,s+1}$, $a_{s,s+2}$ $\dots$ $a_{s,g}$.

2) Unter der Voraussetznng

$$a_s' > a_s$$

ist:

$$K = K_s$$

zwischen a_s nnd a_s' speciell:

$$K = K_h \text{ im Intervall } (0,\ a_h')$$

$$K = K_g \quad \text{-} \quad \text{-} \quad (a_g\ \infty)$$

Findet jones nicht statt, so kann K nicht die Form K_s annehmen.

3) Ist

$$a_s' = a_{st} > a_s,$$

so geht, in a_s', K_s in K_t über, es schliesst sich an das Intervall $(a_s\, a_s')$ unmittelbar $(a_t\, a_t')$ an, nnd es ist

$$g < t < s.$$

Denn wäre $t > s$, d. h. eine der Zahlen $s+1, s+2 \ldots h$, so müsste nach der Definition $a_s \overline{>} a_{s,t}$ sein, was gegen die Annahme ist.

Hieraus resultirt der Satz:

4) Stellt man K dar durch

$$K = K_s = C_s a^s$$

oder $x = \pm K$ durch

$$x = D_s a^s$$

so ändert sich s bei gewissen Werten von a sprungweise, während K stetig bleibt, und es nehmen bei wachsendem a die s ab.

§ 17.

$T = (t-x)$ als Function von z für den Fall $c = x$.

I. 1) Im Fall II ist (s. § 10 und § 16 II 4)):

$$T = a(z-1)$$

$$\varphi(z) = \frac{D_s f(x)}{a^p}$$

Daher

$$T = (z-1)\sqrt[p]{\frac{D_s f(x)}{\varphi(z)}} = A\psi(z)$$

wo

$$A = \sqrt[p]{D_{r-p} f(x)},$$

$$\psi(z) = \frac{z-1}{\sqrt[p]{\varphi(z)}}$$

$$z > 1$$

2) Im Fall III ist (s. § 12 und § 16 II 4)):

$$T = \frac{z}{a}.$$

$$\varphi(z) = xf(x) = D_s a^s f(x)$$

$$z > 0$$

folglich wegen $s = p$:

$$T = z\sqrt[p]{\frac{D_s f(x)}{\varphi(z)}} = A\psi(z)$$

wo

$$A = \sqrt[p]{D_p f(x)}$$

$$\psi(z) = \frac{z}{\sqrt[p]{\varphi(z)}},$$
$$z > 0$$

3) Jedem a entspricht, nach obigen Formeln für $\varphi(z)$, ein bestimmtes z und umgekehrt.

Während a sich stetig von 0 bis $+\infty$ ändert, durchläuft

im Fall II: z die Werte von $+\infty$ bis 1,
- Fall III: z - - - 0 - $+\infty$.

4) Aus dem Vorigen erkennt man, dass in den Ausdrücken für T bei gewissen Werten von z

p

sich sprungweise ändert.

II. Verlauf von $\psi(z)$ bei constantem $p (z > 1)$

a) Fall II.

1) Es ist:

$$\psi(z) = \frac{z-1}{\sqrt[p]{\varphi(z)}}$$

und mit Rücksicht auf § 11 I 1):

$$\psi'(z) = ((\varphi z)^{\frac{1}{p}} - \frac{1}{p}(z-1)(\varphi z)^{\frac{1}{p}-1}.\varphi'(z))\frac{1}{(\varphi z)^{\frac{2}{p}}}$$

$$= \frac{M(z)}{p(\varphi z)^{\frac{1}{p}+1}}$$

$$= \frac{(z-1)^2 G(z)}{(\varphi z)^{\frac{1}{p}+1}} = \frac{G(z)}{(1+2z+..(r-1)z^{r-2})\sqrt[p]{\varphi z}}$$

wo

$$M(z) = -(z-1)\varphi'(z) + p\varphi(z)$$
$$= -(r-1)(z-1)^2 z^{r-2} + p((r-1)z^r - rz^{r-1} + 1)$$
$$= -z^{r-2} N(z) + p$$
$$= -z^{r-2}((r-1)(r-p)z^r - r(2(r-1)-p)z^{r-1} + r(r-1)) + p$$
$$= p(z-1)^2 G(z)$$

$$G(z) = -\frac{\varphi'(z)}{p(z-1)} + \frac{\varphi(z)}{(z-1)^2}$$

$$= -\frac{(r-1)(r-p)}{p} z^{r-2} + (r-2) z^{r-3} + (r-3) z^{r-4} + \ldots 2z + 1$$

2) Diese Gleichung hat nur dann Eine positive Wurzel

$$z_s''$$

wenn

$$2 < p < r$$

was $r \geqq 4$ bedingt.

z_s'' ist zugleich die einzige positive Wurzel, > 1, von

$$\psi'(z) = 0$$

und die Wurzel, > 1, von

$$M(z) = 0$$

3) Ist $\psi'(z)$, und also auch $G(z)$, $\gtrless 0$, so nimmt an der betreffenden Stelle $\psi(z) \left\{ \begin{matrix} \text{zn} \\ \text{ab} \end{matrix} \right\}$, und da

$$G(1) = r\frac{(r-1)(p-2)}{2} \gtrless 0, \text{ wenn } p \gtrless 2,$$

$$G(+\infty) < 0, \text{ falls } p < r, \text{ sonst } > 0,$$

so folgt:

Ist $p = 2 < r$, so nimmt ψ ab zw. 1 u. $+\infty$ u. zwar von 1 bis 0

- $p = r > 2$, - - ψ zn - 1 - $+\infty$ - - - 0 - $\sqrt[r]{\frac{1}{r-1}}$

- $2 < p < r$, - ist $\psi(z_s'')$ ein Maximum

und es nimmt von $z = 1$ bis $z = z_s''$: ψ zu, weiterhin ab.

b) Fall III.

1) Hier ist

$$\psi(z) = \frac{z}{\sqrt[p]{\varphi(z)}}, \text{ wo } \varphi(z) = 1 + (z-1)e^z$$

$$\psi'(z) = \frac{p\varphi(z) - z\varphi'(z)}{\frac{1}{(\varphi z)^p} + 1}$$

$$= \frac{G(z)}{\frac{1}{(\varphi z)^p} + 1}$$

wo

$$G(z) = p - e^z(z^2 - pz + p) = p\varphi(z) - z^2 e^z$$
$$= \left(\frac{p}{2} - 1\right) z^2 + \frac{1}{1!}\left(\frac{p}{3} - 1\right) z^3 + \frac{1}{2!}\left(\frac{p}{4} - 1\right) z^4 + \ldots$$

$$(G'(z) = -ze^z(z - p + 2))$$

2) Man findet ähnlich wie ad 1):

Ist $p = 2$, so nimmt, während z von 0 bis $+\infty$ wächst, $\psi(z)$ ab nnd zwar von $\sqrt{2}$ bis 0.

Ist $p > 2$, so ist $\psi(z_s'')$ ein Maximum nnd es nimmt von $z = 0$ bis $z = z_s''$: $\psi(z)$ zu, dann beständig ab. $(\psi(0) = 0,\ \psi(\infty) = 0)$

$$z_s''$$

ist die pos. Wurzel von $G(z) = 0$ nnd anch von $\psi'(z) = 0$.

§ 18.

Grösster Wert der Function T, falls x const = c, a variabel.

I. Bezeichnungen.

1) Es seien

$$z_s,\quad z_s';\qquad a_s''$$

diejenigen Werte von z, bezüglich a, die nach den Formeln für $\varphi(z)$ in § 17. I. 1) nnd 2)

$$a_s,\quad a_s';\qquad z_s''$$

entsprechen.

2) Von den Zahlen a_s, a_s', a_s'' sei

$$a_s'''$$

die mittlere, das zngehörigo z:

$$z_s'''$$

Dieses z_s''' ist zngleich der mittlere Wert von

$$z_s,\quad z_s',\quad z_s''$$

3) Von sämtlichen a desjenigen Intervalls

$$(a_s,\ a_s')$$

worin $\varkappa = D_s\, a^s$, sei

$$^{\nu}a_s$$

das vorteilhafteste a, d. h. dem für dieses Intervall das grösste T:

$$^{\nu}T_s$$

entspricht. Das zugehörigo z sei:

$$^{\nu}z_s.$$

4) Die überhaupt vorteilhaftesten a, z, T seien

$$^{\nu}a\,,\quad ^{\nu}z\,,\quad ^{\nu}T$$

womit wir auch der Kürze halber

$$^{\nu}a_s,\quad ^{\nu}z_s,\quad ^{\nu}T_s$$

bezeichnen wollen, wenn vom Intervall (a_s, a_s') die Rede ist.

5) Die Reihe der bei wachsendem a auf einander folgenden Ausdrücke für k (§ 16. II. 4)) sei

$$D_h a^h \ldots D_m a^m \ldots D_s a^s,\quad D_t a^t \ldots D_g a^g$$

sodass

$$h \overset{>}{=} \ldots m > \ldots s > t \ldots \overset{>}{=} g$$

Ferner bedeute

$$^{\nu}a_{m\ldots t}$$

das $^{\nu}a$ im Intervall

$$(a_m a_t')$$

II. Grösstes T für das Intervall $(a_s a_s')$.

1) Fall II.

wenn $p = 2 < r$, so ist $^{\nu}a_s = a_s'$,
„ $2 < p = r$ „ $^{\nu}a_s = a_s'$,
„ $2 < p < r$ „ $^{\nu}a_s = a_s^{m}$

($\log {}^{\nu}a_s =$ dem mittleren der Werte $\log a_s$, $\log a_s'$, $\log a_s''$).

2) Fall III

wenn $p = 2$, so ist $^{\nu}a_s = a_s$
„ $p > 2$ „ $^{\nu}a_s = a_s^{m}$

3) Setzen wir

im Fall II: $a''_{r-2} = +\infty$, $a''_0 = 0$
„ „ III: $a_2'' = 0$,
so gilt allgemein

$$^{\nu}a_s = a_s^{m},$$
$$1 = {}^{\nu}T_s$$

(Siehe I. 3.)).

III. Voruntersuchung zur Ermittlung des überhaupt grössten T.

a) Fall II.

Es sei

$$r-2 > s > t > 0$$

$$\sigma = \frac{a_{s,t}}{a_s''}, \quad \tau = \frac{a_{st}}{a_s''},$$

wo nach § 16.

$$a_{s,t} = a_s' = a_t = \sqrt[s-t]{\frac{D_t}{D_s}}$$

und nach § 18. I. 1)

$$a_s'' = \sqrt[r-s]{\frac{D_s f(x)}{\varphi(z_s'')}}, \quad a_t'' = \sqrt[r-t]{\frac{D_t f(x)}{\varphi(z_t'')}}$$

2) Man erhält

$$\sigma^{(r-s)(s-t)} = \frac{D_t{}^{r-s}}{D_s{}^{r-t}} \cdot \frac{(\varphi z_s'')^{s-t}}{(f(x)^{s-t}},$$

$$\tau^{(r-t)(s-t)} = \frac{D_t{}^{r-s}}{D_s{}^{r-t}} \cdot \frac{(\varphi z_t'')^{s-t}}{(fx)^{s-t}}$$

und hieraus

3) $$\frac{\sigma^{r-s}}{\tau^{r-t}} = \frac{\varphi z_s''}{\varphi z_t''} < 1$$

nämlich < 1, da $z_t'' > z_s''$ (siehe § 20., 7)) und $\varphi(z)$ mit z wächst. § 11. II).

b) Fall III.

1) Es sei $s > t > 2$,

σ, τ, $a_{s,t}$ wie vor,

$$a_s'' = \sqrt[s]{\frac{\varphi(z_s'')}{D_s f(x)}}, \quad a_t'' = \sqrt[t]{\frac{\varphi(z_t'')}{D_t f(x)}}$$

2) Wir finden:

$$\sigma^{s(s-t)} = \frac{D_t{}^s}{D_s{}^t} \cdot \frac{(fx)^{s-t}}{(\varphi z_s'')^{s-t}},$$

$$\tau^{t(s-t)} = \frac{D_t{}^s}{D_s{}^t} \cdot \frac{(fx)^{s-t}}{(\varphi z_t'')^{s-t}}$$

3) $$\frac{\sigma^s}{\tau^t} = \frac{\varphi z_t''}{\varphi z_s''} < 1$$

nämlich < 1, da $z_s'' > z_t''$ (s. §. 21. II. I. 2)) und $\varphi(z)$mit z wächst. (§. 13. II.).

IV. Bestimmung des überhaupt grössten T.

1) Nach III. a) 3. und b) 3. bedingen sich

$$\sigma < 1 \text{ und } \tau > 1,$$
$$\tau > 1 \text{ und } \sigma < 1$$

d. h.

2) Ist $a_s'' < a_s'$ so ist $a_t'' < a_t\ (< a_t')$

und ist

$$a_t < a_t'', \text{ so ist } (a_s <)\ a_s' < a_s''$$

3) Durch wiederholte Anwenduug von 2) in Verhindnng mit II. 3) resultirt:

Ist $a_s'' < a_s'$, so ist ${}^{\nu}a_s \ldots g = {}^{\nu}a_s = a_s'''$,

„ $a_t < a''$, so ist ${}^{\nu}a_{h\ldots t} = {}^{\nu}a_t = a_t'''$

4) Dagegen

falls $a_s' < a_s''$ hat man ${}^{\nu}a_{s\ldots g} = {}^{\nu}a_{t\ldots g}$

„ $a_t'' < a_t$ „ „ ${}^{\nu}a_{h\ldots t} = {}^{\nu}a_{h\ldots ts}$

5) Mit Rücksicht auf II. 3) gelten die Sätze unter 2), 3) und 4) allgemeiu, ohne die Beschränkungen ad Fall II.: $r - 2 > s$, $t > 0$.

ad Fall III: $t > 2$.

6) Aus 3), 4) und 5) geht hervor, dass

$${}^{\nu}a$$

ein ganz bestimmtes und hestimmbares a ist.

Nach 3) findet man,

wenn $a_s < a_s'' < a_s'$ dass ${}^{\nu}a = a_s''\ (= a_s''')$,

„ $a_t'' < a_{st} < a_s''$ „ ${}^{\nu}a = a_{st} = a_s' = a_t$

Diesem $a = {}^{\nu}a$ entspricht nach den Formeln in § 17. I. 1) und 2) das grösste T:

$$T = {}^{\nu}T$$

§ 19.

Wahl von a.

I. 1) Ist $c = x$ und $f(x)$ hinreichend klein, welcher Fall für die Trennung der Wurzeln besonders in's Auge zu fassen ist, so hat man nach § 18., IV. 3) und 5)

a) ad Fall II., wobei $r = r_m > p_1$ ist:

$$^{\nu}a_s = a_s^{m} = a_s,$$

sowol für jedes s zwischen g und h, als für $s = g \geqq 2$.

Hieraus resultirt:

Von allen $a \geqq a_h'$ ist a_h' das vorteilhafteste; das überhaupt zweckmässigste ist somit

$$^{\nu}a = {}^{\nu}a_h = a_h^{m} = a_{r-p_1}$$

$(= a_h' = a_{r-p_1}$; wenn $h = r-2$, d. i. $p_1 = 2)$.

b) ad Fall III., wobei $p_m > p_1$ ist:

$$^{\nu}a_s = a_s^{m} = a_s'$$

für jedes $s > g$.

Daher ist

$$^{\nu}a = {}^{\nu}a_g = a_g^{m} = a_{p_1}^{m}$$

$(= a_g' = a_{p_1}$: wenn $g = 2)$.

2) Falls $p_m > p_1$, $c < x (< c')$, $f(c)$ und $(x-c)$ hinreichend klein sind, weicht $^{\nu}a$ ad Fall II. von $^{\nu}a_h$, ad Fall III. von $^{\nu}a_g$ nur wenig ab.

3) Ist $p_m > p_1$, c und x beliebig, so lässt sich im allgemeinen $^{\nu}a$ nicht ermitteln.

Um uns für ein a zu entscheiden, wählen wir mit Rücksicht auf 1) und 2)

im Fall II.: $a = a_h' = a'_{r-s}$,,
im Fall III.: $a = a_g = a_{p_1}$.

II. Behandlung des Falles $p_m = p_1$ $(c \leqq x)$.

a) Fall II.

Für $r = p_m = p_1 (> 2)$ hat man:

$$t - x = (x - c + a)(z-1), \quad \varphi(z) = \frac{1}{b_r} \cdot \frac{f(x)}{(x-c+a)^r}$$

sodass

$$t - x = \frac{z-1}{\sqrt[r]{\varphi(z)}} \cdot \sqrt[r]{\frac{f(x)}{b_r}} = \text{Max.}$$

wenn (s. § 17. II. a)) z seinen grössten Wert hat, der $a = 0$ entspricht, d. i.

$$\text{wenn } c = x \text{ ist } t - x = \sqrt[r]{\frac{1}{r-1} \cdot \frac{f(x)}{b_r}},$$

$$\text{„ } c < x \text{ „ } t - x = (x-c)(z-1)$$

wo

$$\varphi(z) = \frac{1}{b_r} \cdot \frac{f(x)}{(x-c)^r}$$

b) Fall III.

1) Ist $p_m = p_1 = p = 2$, so ist

$$t - x = \frac{z}{a}, \qquad q(z) = \frac{a^p}{p!\, b_p} \cdot \frac{f(x)}{e^{a(x-c)}}$$

Daher

$$t - x = \frac{z}{\sqrt[p]{\varphi(z)}} \cdot \sqrt[p]{\frac{f(x)}{p!\, p_b} \cdot \frac{1}{e^{a(x-c)}}} = \text{Max.}$$

wenn $a = 0$, nämlich (s. § 17. II. 6. 2)):

$$t - x = \sqrt[p]{\frac{f(x)}{b_z}} = \sqrt[p]{\frac{z f(x)}{f''(c)}}$$

d. i. derselbe Wert, auf den das Verfahren in § 8. (Fall I.) führt.

2) Ist $p_m = p_1 = p > 2$ und $c = x$,

so ist

$$t - x = \text{Max.}; \text{ wenn } z = z_p'',$$

d. i., weil für dieses z nach § 17. II. b.: $p\varphi z = z^p e^z$,

$$t - x = C_p \sqrt[p]{\frac{f(x)}{p!\, b_p}}$$

wo

$$C_p = z \sqrt[p]{\frac{p}{z^p e^z}}, \quad z = z_p''$$

Speciell hat man:

$$C_3 = 1{,}01, \quad C_4 = 1{,}19, \quad C_5 = 1{,}44$$
$$C_6 = 1{,}72, \quad C_7 = 2{,}02, \quad C_8 = 2{,}33$$

3) Ist $p > 2$ und $c < x$, so ist

$$t - x = \frac{z}{a}, \qquad a = \frac{p}{x-c}, \quad \varphi(z) = \frac{a^p}{p!\, b_p} \cdot \frac{f(x)}{e^p}$$

§ 20.

Näherungswerte von z_p'' im Fall II.

Wir legen von den Gleichungen, deren Wurzel z_s'' ist (s. 17. II. a)),

$$M(z) = -(z-1)\varphi'(z) + p(z)$$

wo

$$\varphi(z) = (r-1)z^r - rz^{r-1} + 1$$

zu Grunde.

Die erste Derivirte ist:

$$M'(z) = -r(r-1)(z-1)z^{r-3}((r-p)z-(r-z))$$

ferner

$$-\frac{M''(z)}{r(r-1)z^{r-4}} = (r-2)(z-1)((r-p)z-(r-3))+z((r-p)z-(r-2))$$

2) $M(z)$ ist $=0$ für $z=1$ und $z=z_s''$, dazwischen pos.,
„ $z > z_s''$ negativ.

$M'(z)=0$ für $z=1$ und $z=\frac{r-2}{r-p}$, dazw. positiv

„ $z > \frac{r-2}{r-p}$ negativ.

$M''(z)=0$ für ein zwischen $\frac{r-3}{r-p}$ und $\frac{r-2}{r-p}$ liegendes z,

von 1 bis zu diesem z positiv, darüber hinaus negativ.

3) $$M\left(\frac{r-1}{r-p}\right) = p - \left(\frac{r-1}{r-p}\right)^{r-1}$$
$$= p - \left(1+\frac{p-1}{r-p}\right)^{r-1}$$
$$= p-1-\binom{r-1}{1}\frac{p-1}{r-p} - \ldots - \ldots < 0$$

Daher

4) $$\frac{r-2}{r-p} < z_s'' < \frac{r-1}{r-p}$$

Zwischen diesen Grenzen von z_s'' ist $M''(z) < 0$. Der Unterschied beider ist $\frac{1}{r-p}, \leqq 1$, woraus folgt, dass die Anfangsziffer von z_s'' mit der von $\frac{r-2}{r-p}$ übereinstimmt.

5) Für den Fall $p = 3$ finden wir in nachstehender Weise eine nähere obere Grenze $\frac{r-1,5}{r-p}$, sodass:

$$\frac{r-2}{r-3} < z''_{r-3} < \frac{r-1,5}{r-3}.$$

Beweis:

Aus $M(z) = p(z-1)^2 G(z)$ und $M'(z) = p(z-1)^2 G'(z) + 2p(z-1)G(z)$ ergiebt sich

$$\frac{M'(z)}{M(z)} = \frac{G'(z)}{G(z)} + \frac{2}{z-1}.$$

Für $z = \frac{r-2}{r-p}$ ist nach 2) $M'(z) = 0$, $M(z) = \text{Max.} > 0$, somit

$$0 = \frac{G'(z)}{G(z)} + \frac{2}{z-1}.$$

$$\frac{G(z)}{G'(z)} = -\frac{z-1}{2},$$

wo

$$G(z) = -\frac{(r-p)(r-1)}{p} z^{r-2} + (r-2)z^{r-3} + (r+3)z^{r-4} + .., +1$$

$$G'(z) = -\frac{(r-p)(r-1)(r-2)}{p} z^{r-3} + (r-2)(r-3)z^{r-4} + ...2.1$$

$$G''(z) = -\frac{(r-p)(r-1)(r-2)(r-3)}{p} z^{r-4} + (r-2)(r-3)(r-4)z^{r-5} + ...3.2.1$$

Man findet, in unserm Fall $p = 3$:

$$G(1) > 0, \quad G'(1) = 0, \quad G''(1) < 0,$$

$$G(z) \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 0, \quad \text{wenn } z \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} z_s'',$$

$$G'z) < 0 \quad \text{„} \quad z > 1,$$

$$G''(z) \angle 0 \quad \text{„} \quad z \geqq 1$$

Nach Euler liegt daher z_s'' zwischen

$$z_1 = \frac{r-2}{r-p} \quad \text{und} \quad z_2 = z_1 - \frac{G(z_1)}{G'(z_1)} = z_1 + \frac{z_1 - 1}{2}$$

d. i.

$$z_2 = \frac{r-1,5}{r-3} \text{ (W. z. b.)}$$

6) **Tabelle über z_s''.**

r	p	s	z_s''
4	3	1	2,414
5	4	1	3.627
5	3	2	1,697
6	5	1	4,733
6	4	2	2,304
6	3	3	1,461

7) Nach 4) hat man:

$$\frac{r-2}{s} > z_s'' < \frac{r-1}{s}$$

und

$$\frac{r-2}{t} < z_t'' < \frac{r-1}{t}$$

woraus folgt:

Ist $t < s \left(\leqq r-2\right)$, so ist $z_s'' < z_t''$

$$\left(\text{wegen } \frac{r-1}{s} < \frac{r-2}{t}\right)$$

§ 21.

Näherungswerte von z_s'' im Fall III.

I. 1) Es ist nach § 17. II. b)

$$z_s''$$

die positiven Wurzel von

$$G(z) = p\,\varphi(z) - z^2 e^z = p - e^z(z^2 - pz + p), \text{ wo } p > 2.$$

Die beiden ersten Derivirten sind:

$$G'(z) = -e^z(z-(p-2))z$$
$$G''(z) = -e^z(z^2-(p-4)z-(p-2))$$

Man findet:

$G(z) = 0$ für $z = 0$ und $z = z_s''$,
pos. zw. 0 und z_s'', neg. für $z > z_s''$

$G'(z) = 0$ für $z = 0$ und $z = p-2$

An der Stelle $p-2$ ist $G(z)$ ein Maximum. $G''(z)=0$ für ein zwischen

$p-3$ und $p-2$ liegendes z, pos. von $z=0$ bis zu jenem z, weiterhin negativ.

2) Ferner, da $G(p-1)=p-e^{p-1}<0$, so liegt

$$z_0''$$

zwischen $p-2$ und $p-1$.

3) In diesem Intervall ist $G'(z)<0$ und $G''(z)<0$, sodass nach Euler der Ausdruck

$$p-1-\frac{G(p-1)}{G'(p-1)}=p-1-\frac{e^{p-1}-p}{(p-1)e^{p-1}}$$

$$=z'+\frac{p}{(p-1)e^{p-1}}$$

wo

$$z'=p-1-\frac{1}{p-1}=\frac{p(p-2)}{p-1}$$

eine nähere obere Grenze von z_0'' ist.

Es lässt sich leicht zeigen, dass auch

$$z'$$

eine obere Grenze von z_0'' ist.

Beweis:

$$\frac{1}{p}G(z')=1-\frac{e^{z'}}{(p-1)^2}<0$$

wenn

$$(p-1)^{2(p-1)}<e^{p(p-2)}$$

oder, $p-1=t$ gesetzt, wenn

$$t^{2t}<e^{t^2-1},\quad \text{wo}\quad t\geqq 2;$$

um so mehr, falls

$$\sqrt[t-1]{t}<\sqrt{e}$$

Dieses findet statt für $t>3$, während $t=2$ und $t=3$ die vorletzte Ungleichheit erfüllen.

4) Die grösste Wurzel von

$$z^2-pz+p=0,$$

nämlich

$$z_1=\frac{p+\sqrt{p(p-4)}}{2},$$

ist reell $\left(\geqq p-2\right)$, wenn $p\geqq 4$.

Da $G(z_1) = p > 0$, so ist z_1 eine untere Grenze von z''.

II. Aus I. resultirt:

1) Ist $s = 3$, so ist $1 < z_s'' < 1{,}5$

„ $s = 4$, „ $2 < z_s'' < 2{,}66$

„ $s > 4$, „ $\frac{p+\sqrt{p(p-4)}}{2} < z_s'' < \frac{p(p-2)}{p-1}$

In jedem Fall ist: $p-2 < z_s'' < p-1$.

Tabelle über z_s''.

$s=p$	z_s''	$s=p$	z_s''
3	1,36	6	4,75
4	2,56	7	5,80
5	3,67	8	6,83

2) $t-2 < z_t'' < t-1$

und

$s-2 < z_s'' < s-1$

woraus folgt:

Ist $t < s$, so ist $z_t'' < z_s''$

wegen $t-1 \leqq s-2$).

§ 22.

Intervalle (xt), (tx) ohne Wurzeln, x gegeben, t gesucht.

I. Vertauschen wir in § 6. x und t mit einander, sehen x (das frühere t) als gegeben an und machen $H(xx) = -kfx < 0$, so wird auch $H(tt) = -kft < 0$.

Zwischen x und der Wurzel t von $H(xt) = 0$ liegt somit keine Wurzel von $fx = 0$.

D. h. es findet dieses statt, wenn in einem x und t einschliessenden Intervall (cc'), t wie x als Abscisse gedacht, folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\frac{\partial H}{\partial x} \gtrless 0, \text{ wenn } x - t \gtrless 0,$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} > 0$$

$H(x\,t)$ sowie die ersten und zweiten partiellen Differentialquotienten nach x und t müssen endlich und stetig sein.

II. 1) Eine solche Function ist:

$$H(x\,t) = F(t) - G(x) + (x - t)\,G'(x))$$

wo

$$G(x) = F(x) + k f(x),$$
$$F(x) = x^2 + Ax + B,$$
$$2 + k f''x (= G''x) > 0 \text{ zw. } c \text{ und } c',$$
$$k f(x) > 0.$$

Man findet:

$$(t - x)^2 - k f'(x)(t - x) = k f(x),$$

$$t = x + \frac{k f'(x)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{k f' x}{2}\right)^2 + k f(x).}^{1}$$

t ist also unabhängig von A und B, die eine Wurzel ist $> x$, die andere $< x$.

---

1) Diese Formel kann man auch aus der Taylor'schen Entwicklung,

$$f(\omega) = f(x) + (\omega - x) f'(x) + \frac{(\omega - x)^2}{2} f''(u),$$

wo u zwischen x und ω liegt, ableiten. —

Intervalle $(x\,t)$ und $(t\,x)$, wo x gegeben, t gesucht, die keine Wurzel von $f(x) = 0$ enthalten, lassen sich auf Grund der Taylor'schen Reihe auch so bestimmen:

1) Ist ω die x auf der positiven Seite benachbarte Wurzel, so hat man:

$$f(\omega) = f(x) + (\omega - x) f'(u)$$

Daher, unter Beibehaltung der Bezeichnungen in § 4. II., statt a, b gesetzt c, c':

$$\lessgtr(\omega - x) = \frac{(\pm fx)}{\gtrless(\mp f'x)}$$

2) Ist dagegen x eine obere Grenze von ω, so findet man ähnlich wie vor:

$$\lessgtr(x - \omega) = \frac{(\pm fx)}{\gtrless(\pm f'x)}$$

wo, wie früher, die eingeklammerten Grössen positiv seien, also die $\begin{pmatrix}\text{oberen}\\ \text{unteren}\end{pmatrix}$ Zeichen, zu nehmen sind je nachdem $fx \gtrless 0$.

Ist ad 1) bezüglich $\mp f'(x) \lessgtr 0$ oder ad 2) $\pm f'(x) \lessgtr 0$, so liegt zwischne x und c' ad 1) resp. zw. x und c ad 2) keine Wurzel von $f(x) = 0$.

3) Geometrische Bedeutung.

Die Abscissen der Durchschnitte der Curven

$$y = F(x)$$

und

$$y = G(x) = F(x) + kf(x)$$

sind Wurzeln der Gleichung

$$!f(x) = 0.$$

Beide Curven sind, in der Richtung der positiven y-Axe gesehen convex.

Die beiden t ad 2) sind die Durchschnitte der Curve $y = F(x)$, mit einer Geraden, welche die Curve $y = G(x)$ in dem x entsprechenden, Curvenpunkt berührt.

III. Nach dem Vorigen liegt zwischen x und jedem der beiden t ad II. 2) keine Wurzel von $f(x) = 0$, somit keine solche zwischen diesen beiden t.

Das Quadrat ihrer Differenz ist

$$(kf'x)^2 + 4kfx < (\omega_2 - \omega_1)^2$$

wo

$$\omega_1 \quad \text{und} \quad \omega_2$$

die x auf der negativen und positiven Seite benachbarten Wurzeln von $f(x) = 0$ bedeuten.

Denken wir uns x variabel zwischen ω_1 und ω_2, setzen

$$\varphi(x) = (kf'x)^2 + 4kf(x),$$

so ist für jedes x

$$\varphi(x) < (\omega_2 - \omega_1)^2$$

Die erste Derivirte

$$\varphi'(x) = 2kf'(x)(kf''(x) + 2) = 2kf'(x)\,G''(x)$$

hat wegen $G''(x) > 0$ das Vorzeichen von $kf'(x)$ mithin, da $kf(x) > 0$, das von $f(x)f'(x)$.

Sind daher die Wurzeln von $f'(x) = 0$ zwischen ω_1 und ω_2 der Grösse nach $\nu_1, \nu_2 \ldots$, so ist

$\varphi(x)$ ein Maximum für $\nu_1, \nu_3 \ldots$
(ein Minimum für $\nu_2, \nu_4 \ldots$).

Setzt man der Reihe nach $\omega_1, \omega_2, \nu_1$ für x, so erhält man als untere Grenzen von $(\omega_2 - \omega_1)^2$:

$$(kf'\omega_1)^2, \quad (kf'\omega_2)^2, \quad 4kf(\nu_1),$$

von denen der letztere Wert der grössere ist, falls sich zwischen ω_1 und ω_2 nur eine Wurzel ν_1 von $f'(x) = 0$ befindet.

Diese Werte entsprechen denen von Δ' in § 4. III. 1) 2) 3) bezüglich Δ_1 in § 4. IV. 1) 2) 3).

VII.

Anleitung zur Trennung.

§ 23.

Zusammenfassung der Hauptresultate.

Trennungsmethode I.:

Das Trennungsprincip ersiehe aus § 5. und § 6. V. Das Verfahren besteht darin, zu gegebenen Werten von x [1]), nach § 8., t zu berechnen, jedes gefundene t oder einen Näherungswert zwischen x und t als neues x annehmend.

(Die geometrische Bedeutung ergiebt sich aus § 7., II.).

Wir haben die Formeln

$$t = x \pm \sqrt{\frac{2}{g} f(x)}$$

wo

t wie x zwischen c und c',

$g = \gtrless f''x = \begin{pmatrix} \text{obere} \\ \text{untere} \end{pmatrix}$ Grenze von $f''(x)$ in Bezug auf (cc')

je nachdem $f(x) \gtrless 0$.

Die Trennung erfolgt in positivem oder negativem Sinn.

Siehe das Beispiel § 25. II. 2).

---

1) Es ist dabei vorausgesetzt, dass das x, von dem man ausgeht, keine Wurzel von $f(x) = 0$ ist.

Um für eine m-fache Wurzel x ein Intervall (xt) oder (tx) mit höchstens Einer Wurzel ausser der mehrfachen zu ermitteln, berechne man t so, dass zwischen x und t keine Wurzel von $f^m(x) = 0$ liegt (nach § 22. II.).

Trennungsmethode I^a:

Wie vor, mit dem Unterschied, dass man, wenn t zu x gefunden, für das neue x nicht wie bei Methode I. einen zwischen x und t liegenden Näherungswert von t wählt, sondern einen solchen über t hinaus, und den Hülfssatz 2 in § 9. anwendet.

Siehe die Beispiele in § 24. III. 2) ... 6), § 25. I., § 25. II. 1), § 25. III.

Trennungsmethode I^b.:

Nach den Formeln des § 8., wie bei Methode I., unter Anwendung der Hülfssätze 2, 3 in § 9., indem man zugleich von x_1 aus in positivem, von $x_2 > x_1$, aus in negativem Sinn fortschreitet.

Diese Methode empfiehlt sich zur Trennung zweier sehr nahe liegenden Wurzeln, in deren Nähe keine weiteren Wurzeln sich befinden. Man erhält in diesem Falle einen Näherungswert der zwischen jenen Wurzeln liegenden Wurzel der ersten Derivirten. (§ 9., 3)).

Das Weitere erhellt aus den Beispielen § 24. I., §. 24. II.

Modification:

Zur Trennung dreier sehr nahe liegenden Wurzeln wende man diese Methode auf die Gleichung $f'(x) = 0$ an, u. s. w.

Siehe Bspl. § 24. III.

Mitunter wird man sich zweckmässig teils der einen, teils der andern dieser Methoden bedienen, (wie in dem Beispiel § 24. III.)

Trennungsmethode II.:

t wird nach den Formeln des § 10. berechnet, im übrigen ähnlich wie bei Methode I. verfahren.

Man hat

$$t = x + (x - c + a)(z - 1) \leqq c',$$

$$\varphi_r(z) = (r-1)z^r - r z^{r-1} + 1 \leqq Q,$$

$$z > 1,$$

$$Q = \frac{n f(x)}{(x - c + a)^n} > 0$$

Je nachdem $f() \gtrless 0$, bilden wir die Hülfsgleichung:

$$g(x) = \gtrless f(x+c)$$

$$= \gtrless \frac{f(x)^u}{u\,!}x^u + \frac{f(c)^{u-1}}{(u-1)!}x^{u-1} + \frac{f^{u-2}(c)}{(u-2)^2}x^{u-2} + \ldots f(c)\,^1)$$

$$= \sum_0^u b_p x^p$$

die Grenzen $\gtrless f(x+c)$ und $\gtrless f(x)$ in Bezug auf ein, x einschliessendes, Intervall $(c\,c')$ genommen.

Die Exponenten bezüglich der $\left\{\begin{matrix}\text{pos.}\\ \text{neg.}\end{matrix}\right\}$ Glieder seien von u anfangend bis 2 einschliesslich:

$$p_m,\quad p_{m-1}\quad \ldots\quad p_1$$

wo $p_m > 2$ vorausgesetzt sei.

(Ist $p_m = 2$, so verfahre nach Methodo I.).

Wir unterscheiden mehrere Fälle.

1) $p_m = p_1$ und $c = x$:

$$t - x = \sqrt[r]{\frac{1}{r-1}\frac{f(x)}{b_r}}.$$

2) $p_m = p_1$ und $c < x$:

$$t - x = (x-c)(z-1)$$

wo

$$\varphi_r(z) = \frac{1}{b_r}\frac{f(x)}{(x-c)^r},$$

$$r = m$$

Wir wählen u so, dass sich eine obere und untere Grenze von $f^u(x)$ leichtest möglich bestimmen lässt, wenn $f(x)$ algebraisch, vom $n$ten Grade, so im allgemeinen zweckmässig $u = n$, sodass

$$\gtrless f^u(x) = f^n(x) = \text{const.}\quad c' = +\infty.$$

Auch ist zu beachten, dass wenn $f(x)$ zwischen c und c' sein Vorzeichen nicht ändert, von dem Fourier'schen Theorem Gebrauch gemacht werden kann. (§ 1).

3) $p_m > p_1$ und $c \overset{=}{<} x$

Bestimme nach einander:

$r = p_m\ (> 2)$;

$a \overset{=}{<}$ der kleinsten der Wurzeln von

$$\varkappa_{p_1} = \varkappa_{p_2},\quad \varkappa_{p_2} = \varkappa_{p_3} \ldots \varkappa_{p_i} = \varkappa_{p_m};$$

$\varkappa = \varkappa_{p_1}$,

wo

$$\varkappa_p = \frac{\left(\frac{r}{p}\right) a^{r-p}}{b_p};$$

z mit Hülfe der Tabelle I. in Teil LX. dieses Archivs, wenn $r < 7$, sonst nach § 11. III.; schliesslich

t wie oben.

Siehe § 26., Beispiele.

Trennungsmethode III.:

Wir berechnen t nach den Formeln des § 12. und verfahren im übrigen ähnlich wie bei Methode I.

Man hat

$$t = x + \frac{z}{a}\left(\overset{<}{=} c'\right),$$

$$\varphi(z) = 1 + (z-1)e^z \overset{<}{=} Q,$$

$$z > 0,$$

$$Q = \frac{\varkappa f(x)}{e^{a(x-c)}} > 0$$

Zunächst bilden wir

$$g(x) = \overset{>}{<} f(x+c) = \sum_0^u b_p x^p \text{ [1]}$$

wie ad Methode II.

Ist

1) $p_m (= p_1) = 2,\ c \overset{=}{<} x$

so setze

1) In Betreff der Wahl von u siehe die Anmerkung zu Methode II.

$$t - x = \sqrt{\frac{2f(x)}{f''(c)}}$$

2) $p_m = p_1 = p > 2$, $c = x$

so setze

$$t - x = C_p \sqrt[p]{\frac{f(x)}{p\,!\,b_p}}$$

C_p nach §. 19. II b) 2.

3) $p > 2$, $c < x$

so wähle

$$t - x = z \cdot \frac{x - c}{p},$$

$$\varphi(z) = \frac{1}{p\,!\,b_p} \cdot \left(\frac{p}{e^{x-c}}\right)^p f(x)$$

4) $p_m > p_1$ und $c \leqq x$

Berechne nacheinander:

$a \geqq$ der grössten der Wurzeln von

$$x_{p_1} = x_{p_2}, \quad x_{p_1} = x_{p_3} \ldots x_{p_1} = x_{p_m};$$

$x = x_{p_1}$

wo

$$x_p = \frac{a^p}{p!\ b_p};$$

z mittelst der Tabelle (s. § 13. III);

$$t - x = \frac{z}{a}$$

Siehe die Beispiele in §. 27. und §. 28.

§ 24.

Algebraische Beispiele zu den Methoden I., I^a., I^b.

I. $f(x) = x^4 + 312x^3 + 23337x^2 - 14874x + 2360$ [1])

(nach Methode I^b).

---

1) Die Theorie und Auflösung der höhern algebr. und der transcendenten Gleichungen von Dr. C. H. Schnuse. Braunschweig 1850.

S. 216. s. f. — Die zu trennenden Wurzeln sind:

0,31666447 ... und 0,31666517 ...

1) $x = 0$, $c = 0$, $c' = 0{,}5$ (obere Grenze der Wurzeln)

$f''(x) = 12x^2 + 1872x + 46674$

$f(x) = 2360 > 0$, $> f''(x) = f''(0{,}5) = 47613$

$$t = \sqrt{\frac{4720}{47613}} = 0{,}3148 \ldots$$

2) $x = 0{,}5$, c und c' wie vor, $t < x$ gesucht.

$f(x) = 796{,}32$

$$t = 0{,}5 - \sqrt{\frac{1592{,}64}{47613}} = 0{,}3171 \ldots$$

3) $x = 0{,}31$; $c = 0{,}31$; $c' = 0{,}32$

$f(x) = 1{,}049732$; $> f''(x) = f''(0{,}32) = 47274{,}3$

$$t = 0{,}31 + \sqrt{\frac{2f(x)}{f(0{,}32)}} = 0{,}316664$$

$f(x) = 0{,}000000013176 > 0$

4) $x = 0{,}32$; c und c' wie vor; $t < x$ gesucht

$f(x) = 0{,}26290176$

$$t = 0{,}32 - \sqrt{\frac{2f(x)}{f''(0{,}32)}} = 0{,}316665$$

$f(t) < 0$, während $f(0{,}316666) > 0$.

5) $x = 0{,}316665$; $c = 0$, $c' = \infty$

$f(x) < 0$, $f''(x)$ zw. c und c' positiv.

Es liegen zwischen 0 und ∞ zwei Wurzeln und zwar nach dem Vorigen

$$0{,}316664 \ldots \text{ und } 0{,}316665 \ldots$$

II. $f(x) = 6x^5 + 1890x^4 + 152756x^3$
$+ 1477104x^2 - 1145108x + 213720$

(Nach Methode I^b).

Es ist

$$f''(x) = 120x^3 + 22680x^2 + 916536x + 2954208$$

Da $f''(x) > 0$ für $x > 0$, so hat $f(x) = 0$ höchstens 2 reelle positive Wurzeln ω_1 und ω_2.

1) $x = 0;\quad c = 0;\quad c' = 0{,}5$ (obere Grenze der Wurzeln)

$$f(x) = 213720;\quad {>}\, f''(x) = f''(0{,}5) = 3418161$$
$$t = 0{,}3536$$

1a) $x = 0;\quad c = 0;\quad c' = 0{,}37.$

$$f(x) = 213720;\quad {>}\, f''(x) = f''(0{,}37) = 3296437,$$
$$t = 0{,}36009$$

2) $x = 0{,}36$; c und c' wie vor.

$$f(x) = 72{,}563358.$$
$$t = 0{,}366635.$$

3) $x = 0{,}37$; c und c' wie vor, $t < x$ gesucht.

$$f(x) = 18{,}590537.$$
$$t = 0{,}366642.$$

Nach dem Satz § 9. 3) liegt zwischen den beiden letzteren t die Wurzel von $f'(x) = 0$, diese ist also annähernd $v = 0{,}36664$.

$$f\ 0{,}3666 = 0{,}002027 > 0$$
$$f\ 0{,}36664 < 0$$
$$f\ 0{,}36666 = -\,0{,}00003349 < 0.$$

Man findet

$$\omega_1 = 0{,}3666\ldots$$
$$\omega_2 = 0{,}36666\ldots$$

III. $f(x) = x^6 + 378x^5 + 38189x^4 + 492368x^3$
$- 572554x^2 + 213720x - 26352 = 0$ [1])

(Teils nach Methode I, Ia, Ib).

Es ist:

$$f''(x) = 30x^4 + 7560x^3 + 458268x^2 + 2954208x - 1145108$$

1) $x = 0;\quad c = 0;\quad c' = 0{,}5$ (obere Grenze der Wurzeln).

$$f(x) = -\,26352;\quad {<}\, f''(x) = f''(0) = -\,1145108.$$
$$t = 0{,}2145.$$

2) $x = 0{,}2;\quad c = 0{,}2;\quad c' = +\infty$

$$f(x) = -\,2509{,}99;\quad {<}\, f''(x) = f''(0{,}2) = -\,535875.$$
$$t = 0{,}2967.$$

---

1) The general theory and solution of eqnations of the higher orders ... By J. R. Yonng, 2. e. d., London 1842.

Die Theorie nnd Anflösnng der höheren algebr. nnd der transc. Gleichnngen ... von Dr. C. H. Schnnse, Braunschweig 1850. (S. 245 s. f. u. S. 271.)

3) $x = 0{,}3$; $c = 0{,}3$; $c' = +\infty$; $t < x$ und $t > x$ gesucht.

$$f(x) = -161{,}67383; \quad f''(x) = f''(0,3) = -217397{,}12$$

$$t = \begin{cases} 0{,}261 < 0{,}2967 \\ 0{,}338 \end{cases}$$

4) $x = 0{,}33$; c und c' wie vor.

$$f(x) = -26{,}9298.$$

$$t = 0{,}345\ldots$$

5) $x = 0{,}35$; $c = 0{,}34$; $c' = +\infty$; $t < x$ und $t > x$ gesucht.

$$f(x) = -2{,}526146.$$

$$t = \begin{cases} 0{,}3424 < 0{,}345 \\ 0{,}3576 \end{cases}$$

6) $x = 0{,}36$; $c = 0{,}35$; $c' = +\infty$

$$f(x) = -0{,}1606395.$$

$$t = \begin{cases} 0{,}3566 < 0{,}3576 \\ 0{,}3634 \end{cases}$$

Statt in bisheriger Weise fortzufahren, wodurch wir, wie ersichtlich, nur langsam zum Ziel gelangen würden, behandeln wir die Gleichung

$$f'(x) = 0$$

nach Methode I^b und erhalten nach II, indem wir

$$c = 0{,}36 \quad \text{und} \quad c' = 0{,}37$$

setzen, zu

$$x = 0{,}36 : t = \mathbf{0{,}366635}$$

$$x = 0{,}37 : t = \mathbf{0{,}366642}.$$

Beide t haben die gemeinsamen Ziffern 0,3666, ein zwischen ihnen liegender Näherungswert ist: 0,36664 .. Nun ist

$$f(0{,}3666) < 0, \qquad f(0{,}36664) > 0$$

und es geht aus II und § 9 3) hervor, dass die kleinste Wurzel und nur diese zwischen

$$0{,}36660 \quad \text{und} \quad 0{,}36664 \quad (= \text{Wzl. von } f''x = 0)$$

liegt.

Die beiden andern lassen sich leicht trennen; die 2te findet man $= 0{,}366660\ldots$, die 3te $= 0{,}366661$.

Nach Young sind die 3 Wurzeln genauer:

$$0{,}3666002; \quad 0{,}3666600; \quad 0{,}3666610$$

§ 25.

Transcendente Beispiele zu Methode I und I^a.

I. $f(x) = -20e^{\mu(x-1)}.(\mu(x-1)-1)+5x^6-6x^5-19$ [1]

wo

$$\mu = \sqrt[3]{6}$$

Es ist:

$$f'(x) = -20\mu^2 e^{\mu(x-1)}.(x-1)+30x^5-30x^4$$
$$f''(x) = -20\mu^2 e^{\mu(x-1)}(\mu(x-1)+1)+150x^4-120x^3$$

Wir stellen uns die Aufgabe: die $x=2$ auf der negativen Seite benachbarte Wurzel ω zu trennen.

Für $c=1$; $c'=2$ ist $> f''(x) = -F(1)+G(2) = -20\sqrt[3]{36}+1440 = 1374$, wo $F(x)=20\mu^2 e^{\mu(x-1)}(\mu(x-1)+1)$, $G(x)=150x^4-120x^3$

$$\varkappa = \frac{1}{687}$$

$x = 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (f(x) = 8{,}427$

$t = 2-\sqrt{\varkappa f(x)} = 1{,}889 < 1{,}9 = x_1 \ldots\ldots (f(x_1) = 2{,}45$

$t_1 = 1{,}9-\sqrt{\varkappa f(x_1)} = 1{,}8403 > 1{,}84 = x_2 \ldots (f(x_2) = +0{,}4606$

$t_2 = 1{,}84 \pm \sqrt{\varkappa f(x_2)} = \begin{cases} 1{,}848 > t_1 \\ 1{,}832\ldots = x_3 \ldots (f(x_3) = -0,\ldots \end{cases}$

daher

$$1{,}832 < \omega < 1{,}84$$

die Wurzel ist getrennt.

Wir sind teils nach Methode I, teils nach Methode I^a verfahren.

II. $f(x) = 1-x+\frac{x^2}{2!^2}-\frac{x^3}{3!^2}+\ldots$ [2]

Die 2 te Derivirte ist

$$f''(x) = F(x)-G(x)$$

wo

---

1) Siehe des Verfassers Unters. über algebr. Gleich. Grunert Archiv T. LXV, S. 413.

2) Diese Gleichung kommt unter Anderm in der Theorie der Bewegung der Wärme in einem Cylinder vor, von Poisson in Mém. de l'acad. des sciences T. VIII p. 522, von M. A. Stern in der Abhandlung „Ueber die Auflösung der transcendenten Gleichungen" Crelle's Journal für die Math. Bd. XXII S. 35, behandelt.

$$F(x) = \frac{1}{0!\,2!} + \frac{x^2}{2!\,4!} + \frac{x^4}{4!\,6!} + \cdots$$

$$G(x) = \frac{x}{1!\,3!} + \frac{x^3}{3!\,5!} + \frac{x^5}{5!\,7!} + \cdots$$

Aufgabe: die kleinste positive Wurzel von $f(x) = 0$ zu trennen

Für $x = 0$ ist $f(x) = 1 > 0$ und in Bezug auf die Grenzen $c = 0$ und $c' = 5$:

$$> f''(x) = F(5) - G(0) = 1{,}06$$

$$\varkappa = \frac{1}{0{,}53}, \quad \sqrt{\varkappa} = 1{,}37.$$

Wir finden successive:

1) $x = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (f(x) = 1$

$t = 0 + 1{,}37\sqrt{f(x)} = 1{,}37 < 1{,}4 = x_1 \ldots (f(x_1) = 0{,}02$

$t_1 = 1{,}4 \mp 1{,}37\sqrt{f(x_1)} = \begin{cases} 1{,}207 < t \ldots \\ 1{,}593 \ldots\ldots (f(1{,}5) = -0{,}\ldots \end{cases}$

also

$$1{,}4 < \omega < 1{,}5\ ^{1})$$

Statt wie vor nach Methode I[a] zu verfahren, können wir auch Methode I wählen, nämlich:

2) $x = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (f(x) = 1$

$t = 0 + 1{,}37\sqrt{f(x)} = 1{,}37 > 1{,}3 = x_1 \ldots (f(x_1) = 0{,}066$

$t_1 = 1{,}3 + 1{,}37\sqrt{f(x_1)} = 1{,}65 \ldots\ldots\ldots (f(1{,}6) = -0{,}\ldots$

folglich:

$$1{,}3 < \omega < 1{,}6.$$

III. $f(x)$ wie vor.

Die $x = 3$ auf der pos. Seite benachbarte Wurzel ω zu trennen.

Wir können schreiben:

$$f''(x) = \frac{1}{2!\,4!}(x^2 - 8x + 24) - \frac{x^3}{5!\,7!}(x^2 - 5.7x + 4.5.6.7)$$

$$+ \frac{x^6}{8!\,10!}(x^2 - 8.10x + 7.8.9.10) - \ldots$$

$$= F_1(x)\,G_1(x) - F_2(x)\,G_2(x) + F_3(x)\,G_3(x) - \ldots$$

Es ist $f(3) = -0{,}375 < 0$ und in Bezug auf

$$c = 3 \quad \text{und} \quad c' = 10 \text{ ist:}$$

---

1) Poisson und Stern finden $w = 1{,}4457$, die folgende Wurzel ist nach Stern 7,6178.

$$< f''(x) = \frac{1}{48} G_1(4) - F_2(10)\, G_2(3) + F_3(3)\, G_3(10) - \ldots = -1{,}063$$

$$-\varkappa = \frac{2}{1{,}063}, \quad \sqrt{-\varkappa} = 1{,}37.$$

Wir finden nach einander:

$$x = 3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (f(x) = -0{,}375$$

$$t = 3 + 1{,}37\sqrt{-f(x)} = 3{,}83 < 4 = x_1 \ldots\ldots (f(x_1) = -0{,}398$$

$$t_1 = 4 \mp 1{,}37\sqrt{-f(x_1)} = \begin{cases} 3{,}14 < 3{,}83 = t \\ 4{,}86 < 5 = x_2 \ldots\ldots (f(x_2) = -0{,}327 \end{cases}$$

$$t_2 = 5 \mp 1{,}37\sqrt{-f(x_2)} = \begin{cases} 4{,}22 < 4{,}86 = t_1 \\ 5{,}78 < 6 = x_3 \ldots\ldots (f(x_3) = -0{,}210 \end{cases}$$

$$t_3 = 6 \mp 1{,}37\sqrt{-f(x_3)} = \begin{cases} 5{,}38 < 5{,}78 = t_2 \\ 6{,}63 < 7 = x_4 \ldots\ldots (f(x_4) = -0{,}079 \end{cases}$$

$$t_4 = 7 \mp 1{,}37\sqrt{-f(x_4)} = \begin{cases} 6{,}62 < 6{,}63 = t_3 \\ 7{,}38 < 7{,}4 = x_5 \ldots\ldots (f(x_5) = -0{,}027 \end{cases}$$

$$t_5 = 7{,}4 \mp 1{,}37\sqrt{-f(x_5)} = \begin{cases} 7{,}18 < 7{,}38 = t_4 \\ 7{,}62 \ldots\ldots \end{cases} \begin{cases} f(7{,}61) = -0, \ldots \\ f(7{,}62) = +0, \ldots \end{cases}$$

folglich:

$$7{,}61 < \omega < 7{,}62.$$

(Stern findet $\omega = 7{,}6178$, Poisson irrtümlich 7,6243, wie Stern bemerkt.)

Es liegt hier Methode I^a vor.

§ 26.

Algebraische Beispiele zu Methode II.

I. $f(x) = x^4 - 80x^3 + 1998x^2 - 14937x + 5000 = 0$ [1])

Die den nachstehenden x auf der positiven Seite benachbarten Wurzeln ω zu trennen, dabei:

$$u = n = 4 \quad (c' = +\infty)$$

1) $x = c = 0$

$f(0) = 5000 > 0$; $p_1 = 2$; $p_2 = 4$; $r = 4$

$$\varkappa_2 = \frac{6a^2}{1998} = \varkappa_4 = 1 \text{ für } a = \sqrt{333}$$

---

1) The Analysis and Solution of Cubic and Biquadratic Equations. By J. R. Young, London 1842. S. 213 f. und Schnuse a. a. O. S 212 f.

$$\varphi_4(z) = \frac{5000}{333^2}, \quad \log \varphi_4(z) = 0{,}6541 - 2; \quad z = 1{,}082$$

$$t = 0{,}082 \sqrt{333} = 1{,}496$$

$f(1) = -8018$, mithin

$$0 < \omega < 1$$

2) $x = c = 12$

$f(x+12) = x^4 - 32x^3 - 18x^2 + 5367x - 4036$

$f(12) = -4036 < 0; \quad p_1 = 2; \quad p_2 = 3; \quad r = 3$

$x_2 = x_3$ für $a = \frac{3}{16}, \quad \varkappa = \frac{1}{32}$

$$\varphi_3(z) = \frac{4036}{32} \cdot \frac{16^3}{3^3} = \frac{4036 \cdot 128}{27}, \quad \log \varphi_3(z) = 4{,}2818; \quad z = 21$$

$$t = 12 + 20 \cdot \frac{3}{16} = 15{,}75$$

$f(15) > 0$, daher

$$12 < \omega < 15$$

3) $x = c = 32$

$f(x+32) = x^4 + 48x^3 + 462x^2 - 1753x + 104$

$f(32) = 104 > 0; \quad p_1 = 2; \quad p_2 = 3, \quad p_3 = 4; \quad r = 4$

$x_2 = x_3$ und $< x_4$ für $a = \frac{77}{12}$

$$\varphi_4(z) = \frac{104 \cdot 144}{77^3}; \quad z = 1{,}07$$

$$t = 32 + 0{,}07 \cdot \frac{77}{12} = 32{,}45$$

$f(32{,}4) < 0$

$$32 < \omega < 32{,}4$$

II. $f(x) = x^6 + 6x^5 + 9x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 0 \cdot x + 5 = 0$ [1])

die kleinste positive Wurzel w zu trennen.

$$u = n = 6, \quad c' = \infty$$

1) $x = 0, \quad c = 0$

$r = 6, \quad \varkappa = \varkappa_4$ für $a = 0{,}6; \quad \varkappa = 0{,}6$

$\log \varphi_6(z) = 1{,}8082; \quad z = 1{,}82$

$$t = 0 + 0{,}6 \cdot 0{,}82 = 0{,}492$$

$f(0{,}49) = 1{,}28 > 0$

---

1) Die positiven Wurzeln sind der Grösse nach $2\cos 36 - 1$, $2\cos 12 - 1$, die negativen: $2\cos 13 \cdot 12 - 1$, $2\cos 11 \cdot 12 - 1$, $2\cos 9 \cdot 12 - 1$, $2\cos 7 \cdot 12 - 1$.

2) $x = 0{,}49; \quad c = 0$

r, a und $\varkappa$ wie vor.

$$\varphi_6(z) = \frac{0{,}6 . f(0{,}49)}{(0{,}49+0{,}6)^6}; \quad \log \varphi_6(z) = 9{,}6608; \quad z = 1{,}14$$

$$t = 0{,}49 + 1{,}09 . 0{,}14 = 0{,}64$$

$$f(0{,}6) = 0{,}2 > 0; \quad f(0{,}64) < 0 \ldots$$

$$0{,}60 < \omega < 0{,}64$$

(die Wurzel ist $\omega = 0{,}618$).

III. $f(x) = x^{14} - 2x^{11} + x^{10} + 3x^9 + 5x^6 - 3x^4 + x^2 + 1 = 0$ [1])

Für $x = c = 0$ ist $p_1 = 2$, $p_2 = 6$; $p_3 = 9$; $p_4 = 10$,

$p_5 = 14 = r$; $a = \frac{1}{\sqrt[12]{91}}$, $\varkappa = 1$, $\varphi_{14}(z) = \sqrt[\bullet]{91^7}$; $z = 1{,}35$,

$$t = \frac{0{,}35}{\sqrt[12]{91}} = 0{,}24$$

$f\,0{,}24 > 0$

Zwischen 0 und 0,24 liegt keine Wurzel.

IV. $f(x) = 100x^5 - 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 0{,}77x + 1 = 0$

Für $x = c = 0$ ist $p_1 = 2$; $p_2 = 5 = r$; a sei $= 0{,}1$; so ist $\varkappa = 0{,}01$;

$$\varphi_5(z) = 10^3, \quad \log \varphi_5(z) = 3; \quad z = 3{,}3$$

$$t = 0{,}1 . 2{,}3 = 0{,}23$$

$f(0{,}2) > 0$; zwischen 0 und 0,2 liegt folglich keine Wurzel.

Die nach 0,2 transformirte Gleichung $f(x+0{,}2) = 0$ hat keine Zeichenwechsel, während $f(x)$ deren vier besitzt, sodass nach dem Fourier'schen Theorem (§ 1) zwischen 0 und 0,2 vier Wurzeln „angezeigt sind"; dies in Verbindung mit unserem Resultat ergiebt, dass $f(x) = 0$

vier complexe Wurzeln hat.

V. $f(x) = \binom{44}{0}x^{22} - \binom{43}{1}x^{21} + \binom{42}{2}x^{20} - \ldots - \binom{23}{21}x + \binom{22}{22} = 0$ [2])

die kleinste Wurzel zu trennen.

---

1) Ausführliches Lehrbuch der höheren Math. von A. Burg, Wien 1832. Bd. I, S. 164.

2) Die Wurzeln sind der Grösse nach:

$$(2\sin 2)^2, \quad (2\sin 3.2)^2, \quad (2\sin 5.2)^2 \ldots (2\sin 43.2)^2$$

Für $x = c = 0$ ist $p_1 = 2$; $p_2 = 4 \ldots p_{11} = 22 = n = r$ und wenn $a = 0{,}1$ gewählt wird, so ist der kleinste der Werte $\varkappa_2 \ldots \varkappa_{22}$:

$$\varkappa_2 = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{2}{4} a^{20}}$$

$$\varphi_{22}(z) < Q = \frac{100}{46} = 2{,}17; \quad z = 1{,}06$$

$$t = 0{,}006$$

$f(t) < 0$, $f(0) > 0$:

Zwischen 0 nnd 0,006 liegt eine nnd nnr eine Wnrzel. (Dieselbe ist 0,00487, die folgende 0,04371.)

§ 27.

Algebraische Beispiele zu Methode III.

I. $f(x)$ wie in § 24, I.

x, c, c', u wio dort.

1) $x = c = 0$

$$\varkappa_4 = \frac{a^4}{4!}, \quad \varkappa_2 = \frac{a^2}{2!\,1998}, \quad a = \sqrt{\frac{12}{1998}}, \quad \varkappa = \frac{6}{1998^2},$$

$$\varphi(z) = \varkappa f(0), \quad -\log \varphi(z) = 2{,}12407; \quad z = 0{,}116$$

$$t = 0 + \frac{z}{a} = 1{,}496$$

d. i. dasselbe t wie in § 26 (Methodo II). $f(1) < 0$ daher:

$$0 < \omega < 1$$

2) $x = c = 12$

Man findet ähnlich wie vor

$$t = 14{,}8$$

(nach Methode II $t = 15{,}75$).

$(14) > 0$, daher

$$12 < \omega < 14$$

3) $x = c = 32$

$$\varkappa_4 = \frac{a^4}{4!}, \quad \varkappa_3 = \frac{a^3}{3!\,48}, \quad \varkappa_2 = \frac{a^2}{2!\,462}$$

$$a = \frac{24}{77}, \quad \varkappa = \varkappa_2, \quad \varphi(z) = \varkappa_2 . 104; \quad -\log \varphi(z) = 1{,}961; \quad z = 0{,}14$$

$$t = 32 + 0{,}14 . \frac{77}{24} = 32{,}45$$

D. i. wieder dasselbe t wie nach Methode II.

II. $f(x)$ wie in § 25, II.

Für $x = c = 0$ findet man, wenn das vorteilhafteste $a = a_4'' = 5{,}6$ gewählt wird:

$$t = \frac{2{,}6}{5{,}6} = 0{,}46$$

(kleiner wie nach Methode II).

III. $f(x)$ wie in § 25, III.

1) Für $x = c = 0$ erhält man $a = \sqrt[12]{\frac{14!}{2}}$,

$$\varphi(z) = \varkappa = \frac{a^2}{2}, \quad \log\varphi(z) = 1{,}4722; \quad z = 2{,}7$$

$$t = \frac{2{,}7}{a} = 0{,}35$$

d. i. grösser als nach Methode II.

2) $x = 0{,}3; \quad c = 0$

a und $\varkappa$ wie ad 1), $\varphi(z) = \frac{\varkappa f(x)}{e^{a(x-c)}} = \frac{\varkappa . 1{,}0694}{e^{2{,}31}}$

$\log\varphi(z) = 0{,}498; \quad z = 1{,}4$

$$t = 0{,}3 + \frac{1{,}4}{a} = 0{,}48$$

$f(0{,}48) > 0$

$(0t)$ enthält keine Wurzel von $f(x) = 0$.

§ 28.

Transcendentes Beispiel zu Methode III. (wie § 25, I.)

$$f(x) = -20\,e^{\mu(x-1)}(\mu(x-1)-1)+5x^6-6x^5-19,$$

wo $\mu = \sqrt[8]{6}$.

Wir wählen

$$u = 7$$

wodurch in $f^u(x)$ die algebraische Function verschwindet.

$$f'x = -20\mu\, e^{\mu(x-1)}.\mu(x-1)+30x^5-30x^4$$
$$f''x = -20\mu^2 e^{\mu(x-1)}(\mu(x-1)+1)+150x^4-120x^3$$
$$f'''x = -20\mu^3 e^{\mu(x-1)}(\mu(x-1)+2)+600x^3-360x^2$$
$$f^4x = -20\mu^4 e^{\mu(x-1)}(\mu(x-1)+3)+1800x^2-720x$$
$$f^5x = -20\mu^5 e^{\mu(x-1)}(\mu(x-1)+4)+3600x-720$$
$$f^6x = -20\mu^6 e^{\mu(x-1)}(\mu(x-1)+5)+3600$$
$$f^7x = -20\mu^7 e^{\mu(x-1)}(\mu(x-1)+6)$$

1) $x = 0, \quad c = 0, \quad c' = 1$

$f(0) = -9{,}8447 < 0$

$< f(x+c) = \sum_0^7 b_p x^p$

$b_7 = \; < \frac{f^7(x)}{7!} = \frac{f^7(1)}{7!}, \quad b_6 = \frac{f^6(0)}{6!}, \quad b_5 = \frac{f^5(0)}{5!} \cdot \cdot b_2 = \frac{f''(0)}{2!}$

$$x_p = \frac{a^p}{p!\, b_p}$$

$p_1 = 3, \quad p_2 = 4, \quad p_3 = 5, \quad p_4 = 7$

$x_3 = \frac{a^3}{f'''(0)}, \quad x_4 = \frac{a^4}{f^4(0)}, \quad x_5 = \frac{a^5}{f^5(0)}, \quad x_7 = \frac{a^7}{f^7(1)}$

$x_3 = x_4$ für $a = \frac{\mu(3-\mu)}{2-\mu}$

$x_3 = x_5 \quad \cdot \quad a = \mu \sqrt{\frac{\mu e^\mu + 4 - \mu}{2-\mu}}$

$x_3 = x_7 \quad \cdot \quad a = \mu \sqrt[4]{\frac{6e^\mu}{2-\mu}}$

Der grösste dieser Werte ist der vorletzte, den wir als a wählen.

$$x = x_3, \quad \varphi(z) = x f(0), \quad \log \varphi(z) = 4{,}015; \quad z = 7{,}3$$

$$t = \frac{z}{a} = 0{,}47$$

Da $f(0{,}47) < 0$, so hat $f(x) = 0$ zwischen 0 und 0,47 keine Wurzel.

2) $x = 0{,}47$; c und c' wie vor.

$f(0{,}47) = -4{,}097$; x und a wie ad 1)

$\varphi(z) = \frac{x f(x)}{e^{ax}}$. $\log \varphi(z) = 0{,}463$; $z = 1{,}4$

$$t = 0{,}47 + \frac{z}{a} = 0{,}56$$

u. s. w., es findet eine fortwährende Annäherung an die zweifache Wurzel $\omega = 1$ statt.

Tabelle über $\mp \log \varphi z$. (§ 13, III.)

Zu Methode III.

z	$-\log \varphi z$	z	$-\log \varphi z$	z	$-\log \varphi z$
0,010	4,30	0,050	2,89	0,40	0,979
011	21	055	80	41	955
012	14	060	73	42	931
013	07	065	66	43	907
014	00	070	59	44	884
015	3,94	075	53	45	862
016	89	080	47	46	840
017	84	085	42	47	818
018	79	090	37	48	797
019	74	095	32	49	776
020	69	10	27	50	755
021	65	11	19	51	735
022	61	12	11	52	715
023	57	13	04	53	696
024	53	14	1,97	54	676
025	50	15	91	55	658
026	46	16	85	56	639
027	43	17	79	57	620
028	40	18	74	58	602
029	37	19	69	59	584
030	34	20	64	60	567
031	31	21	60	61	549
032	28	22	55	62	532
033	25	23	51	63	515
034	23	24	47	64	499
035	20	25	43	65	482
036	18	26	39	66	466
037	15	27	36	67	450
038	13	28	32	68	434
039	11	29	29	69	418
040	09	30	26	70	402
041	06	31	23	71	387
042	04	32	20	72	372
043	02	33	17	73	357
044	00	34	14	74	342
045	2,98	35	11	75	327
046	96	36	08	76	313
047	94	37	06	77	298
048	92	38	03	78	284
049	91	39	00	79	270

z	$-\log \varphi z$	z	$+\log \varphi z$	z	$+\log \varphi z$
0,80	0,256	1	0,00	3,1	1,68
81	242	1,1	11	3,2	74
82	228	1,2	22	3,3	80
83	215	1,3	32	3,4	86
84	201	1,4	42	3,5	92
85	188	1,5	51	3,6	98
86	174	1,6	60	3,7	2,04
87	161	1,7	68	3,8	10
88	148	1,8	77	3,9	16
89	135	1,9	85	4	22
90	122	2	92	4,5	50
91	110	2,1	1,00	5	77
92	097	2,2	07	5,5	3,04
93	085	2,3	15	6	30
94	072	2,4	22	6,5	56
95	060	2,5	28	7	82
96	048	2,6	35	7,5	4,07
97	036	2,7	42	8	32
98	024	2,8	49	8,5	57
99	012	2,9	55	9	81
		3	61	9,5	5,06

Anmerkung: Eine Tabelle zu „Methode II über $\log \varphi r(z)$ hat der Verfasser in diesem Archiv, Teil LX gegeben.

XIV.

Das Viereck in Beziehung auf seine Hauptträgheitsaxen.

Von

R. Hoppe.

Der allgemeinste Ausdruck der Coordinaten der Ecken eines Vierecks bezogen auf dessen Hauptträgheitsaxen als Coordinaten ist

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= A\left(\frac{2a-b-1}{r}-1\right) & y_1 &= B\left(\frac{a-2b+ab}{r}-a\right)\\ x_3 &= A\left(\frac{2a-b-1}{r}+1\right) & y_3 &= B\left(\frac{a-2b+a^b}{r}+a\right)\\ x_2 &= A\left(\frac{2b-a-1}{r}-c\right) & y_2 &= B\left(\frac{b-2a+ab}{r}-bc\right)\\ x_4 &= A\left(\frac{2b-a-1}{r}+c\right) & y_4 &= B\left(\frac{b-2a+ab}{r}+bc\right) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$r^2 = 3\,\frac{(a+b)(1+ab)-2(a^2+b^2)}{a+bc^2} \quad (2)$$

Die Indices 1, 2, 3, 4 folgen dem Umfang; a, b, c sind willkürliche Zahlen, nur beschränkt durch die Bedingung, dass r reell wird; A und B sind unabhängig willkürliche Linien.

Lässt man die Relation (2) weg und betrachtet a, b, c, r, A, B als unbeschränkt willkürlich, so entsprechen die Coordinatenwerte (1) noch dem Schwerpunkt als Anfang bei beliebiger Axenrichtung.

Beide allgemeine Bestimmungen lassen sich nun mit speciellen Eigenschaften des Vierecks verbinden.

Soll das Viereck trägheitscentrisch sein, d. h. derart, dass allen durch den Schwerpunkt gehenden Axen gleiche Trägheitsmomente entsprechen, so ist Gl. (2) die erste Bedingung, und als zweite kommt die Relation hinzu:

$$\frac{B^2}{A^2} = \frac{(a-1)(a+1+2b)+c^2(b-1)(2a-b-1)}{(a-1)a[(a+1)b+2a]+c^2(b-1)b[2b-a(b+1)]} \tag{3}$$

Die Bedingung eines Kreissehnenvierecks ist:

$$\frac{B^2}{A^2} = \frac{9(a-b)(a+b-2)+(1-c^2)r^2}{9(a-b)(a+b-2ab)+(b^2c^2-a^2)r^2} \tag{4}$$

Die notwendige, nicht hinreichende Bedingung eines Kreistangentenvierecks ist:

$$(A^2+B^2ab)\{(A^2+B^2a)(1-a)-c^2(A^2+B^2b)(1-b)\}r^2 = 3(A^2+B^2a)(A^2+B^2b)(a-b)(1-a)(1-b) \tag{5}$$

Diese Gleichung drückt aus, dass die Summe zweier Seiten gleich der Summe der beiden andern ist. Eine Uebersicht über die möglichen Fälle gewährt der gemeinsame Ausdruck aller 4 Seiten

$$\sqrt{(a-b)\left(\frac{A^2+B^2a}{1-b}+\frac{A^2+B^2b}{a-1}c^2\right)} \pm[(A^2+B^2a)\pm(A^2+B^2b)c]\sqrt{\frac{A^2+B^2ab}{(A^2+B^2a)(A^2+B^2b)}} \tag{6}$$

wo das Doppelzeichen in der Klammer den Gegenseiten gemeinsam ist. Damit also die gleichen Summen die der Gegenseiten sind, wird erfordert, dass beide Irrationalen reell sind, und dass der erste Teil des Ausdrucks absolut grösser ist als der zweite. Letztere Bedingung wird unabhängig von c und einzig erfüllt durch

$$\frac{A^2+B^2a}{A^2+B^2b}\frac{a-1}{1-b} > 0 \tag{7}$$

Um die allgemeinen Gl. (1) auf dieso speciellen Vierecke anzuwenden, hat man entweder für c oder für $\frac{A}{B}$ die aus den Gl. (3) (4) (5) erhaltenen Worte einzusetzen. Es entsteht dann die Frage, unter welchen Begrenzungen der übrigen Willkürlichen jene Werte sowie dor von r reell werden. In Betreff der 2 ersten hat die Discussion keine Schwierigkeit, möge daher übergangen werden.

Beim Kreistangentenviereck hingegen ist die Discussion nicht so einfach, weil 6 Bedingungen zu erfüllen sind. Zur Abkürzung sei

$$A^2 = nB^2$$
$$D = (a+b)(1+ab) - 2(a^2+b^2)$$
$$E = 3b(a-1)(a-b) - D$$
$$F = 3a(1-b)(a-b) - D$$
$$k = 3ab(a-1)(1-b)(a-b)$$
$$h = -\frac{k}{E}$$
$$\nu = n+ab$$
$$p = (n+a)(a-1)$$
$$q = (n+b)(1-b)$$
$$m = \frac{\nu D}{3pq(a-b)}$$

Dann lanten die aus Gl. (5) nnd (2) zn ziehenden Werte:

$$c^2 = \frac{a-pm}{qm-b}; \quad r^2 = \frac{3D}{a+bc^2} \qquad 8)$$

Die Bedingnngen dafür, dass c, r nnd die Irrationalen in (6) reell, n positiv, nnd (7) erfüllt sei, sind folgende 6:

1) $c^2 > 0$ 2) $\frac{a+bc^2}{D} > 0$

3) $\frac{a-b}{a-1}\,\frac{p+qc^2}{1-b} > 0$ 4) $\nu > ab$

5) $\nu(n+a)(n+b) > 0$ 6) $pq > 0$

Diese redncireu sich indes mannichfach.

Wegen $pq > 0$ wird die 5te:

5) $\nu(a-1)(1-b) > 0$

Da das Viereck dasselbe bleibt, wenn man a mit b vertanscht, während c, r, A, B in $\frac{1}{c}$, rc, Ac, Bc übergehen, so kann man setzen:

$$a > b$$

und nnn folgt:

Wäre $a < 0$, also anch $b < 0$, $ab > 0$, so wäre

$$\nu > 0; \quad a-1 < 0; \quad 1-b > 0$$

im Widerspruch mit Bedingnng 5).

Wäre $b > 1$, also auch $a > 1$, $ab > 0$, so wäre

$$\nu > 0; \quad a-1 > 0; \quad 1-b < 0$$

ebenfalls gegen Bedingung 5). Zunächst also ist

$$a > 0; \quad b < 1$$

Wäre $0 < b < 1$, also $a > 0$, $ab > 0$, so wäre

$$\nu > 0; \quad 1-b > 0$$

daher nach Bedingung 5) dann 2)

$$a > 1; \quad a+bc^2 > 0; \quad D > 0$$

Es ist aber

$$D = -(1-b)^2-(a-1)(1-b)(3+b)-(a-1)^2(2-b) < 0$$

folglich ist auch dieser Fall nicht möglich, und man hat:

$$a > 0; \quad b < 0$$

Bei dieser Begrenzung erhellt, dass

$$a-1, \quad \nu, \quad p, \quad q, \quad -k$$

stets gleiches Vorzeichen haben.

Daraus folgt, dass

$$\frac{p+qc^2}{a-1} > 0$$

Daher ist Bedingung 3) immer von selbst erfüllt.

Nimmt man nun bloss an

$$a > 0; \quad b < 0; \quad \nu(a-1) > 0$$

so folgt zunächst Bedingung 5). Ist jetzt $a > 1$, so wird $p > 0$ und

$$q = [\nu - b(a-1)](1-b) > 0$$

Ist $a < 1$, also $\nu < 0$, so wird $p < 0$, $q < 0$, und Bedingung 6) ist in beiden Fällen erfüllt. Es bleiben nur die Bedingungen 1) 2) 4) zu prüfen.

Nach der ersten Gl. (8) ist

$$\frac{a+bc^2}{E_1} = \frac{aq-bq}{qm-b}\frac{m}{D} \tag{9}$$

und zwar hat m das Vorzeichen von νD, mithin $\frac{m}{D}$ das von ν und q, und die Grösse (9) das von

$$\frac{a-b\frac{p}{q}}{qm-b}$$

Der Zähler ist positiv, folglich geht Bed. 2) über in

2) $$qm-b>0$$

und Bed. 1) in

1) $$a-pm>0$$

Von diesen 2 Ungleichungen ist immer eine von selbst erfüllt. Entwickelt man dio 2 Grössen in ν, so kommt:

$$a-pm=\frac{F\nu-k}{3q(a-b)}$$

$$qm-b=-\frac{E\nu+k}{3p(a-b)}$$

und die Bed. 1) 2) lassen sich schreiben:

1) $F-\frac{k}{\nu}>0$ 2) $E+\frac{k}{\nu}<0$

Die eine von heiden Bedingungen, welche vorher noch hestand, lässt sich jetzt durch Begrenzung von ν erfüllen. Es bleibt nur zu prüfen, welche der 2 Bogrenznngon, diese oder 4), die andro überflüssig macht.

Die Untersnchnng verlangt die Zerlegnng der Intervalle der a und b in viele Teile. Entwickolt man die Grössen D, E, F, $E+\frac{k}{ab}$, $F-\frac{k}{ab}$ als qnadratische Fnnctionen von b, so sind zuerst bei Formwechsel dcrselben die Intervalle der a zu hegrenzen, dann bei ihrem Verschwinden die der b. Die so gehildeten Intervalle vereinigen sich jedoch schliesslich grossenteils wieder infolge verschiedener Umstände; es kommen nnr die kleinern Wurzeln der Gleichnngen $E=0$ nnd $E+\frac{k}{ab}=0$ als scheidend in Betracht. Sei b_1 die kleinere Wurzel der erstern, b_2 dio der letztern. Ihre Werte sind:

$$b_1=\frac{1+3a-2a^2\mp(1-a)\sqrt{1+28a+4a^2}}{2(5-4a)}$$

$$b_2=\frac{-2+3a+a^2\mp(1-a)\sqrt{1+16a+16a^2}}{2(2-a)}$$

Es ergeben sich folgende 6 Fälle, in welchen die Werte (1) nach Einsetzung der Werte (8) ein reelles Kreistangentenviereck darstellen.

I.	$1{,}25 < a$	$b < b_1$	$0 < \nu$
II.	„	$b_1 < b < 0$	$0 < \nu < h$
III.	$1 < a < 1{,}25$	$b < 0$	$0 < \nu < h$
IV.	$0{,}8 < a < 1$	$b < 0$	$h < \nu < 0$
V.	$0 < a < 0{,}8$	$b < b_2$	$h < \nu < 0$
VI.	„	$b_2 < b < 0$	$ab < \nu < 0$

In Betreff der Grenzfälle ist folgendes zu bemerken. Zwischen I. und II. wird $b = b_1$; $h = \infty$; daher fallen die Grenzen der ν zusammen; zwischen V. und VI. wird $b = b_2$; $h = ab$; und die ν sind gleich begrenzt. Beim Uebergang von II. zu III. durch $a = 1{,}25$ wird $b_1 = -\infty$, dann $= +\infty$ und hört von da an auf kleinste Wurzel zu sein, während die andre Wurzel positiv bleibt. I. existirt dann nicht, und II. III. lauten gleich. III. und IV. lassen bei $a = 1$ nur den Wert $\nu = 0$ zu und fallen hiermit zusammen. Bei $a = 0{,}8$ wird $b_2 = 0$, und IV. V. lauten gleich.

XV.

Miscellen.

1.

Umkehrung eines Satzes über die Anziehung einer Kugel.

Nach Newton'schem Gesetze ist die Anziehung einer homogenen Kugel auf einen äussern Punkt gleich der Anziehung der gleichen im Mittelpunkt vereinigten Masse auf denselben — oder kurz: Der Mittelpunkt einer homogenen Kugel ist Mittelpunkt ihrer Newton'schen Anziehung auf äussere Punkte.

Es fragt sich nun, ob man umgekehrt aus dem gleichen Resultate eines unbekannten Anziehungsgesetzes schliessen kann, dass dieses das Newton'sche sei.

Der Mittelpunkt der Kugel $\varrho \leqq c$ sei Anfang der Polarcoordinaten ϱ, ϑ, φ, ferner $\varrho = h > c$ der Radiusvector des angezogenen Punktes, r dessen Abstand von einem Element der Kugel, $\frac{\psi'(r)}{r}$ das Potential der Anziehung beider. Dann lautet die Bedingung des Mittelpunkts der durch ψ bestimmten Anziehung:

$$\int_0^c \varrho^2 \partial\varrho \int_0^{2R} \sin\vartheta \, \partial\vartheta \int_0^{4R} \partial\varphi \, \frac{\psi'(r)}{r} = \frac{8R\,c^3}{3} \, \frac{\psi'(h)}{h}$$

für jedes c und jedes $h > c$, oder:

$$\int_0^c \varrho^2 \, \partial\varrho \int^{2R} \frac{\psi'(r)}{r} \sin\vartheta \, \partial\vartheta = \frac{2c^3}{3} \, \frac{\psi'(h)}{h}$$

Nun ist

$$r^2 = \varrho^2 + h^2 - 2h\varrho\cos\vartheta; \quad \frac{\sin\vartheta\,\partial\vartheta}{r} = \frac{\partial r}{h\varrho}$$

und r variirt bei bei constantem ϱ von $h-\varrho$ bis $h+\varrho$. Dies gibt:

$$\int_0^c \varrho \, \partial\varrho \, [\psi(h+\varrho) - \psi(h-\varrho)] = \frac{2c^3}{3} \psi'(h)$$

Differentiirt man mehrmals nach c, so kommt:

$$\psi(h+c)-\psi(h-c)=2c\,\psi'(h)$$
$$\psi'(h+c)+\psi'(h-c)=2\psi'(h)$$
$$\psi''(h+c)=\psi''(h-c)$$

folglich ist $\psi''(r)$ constant, mithin

$$\frac{\psi'(r)}{r}=\frac{A}{r}+B$$

Es hat sich ergeben: Ist der Mittelpunkt einer homogenen Kugel Mittelpunkt ihrer Anziehung, so kann letztere nur nach Newton'schem Gesetze stattfinden.

R. Hoppe.

2.

Näherungsausdruck für π.

Den bekannten Näherungsausdrücken für die Ludolf'sche Zahl lässt sich wol der folgende an die Seite stellen:

$$\frac{9}{5}+\sqrt{\frac{9}{5}}=3{,}141\,641\ldots=\pi+0{,}000\,048\ldots$$

welcher um etwa 1:65000 des Wertes zu gross ist.

Halberstadt. Ernst Lakenmacher.

XVI.

Die synthetischen Grundlagen der Theorie des Tetraedroid-Complexes.

Von

Fritz Hofmann.

Die Absicht der nachfolgenden Untersuchungen ist: es soll für einen gewissen Complex zweiten Grades, nämlich für jenen Complex, dessen Gerade 2 vorgegebene Flächen zweiten Grades in 4 harmonischen Punkten treffen, das Material zu synthetischer Behandlung gewonnen werden, soweit es durch einfache Mittel — Theorie der Strahlbüschel erster und zweiter Ordnung — erreichbar ist.

Dieser Complex nimmt unter den Complexen zweiten Grades eine besondere Stellung ein durch den Umstand, dass seine Singularitätenfläche, das Cayley'sche Tetraedroid, eine Specialisirung der für den allgemeinen Complex zweiten Grades als Singularitätenfläche geltenden Kummer'schen Fläche mit 16 Knotenpunkten bildet [1]).

---

1) Vergl. Salmon-Fiedler, Raumgeometrie, Bd. 2., Art. 360. (pag. 471. der dritten Auflage).

Genauer wäre es zu sagen: Der Tetraedroid-Complex nimmt, auch abgesehen von seiner Singularitäten-Fläche eine besondere Stellung unter den Complexen zweiten Grades ein wegen seiner Gleichungsform:

$$c_{12}p_{12}^2 + c_{13}p_{13}^2 + c_{14}p_{14}^2 + c_{23}p_{23}^2 + c_{24}p_{24}^2 + c_{34}p_{34}^2 = 0$$

(In dieser Gleichung bedeuten die c_{ik} folgende Summen:

$$c_{12} = a_1b_2 + a_2b_1; \quad c_{13} = a_1b_3 + a_3b_1; \quad c_{14} = a_1b_4 + a_4b_1$$

u. s. w., wenn die Gleichungen der beiden, den Complex bestimmenden Flächen zweiter Ordnung waren:

$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_4^2 = 0$; $b_1x_1^2 + b_2x_2^2 + b_3x_3^2 + b_4x_4^2 = 0$).

Dass aber diese Gleichungsform, selbst wenn man sich die c_{ik} beliebig vorgegeben denkt, nicht die allgemeine ist für den Complex zweiten Grades, kann algebraisch nachgewiesen werden.

Vergl. F. Klein, Inauguraldissertation, Bonn 1868.

Die dualistische Uebertragung der oben gegebenen Definition würde uns fragen lassen nach dem Complex jener Geraden, von welchen aus 2 vorgegebene Flächen zweiten Grades projicirt werden durch 4 Tangentialebenen, die ein harmonisches Büschel bilden. Nimmt man als eine dieser beiden Flächen zweiten Grades den unendlich fernen Kugelkreis, so erhält man bekanntlich als zugehörige Singularitätenfläche die Wellenfläche.

Indem wir uns auf die in den Einleitungsworten gegebene Herleitung beschränken, wonach jede Gerade des Complexes die vorgegebenen Flächen in 4 harmonischen Punkten treffen soll, bringen die nachfolgenden Zeilen als wesentlichen Inhalt die Construction eines durch einen beliebig vorgegebenen Raumpunkt gehenden, resp. auf einer beliebigen Ebene des Raums gelegenen, Vereins von Complexgeraden, — ein solcher Verein wird nachgewiesen (wozu die Angabe der Construction dem Synthetiker noch nicht genügen darf), als Kegel zweiter Ordnung, resp. Strahlbüschel zweiter Ordnung. Schliesslich wird die Möglichkeit von Singularitäten geometrisch erklärt, und der Grad der Singularitätenfläche bestimmt.

Die Ermittlung der Knotenpunkte ist einfacher synthetischer Behandlung noch ganz gut zugänglich; es wurde in den Schlussartikeln ein Nachweis gegeben für die Existenz solcher Knotenpunkte, nebst deren Construction —; wobei es genügte, um die aufgestellte Construction schliesslich zu vereinfachen, einen Satz aus der allgemeinen Curventheorie zur Hülfe heranzuziehen, nebst zwei von Plücker gegebenen Beziehungen aus der Theorie der Singularitätenflächen. Es wurde vorgezogen, diese Sätze geradezu zu citiren, statt synthetisch zu beweisen, da ihre vollständige Erörterung uns in allgemeine Gebiete und damit aus dem Rahmen der speciellen uns vorgegebenen Untersuchung hinaus führen würde.

Abschnitt I.

Die Geraden des Complexes in einer Ebene.

§. 1.

1) Es sollen zunächst, wenn 2 Flächen zweiter Ordnung vorgegeben, die Geraden bestimmt werden, welche, in einer beliebig vorgegebenen Ebene des Raumes verlaufend, jene zwei Flächen in 4 harmonischen Punkten treffen.

Wir wollen aber zunächst mit der synthetischen Ableitung eines Satzes beginnen, der zwar für unsere weitern Untersuchungen nicht unbedingt notwendig ist, jedoch mit ihnen den directesten Zusammenhang hat.

Um jene Geraden zu bestimmen, welche „zwei in einer Ebene vorgegebene Kegelschnitte in 4 harmonischen Punkten treffen", schlägt die analytische Geometrie folgenden Weg ein [1]):

Es sei vorgegeben:

$$\begin{cases} c_{11}x_1^2+c_{22}x_2^2+c_{33}x_3^2+2c_{12}x_1x_2+2c_{13}x_1x_3+2c_{23}x_2x_3=0 \\ d_{11}x_1^2+d_{22}x_2^2+d_{33}x_3^2+2d_{12}x_1x_2+2d_{13}x_1x_3+2d_{23}x_2x_3=0 \end{cases}$$

als Gleichungen jener Kegelschnitte.

Man stelle auf:

$$\text{A} \qquad \begin{vmatrix} c_{11}+\lambda d_{11} & c_{21}+\lambda d_{21} & c_{31}+\lambda d_{31} & \xi_1 \\ c_{12}+\lambda d_{12} & c_{22}+\lambda d_{22} & c_{32}+\lambda d_{32} & \xi_2 \\ c_{13}+\lambda d_{13} & c_{23}+\lambda d_{23} & c_{33}+\lambda d_{33} & \xi_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Die Bedingung dafür, dass diese Gleichung zwei entgegengesetzt gleiche Wurzeln für λ liefert, giebt eine Beziehung zwischen c, d, ξ; indem man diese Bedingung herstellt in Form einer Gleichung, erkennt man durch Ausrechnen, dass derselben Bedingungsgleichung auch die Coordinaten $\xi_1\,\xi_2\,\xi_3$ jener Geraden genügen, welche die beiden Kegelschnitte c und d in 4 harmonischen Punkten treffen.

Der geometrische Sinn dieses', wie gesagt, durch Ausrechnung und nicht durch Schlüsse gewonnenen Resultats ist:

„eine Gerade ξ, welche 2 vorgegebene Kegelschnitte cd in 4 harmonischen Punkten treffen soll, hat dann dieso besondere Lage zu den beiden Kegelschnitten cd, wenn jene beiden Kegelschnitte des Büschels cd, welche ξ berühren, die Kegelschnitte cd harmonisch trennen (im Kegelschnittbüschel cd)".

Mit andern Worten: construirt man ein zu cd harmonisch liegendes Kegelschnittpaar ab im Büschel cd, so sind die gemeinschaftlichen Tangenten von ab Gerade unseres Complexes.

---

1) Salmon-Fiedler, Kegelschnitte; art. 356.; (pag. 528. der vierten Auflage).

(Zur Erläuterung wiederholen wir den Satz in Zusammenhang mit Fig. 1. „es seien cd zwei Kegelschnitte des Büschels ab, und es mögen cd die beiden ab harmonisch trennnen. Ist ξ eine Gerade, welche a und b berührt, so sind die 4 Schnittpunkte von ξ mit c und d harmonisch."

Es ist misslich, dass die Figur nicht bequem anders gezeichnet werden kann, als so, dass einer der beiden Kegelschnitte c oder d imaginär schneidet, so dass also ein Schnittpunktepaar von ξ mit einem der vorgegebenen Kegelschnitte, das Paar $\delta\delta'$ beispielsweise, ersetzt werden muss durch eine polare Involution auf ξ in Bezug auf d.

„Je zwei helichige Punktepaare dieser Involution auf ξ, in Bezug auf d, liegen mit den Punkten $\gamma\gamma'$, wo c trifft, in Involution"; diese Auffassung muss bei genauerem Festhalten an der vorliegenden Figur 1. eigentlich gewählt werden; diese Sprechweise ist damit begründet, dass die „involutorische Lage von 3 Punktepaaren" zwischen denselben die Beziehung herstellt, dass alle 3 Paare von einem und demselben Punktepaar harmonisch getrennt werden, in unserem Falle von den unsichtbaren $\delta\delta'$ [1]).)

Nachdem obiger Zusammenhang zwischen zwei so verschiedenen Definitionen der uns beschäftigenden Geraden ξ nachgewiesen, durch Rechnung, erscheint es dem Synthetiker wünschenswert, die algebraisch bewiesene Gleichheit der beiden Definitionen auf rein geometrischem Wege zu begründen. Unser Weg wird natürlich den von der analytischen Geometrie eingeschlagenen an Länge übertreffen müssen — doch mag manches nebenbei gewonnene Resultat die aufgewendete Mühe lohnend erscheinen lassen.

2. Wir beginnen mit folgenden beiden ganz elementaren Lehrsätzen:

„Sind die Punkte $ABCD$ feste Grundpunkte eines Kegelschnittbüschels, x mit y auf einer festen Geraden g veränderlich, als Schnittpunkte des beweglichen Kegelschnitts durch $ABCD$, so ist die Bewegung von x zu y projectivisch involutorisch".

Denn in der Figur 2 liegt stets der feste Punkt 3 mit den beiden veränderlichen Gegenseiten-Schnittpunkten 1 und 2 auf einer Geraden. Bewegt sich x, so bewegt sich dazu projectivisch 1, damit auch 2 auf AD, schliesslich projectivisch mit x auch y.

---

1) oder noch kürzer: die Schnittpunkte $\gamma\gamma'$ sind polar conjugirt in Bezug auf d, als harmonisch getrennt von dessen imaginären Schnittpunkten mit ξ.

All das wird nach Pascal's Theorem geschlossen, ebenso auch, dass y nach x rückt, wenn x nach y fällt (es liegen ja auch die Punkte 4 5 3 auf einer Geraden).

Und ferner: „Wird eine Involution abgebildet auf einer Curve zweiter Ordnung, so gehen die Verbindungslinien von Paaren entsprechender Punkte durch einen festen Punkt." (Reye, Geometrie der Lage, 2. Aufl.; I. pag. 118).

3. Lehrsatz. Die Bewegung jener Punkte x oder y ist zwar nicht zur Bewegung des Kegelschnitts im Büschel projectivisch (für welche als Maass die Bewegung einer in einem Grundpunkt B sich bewegenden Tangente zu nehmen ist, oder die Bewegung des zweiten Schnittpunktes G des veränderlichen Kegelschnitts, mit einer festen Geraden BM durch einen der Grundpunkte, vergl. Fig. 3.); wol aber tritt eine projectivische Beziehung zu Tage, wenn man die Involution xy wieder auf einen Kegelschnitt abbildet, — durch Projection von einem seiner Punkte aus —, derart dass jedem Paare von zwei Punkten xy eine Verbindungslinie ihrer Bildpunkte zugeordnet wird. All diese Verbindungslinien bilden ein Büschel erster Ordnung (vergl. 2.); „und dieses Büschel — hervorgerufen durch und bezogen auf die Bewegung eines Kegelschnitts in einem Kegelschnittbüschel ist zu dieser Bewegung selbst projectivisch".

Beweis. Es sei etwa (Fig. 3.) g die feste Gerade, die von allen Kegelschnitten des Büschels $ABCD$ getroffen werde in Punktepaaren xy einer Involution (n. 2.). Zu zeigen ist, dass wenn ein Kegelschnitt K benutzt wird diese Involution abzubilden (indem man immer ein Punktepaar, wie xy, von einem festen Punkte A auf K projicirt nach x', y'), schliesslich die Bewegung des Strahles $x'My'$ um den festen Involutionsmittelpunkt M auf g projectivisch ist mit der Bewegung des Punktes G auf BM — wobei G zweiter Schnittpunkt des veränderlichen Kegelschnitts L.

Zu diesem Zwecke schneiden wir die erste Gerade $x'My'$ oder l mit 3 Kegelschnitten des Büschels: erstens mit K, dann mit L, schliesslich mit dem Linienpaar AB, CD; und projiciren von A aus die 6 Schnittpunkte auf l nach L. Wir erhalten so erstens xy mit der Verbindungslinie g, zweitens l selbst, als Verbindungslinie der auf l gelegenen Schnittpunkte von L mit l, schliesslich aber B nebst einem gewissen Punkte G auf L, den man erhält, indem man den Schnittpunkt F von CD mit $x'y'$ oder l projicirt von A aus nach L. Die 3 Verbindungslinien g, l, GB gehen nach unserm Hilfssatze 2. durch einen Punkt, M. Wir können auch umgekehrt sagen: ist l eine beliebige Gerade, KL zwei Kegelschnitte durch die

4 Punkte $ABCD$, ist g die Verbindungslinie der Bildpunkte xy auf L, welche erhalten sind durch Projection von $x'y'$ über A, ist schliesslich M der Schnittpunkt von g und l, F der von CD und l, dann treffen sich die beiden Geraden BM und AF in einem Punkte G von L.

Für einen weiteren Kegelschnitt L' (vergl. Fig. 3.) sind dann die beiden neuen Schnittpunkte xy immer noch so gelegen, dass die Verbindungsgerade $x'y'$ ihrer Bildpunkte durch M geht — immer noch ist, wie früher, ein Curvenpunkt G' der neuen Curve L' gelegen auf AF', wo dasselbe die festgehliebene Gerade BM trifft:

die Bewegung der Punkte $FF'\ldots$ ist also perspectivisch zu der Bewegung von GG'; mit den Punkten F ist aber die Bewegung der Strahlen $x'My'$ perspectivisch — G dagegen misst die Bewegung des Kegelschnitts K im Kegelschnittbüschel. Damit ist also der Satz vollständig hewiesen.

4. Es sei nun ein Kegelschnitthüschel vorgegehen, das eine feste Gerade g zweimal berührt, dessen auf g hervorgehrachte Involution überdies ahgehildet wurde; in Fig. 4. sei AB das Bild der Doppelpunkte $a\beta$ der Involution, also das Bild der Berührpunkte. Sei M der Pol von AB, in Bezug auf den ahhildenden Kegelschnitt K', dann ist das Bild eines jeden, von einem heliehigen Kegelschnitte K des Büschels auf G ausgeschnitteuen, Punktepaares eine Gerade k durch M, das Centrum der ahhildenden Involution —; mit der Bewegung von K im Kegelschnitthüschel ist die von k im Büschel M projectivisch, wie so eben hewieson.

Legt man insbesondere zwei Kegelschnitte KK_1 im Büschel harmonisch zu den berührenden, so ist ihr Bild: —2 Gerade durch M, welche harmonisch getrennt werden von MA, MB.

Die Geraden k, k_1 sind also conjugirt; und hieraus folgt, dass ihre 4 Schnittpunkte mit dem ahhildenden Kegelschnitt K' harmonisch sind [1]); somit auch die 4 Schnittpunkte der 2 Kegelschnitte KK_1 mit

---

1) Ohige Bemerkung: „zwei conjugirte Gerade treffen den Kegelschnitt in 4 harmonischen Punkten" bildet den Angelpunkt unseres Beweises, doch kann gerade dieser Satz nicht durch Anschauung unterstützt werden, solange wir, wie in Fig. 4., A und B reell voraussetzen, daher M ausserhalh K'. Denn für eine solche Lage wird von den beiden Geraden kk_1 sicher eine imaginäre treffen.

Um daher diese Bemerkung durch Anschauung evident zu machen, wurde speciell die Hilfsfigur 5 construirt, die zwei conjugirte Gerade kk_1 aufweist, die diesmal K' heide reell treffen — dass dann die 4 Schnittpunkte auf K' harmonisch liegen, ist nach den ersten Principien der Polarentheorie selbstverständlich.

g, von welchen Schnittpunkten die auf K' liegenden Schnittpunkte mit k_1 und k nur die Bilder sind.

„Sind daher 2 Kegelschnitte KK_1 harmonisch getrennt von 2 Kegelschnitten ab ihres Büschels, welch' letztere eine Gerade g als gemeinschaftliche Tangente aufweisen, so treffen dieselben jene Gerade g in vier harmonischen Punkten. Von diesen 4 Punkten sind 2 reell, 2 imaginär, wenn die Berührung der ab mit g eine reelle ist".

5. Eine Zahl von für die elementare Geometrie verwendbaren Sätzen über die Theorie von „Kreisen durch 2 feste Punkte" lässt sich aus dem bis jetzt gefundenen Material ablesen.

Seien vorgegeben (Fig. 6) zwei feste Punkte AB, sowie eine Gerade g. Man lege einen beliebigen Kreis durch AB, ziehe AG parallel g, schliesslich GBM; der Punkt M ist dann in besonderer Weise ausgezeichnet.

Führt man eine beliebige Gerade $x_1 y_1$ oder g_1 durch ihn, so können deren Schnittpunkte $x_1 y_1$ mit dem vorgegebenen Kreise von von A aus auf g projicirt werden: xy.

„Die vier Punkte $ABxy$ liegen immer wieder auf einem Kreise".

„Derselbe geht ausserdem durch den Punkt G', in welchem AG' (parallel zu g_1) die feste Gerade BM trifft".

(Hier erkennt man besonders deutlich den in N. 3. aufgestellten. Lehrsatz wieder. Die Bewegung der Kreise ist projectivisch mit G') Das Büschel AG' ist parallel mit $M(g)$.)

„Zieht man in A die Tangente an K, so trifft dieselbe in einem Punkte M' die g, derart, dass $ABMM'$ auf einem Kreise liegen (wie bewiesen wird, indem man g_1 durch M und A führt)."

„Um jene Kreise durch AB zu finden, welche g berühren, zieht man von M aus die Tangenten an K; deren Berührungspunkte DD' werden mit A verbunden und liefern so die Berührpunkte jener 2 Kreise — durch die Schnittpunkte von AD, AD' mit g."

Anm. Zwei einfache Beweise für den Hauptsatz unsers Paragraphen finden sich bei Durège, Ebene Curven III. O. Art. 127.

§ 2.

Somit wäre für jene Geraden einer Ebene, welche unserm Complexe angehören, eine neue Definition gewonnen; doch verlassen wir dieselbe als eine relativ umständlichere um zu der ursprünglich gegebenen zurückzukehren; wonach also die Complexgeraden der Ebene zwei vorgegebene Kegelschnitte in 4 harmonischen Punkten treffen.

Um die im Nachfolgenden zu gebende „Construction von 2 solchen Geraden durch einen beliebig vorgegeben Punkt der Ebene" vollständig zu begründen, müssen wir einen kleinen Umweg einschlagen, der uns die Theorie einer gewissen einfachen Abbildungsmethode berühren lässt.

Es seien (Fig. 7.) zwei Kegelschnitte KK' vorgegeben, die sich reell schneiden, M ein gemeinschaftlicher Punkt derselben. Man kann dann durch einen beliebig vorgegebenen Punkt P sämtliche Secanten PAB durch K legen und immer die Schnittpunkte A und B über M projiciren nach den Punkten $A'B'$ auf K'. Die Bewegung der Punkte AB auf K ist eine involutorische, solange P fest, die Bewegung von $A'B'$ auf K' ist respective projectivisch mit der Bewegung von A und B auf K; daher sind auch die Punktepaare $A'B'$ auf K' in involutorischer Lage, liefern daher Verbindungsgerade durch einen festen Punkt P'.

Wird insbesondere AB zur Tangente $PC(PC_1)$, so fällt auch auf K' das Bild von AB in einen Punkt zusammen: C' (resp. C_1'); daher „erhält man das Bild eines Punktes P am kürzesten, indem man von P aus die Tangenten an K construirt, die Berührpunkte C und C_1' über M nach K' projicirt und in $C'C_1'$ die Tangenten an K' construirt, die sich in P' schneiden."

Es ist interessant weiter zu verfolgen, wie so für jeden Punkt P (derselbe darf auch innerhalb K gelegen sein), aber auch für jede Verbindungsgerade von 2 vorgegebenen Punkten ein Bild gewonnen in eindeutiger Weise; indem zunächst jedem Punkte P der Ebene eine ganz bestimmte Strahleninvolution durch M zugeordnet wird; jeder Geraden aber ein ganz bestimmtes Linienpaar. Es würde so gelingen die ganze Ebene abzubilden im Strahlbüschel M; ein Gedanke, der von Hesse vollständig auf analytischem Wege durchgeführt wurde in seiner Schrift: „Vier Vorlesungen aus der analytischen Geometrie; Leipzig 1866"; die Correspondenz zwischen den Punkten der Ebene und dem Büschel M wird bei ihm Homographie genannt.

Wir führen diese Betrachtungen nicht weiter als bis zum Beweise des folgenden Satzes: „die Bewegung der Büschel $P(g)$ und $P'(g')$ ist projectivisch."

Um dies streng nachzuweisen, müssen wir zurückgehen bis auf die allererste Grundlage der Theorie der Projectivität: „zwei Strahlbüschel erster Ordnung sind dann projectivisch auf einander bezogen, wenn je 4 harmonischen Elementen des einen immer 4 harmonische Elemente des andern Büschels entsprechen."

Es ist nun nach den ersten Grundsätzen der Theorie der Involutionen einleuchtend: „Gehen 3 Gerade g (links) durch einen und denselben Punkt, so gehen auch (rechts) deren Bilder g' durch einen Punkt“ (vergl. §. 1., (2); unser Satz ist nur eine Wiederholung der oben gegebenen Definition des Abbildungs-Princips); ebenso einfach ist der Satz zu erkennen: Einer Verbindungsgeraden von 2 Punkten entspricht als Bild die Verbindungsgerade der Bilder jener Punkte.

Construirt man nun (Fig. 8.) ein vollständiges Viereck, in welchem der vorgegebene Punkt P als Diagonalenschnittpunkt vorkommt, so erhält man (rechts) als Bild dieser Figur einen Verein von Punkten und Geraden, welche, nach den beiden soeben gemachten kurzen Bemerkungen, die Eigenschaft haben, wieder die Figur eines vollständigen Vierecks zu bilden mit P als einem seiner Diagonalschnittpunkte. Die links durch P geführten 4 Linien sind aber nach der Construction harmonisch, desgleichen sind es auch deren entsprechende Bilder rechts. Damit ist der Satz bewiesen; wir wiederholen: „Bewegt sich ein Strahl g um den Punkt P, so ist zu seiner Bewegung die des entsprechenden Strahles g' im Büschel P' projectivisch.“

Mit den Betrachtungen dieses Paragraphen ist auch die Bemerkung erwiesen, dass die Zuweisung der Punkte P und P' in der doppelt gelegten Zeichnungsebene eine collineare ist (wobei die 3 Schnittpunkte von KK' ausser M die Doppelelemente der Collineation PP').

§. 3.

1. In Fig. 9. seien KK' die beiden vorgegebenen Kegelschnitte, P der Punkt, durch welchen die Geraden $\gamma\gamma$ so zu legen sind, dass sie KK' in 4 harmonischen Punkten schneiden.

Man kann eine Gerade g beliebig durch P gezogen denken und deren conjugirte Gerade in Bezug auf K' construiren durch P', den Bildpunkt von P (vergl. §. 2.).

Diese zu g conjugirte Gerade schneidet K' in $B'D'$, welche Punkte über M zurück nach K abgebildet werden können als B und D. Da die Gerade $B'D'$ durch P' ging, so geht die Verbindungsgerade BD, die wir etwa g' nennen wollen, durch P, fällt aber im allgemeinen nicht mehr mit der ursprünglich vorgegebenen g zusammen. Die Bewegung von g' ist zu der von g projectivisch: denn mit g ist projectivisch die Bewegung des Pols von g in Bezug auf K', demnach ist das Strahlbüschel $P'B'D'$ mit dem Centrum P' pro-

jectivisch mit dem Strahlbüschel g. Nun ist aber (§. 2.) das Strahlbüschel $P'B'D'$ durch den festen Punkt P' projectivisch zu dem Büschel g' durch P; daher g projectivisch zu g'.

Wird nun ein gemeinschaftliches, sich selbst entsprechendes Element der beiden Büschel g und g' bestimmt, etwa γ (vergl. dieselbe Figur), so hat der Strahl γ die Eigenschaft, dass, wenn man seine conjugirte Gerade (in Bezug auf K') durch P' zum Schnitt bringt mit K' in $B_\gamma' D_\gamma'$, die Bilder dieser beiden Punkte, $B_\gamma D_\gamma$, auf K, auf γ selbst liegen. Nennen wir AC die Schnittpunkte von γ mit K' so sind die 4 Punkte $AB_\gamma' CD_\gamma'$ auf dem Kegelschnitte K' harmonisch (vergl. Fig. 5. und die Anmerkung zu §. 1., 4); werden dieselben von M aus auf γ projicirt, so erhält man: $AB_\gamma CD_\gamma$ sind harmonisch; daher ist γ eine der Lösungen der Aufgabe.

Wir wiederholen die Constructionsvorschrift: es sei vorgegeben P, K, K'; man construire P' als Bild von P. Hierauf lege man ein Strahlbüschel g durch P, bestimme den jeweiligen Pol von g in Bezug auf K' und verbinde ihn mit P'. Die erhaltenen Schnittpunkte $B'D'$ auf K' auf dieser Verbindungslinie werden abgebildet als BD auf K, wobei die Verbindungslinie BD oder g' durch P geht.

Man bestimme die beiden sich selbst entsprechenden Strahlen der projectivischen Büschel g und g', dieselben treffen KK' in 4 harmonischen Punkten.

2. Beispielsweise legen wir Fig. 10. eine Tangente von P an K', Berührungspunkt T_1, die Verbindungslinie von P' mit diesem Berührungspunkte ist dann conjugirt zu g in Bezug auf K'. T_1M schneide K in T_1' — dann ist PT_1' das zu PT_1 als g gehörige g'.

Dasselbe gilt von der zweiten Tangente von P aus an K'.

Ferner denken wir uns eine Tangente von P an K gezogen, $P\tau_1'$, projiciren deren Berührpunkt über M nach τ_1 auf K' und nennen nunmehr $P\tau_1$ unsern Strahl g. Zu ihm ist conjugirt $P'\tau_1$ — denn auf der Tangente an K' in τ_1 liegt (sowol P' als auch) der Pol von $P\tau_1$ in Bezug auf K'. Die in τ_1 vereinigten Schnittpunkte der Geraden $P'\tau_1$ werden über M nach τ_1' projicirt, also ist $P\tau_1'$ das zu g gehörige g'. Dasselbe gilt für die zweite Tangente von P aus an K.

Mit diesen Bemerkungen ist, sogar mit Ueberbestimmung, Material gewonnen zur Construction der beiden Complexgeraden durch einen Punkt P, wenn derselbe ausserhalb der beiden Kegelschnitte KK' gelegen ist — und zwar genügen, nachdem P und KK' vor-

gegeben, die 4 Tangenten von P an die Kegelschnitte um die Beziehung zweier projectivischer Strahlbüschel durch P herzustellen.

Die Vorschrift zur Herstellung dieser Zuordnung lässt sich besonders leicht dem Gedächtnisse einprägen (vergl. Fig. 10.): man projicire die erhaltenen 4 Berührpunkte über M, einen gemeinschaftlichen Punkt der beiden Kegelschnitte, auf den jeweilig nicht berührten Kegelschnitt (T_1 nach T_1', dagegen τ_1' nach τ_1). Hierauf bezeichne man von den 8 so erhaltenen Punkten die 4 auf K gelegenen in beliebiger Reihenfolge mit $abcd$, die entsprechenden 4 Punkte auf K' mit $a'b'c'd'$ — wobei entsprechende Punkte solche sind, die durch Vermittlung von M sich gegenseitig abbilden, deren Verbindungsgerade also durch M geht.

Die doppeltentsprechenden Elemente der Strahlbüschel $P(abcd)$ und $P(a'b'c'd')$ lösen die Aufgabe — es ist bemerkenswert, dass aus dieser Fassung der Lösung der Punkt P' ganz eliminirt erscheint.

3. Somit wäre bereits die in den Eingangsworten gestellte Aufgabe: für die Complexgeraden Constructionen zu geben — erledigt; und wir können nach Obigem behaupten, dass im allgemeinen durch jeden Punkt jeder Ebene 2 solche Gerade gehen, oder auch, dass jede Ebene durch jeden Punkt des Raumes 2 solche Gerade enthält. Demnach ist in jeder Ebene des Raumes die von den Complexgeraden umhüllte Curve von der zweiten Classe, jeder durch einen beliebigen Raumpunkt gehende Complexkegel von der zweiten Ordnung.

Darf nun ohne weiteres gesagt werden, dass jene Curve zweiter Classe in der Tat Kegelschnitte in projectivischem Sinn sind, d. h. dass jene Curven identisch sind mit solchen, wie sie die Verbindungsgeraden homologer Punkte von projectivischen Punktreihen liefern?

Dem Analytiker fällt die Antwort nicht schwer — er hat gelernt, in einer Gleichungsform die ihm den zweiten Grad einer Curve anzeigt, auch sofort das Material zur projectivischen Erzeugung der vorgelegten Curve zu finden; für ihn deckt sich der Begriff einer „Curve $n$ten Grades der Gleichungsform und den daraus folgenden Eigenschaften nach“ mit dem Begriff einer „Curve $n$ten Grades der Erzeugungsweise nach.“

Für den Synthetiker liegt die Frage nicht so einfach. Er hat gelernt Curven zu construiren, welche sicher jede Gerade der Ebene in 2, 3, 4 ... Punkten treffen, indem er projectivische Büschel

erster Ordnung zum Schnitt bringt, oder ein solches mit einem dazu projectivischen Büschel zweiter Ordnung, oder zwei projectivische Büschel zweiter Ordnung. Wenn ihm nun umgekehrt eine Curve vorgelegt wird, die nicht mehr direct durch solche fundamentale Operationen erhalten wurde, von deren Punkten aber streng nachgewiesen werden kann, dass jede Gerade der Ebene deren n enthält — wenn also eine Curve vorgelegt wird, die nach ihren beobachteten Eigenschaften vom $n$ten Grade ist, dann darf er zwar überzeugt sein, dass diese Curve den Zusammenhang mit einer der fundamentalen Herstellungsweisen hat, dass sie durch eine solche geliefert werden kann —; aber diese Ueberzeugung darf noch nicht als Beweis gelten, nur als Ansporn gerade für den ihm vorgelegten Fall den Nachweis des Zusammenhangs zwischen Grad der Curven und Erzeugungsweise zu geben.

Der Synthetiker darf also wol die Existenz des folgenden Satzes vermuten: „Für jede Curve, welche nach ihren Eigenschaften als vom $n$ten Grade erkannt wurde, d. h. welche nachweisbar ex constructione jede Gerade der Ebene in n Punkten trifft, existirt auch eine der fundamentalen Erzeugungsweisen, nämlich die zur Zahl n gehörige", aber da ein erschöpfender allgemeiner Beweis dieses Satzes nicht existirt, so bleibt ihm in jedem speciellen Falle nichts übrig als ein Bruchstück des allgemeinen Beweises zu bringen, indem er den speciellen Fall behandelt.

Einige ganz einfache Beispiele mögen das Gesagte erläutern. Sind in einer Ebene zwei Kegelschnitte vorgegeben, so gibt es auf jeder Geraden g der Ebene 2 Punkte, xy, welche die beiden Schnittpunktepaare der Geraden g mit den beiden Kegelschnitten gleichzeitig harmonisch trennen. Der Ort der Punkte xy ist also eine Curve 2ten Grades; dass derselbe Ort durch die projectivische Erzeugungsweise der Kegelschnitte hergestellt werden kann, ist sicher anzunehmen, aber — ist auch der Synthetiker von der Existenz dieses Beweises überzeugt, so darf er hierin nur eine Aufforderung erblicken durch wirkliche Ableitung des Nachweises für das specielle Beispiel einen Baustein zu liefern für das Gebäude jenes oben ausgesprochenen allgemeinen Princips.

Ferner: Betrachtet man die Schnittcurve zweier Flächen 2ter Ordnung von einer Ecke des gemeinschaftlichen Polartetraeders aus, so scheinen sich aus Gründen der Symmetrie immer 2 Curvenpunkte zu decken, so dass also in jeder Ebene durch den Augpunkt immer nur 2 Strahlen nach den Curvenpunkten hinführen. Der projicirende Kegel ist also sicher von der zweiten Ordnung, dass er zu den durch ihre projectivische Erzeugungsweise definirten Kegeln zweiter

Ordnung gehört; dass er etwa den Schnitt zweier projectivischer Ebenenbüschel vorstellt, ist damit noch nicht bewiesen.

Diese Bemerkungen mögen zu unserer Rechtfertigung dienen, wenn wir mit der Angabe der in N. 2. gebrachten Construction der Geraden durch einen beliebigen Punkt P die projectivische Natur der von den Geraden $\gamma\gamma$ umhüllten Curve noch nicht genügend charakterisirt glauben. Um streng nachzuweisen, dass jene Curve ein Strahlbüschel zweiter Classe im projectivischen Sinn, wird uns nicht erspart werden weite Umwege einzuschlagen, sogar die Theorie der Regelflächen, also den Raum, zur Unterstützung heranzuziehen; wie gesagt, wird unser schliesslich gelieferter Beweis ein Stück bilden zum Nachweis jenes oben aufgestellten allgemeinern Princips; seine Schwierigkeit mag ein Wink sein, dass der Synthetiker nicht ganz unbedenklich in seinem Gebiete die Schlüsse ohne weiteres wiederholen darf, die in andern Gebieten erlaubt sind.

§ 4.

1. Wird der Punkt T, von welchem aus die 2 Complexgeraden $\gamma\gamma'$ gehen sollen, nicht mehr ganz willkürlich gewählt, sondern auf einer Tangente MT an einen der beiden vorgegebenen Kegelschnitte (Fig. 11.), so hat diese Tangente TM die Eigenschaft das System der beiden Kegelschnitte in 4 Punkten zu treffen, von welchen 3 in M selbst vereinigt sind, nämlich die beiden unendlich nahen Schnittpunkte dieser Tangente mit K', sowie nochmals der Punkt M, gerechnet als dem Kegelschnitte K angehörig. Würde man nun den zum 4ten Punkte k gehörigen Punkt construiren auf TM, welcher die unendlich kleine Strecke der beiden Schnittpunkte von MT mit K' harmonisch trennt, so würde man den Punkt M nochmals erhalten: daher ist eine solche Tangente wie MT durch einen gemeinschaftlichen Schnittpunkt M der vorgegebenen Kegelschnitte eine Gerade des Complexes, und die Bestimmung der zweiten Complexgeraden durch einen auf dieser Tangente willkürlich angenommenen Punkt T ist eine Aufgabe orsten Grades[1]).

Indem wir die Lage aller dieser zweiten Complexgeraden durch all die Punkte T studiren, erfahren wir die Lage der Complexgeraden in der Ebene der Kegelschnitte überhaupt: denn jede Gerade des Complexes schneidet diese Tangente, ist demnach auch in dieser neuen Aufzählung, nach den Punkten von MT, sicher einmal enthalten.

Wir haben demnach zunächst die folgende Aufgabe zu lösen: gegeben von 2 projectivischen Strahlbüscheln durch T ein Doppel-

1) Vgl. Salmon-Fiedler, Kegelschn. art. 354 (p. 523 d. 4. Aufl.).

element TM (oder $\alpha\alpha'$), gegeben ferner noch 2 mal 2 entsprechende Strahlen, man soll den zweiten, sich selbst entsprechenden, (Doppel-) Strahl der Büschel bestimmen.

Um uns weitere entsprechende Strahlen der beiden Büschel zu verschaffen, halten wir uns wörtlich an die einfache Regel von § 3., 2.: wir legen 2 Tangenten von T aus an K, welche in $\beta\gamma$ berühren mögen, projiciren (vergl. die Figur) $\beta\gamma$ über M nach $\beta'\gamma'$ auf K' und lassen dann die projectivische Beziehung zwischen 2 Strahlbüscheln durch T hergestellt sein dadurch, dass wir den 3 Strahlen nach $\alpha\beta\gamma$ als entsprechende zuordnen die nach $\alpha'\beta'\gamma'$.

Wenn $\alpha\alpha'$ zusammenfallen, so ist, wie gesagt, die Bestimmung des zweiten Doppelelements $\delta(\delta')$, welches die gesuchte zweite Complexgerade vorstellt, eine Aufgabe ersten Grades, die mit dem Lineale allein löshar ist. So einfach sich die Lösung gestalten würde, indem man die für diese Aufgabe bekannten Vorschriften ausführt, so empfiehlt es sich doch speciell in unserem Falle sich die folgende Bemerkung für die Durchführung der Lösung zu Nutze zu machen.

„Lehrsatz. Sind α und δ die Doppelelemente zweier projectivischen Gebilde erster Ordnung, welche bezogen sind durch die Zuordnung der Elemente $\alpha\beta\gamma$ zu $\alpha'\beta'\gamma'$, so sind sie auch die Doppelelemente jener Gebilde, welche projectivisch bezogen sind durch die Zuordnung der Elemente $\alpha\beta\beta'$ zu $\alpha'\gamma\gamma'$, d. h. man darf die Bezeichnungen der beiden Punkte β' und γ vertauschen."

Wir bringen von diesem elementaren Hilfssatze zwei Ableitungen.

Sind (Fig. 12.) auf einer Geraden 2 projectivische Punktreihen gegeben abc und $a'b'c'$, wobei a mit a' zusammenfällt, so wird man das zweite Doppelelement dd' des Trägers auf folgendem Wege ermitteln.

Wir nehmen auf einer beliebigen Geraden durch aa' zwei Punkte ω, ω' beliebig an; und verbinden ω mit der Punktreihe abc, ω' mit $a'b'c'$. Die beiden so erhaltenen Büschel liegen perspectivisch, die Verbindungsgerade BC von Schnittpunkten B und C entsprechender Strahlen schneidet den Träger im Punkte dd', der der verlangte zweite Doppelpunkt der beiden Punktreihen ist. Ein Blick auf die Figur zeigt, dass die 3 Punktepaare ad, bc', $b'c$ in Involution liegen, als Schnittpunkte des Trägers mit den Gegenseitenpaaren und Diagonalen eines Vierecks $\omega B\omega' C$. Nach den Elementen der Theorie der Involution ist aber bekannt, dass in einer solchen Figur zwei Gegenseiten, wie die durch b' und c gehenden, gleichberechtigt sind, in dem Sinne, dass man immer den Punkt d an derselben Stelle des

Trägers erhält als Schnitt der zweiten Diagonale eines Vierecks, wenn nur von diesem Viereck die übrigen Stücke durch dieselben 5 vorgegebenen Punkte gehen, nämlich eine Diagonale durch a, zwei Gegenseitenpaare durch bc' und $b'c$. Man kann auch so sagen: man verbinde die 4 Punkte $\omega'\omega D'a$ auf jener Hilfsgeraden mit den Büschelmittelpunkten C und B; so erhält man 2 Strahlbüschel, welche den Träger schneiden in $c'cda$ und $b'bda$: daher ist $(c'cda)$ projectivisch $(b'bda)$, was zu beweisen war.

Anschaulicher wird der Satz, wenn man die beiden aufeinander bezogenen Grundgebilde auf einem Kegelschnitte abbildet (Fig. 13.). Ist AA' ein Doppelelement der beiden Grundgebilde, ferner vorgegeben ABC als entsprechend zu $A'B'C'$, so erhält man eine Gerade, welche weitere homologe Elemente der beiden Reihen liefert, indem man die Punkte ABC mit B', dagegen $A'B'C'$ mit B durch Strahlenbüschel verbindet. Dieselben liegen perspectivisch (weil die Verbindungsgerade BB' entsprechende Strahlen enthält), daher ist der Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen eine Gerade durch AA' und den Schnittpunkt von BC' mit $B'C$. Wo diese Gerade den Kegelschnitt zum zweitenmale trifft, DD', haben wir ein zweites Doppelelement der beiden Reihen. In dieser Figur ist es völlig gleichgiltig, wenn die Bezeichnungen B' und C mit einander vertauscht werden, die Verbindungsgerade bleibt ja dieselbe; ebenso dürfte man B mit C' vertauschen.

Wir kehren nunmehr zur Figur 11. zurück; und wissen nunmehr, dass die Gerade δ sich genau an derselben Weise einstellen wird, wenn wir die Punkte $\alpha\beta\beta'$ zuordnen den Punkten $\alpha'\gamma\gamma'$ [1]). Um jenes zweite Doppelelement δ zu erhalten, benutzen wir die beiden durch M gelegten Geraden $\beta M\beta'$, $M\gamma\gamma'$. Sie werden von den beiden durch T gehenden Büscheln $T(\alpha\beta\beta')$ und $T(\alpha'\gamma\gamma')$ in folgenden Punkten geschnitten: $M\beta\beta'$, $M\gamma\gamma'$. Nach unserm soeben bewiesenen Hilfssatze ist es nun gestattet zu sagen: wir erhalten dasselbe $T\delta$, wenn wir zuordnen α zu α', β zu γ, β' zu γ'.

Daher gibt der Schnittpunkt x von $\beta\gamma$ mit $\beta'\gamma'$ die Lösung: die Verbindungsgerade Tx ist die zweite Complexgerade durch T.

So einfach diese Lösung ist: „man construire die 2 Tangenten $T\beta$, $T\gamma$ an K; projicire $\beta\gamma$ über M nach K' in die Punkte $\beta'\gamma'$ und bringe $\beta\gamma$ zum Schnitte mit $\beta'\gamma'$ in x“ — so lässt sie sich doch noch

---

1) D. h. wenn wir die Bezeichnungen der Punkte β' und γ vertauschen.

übersichtlicher gestalten und bequemer für die Aussprache, indem wir uns an eine früher aufgestellte Abbildung durch 2 Kegelschnitte erinnern (§ 2.).

Die Geraden $\beta\gamma$ gehen alle durch einen festen Punkt P, den Pol der Geraden MT in Bezug auf K.

Da nun ihre Schnittpunkte über den festen Punkt M projicirt werden nach $\beta'\gamma'$ auf K', so gehen auch die Geraden $\beta'\gamma'$ durch einen festen Punkt, den Bildpunkt P' von P, vermittelt durch den Punkt M (§ 2.).

Für diesen Bildpunkt P' lässt sich eine besonders einfache Construction angeben; indem wir nach den Vorschriften des § 2. die beiden Berührungspunkte der Tangenten von P aus an K projiciren über M nach K'.

Der eine Berührpunkt auf K, nämlich M selbst, liefert als Verbindungslinie mit M die Tangente an K in M; diese Tangente PM treffe K' zum zweitenmale in k', dann entspricht k' dem Punkte M: ebenso zeigt man, dass dem Punkte k auf K als Bildpunkte aus K' der Punkt M entspricht. Demnach ist der Punkt P' der Schnittpunkt der beiden Tangenten an K' in den Punkten M und k'.

Der Bildpunkt von P wird also, wenn M zur Herstellung der Abbildung verwendet wird, erhalten durch den Schnittpunkt der vorgegebenen Tangenten MT an K' mit der Tangente an K' in jenem Punkte k', wo die Tangente an K in M den Kegelschnitt K' zum zweitenmale durchsetzt.

Durch diesen Punkt P' gehen nun alle Geraden wie $\beta'\gamma'$ — und man kann demnach der obigen Construction der zweiten Complexgeraden die folgende Fassung geben: „Zu jeder Geraden durch P gehört ihr Bild, vermittelt durch M, nämlich eine Gerade durch P'. Um die zweite Complexgerade durch einen Punkt T der Tangente an K' in M zu finden, construire man die Polare von T in Bezug auf K, sowie deren zugeordnete Gerade im Strahlbüschel P', welches mit dem Strahlbüschel P projectivisch liegt, durch Vermittlung des Punktes M (§ 2.). Wird der Schnittpunkt x der beiden so erhaltenen Geraden mit T verbunden, so ist Tx die gesuchte zweite Complexgerade."

All die Punkte x liegen auf einem Kegelschnitte, von welchem 7 Punkte angegeben werden können; derselbe geht nämlich durch die ausser M vorhandenen 3 Schnittpunkte der Kegelschnitte KK' durch die Berührpunkte k und k', sowie durch P und P' selbst.

Die Bewegung des Punktes x auf diesem Kegelschnitte ist zu der Bewegung von T auf MT projectivisch, denn erstere wird gemessen durch die Bewegung der Geraden Px, der Polaren von T in Bezug auf K.

Demnach sind die Complexgeraden Verbindungsgeraden entsprechender Punkte von zwei projectivisch auf einander bezogenen Punktreihen erster und zweiter Ordnung, T und x.

Rückt der Punkt T nach k, so fällt auch x nach k, demnach sind in einem Schnittpunkte k der beiden Punktreihen entsprechende Elemente vereinigt.

§ 5.

Dass nun von solchen Verbindungsgeraden ein Strahlbüschel zweiter Ordnung gebildet wird, ist ein Satz der Geometrie der Ebene; er kann aber ebensowenig in der Ebene bewiesen werden, wie der Fundamentalsatz der Geometrie der Lage, dass „zu 3 vorgegebenen Punkten einer Geraden immer nur ein fester vierter harmonischer Punkt durch Construction eines vollständigen Vierecks sich einstellt."

Dieser soeben genannte Satz kann demnach von zweidimensionalen Wesen wol seiner Richtigkeit nach erkannt, aber nicht bewiesen werden, wenn dieselben nicht den Schritt wagen durch Abstraction in eine neue Dimension, die dritte, einzudringen und mit ihrer Hilfe sich den strengen Nachweis des Satzes zu erholen.

Um den Satz von der Existenz eines einzigen vierten harmonischen Punktes abzuleiten, fasst man die ebene Figur von 2 vollständigen Vierecken, deren Gegenseitenpaare durch 2 feste vorgegebene Punkte des Trägers gehen, auf welchem letztere sich auch die Diagonalen schneiden, auf als Bild von 2 in verschiedenen Ebenen construirten Figuren (welche Ebenen sich auf dem Träger schneiden). Mit Hilfe dieses einfachen Gedankens wird dieser „Fundamentalsatz" rasch und übersichtlich bewiesen (v. Staudt, Geometrie der Lage, Bnd. I., Art. 88.). —

Um den uns hier beschäftigenden Satz zu erweisen:

„Sind eine Punktreihe erster Ordnung und ein Kegelschnitt k projectivisch aufeinander bezogen, wobei in einem Schnittpunkte der beiden Träger entsprechende Punkte vereinigt liegen, so bilden die Verbindungslinien homologer Punkte ein Strahlbüschel zweiter Ord-

nung" Fig. 14.)., — bleibt uns nicht erspart die Figur aufzufassen als eine räumliche, indem wir uns den Kegelschnitt k vorzustellen haben als in einer Ebene liegend, welche den Träger g nicht enthält

Wir erledigen dann den Nachweis unsres Satzes im Anschluss an die Betrachtungen, wie sie sich in Reye's „Geometrie der Lage, 2. Auflage" I. pag. 110—112 bei Besprechung desselben Gegenstandes finden.

(Ist eine Regelschaar irgendwie vorgegeben, welche den Kegelschnitt k enthält, ist g eine Gerade der Regelschaar, so kann man dann immer 2 Punkte — auf g einerseits, auf k andererseits — einander zuordnen, wenn sie auf derselben Geraden der einen Geradenschaar der Regelfläche liegen. Diese Zuordnung ist eine projectivische.

Beweis. Es gehöre C zu C', B zu B', x zu x'. Mit der Bewegung von x auf g ist das Ebenenbüschel $g(x')$ projectivisch, also der Büschel A in der Ebene von k. ABC, $A'B'C'$ genügen zur Herstellung der projectivischen Beziehung. —).

Nicht jede durch g, CC', BB' gehende Regelschaar, deren es wegen der freien Wahl einer zweiten Raumgeraden durch A unendlich viele gibt, wird durch den vorgegebenen Kegelschnitt k gehen. Aber: man kann eine Regelschaar angeben, welche sicher durch g, CC', BB' und den Kegelschnitt geht. Es ist die durch projectivische Zuordnung der Punkte von g zu denen von k hergestellte, die Verbindungslinien homologer Punkte enthaltende Regelschaar (Reye a. a. O. p. 111).

Jede Regelschaar erscheint dem Auge als Strahlbüschel zweiter Ordnung, denn sie wird ihm übermittelt durch ein Ebenenbüschel zweiter Ordnung.

Construirt man demnach, wiederum in der Ebene der Figur, die Verbindungsgeraden homologer Punkte der beiden Träger, der Geraden g und des Kegelschnitts k, so umhüllen dieselben einen Kegelschnitt — sie sind ja die Projection auf die Zeichnungsebene (vom Auge aus) eines räumlichen Strahlengebildes, das — wir wiederholen — dem Auge übermittelt wurde durch einen Ebenenbüschel zweiter Ordnung.

Die Frage nach der projectivischen Natur jener Curven, welche die Complexgeraden in einer Ebene umhüllen, ist demnach entschieden — nicht direct aus der allgemeinen Construction holten wir die Antwort, obwol uns dieselbe sofort die Curve als von der zweiten Classe erkennen liess, sondern durch eine Weiterverfolgung

jener Construction in ganz bestimmter Richtung wurde es uns ermöglicht die zu untersuchende Curve den durch fundamentale Erzeugungsweisen definirten „Kegelschnitten" zuzuweisen. —

Nach v. Standt „Geometrie der Lage I., Art. 293." ist der Satz bekannt: „Schneiden sich zwei Curven II. Ordnung in 4 Punkten, so berühren die acht Geraden, deren jede eine von den beiden Curven in einem jener Punkte berührt, eine dritte Curve II. Ordnung, [oder es schneiden sich vier in einem Punkte und die übrigen in einem andern Punkte]" [1]).

Zu diesem Satze haben unsere Untersuchungen einen neuen Beweis geliefert; denn jene 8 Geraden sind Complexgeraden, vergl. die Einleitung zu §. 4.

Wir können das Ergebniss dieses Paragraphen zusammen fassen in den Worten: „In jeder Ebene, welche die vorgegebenen Flächen zweiter Ordnung in 2 Kegelschnitten KK' schneidet, umhüllen die Complexgeraden jenen Kegelschnitt, welcher bestimmt wird durch die in den 4 Schnittpunkten der Kegelschnitte möglichen 8 Tangenten an K und K'" [2]).

Abschnitt II.

Die Singularitätenfläche.

§. 6.

Nach der eingeklammerten Bemerkung in der im vorigen Paragraphen gegebenen Fassung des Satzes „vom Kegelschnitt der 8 Tangenten" kann es bei besondrer Lage der Kegelschnitte KK' zu ein-

---

1) Vergl. Salmon-Fiedler. Kegelschnitte Art. 354 (4. Aufl.) pag. 523.

2) Handelt es sich darum so viele andere Tangenten jenes Complexkegelschnittes als möglich zu finden, so nehme man die Punkte D, durch welche je 2 Complexgerade gehen sollen, geradezu auf einem der beiden Kegelschnitte an z. B. auf K (Fig. 15). Für diesen Fall ist die Construction besonders einfach: man verschafft sich die Polare von D in Bezug auf K'; dieselbe schneidet K in den Punkten B. Die Verbindungsgeraden DB sind dann Complexgerade, denn $ABCD$ sind harmonisch.

So einfach diese Construction sämtlicher Tangenten an den Complexkegelschnitt ist, so wäre doch aus ihr — die übrigens für die Construction der beiden Geraden durch einen beliebigen Punkt der Ebene noch einen weiten Schritt zu tun lässt — die Natur der umhüllten Curve noch schwieriger zu erkennen, als nach unseren Methoden; denn die Zuordnung der Punkte D und B ist eine ziemlich verwickelte. —

ander vorkommen, dass der zugehörige Complexkegelschnitt ausartet in ein Punktepaar.

Das mag uns auf jene Ebenen des Raumes aufmerksam machen, welche in ihrer Schnittfigur mit den vorgegebenen beiden Flächen zweiter Ordnung zwei Kegelschnitte KK' von so specieller Lage zu einander aufweisen. Die Auffindung solcher Ebenen wird uns später beschäftigen; einstweilen gedenken wir zu zeigen, wie in einer Ebene zwei Kegelschnitte, die jene besondere Beziehung zu einander haben sollen, construirt werden können.

Wir stellen uns also die folgende Aufgabe: „Gegeben (Fig. 16.) ein Kegelschnitt K, sowie zwei beliebige Punkte E und M, gesucht ein Kegelschnitt K', der mit K zusammen einen Complexkegelschnitt bestimmt, der in ein Punktepaar ausartet".

Hierbei wird uns die in den letzten Worten des vorigen Abschnitts gemachte Bemerkung leiten, dass nämlich jener Complexkegelschnitt identisch ist mit jenem, welchen die 8 Tangenten in den 4 Schnittpunkten von KK' bestimmen.

Nachdem (Fig. 16.) von E und M aus die Tangenten an K gezogen wurden, liefert uns eine Anwendung des Pascal'schen Satzes: „EHF liegen auf einer Geraden". Zieht man nun die Geraden EC und ED, so bilden auch die 6 Geraden, welche in der Figur durch Zahlen bezeichnet sind, ein Pascal'sches Sechseck, und man hat: die Punkte D (doppelt gerechnet als zwei unendlich nahe Punkte von der Verbindungsrichtung ED), B, C (doppelt gerechnet), A liegen auf einem Kegelschnitte. Das heisst: „Ein Kegelschnitt K' geht durch die 4 Punkte $BDAC$, welcher zugleich CE und ED berührt in C resp. D".

Wir wollen ihn K' nennen — für K und K' gehen also (Fig. 17.) vier Tangenten von jenen 8, nämlich die 4 Tangenten in A, B, C, D durch E. Wenn aber von einem Kegelschnitt (in unserem Falle vom Complexkegelschnitt) bekannt ist, dass drei seiner Tangenten durch einen Punkt gehen, so muss derselbe zerfallen (Hesse: Sieben Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte, Leipzig 1874.; pag. 17., N. 5.). Demnach wäre zu schliessen, da die beiden Tangenten an K in C und D durch M gehen, dass auch die beiden Tangenten an K' in A und B durch M gehen (denn durch E werden letztere im allgemeinen nicht auch noch gehen).

Aber wir wollen doch diesen, der analytischen Geometrie entnommenen Schluss synthetisch begründen. In Figur 17. weist man leicht nach, dass die Punkte G und G' die Punkte AB harmonisch trennen; dasselbe gilt von F und F'. Sucht man nun die Polare des Punktes G in Bezug auf K', so geht dieselbe erstens sicher durch

D (weil K' von GD in D berührt wird), dann aber auch durch jenen Punkt auf AB, welcher mit G die Strecke AB harmonisch trennt, d. h. durch G'. Daher ist die Tangente DG' an K ohne weiteres die Polare von G in Bezug auf K'.

Mit Hülfe eines ähnlichen Schlusses für F findet man, dass M der Pol ist von der Geraden FG oder AB für K'.

Demnach gehen die beiden Tangenten in A und B an K' durch M, was gezeigt werden sollte.

Unsre oben gestellte „Aufgabe" erscheint damit erschöpfend gelöst. Sind K, E, M vorgegeben, so ziehe man die Tangenten von E aus sowol, als auch von M an K.

Jeder Berührpunkt ist mit dem jeweilig nicht zu seiner Construction verwendeten der beiden Punkte E und M zu verbinden. Es existirt dann ein Kegelschnitt K', welcher die vier Geraden EC, D, MA, MB berührt in resp. C, D, A, B.

§. 7.

Construction von singulären Ebenen.

1. Jene Ebenen des Raumes, welche einen Complexkegelschnitt aufweisen, der in ein Punktepaar ausartet, werden „singuläre Ebenen des Complexes" genannt; jene Punkte des Raumes, für welche der zugehörige Complexkegel in ein Ebenenpaar ausartet, werden „singuläre Punkte des Complexes" genannt.

Jene „singulären Ebenen" umhüllen eine gewisse Fläche, von der vierten Classe, wie wir bald sehen werden; die „singulären Punkte" dagegen erfüllen eine gewisse Fläche von der vierten Ordnung.

Wir citiren ohne Beweis den Satz aus Plückers „Geometrie des Raumes, Leipzig 1868" (Art. 320.): „Die von den singulären Ebenen umhüllte Fläche ist identisch mit der von den singulären Punkten erfüllten Fläche", eine Bemerkung, die uns später bei dualistischer Uebertragung gewisser „Singularitäten" dieser „Singularitätenfläche" wichtig werden wird.

Jede Ebene e also, deren Complexkegelschnitt sich in ein Punktepaar auflöst, berührt jene „Singularitätenfläche", und zwar hat ihr Berührpunkt P mit dieser Fläche die Eigenschaft, dass sich sein Complexkegel in ein Ebenenpaar auflöst. Dabei braucht aber jener „Berührungspunkt" der ausgezeichneten Ebene durchaus nicht dem „Punktepaar" dieser Ebene e anzugehören; im allgemeinen liegt dieses Punktepaar vom Berührpunkte P ganz getrennt. Da nun die

2 Punkte dieses Punktepaares gewiss wieder singuläre Punkte des Complexes sind, nach der Definition (denn für sie zerfällt der Complexkegel, weil er die ganze Ebene e enthält) —, so erkennt man, was übrigens bei Flächen jeder Ordnung bekannt ist, dass jede Tangentialebene derselben die Fläche auch noch schneidet; auf der Schnittcurve liegt dann irgendwo das Punktepaar.

2. „Hat man von einer Ebene des Raumes bemerkt, dass sie einen Punkt E aufweist, durch welchen 3 Gerade des Complexes gehen, so muss sie im allgemeinen noch einen zweiten Punkt M von derselben Eigenschaft enthalten."

Denn das Zusammenrücken der beiden Punkte des „Complexpunktepaares" einer singulären Ebene wäre eine weitere Specialisirung — : wird demnach eine Ebene durch das Auftreten eines gemeinschaftlichen Schnittpunktes von 3 Complexgeraden als eine ausgezeichnete erkannt, so muss man solange von der Existenz eines zweiten Punktes überzeugt sein (und kann denselben auf synthetischem oder analytischem Wege ermitteln), als jene Ebene keine, etwa durch ihre Construction charakterisirte, besondere Stellung zum Complex besitzt.

Diese Bemerkung musste eingeschaltet werden, ehe wir die „Construction der singulären Ebenen durch eine beliebig vorgegebene Axe" erschöpfend aufstellen können.

Diese Construction ist identisch mit jener, welche für den allgemeinen Complex dieselbe Aufgabe der „Bestimmung der singulären Ebenen durch eine Axe" löst. (Reye, Geometrie der Lage, II. Theil; Art. 85, pag. 281 der zweiten Auflage.)

Man nimmt auf jener Axe 3 Punkte ABC beliebig an und bestimmt deren zugehörige Complexkegel. Diesolben schneiden sich in 8 Punkten. Sei D einer dieser Schnittpunkte, so gehören die 3 Geraden DA, DB, DC in der durch ABC und D gelegten Ebene dem Complex an. Auf dieser Ebene muss aber nach Obigem noch ein Punkt irgendwo liegen, von der Eigenschaft, dass sämtliche Gerade durch ihn Complexgerade sind, d. h. noch einer der übrigen gemeinschaftlichen Punkte der drei Kegel. Daher bestimmen jene 8 Punkte schliesslich — im allgemeinen — 4 Ebenen, welche durch die vorgegebene Gerade gehen, während zugleich der auf ihnen gelegene Complexkegelschnitt in ein Punktepaar ausartet. — Also enthält unser Complex singuläre Ebenen. (vgl. Nachtrag.)

Dieser Paragraph soll über die Lage der „singulären Ebenen" im Raume orientiren und für weitere synthetische Untersuchungen

die Vorbereitung bilden; sein Inhalt ist nicht original, sondern der allgemeinen Theorie der Complexe entnommen.

§. 8.

Vereinigte Lage der Punkte eines Complex-Punktepaares.

Man kann nun aber (Fig. 17.) C gegen A, D gegen B rücken lassen, — dann fallen schliesslich die 4 Tangenten sowol in A und B, als auch die in C und D zusammen in die beiden Geraden AE und BE; indem man stetig den Kegelschnitt K' an dieser Bewegung der Punkte C und D teilnehmen lässt, werden wir auf eine Grenzlage des Kegelschnitts K' aufmerksam, für welche das Punktepaar, in welches der Complexkegelschnitt ansartete, sich speciell zusammenzieht in einen Punkt E; in dieser Grenzlage berührt K' jedenfalls K in A und B.[1])

Wichtig ist hier der folgende Satz: „Ist ein Kegelschnitt K' gefunden, der mit K zusammen einen Complexkegelschnitt liefert, der überhaupt ausartet, und berührt dabei K' doppelt den Kegelschnitt K, so kann diese Ausartung nicht mehr die gewöhnliche, die in ein Punktepaar sein, sondern muss speciell eine Ausartung in einen Punkt darstellen; mit andern Worten: es gibt keinen Kegelschnitt K', der in Doppelberührung mit K einen Complexkegelschnitt bestimmt, der in ein getrenntes Punktepaar ausartet; ist für K und K' der Complexkegelschnitt singulär, so stellt er einen einzigen Punkt vor."

Indem wir von den Resultaten des folgenden Paragraphen das wichtigste anticipiren, nehmen wir, zum Beweise des soeben ausgesprochenen Satzes, als bekannt an: (vergl. §. 9.)

„In Bezug auf 2 sich in A und B berührende Kegelschnitte KK' bildet der Complexkegelschnitt einen dritten mit K und K' in doppelter Berührung befindlichen Kegelschnitt k durch A und B;" vergl. Fig. 18.

D. h. Der Complexkegelschnitt hat mit K und K' immer die Tangenten in den Punkten A und B gemeinschaftlich, wenn sich daselbst K und K' berühren.

---

1) Aber nicht jeder Kegelschnitt, der K in A und B berührt, liefert einen in einen Punkt E ausartenden Complexkegelschnitt mit K; soll er diese specielle Eigenschaft haben, so muss er entweder durch die oben genannte stetige Transformation aus früheren Lagen des Kegelschnittes K' der Fig. 17. entstanden sein, oder er muss durch eine gewisse directe Construction erhalten worden sein, welche zeigt, dass es bei vorgegebenen K und E nur einen K' von der verlangten Eigenschaft gibt. (§. 10.).

Es gibt nun nur einen einzigen Punkt der Ebene, nämlich den Tangentenschnittpunkt E selbst (vergl. Fig. 20.), von welchem 2 Tangenten zusammenfallen mit den Geraden, welche KK' berühren in A und B; oder: Einen andern Punkt der Ebene als E berühren die in A und B construirten Tangenten von KK' sicher nicht; — wenn nun aus irgend einem Grunde bewiesen wird, dass für 2 solche KK' in Doppelberührung der Complexkegelschnitt ausartet in ein Punktepaar, so müssen die Punkte vereinigt liegen in E.

Oder noch kürzer: „Geht ein Kegelschnitt durch 2 feste Punkte AB, in ihnen 2 feste Geraden berührend, AE, BE, so kommt es nur einmal vor, dass ein Kegelschnitt dieser Schaar ausartet; es ist dies der vom Schnittpunkte E der vorgegebenen Geraden dargestellte Kegelschnitt."

Ist demnach ein Ort O angebbar für Raumebenen von der Eigenschaft, dass alle Ebenen durch O Complexkegelschnitte liefern, die in ein Punktepaar ausarten, ist ferner ein Ort O' angebbar für Raumebenen von der Eigenschaft, dass alle Ebenen durch O' die vorgegebenen Flächen zweiter Ordnung in der Figur von 2 sich doppelt berührenden Kegelschnitten schneiden; dann artet in einer Ebene, welche sowol dem Orte O, als O' angehört, der Complexkegelschnitt in einen einzigen Punkt aus.

Eine solche Ebene heisst nach Plücker a. a. O. Art. 320 eine „Doppelebene des Complexes"; für die Möglichkeit der Bestimmung solcher Doppelebenen eröffnen uns unsere letzten Bemerkungen bereits Aussicht.

§. 9.

Kegelschnitte in Doppelberührung.

Bisher haben wir noch an keiner Stelle von der speciellen Lage gesprochen, die die beiden vorgegebenen Kegelschnitte KK' (die Schnitte der beiden vorgegebenen Flächen zweiter Ordnung mit einer Ebene), zu einander aufweisen können. Auf alle speciellen Lagen einzugehen würde uns hier zu weit führen — ebenso gedenken wir die Fälle nicht weiter zu besprechen, wo von den vorgelegten Curven die eine oder andere ausartet.

Aber ein besonders interessanter und leicht zu behandelnder Fall möge hier doch durchgeführt werden, umsomehr als er mit den vorhergegangenen und den nunmehr zu besprechenden Dingen Zusammenhang hat; wir meinen die Doppelberührung der vorgegebenen Kegelschnitte (Fig. 18.).

„Im Fall der Doppelberührung KK' in den Punkten A und B geht der Complexkegelschnitt in Doppelberührung mit beiden Kegelschnitten ebenfalls durch A nnd B."

Zum Beweise dieses Satzes machen wir mit gutem Erfolge von dem wirksamen Werkzeng Gebranch, das nns das Princip des „Znsammenhangs zwischen der Theorie der Kngelkreise und der Kegelschnitte in Doppelberührung" liefert [1]).

Nämlich „ein Kreiskegel, d. h. der verbindende Kegel eines Kreises anf einer Kngel mit deren Mittelpnnkt, zeigt auf der unendlich fernen Ebene gegen den nnendlich fernen Kngelkreis genan dasselbe Verhalten, wie ein denselben doppelt berührender Kegelschnitt: jedem Satz ans der Theorie der Kreiskegel entspricht ein Satz ans der Theorie der doppeltberührenden Kegelschnitte nnd umgekehrt".

Ist nnn vorgegeben ein Kreiskegel K; sowie der unsichtbare unendlich ferne Kugelkreis K', so lautet unser Problem der Bestimmung des Complexkegelschnittes, angepasst dieser metrischen Specialisirung: „Man soll Ebenen durch den Scheitel S von K bestimmen derart, dass die beiden Strahlen (Erzeugenden des Kreiskegels K), in welchen sie K treffen, rechtwinklig auf einander stehen".

Solche Ebenen sind ganz besonders einfach zu construiren: ist D ein beliebig vorgegebener Punkt des Kngelkreises K (Fig. 19.), durch welchen solche Ebenen (grösste Kreise anf der Kngeloberfläche) gelegt werden sollen, so construire man die Ebene δ senkrecht znr Richtnng vom Mittelpunkt S nach D. Dieselbe trifft K in 2 Punkten B. Da nun die Punkte B und D auf der Kugelfläche um 90^0 entfernt sind, so lösen die Ebenen BD durch den Mittelpunkt die Aufgabe.

Bewegt sich nnn D den Kugelkreis entlang, so umhüllen offenbar die grössten Kreise BD einen mit K concentrischen Kreiskegel (dessen Schnitt mit der nnendlich fernen Ebene eigentlich dann den oben verlangten Complexkegelschnitt bildet).

Ein solcher mit K concentrischer Kreiskegel hat aber die Eigenschaft (vergl. des Verfassers oben citirte: „Constructionen") den unendlich fernen Kugelkreis in denselben Punkten zn berühren, wie K selbst. —

---

1) Vergl. des Verfassers: „Construction doppelt berührender Kegelschnitte", Leipzig 1886; pag. 41—45.

Demnach schliessen wir aus dieser metrischen Specialisirung des Problems rückwärts für die allgemeine Figur 18: „Der Complexkegelschnitt für 2 sich doppelt berührende Kegelschnitte geht, mit doppelter Berührung der beiden Kegelschnitte, durch deren gemeinschaftliche Punkte".

Zu seiner Construction genügt also die Herstellung einer einzigen Tangente; derselbe fällt übrigens niemals ausserhalb der beiden Kegelschnitte, sondern in den zwischen beiden eingeschlossenen (in Fig. 18. schraffirten) Raum; gelegentlich sei hier die Bemerkung eingeschaltet, dass überhaupt jede Complexgerade wenigstens eine der beiden vorgegebenen Flächen immer reell trifft, denn ist von 2 Punktepaaren keines reell, so können sie sich nicht gegenseitig harmonisch trennen.

§. 10.

Hat ein Kreiskegel eine Oeffnung von 90^0, so sind für jede Ebene, die durch seine Mittellinie gelegt wird, die beiden Schnittgeraden mit dem Kegel auf einander senkrecht. Demnach ist das Auftreten einer Ausartung des Complexkegelschnitts in einen Punkt metrisch besonders einfach erklärbar. Wir brauchen nur die Construction eines Kreiskegels mit einer Oeffnung von 90^0, wobei die Mittellinie vorgegeben, aus dem Metrischen in die allgemeine Figur zu übersetzen, um auch die allgemeine Construction jenes Kegelschnitts K' zu erkennen, „welcher zu dem vorgegebenen K die Lage haben soll, dass der Complexkegelschnitt in Bezug auf K und K' in einen einzigen Punkt ausartet".

Ist die Mittellinie für den zu bestimmenden Kreiskegel durch den Mittelpunkt einer Kugel vorgegeben, so bestimme man für jede Ebene durch diese Mittellinie jene beiden Strahlen durch den Kugelmittelpunkt, welche von der Mittellinie um 45^0 entfernt sind; dieselben sind synthetisch dadurch charakterisirt, dass sie sowol der (rechtwinkligen) Involution des Kugelmittelpunkts angehören, als auch gleichzeitig die Mittellinie und die zu ihr conjugirte Ebene durch den Mittelpunkt harmonisch trennen; führt man die Ebene um die Mittellinie herum, so erhält man auf der Kugelfläche eine zusammenhangende Curve; nämlich die Schnittcurve (mit der Oberfläche der Kugel) jenes gesuchten Kreiskegels von der vorgegebenen Oeffnung von 90^0.

Wir wiederholen die Construction an der Hand der allgemeinen Figur (Fig. 20.). Sei vorgegeben K, sowie E beliebig. Gesucht wird der Kegelschnitt K', von der Eigenschaft, dass jede

Gerade, welche K und K' harmonisch trifft, durch den einzigen Punkt E gehe.

Wir suchen hierzu auf jeder Geraden EC durch E jene beiden Punkte MN, welche sowol von EC harmonisch getrennt werden, als auch polar conjugirt sind in Bezug auf K. Die Bestimmung dieser Punkte ist eine Aufgabe zweiten Grades. Dass all diese Punkte MN eine stetige Curve bilden, speciell noch einen Kegelschnitt, ist zwar bereits aus dem für die metrische Figur des Kreiskegels erhaltenen Resultate zu schliessen; doch können wir in leichter Weise den Nachweis dieser Bemerkung auch an der allgemeinen Figur herstellen.

Sei F der Pol von EC, EF die Polare von C, dann schneidet letztere den Kegelschnitt K in zwei Punkten DG; und die 4 Punkte $DFGE$ sind harmonisch. Da EC die Polare von F, so schneiden sich die Verbindungslinien von BG und AD, sowie auch GA und BD in Punkten MN von EC. MN sind nun harmonisch getrennt durch EC (wegen des harmonischen Strahlbüschels durch B oder durch A nach den Punkten $DFGE$), zugleich aber polar conjugirt in Bezug auf K nach den Grundsätzen der Polarentheorie, MN sind also die gesuchten Punkte auf der willkürlich vorgegebenen Geraden EC durch E.

Wir wiederholen die Vorschriften zur Construction: man suche jene Gerade EF, welche conjugirt ist zur vorgegebenen EC in Bezug auf K, projicire deren Schnittpunkte DG vom festen Punkte A (oder B) aus auf EC nach MN.

Bewegt sich nun G auf K, so ist seine Bewegung zu der von D projectivisch, daher sind die Büschel von B nach G und von A nach D projectivisch und erzeugen bei der Bewegung von EC durch ihre Schnittpunkte N einen Kegelschnitt K'.

Dieser Kegelschnitt **berührt** K sowol in A als in B, ferner gehen alle (Complex-) Gerade, welche K und K' in 4 harmonischen Punkten treffen, durch den festen Punkt E; aus diesen beiden Eigenschaften schliesst man (§. 8.), dass für die Kegelschnitte KK' die Complexcurve ausgeartet ist in einen einzigen Punkt E.

(Umgekehrt sind 2 Punkte HJ, in welchen K getroffen wird von einer Geraden durch E, auch conjugirt in Bezug auf K'; dies bedarf keines besonderen Beweises: die 4 Schnittpunkte dieser Geraden mit K und K' sind harmonisch, dies sagt genau dasselbe aus).

Dieser Kegelschnitt K' kann nicht in das Innere von K fallen, wenn E ausserhalb K vorgegeben, denn dann würde es Complexgerade durch E geben, welche an beiden Kegelschnitten vorbeigehn ohne zu schneiden, was nach einer früheren Bemerkung nicht möglich ist; fällt E innerhalb K, so fällt der Complexkegelschnitt K' von der gewünschten Eigenschaft imaginär aus.

§. 11.

Existenznachweise und Constructionen für die Doppelebenen des Complexes.

1) Sind die Gleichungen von zwei Flächen zweiter Ordnung vorgegeben, bezogen auf das gemeinschaftliche Polartetraeder:

$$\left.\begin{aligned} a\,x^2 + b\,y^2 + c\,z^2 + d &= 0 \\ a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + d' &= 0 \end{aligned}\right\}$$

so kann man aus ihnen z eliminiren und erhält so die Gleichung jenes Cylinders, welcher vom unendlich fernen Punkte der z-Axe aus die Schnittcurve der beiden Flächen projicirt. Dieser Cylinder wird vom zweiten Grade, demnach: „Die Raumcurve 4ter Ordnung, in welcher sich 2 Flächen zweiter Ordnung schneiden, erscheint von einem Eckpunkt des gemeinschaftlichen Polartetraeders aus als Curve 2ter Ordnung." Wir geben von diesem Satze eine strenge synthetische Ableitung.

Es seien vorgegeben 2 Flächen zweiter Ordnung KK', welche die Ebene der xy (Fig. 21.) schneiden mögen in Kegelschnitten S und S'.

Es seien I, II, III, IV die Punkte, welche beide Flächen gemeinschaftlich haben mit der Coordinatenebene xy (also die Schnittpunkte der beiden Schnittcurven SS').

Dann erscheint ihre gemeinschaftliche Curve, eine Raumcurve vierter Ordnung, vom unendlich fernen Punkte z der z-Axe aus projicirt durch einen Cylinder (dessen Bild in der Figur durch eine nicht ausgezogene Linie angedeutet ist); zu beweisen ist [1]), dass

---

1) Man sieht sofort, dass jede Erzeugende des Cylinders 2 symmetrisch zur xy-Ebene gelegene Punkte der Raumcurve enthält; daher ist der Cylinder als von der zweiten Ordnung seinen Eigenschaften nach zu erkennen; dies lehrt dem Synthetiker noch wenig über die projectivische Natur des Gebildes.

dieser Cylinder (oder seine in der Figur sichtbar gemachte Schnittcurve mit der xy Ebene) von der 2. Ordnung im projectivischen Sinn ist (vergl. §. 3.).

Zu diesem Zwecke nehmen wir auf der ebenen Schnittlinie S' einen Punkt Q fest an; desgleichen auf der räumlichen Schnittcurve von K und K' einen festen Raumpunkt.

Wir legen nun einen Cylinder durch z und durch die 5 Punkte I., II., III., IV. nebst dem Raumpunkte P (auf KK'). Dieser Cylinder möge K in einer weitern Raumcurve vierter Ordnung schneiden, welche wir mit R_4 bezeichnen wollen; dieselbe konnte in der Figur nicht angedeutet werden, da sie mit der schon früher eingezeichneten Schnittcurve von K und K' zusammenfallen würde, wie wir zu beweisen gedenken. —

Durch die Raumcurve R_4 und Q, jenen auf S' angenommenen Punkt, ist nur eine Fläche 2ter Ordnung möglich (Reye Geom. d. Lage II.; pag. 149. der zweiten Auflage), sie sei mit F bezeichnet. Sie ist zur Ebene der xy symmetrisch und schneidet die Zeichnungsebene in einem Kegelschnitte, welcher bestimmt ist durch die 5 sicher auf ihm enthaltenen Punkte I., II., III., IV. und Q, also zusammen fällt mit S'. Wir wiederholen: „Die Fläche F, welche bestimmt ist durch R_4 und Q, schneidet die xy Ebene im Kegelschnitt S' und geht überdies noch durch den Raumpunkt P, weil ja der zur Herstellung von R_4 benutzte Cylinder durch P gieng".

Aber auch direct durch die Curve S' und den Raumpunkt P kann (nur eine) Fläche 2ter Ordnung gelegt werden, welche symmetrich ist zur xy-Ebene. Man erhält also jene Fläche F wieder, wenn man zur xy-Ebene symmetrisch eine Fläche zweiter Ordnung K' bestimmt sein lässt durch den Kegelschnitt S' und den Raumpunkt P.

F fällt also zusammen mit der vorgegebenen Fläche zweiter Ordnung K', welche ja a priori die Curve S', den Raumpunkt P, sowie die Symmetrie zur xy-Ebene anfweist als Bestimmungsstücke.

Das heisst: jeder Punkt der Fläche F (welche gelegt wurde durch die Raumcurve R_4) gehört auch der Fläche K' an; daher gehört auch jeder Punkt der Raumcurve R_4 der Fläche K' an. Daher liefert der Schnitt des durch z als Scheitel, sowie durch die 5 Punkte I., II., III., IV. und P bestimmten Cylinders mit K lauter Punkte, welche auch der Fläche K' angehören; also wird schliesslich die Schnittcurve von KK' von z als Cylinder zweiter Ordnung projicirt.

(Die Einschiebung dieses Artikels hatte den Zweck den Grad der nunmehr noch folgenden Aufgabe der „Bestimmung der Doppelebenen" so weit möglich zu erniedrigen). —

2. Wir können nun zwei unendlich nahe Punkte der räumlichen Schnittcurve der vorgegebenen Flächen zweiter Ordnung verbinden durch eine Tangente τ und dieselbe mit dem unendlich fernen Punkte der z-Axe verbinden durch eine Ebene; diese Ebene enthält wegen der Symmetrieeigenschaften der Figur auch immer noch eine zweite Tangente τ derselben Raumcurve.

Eine solche Tangente der Raumcurve verbindet 2 unendlich nahe Punkte der vorgegebenen Flächen; sie verbindet also, nachdem diese Ebene durch z gelegt wurde, zwei unendlich nahe Punkte der Schnittcurven dieser Ebene mit den vorgegebenen Flächen; d. h. die Tangente an die räumliche Schnittcurve ist zugleich Tangente an die beiden Kegelschnitte KK', in welchen die durch sie sowie z gelegte Ebene die vorgebenen Flächen zweiter Ordnung schneidet; wir erhalten also die Fig. 22. als Schema der Schnittfigur auf einer solchen Ebene.

Lässt man daher bewegliche Ebenen durch z den Cylinder umhüllen, welcher von z aus die Schnittcurve der vorgegebenen Flächen zweiter Ordnung projicirt, so haben alle diese Ebenen die Eigenschaft, die vorgegebenen Flächen in der Figur von 2 sich doppelt berührenden Kegelschnitten zu treffen.

Durch jenen Punkt z geht aber auch noch ein ganz besonders ausgezeichneter Kegel 4ter Ordnung, nämlich jener Kegel, welchen die durch z gehenden singulären Ebene umhüllen. (§. 7. am Schlusse.)

Jede Tangentialebene dieses Kegels mit dem Scheitel z hat die Eigenschaft, dass sie die vorgegebenen Flächen zweiter Ordnung in einer Schnittfigur von 2 Kegelschnitten trifft, für welche der Complexkegelschnitt ausartet in ein Punktepaar.

Bestimmt man daher die gemeinschaftlichen Ebenen jener beiden Kegel zweiter und vierter Ordnung durch z (Kegel nach der Schnittcurve hin und Kegel der singulären Ebenen), so haben dieselben die Eigenschaft, dass für sie der Kegelschnitt ausartet in einen einzigen Punkt; nach §. 8.

Demnach existiren Doppelebenen des Complexes, und zwar gehen sie durch die Ecken des gemeinschaftlichen Polartetraeders der vorgegebenen Flächen.

(Aus der dualistischen Natur des Complexes schliesst man: es existiren Doppelpunkte, für welche sich der Complexkegelschnitt auflöst in eine einzige Ebene — und zwar liegen dieselben auf den Coordinatenebenen).

Aus Symmetriegründen schliesst man: da im allgemeinen kein Grund vorhanden ist, dass eine Doppelebene mit einer Coordinatenebene zusammenfalle, so müssen durch jeden Eckpunkt mindestens 4 solcher Ebenen gehen; daher ist die Anzahl der Doppelebenen des Complexes ein Vielfaches von 4.4 = 16.

Da uns im ersten Abschnitt unsers Paragraphen gelungen die Classe des einen der beiden Kegel durch z auf 2 zu erniedrigen, während der Kegel der durch z gehenden singulären Ebenen nach Früherem (§ 7. am Schlusse; vgl. den Nachtrag) von der 4. Classe, so scheint die Bestimmung der Doppelebenen durch einen Polartetraeder-Eckpunkt eine Aufgabe vom 2.4 = 8ten Grade zu sein.

3. Als Endziel und Hauptinhalt dieses Paragraphen soll der Nachweis von der Existenz der Doppelebene angesehen werden. Wir bringen für dieselbe noch einen auf ganz verschiedenem Gedankengang beruhenden Beweis, der sich direct an §. 10. anschliesst.

Wir haben dort gezeigt, dass die Schnittcurve eines Kreiskegels von der Oeffnung 90° auf der unendlich fernen Ebene mit jenem imaginären Kreise, in welchem diese Ebene von jeder Kugel getroffen wird, die Figur von 2 Kegelschnitten bildet, für welche der Complexkegelschnitt in einen Punkt ausartet, nämlich in die Richtung der Mittellinie jenes Kegels. Wir können dieses Resultat auch so fassen: Ist zur Bestimmung unsers Complexes vorgegeben eine Kugel, sowie ein Kreiskegel von der Oeffnung 90° (oder auch irgend ein Rotations-Hyperboloid, welches einen solchen Kegel zum Asymptotenkegel hat), so ist für dieses Flächenpaar die unendlich ferne Ebene eine Doppelebene.

Sind demnach 2 Flächen zweiter Ordnung beliebig vorgegeben, so ist nur noch die Aufgabe zu lösen: eine jener Flächen durch collineare Umformung in eine Kugel zu verwandeln, die andre in ein Rotations-Hyperboloid, welches einen Asymptotenkegel von der Oeffnung 90° besitzt; hat man die Collineation gefunden, welche diese Transformation vermittelt, so ist jene Ebene des früheren Raumes, welche der unendlich fernen Ebene des transformirten Raumes entspricht, eine Doppelebene des Complexes für beide vorgegebene Flächen.

Projectivisch lässt sich für diese Transformation eine Vorschrift in einfacher Weise nicht herstellen; doch wollen wir noch zeigen, dass dieselbe nicht allein — auf analytischem Wege — als vollkommen lösbar nachweisbar ist, sondern sogar noch weiteren 7 Bedingungen unterworfen werden dürfte.

Zur Herstellung einer vollständig bestimmten Collineation gehören 15 Bedingungen (denn eine solche ist bestimmt, indem man 5 beliebigen Punkten des ersten Systems 5 beliebige Punkte des zweiten Systems, welche $5.3 = 15$ Coordinaten aufweisen, zuordnet); die Umwandlung einer Fläche in eine Kugel entspricht 5 Bedingungen (durch 4 Punkte ist eine Kugel bestimmt, 9 Punkte bestimmen eine Fläche zweiter Ordnung, $9 - 4 = 5$); die Umwandlung einer Fläche zweiter Ordnung in ein Kreis-Hyperboloid von vorgegebener Oeffnung des Asymptotenkegels entspricht 3 Bedingungen (durch 6 Punkte ist ein solches bestimmt). Daher die Möglichkeit jener Forderung noch $15 - (5 + 3) = 7$ Bedingungen hinzuzufügen.

Ferner: man lege eine Ebene durch den Mittelpunkt M der Kugel (Fig. 23.), sowie die Mittellinie m des Hyperboloids; sei μ die zur Ebene Mm conjugirte Richtung. Für beide Flächen gleichzeitig ist dann die Polarebene des unendlich fernen Punktes von der Richtung μ jene Ebene durch M und m. Daher ist der „unendlich ferne Punkt μ" ein Eckpunkt des gemeinschaftlichen Polartetraeders: demnach geht die Doppelebene durch einen solchen Eckpunkt, wie auch in N. 2.) bewiesen.

§. 12. (Anhang).

Reduction der Bestimmung der Doppelebenen auf eine Aufgabe niedrigeren Grades.

1. Die in der Einleitung gestellte Aufgabe erscheint hiermit vollständig erledigt, wir haben die Construction der Complexgeraden in einer beliebigen Ebene gegeben, sowie den Grad der umhüllten Curve bestimmt; wir haben das Auftreten von singulären Ebenen, sowie von Doppelebenen als notwendig nachgewiesen, und es sei an dieser Stelle hervorgehoben, dass wir unsre Resultate gewonnen haben ohne bei irgend einem der „Geometrie der Lage" fremden Gebiete eine Anleihe zu machen; denn auch die ohne Beweis citirte Bemerkung des §. 7. fand bis jetzt keine Verwendung; sie sollte nur den Leser über die Gestaltung der Singularitätenfläche orientiren.

Um jedoch den Grad der in §. 11. N. 2. behandelten Aufgabe so weit als möglich zu erniedrigen, wollen wir von einigen wenigen Hilfsmitteln Ge-

hrauch machen, die wir aus anderen Theorien entnehmen — sie gestatten die Bestimmung der Doppelebenen oder der Doppelpunkte in rascher und übersichtlicher Weise zum Abschluss zu bringen.

α) „Die von den singulären Ebenen umhüllte Fläche ist identisch mit der von den singulären Punkten erfüllten Fläche" (Plücker, Geometrie des Raumes, Art. 320).

β) „Die Knotenpunkte und doppelt berührenden Ebenen dieser „Singularitätenfläche" eines Complexes sind identisch mit den Doppelpunkten und Doppelebenen des Complexes" (Plücker a. a. O. Art. 321).

γ) „Hat eine Curve $n$ter Ordnung mehr als $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Doppelpunkte, so muss sie zerfallen" (Plücker, Algebr. Curv. pag. 215).

Dass überhaupt Doppelebenen (und -punkte) existiren, haben wir bewiesen (§. 11.); aus Symmetriegründen schlossen wir, dass auf einer Coordinatenebene mindestens 4 solche Doppelpunkte („Knotenpunkte der Singularitätenfläche" nach β)) liegen müssen. Nach γ) kann aber eine einfache Curve vierter Ordnung nicht mehr als $\frac{3.2}{2} = 3$ Doppelpunkte haben; demnach muss die Curve 4ter Ordnung, welche den Schnitt der Singularitätenfläche mit einer Coordinatenebene bildet, zerfallen.

Es muss also (da eigentliche Curven dritter Ordnung aus Symmetriegründen auszuschliessen sind) die Schnittcurve einem der Typen $\alpha\beta$ der Figur 24. entsprechen (denn der Typus γ würde die Bevorzugung einer Coordinatenaxe anzeigen, was bei der Voraussetzung einer in nichts specialisirten Lage der vorgegebenen Flächen nicht zulässig ist).

Der erste Typus würde Ecken des Coordinatentetraeders als singuläre Punkte des Complexes erkennen lassen, für welche Annahme wiederum bei allgemeiner Lage der erzeugenden Flächen keine Berechtigung vorhanden ist.

Demnach muss man schliessen: der Schnitt der Singularitätenfläche mit den Coordinatenebenen ist vom Typus β: die Schnittcurven zerfallen auf diesen Ebenen in zwei Kegelschnitte.

(Hiermit bestimmt sich die Anzahl der Doppelpunkte und Doppelebenen endgiltig zu 16. Man kann sich durch einige einfache Schlüsse, die dem §. 11. nachzutragen wären, überzeugen, dass jene

Ebenen, welche die räumliche Schnittcurve der vorgegebenen Flächen 2mal berühren, immer durch einen Eckpunkt des gemeinschaftlichen Polartetraeders gehen; daher gehen die Doppelebenen ebenfalls immer durch solch einen Eckpunkt, und wir erhalten alle Doppelebenen, wenn wir sie nach den Coordinatenecken zusammenzählen: 4.4=16).

Die Doppelebenen des Complexes sind nach Satz β) identisch mit jenen Ebenen des Raumes, welche die Singularitätenfläche doppelt berühren; bringt man also die Raumfigur der Singularitätenfläche nebst einer solchen Doppelebene zum Schnitt mit irgend einer Ebene, so kann in der Schnittfigur mit dieser Ebene die Spur der Doppelebene die Spur der Fläche nicht schneiden, sondern muss sie berühren.

Demnach haben die Spuren d der Doppelebenen auf einer Coordinatenebene (Fig. 25) die Eigenschaft die heiden Kegelschnitte, in welche auf jener Ebene die Spur der Singularitätenfläche zerfällt, zu berühren (sie kann nicht einen allein berühren; würde man die Lage der Spur angeben als d', so würde eben diese Gerade die durch den Verein der Kegelschnitte gegebene Curve vierter Ordnung schneiden).

Es bedeute nun in der Figur die nicht ausgezogene Linie r die Projection der räumlichen Schnittcurve der beiden vorgegebenen Flächen auf die Coordinatenebene vom gegenüber liegenden Eckpunkt aus; nach Früherem (§. 11.) wissen wir, dass die Spur der Doppelebene diese Projection berührt; daher: „Die Projection der Raumcurve 4ter Ordnung, in welcher sich die vorgegebenen Flächen zweiter Ordnung schneiden, von einem Eckpunkte des Coordinatentetraeders auf die gegenüber liegende Coordinatenebene bildet mit den beiden Kegelschnitten, in welche der Schnitt dieser Ebene mit der Singularitätenfläche zerfällt, die Figur von 3 Kegelschnitten, welche 4 (symmetrisch liegende) gemeinschaftliche Tangenten besitzen."

Demnach kann die Doppelebene erhalten werden, indem man die Kegelschnitte bestimmt, in welche die Schnittcurve der Singularitätenfläche mit einer Coordinatenebene zerfällt und hierauf die gemeinschaftlichen Tangenten construirt für die Projection der Schnittcurve der vorgegebenen Fläche und einen jener Kegelschnitte.

2. Demnach kann die effective Bestimmung der Doppelebenen zurückgeführt werden auf die successive Lösung von Aufgaben 4ten und 2ten Grades: man bestimme auf Geraden, welche man in einer Coordinatenebene beliebig wählte, die 4 Schnittpunkte mit der Singularitätenfläche; so erhält man Material zur Bestimmung der Kegel-

schnitte, in welche die Schnittcurve der Singularitätenfläche zerfällt. Hieranf löse man die Anfgabe: die gemeinschaftlichen Tangenten zu snchen für einen dieser Kegelschnitte, sowie die Projection der Schnittcurve der vorgegebenen Flächen, oder: Man bestimme die gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Kegelschnitte, in welche die Schnittcurve der Singularitätenfläche zerfällt [1]).

Schlusswort.

Man kann übrigens, wenn man will, den ganzen Inhalt des Vorhergehenden niederlegen in der einzigen Gleichnng

A . . . $(a\,a\,u)^2 = 0$ (Clebsch-Lindemann. Geometrie; pag. 281).

Dieselbe stellt, wenn $a_x^2 = 0$, $a_x^2 = 0$ die vorgegebenen Kegelschnitte waren, die Gleichnng in Liniencoordinaten jenes Kegelschnittes vor, welcher die beiden Kegelschnitte a nnd a in 4 harmonisch liegenden Pnnkten trifft. —

Denn, denken wir nns zwei Pnnkte, y nnd z, nnd fragen nach den Schnittpunkten ihrer Verhindnngsgeraden mit den Kegelschnitten a nnd a, so hätten wir zn setzen:

$$x_i = \lambda_1 y_i + \lambda_2 z_i$$

nnd dnrch Snbstitntion dieser Coordinatenwerte in die Kegelschnittgleichnngen die Werte von λ_1 nnd λ_2 zu ermitteln. — Wir erhalten wenn abkürzend a_y gesetzt wird für

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3$$

als Snbstitntionsresultat:

$$(\lambda_1 a_y + \lambda_2 a_z)^2 = 0 \quad \text{nnd} \quad (\lambda_1 a_y + \lambda_2 a_z)^2 = 0.$$

Dies fassen wir anf als zwei znsammenhestehende Gleichnngen des binären Gehiets für die beiden Veränderlichen $\lambda_1 \lambda_2$. Nun ist die Bedingung der harmonischen Lage der Wnrzelpnnkte von

$$\varphi_x^2 = 0 \quad \text{nnd} \quad \psi_x^2 = 0$$

das Verschwinden der zweiten Ueherschiehnng der Formen φ nnd ψ; symbolisch:

$$(\varphi\psi)^2 = 0.$$

Für nnser Beispiel hätten wir als Coefficienten einzuführen die in den Klammern sichtharen Grössen a_y, a_z, a_y, a_z; und erhalten so als Bedingung der harmonischen Lage der vier Wnrzeln von φ_x^2 nnd φ_x^2 die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ a_y & a_z \end{vmatrix}^2 = 0.$$

1) Letztere Anfgaben sind nnr vom zweiten Grade, da von allen letzterwähnten Kegelschnitten das gemeinschaftliche Polardreieck bekannt ist, wegen der Symmetrie gegen die Coordinatenaxen.

Was die ausgeschriebene Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 & a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 \\ \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 & \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3 \end{vmatrix}$$

anlangt, so kann man mit ihr eine identische Umformung vornehmen (vergl. etwa Gordan-Kerschensteiner, Invarianten I, pag. 87), um zu erhalten:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ \alpha_1 & \alpha_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Nun sind aber die Grössen $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}$ u. s. w. nichts Anders als die Coordinaten u der durch y und z gehenden Verbindungsgeraden. Demnach ist schliesslich jene Determinante identisch mit

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_2 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}.$$

Und ihr Quadrat:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}^2 = 0$$

oder noch mehr abkürzend

$$\text{A} \ldots\ldots\ldots\ldots (a\alpha u)^2 = 0$$

gibt in der Tat die Gleichung des gesuchten Kegelschnitts [1]).

In dieser Formel A ist, wie gesagt, Alles niedergelegt — nicht allein was im allgemeinen über jenen Kegelschnitt gesagt werden kann, also z. B. der Nachweis überhaupt von seiner Existenz, sondern auch bei richtiger Interpretation der zwischen den Coefficienten möglichen speciellen Beziehungen auch die Theorie unsrer Doppelpunkte —; und bei sachgemässer Behandlung obiger Formel erschliesst sich auch jede im Raume auftretende Singularität.

Das Beispiel scheint auf dass Frappanteste das Uebergewicht der Analysis über die synthetischen Methoden zu illustriren; und zwar so frappant, dass es uns nötigt noch einige Worte über die gegenseitige Stellung dieser Disciplinen hier einzufügen.

Zunächst wäre nun zu bemerken, dass der Gebrauch obiger Formel voraussetzt, dass man sie in alle Details zu deuten wisse;

---

1) Eine zweite symbolische Ableitungsweise derselben Gleichung findet sich bei Salmon Algebra der lin. Transf. Art. 134., Beispiel 23.

aber das vollständige Verständniss der in obiger Gleichungsform niedergelegten Abkürzungen, wo eine Symbolik auf die andre aufgebaut erscheint, wird wol erst nach gründlichem und langwierigem Studium sich erschliessen.

Und ferner: Derjenige, der obige Gleichung zum erstenmale niederschrieb um in ihr die Gleichung jenes uns beschäftigenden, harmonischen Kegelschnitts zu geben, mag wol erst nach langer und vor Allem synthetischer Arbeit auf sie gelangt sein — denn der analytisch Rechnende muss fortwährend geometrisch denken; er kann keinen einzigen sicheren Schritt tun, wenn ihm nicht bei jeder algebraischen Operation die geometrische Vorstellung die Hand führt — so lange er sich eben mit Problemen geometrischer Natur beschäftigt. — Ja, wir behaupten: wenn jemals ein „reiner Analytiker" einen neuen Satz, specifisch geometrischer Natur, allein mit Hilfe seines algebraischen Handwerkszeugs und ohne vorhergehenden geometrischen Entwurf hergestellt hätte, so wäre das ein ebenso grosser Zufall, wie wenn jemand etwas Richtiges gesagt hätte, ohne an den Inhalt des Ausgesprochenen vorher gedacht zu haben.

Die Geschichte der Wissenschaft bringt dafür Beweise. — Jahrzehnte langes Denken in rein synthetischen Dingen, nach den Erfolgen von Mongo, Poncelet, Staudt, Steiner, jahrzehntelanges Vorwärtsdringen in die von der synthetischen Geometrie erschlossene neue Welt war die Voraussetzung dafür, dass jene mathematischen Geister, denen — bei mehr algebraischer Anlage — das Handwerkszeug der Analysis besonders nahe lag, allmählich in jene Richtung der Algebra hineingezwungen wurden, die im Ausbau der modernsten algebraischen Disciplin, der Invariantentheorie, einen glänzenden Erfolg und Abschluss aufzuweisen hat. — Wir wiederholen: es ist nicht anzunehmen, dass gerade diese Richtung von der Algebra eingeschlagen worden wäre, hätte nicht die Fülle von synthetischem Material vorgelegen, das seiner systematischen Sichtung und Darstellung harrte — und nunmehr allerdings von den Hilfsmitteln der Analysis bewältigt uns vorliegt.

Und, wie wir schon oben bemerkten, auch jetzt noch, nach dem Ausbau jener algebraischen Disciplin, der Theorie der linearen Transformation, kann — wir behaupten es — die geometrische Analysis für sich allein nur selten schöpferisch arbeiten, ohne sich an die geometrische Vorstellung als leitenden Faden zu halten.

Doch, um nicht ungerecht zu werden, sei ausgesprochen, dass die höchste Leistung des Geometer's schliesslich darin bestehen wird, das synthetisch Gefundene so elegant wie möglich auszusprechen in der Sprache der analytischen Geometrie. Synthetisch zu finden wissen, analytisch fixiren können: das wird also das Ziel der geometrischen Ausbildung bleiben. Wir wollen mit einem Gleichnisse schliessen. Ein Angehöriger einer nicht zu den Culturvölkern gerechneten Nation wird es, — wenn er vielleicht in sich eine Welt von schönen und neuen Gedanken aufgebaut hat, schmerzlich empfinden durch seine Unkenntniss der modernen Culturssprachen ohne Zusammenhang mit der wissenschaftlichen Welt zu bleiben; sein höchstes Streben wird sein sich die Kenntniss einer solchen Culturprache zu erwerben und er wird sein Lebensziel als erreicht ansehn, wenn es ihm gelungen diese Sprache mit solcher Leichtigkeit zu behandeln, dass ihm der Ausdruck jener seiner Gedankenschöpfungen nicht mehr schwierig erscheint.

Aber dabei wird ihm diese neue Sprache selbst keine neuen Gedanken zu seiner früheren Ideenwelt hinzufügen; wenn er letztere nicht bereits mitbringt, wird sie ihm von der neuen Sprache auch nicht verschafft. Und so bildet auch die analytische Darstellungsweise gewissermassen die Cultursprache der Geometrie.

Aber wie die Sprache nicht immer ehrlich ist, so besteht manchmal die Arbeit des Analytikers darin, dass er den Gedankengang, dem er bei der Ableitung eines Resultats folgte, zu verstecken sucht; während bei der synthetischen Darstellung der Gedankengang offen daliegt, denn er ist ja ohne weiteres identisch mit dem Inhalt des Gebotenen.

Nachtrag zu pag. 374. Z. 2. v. u.

Auf jeder Geraden des Raumes liegen demnach wegen der vollständigen Reciprocität der Singularitätenfläche 4 Punkte jener Fläche; demnach schneidet jede Ebene dieselbe in einer Curve 4. Grades, und die von einem beliebigen Raumpunkt an die Singularitätenfläche gelegten Tangentialebenen umhüllen einen Kegel 4. Classe.

Inhaltsverzeichniss.

pag.

Einleitung 353

Abschnitt I. Der Complexkegelschnitt in einer Ebene.

§ 1. Geometrischer Hilfssatz mit Beweis 354

§ 2. Vorbereitung zur Construction des Hauptproblems, Abbildungsprincip nach Hesse 359

§ 3. Bestimmung von 2 Complexgeraden durch einen vorgegebenen Punkt 361

§ 4. Vorbereitungen zur Bestimmung des Charakters der von den Complexgeraden umhüllten Curve. Vereinfachung von früheren Constructionen 365

§ 5. Beweis, dass die Complexgeraden einen Kegelschnitt umhüllen für jede Ebene 369

Abschnitt II. Die Singularitätenfläche.

§ 6. Möglichkeit des Zerfallens des Complexkegelschnittes in 2 Punkte 371

§ 7. Definitionen, aus der allgemeinen Complex-Theorie entnommen 373

§ 8. Ausartung des Complexkegelschnitts in einen einzigen Punkt 375

§ 9. Kegelschnitte in Doppelberührung 376

§ 10. Constructionen mittelst metrischer Geometrie 378

§ 11. Existenznachweise und Constructionen für die Doppelebenen des Complexes 380

§ 12. Reduction der Bestimmung der Doppelebene auf eine Aufgabe niedrigeren Grades 384

XVII.

Ueber die Contractio venae bei spaltförmigen und kreisförmigen Oeffnungen.

Von

Herrn Dr. **Fritz Kötter**

in Berlin.

§. 1. Bekanntlich hat Torricelli für die Geschwindigkeit, mit welcher Teile einer incompressiblen Flüssigkeit ein Gefäss verlassen, den nach ihm benannten Wert $\sqrt{2gh}$ aufgestellt. Die Richtigkeit dieses Wertes lässt sich bekanntlich bei kleinen Oeffnungen für Punkte des Randes streng erweisen [1]), und man ist daher wol berechtigt der oben genannten Grösse in einem gewissen Sinne den Namen „Ausflussgeschwindigkeit" beizulegen. Man ist aber jedenfalls auch berechtigt mit diesem Namen diejenige Grösse zu belegen, mit welcher man die Grösse der Oeffnung F, das Zeitelement dt und die Dichtigkeit der Flüssigkeit ϱ zu multipliciren hat, um das Quantum dQ zu erhalten, welches während dt das Gefäss erlässt, d. h. die Grösse v_0, welche der Gleichung

$$dQ = \varrho . F v_0 dt$$

genügt.

Theoretische Ueberlegungen zeigen, dass diese Grösse v_0, welche wir genauer als „mittlere Geschwindigkeit" bezeichnen wollen, bei hinreichender Kleinheit der Dimensionen der Oeffnung gegen die des Gefässes ein lediglich von der Form der Oeffnung abhangender

1) Kirchhoff, Mechanik pag. 348—349.

Bruchteil α der Randgeschwindigkeit $\sqrt{2gh}$ ist. Wir erhalten daher folgende auch durch zahlreiche Versuche bestätigte Formel

$$dQ = \alpha \varrho F \sqrt{2gh}\, dt$$

in welcher unbekannt nur noch die Constante α ist, für welche zahlreiche Versuche der verschiedensten Forscher ungefähr den Wert 0,62 liefern.

Auf den folgenden Seiten soll zunächst berichtet werden, was in theoretischer Beziehung über diese wichtige Grösse, den sogenannten Ausflusscoefficienten, ermittelt ist; sodann wollen wir eine auf Herrn Kirchhoff's Methode der Behandlung stationärer Flüssigkeitsbewegung gestützte Bestimmung desselben für spaltförmige Oeffnungen mitteilen und endlich werden wir eine auch auf andere Oeffnungen anwendbare Methode zur Bestimmung einer oberen und einer unteren Grenze des Ausflusscoefficienten für kreisförmige Oeffnungen durchführen.

§. 2. Um uns zunächst den Bewegungsvorgang, welchen wir zu untersuchen haben werden, im allgemeinen klar zu machen, weisen wir darauf hin, dass die Flüssigkeit sich der Oeffnung von allen Seiten nähert, daher wird in der Oeffnung selbst die Richtung der Geschwindigkeit variiren. Während am Rande die letztere in der Ebene der Oeffnung liegt, wird sie an den mittleren Stellen der Oeffnung nahezu auf der letzteren senkrecht stehen. In der Verfolgung der ihren Geschwindigkeiten entsprechenden Bahnen werden sich die einzelnen Flüssigkeitsteilchen hindern. Während die zur Oeffnung tangentiale Componente allmählich vernichtet wird, nähert sich die Normalcomponente der Grenze $\sqrt{2gh}$; in einiger Entfernung von der Oeffnung hat die Geschwindigkeit also constante Richtung und Grösse. Während dieses Vorganges wird auch der Querschnitt des Strahles eine Veränderung, die sogenannte Contraction, erfahren. Bezeichnen wir mit f den Querschnitt des contrahirten Strahles, so können wir die Wassermenge dQ, da sie gleich derjenigen ist, welche im Zeit-Zeitelement dt durch f tritt, mit Hülfe der Formel bestimmen

$$dQ = \varrho f \sqrt{2gh}\, dt$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck für dQ mit dem zuerst entwickelten Wert, so erhalten wir die Gleichung

$$\alpha F = f$$

welche die mechanische Bedeutung des Ausflusscoefficienten erkennen lässt. Derselbe ist identisch mit dem Verhältniss des contra-

hirten Strahlquerschnittes zu der Oeffnung. Man kann also die Grösse α auch experimentell bestimmen, indem man die Grösse f misst. Auf diesem Wege hat Newton, wie er in der zweiten Auflage seiner Princ. phil. nat. math. auseinandersetzt, seinen nach neueren Versuchen allerdings etwas zu grossen Wert $\frac{1}{\sqrt{2}}$ für α bestimmt, er erhält also für die mittlere Ausflussgeschwindigkeit den Ausdruck $\sqrt{gh}$, welchen er auch in der ersten Auflage mit einer anderen Begründung mitteilt.

§. 3. Die älteren mir bekannt gewordenen Versuche die Grösse α theoretisch zu bestimmen, von Navier, Bidone und Bayer, weiland Obristlieutenant im grossen Generalstabe, benutzen neben anerkannten Gesetzen der Hydrodynamik in erster Linie specielle Hypothesen über die Natur der Flüssigkeitsbewegung in der Nähe der Oeffnung. Bidone [1]) und Bayer [2]), welche nur kreisförmige Oeffnungen in Betracht ziehen, nehmen an, dass in einer Halbkugel, welche sich über der Oeffnung als einem grössten Kreise beschreiben lässt, die Geschwindigkeit nach der Mitte der Oeffnung gerichtet ist und die Grösse $\sqrt{2gh}$ hat.

Schon Poncelet und Lesbros [3]) haben darauf hingewiesen, dass eine strenge Benutzung dieser Hypothese, weil die Halbkugel doppelt so gross wäre als die Oeffnung selbst, für die in den halbkugelförmigen Raum eintretende Wassermenge den Wert

$$dQ^{(\prime)} = 2F\sqrt{2gh}\,dt$$

liefern würde. Da genau ebenso viel Wasser das Gefäss durch die Oeffnung verlassen müsste, so erhielte man unter Voraussetzung der Richtigkeit der genannten Hypothese für den Ausflusscoefficienten nicht einen echten Bruch, sondern den aller Erfahrung widersprechenden Wert 2.

In der Tat benutzt Bidone auch gar nicht die von ihm an die Spitze gestellte Hypothese, sondern eine andere, welche er irrtüm-

---

1) Mém. sur la détermination théorique de la section contractée des veines liquides. Mem. di Torino XXXIV 363 u. ff. 1830.

2) Die Arbeit von J. Bayer, deren Kenntniss ich einer gütigen Mitteilung des Herrn Dr. Rosenhaius verdanke, befindet sich in Crelle Journal der Baukunst. Bd. 25. 1847.

3) Expériences hydrauliques. Mém. de l'acad. des sciences de Paris (Savans étrangers) III 242 u. ff. 1832. §. 156.

licher Weise als eine Consequenz der ersteren betrachtet. In der Meinung, dass die Flüssigkeitsteile, nachdem sie jene Halbkugel passirt haben, ihre Geschwindigkeit ungeändert beibehalten, gelangt der genannte Autor von seiner Hypothese aus zu der neuen, auch von Navier benutzten Grundlage seiner Betrachtungen, dass in allen Punkten der Oeffnung die Geschwindigkeit gleich $\sqrt{2gh}$ sei. Wäre nun in einem Elemente dF der Oeffnung der Winkel, welchen die Richtung der Geschwindigkeit mit der Normalen des ersteren bildet, μ, so wäre die während des Zeitelementes dt ausfliessende Wassermenge

$$dQ = \varrho \sqrt{2gh}\, dt \int dF \cos(\mu)$$

und daher der Ausflusscoefficient

$$\alpha = \frac{\int dF \cos \mu}{F}$$

Den Winkel μ bestimmt Bidone, soviel ich zu erkennen vermochte, ohne Beweis durch die Annahme, dass die Richtung der Geschwindigkeit in jedem Punkte der Oeffnung parallel demjenigen Radius der mehrerwähnten Halbkugel ist, dessen Endpunkt senkrecht über dem Punkte der Oeffnung liegt. Bezeichnen wir nun mit y den Abstand der beiden letztgenannten Punkte und mit R den Radius der Kugel, so können wir

$$\cos \mu = \frac{y}{R} \quad \text{und}$$

$$\frac{\int dF \cos \mu}{F} = \frac{\int y dF}{RF}$$

setzen. Der Zähler der rechten Seite in der letzten Gleichung stellt nun aber das Volumen der Halbkugel dar und ist also $\frac{2}{3}RF$; Bidone erhält daher für den Ausflusscoefficienten den Wert $\frac{2}{3}$.

Wir haben schon hervorgehoben, dass die strenge Benutzung der Hypothese des Herrn Obristlieutenant Bayer für den Ausflusscoefficienten den Wert 2 geliefert hätte. Dem gegenüber beweist die in der Tat glänzende Uebereinstimmung seines Resultates

$$\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = 0{,}617$$

mit Ergebnissen der Beobachtung von Bossut (0,617), Eytelwein (0,6176), D'Anbuisson (0,617), welche von ihm als Bürgschaft für die Gültigkeit seines Resultates hervorgehoben wird, gar nichts für die Correctheit seiner schwer zu verstehenden Speculationen. Ich muss

es mir versagen hier auf dieselben näher einzugehen, da ich befürchten müsste, bei ihrer Wiedergabe, den Sinn des genannten Autors nicht völlig zu treffen.

Wie ich schon oben angedeutet, geht Navier [1]) bei der Bestimmung des Ausflusscoefficienten für kreisförmige und spaltförmige Oeffnungen, von der Annahme aus, dass in allen Punkten der Oeffnung die Geschwindigkeit $\sqrt{2gh}$ ist. Also wird auch bei ihm der Ausflusscoefficient durch die Formel

$$\alpha = \frac{\int \cos\mu \, dF}{F}$$

dargestellt. Ueber den Winkel μ macht Navier die Annahme, dass er bei kreisförmigen Oeffnungen lediglich eine Function des Abstandes r des betreffenden Punktes vom Mittelpunkte der Oeffnung ist, während er bei spaltförmigen Oeffnungen nur durch den Abstand y von der Mittellinie bedingt ist. In der Mitte muss wegen der Symmetrie der Verhältnisse die Geschwindigkeit eine auf der Ebene der Oeffnung senkrecht stehende Richtung haben und daher $\mu = 0$ sein; beim Uebergang von der Mitte bis zum Rande muss μ beständig wachsen, ohne dass $\cos\mu$ negativ wird. Da nun am Rande die Richtung der Geschwindigkeit in die Ebene der Oeffnung fällt, muss dort $\mu = \frac{\pi}{2}$ sein. Die einfachsten Functionen, welche diesen Bedingungen genügen, sind nun die folgenden

$$\frac{r^2}{R^2}\frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \frac{y}{b}\frac{\pi}{2}$$

wo R und b den Radius resp. die halbe Breite der Oeffnung bedeuten. Mit Benutzung dieser Ausdrücke erhält man für die Ausflusscoefficienten die Werte

$$\frac{2\pi \int_0^R r\,dr \cos\left(\frac{r^2}{R^2}\frac{\pi}{2}\right)}{R^2\pi} \quad \text{und} \quad \frac{\int_{-b}^{+b} dy \cos\left(\frac{y}{b}\frac{\pi}{2}\right)}{2b},$$

welche sich beide auf $\frac{2}{\pi}$ reduciren.

---

1) Navier hat seine Untersuchung über diesen Gegenstand in den mir leider unzugänglichen:

„Leçons lithographiées de l'Ecole des ponts et chaussées"
vom Jahre 1829 bekannt gemacht.

Das hier dargestellte ist aus den betreffenden Abhandlungen von Boussinesq und Poncelet und Lesbros entlehnt.

Schon Herr Bonssinesq [1]) hat auf die Mängel der Entwickelung von Navier hingewiesen. In der Tat erkennt man leicht, das weder Bidone noch Navier eine theoretische Bestimmung des Ausflusscoefficienten im eigentlichen Sinne des Wortes geben. Eine solche würde im wesentlichen in einer Herleitung von Ausdrücken für die Grösse und Richtung der Geschwindigkeit in den einzelnen Punkten der Oeffnung aus den Gesetzen der Hydrodynamik bestehen, also in einer Arbeit, deren eventuelle Ergebnisse hier durch Annahmen ersetzt werden, welche nicht frei von Willkür sind. Dazu kommt, dass die aus ihnen zu ziehenden Folgerungen zu Beobachtungsresultaten, anerkannten Gesetzen der Hydrodynamik und, was noch schlimmer ist, unter einander im Widerspruch stehen.

In erster Beziehung macht Herr Bonssinesq gegen die Voraussetzungen von Navier und damit auch gegen die von Bidone folgende durch Poncelet und Lehros (l. c. §. 154) mitgeteilte Beobachtung von Lagerhjelm geltend. Der letztgenannte Forscher tauchte eine an beiden Enden offene Glasröhre in das mit Wasser gefüllte Gefäss und zwar so, dass das untere Ende der Röhre bis in die Nähe des Oeffnungsmittelpunktes reichte. Alsbald stieg das Wasser in der Röhre fast bis zum Niveau der im Gefäss enthaltenen Flüssigkeit empor und verharrte dann in dieser Höhe. Herr Bonssinesq zieht aus dieser Erscheinung die Folgerung, dass der Druck in der Mitte der Oeffnung nahezu dem hydrostatischen Drucke gleichkomme, und dass also die Geschwindigkeit in der Mitte der Oeffnung sehr gering sei. Bei diesem Schlusse ist offenbar übersehen, dass durch den Einfluss der Capillarkraft und die Reibung an den Wänden der Röhre eine jedenfalls nicht unbeträchtliche Erhöhung des Niveau's in der Röhre bewirkt wird; das angegebene Experiment widerspricht also lange nicht in dem Masse der Hypothese von Navier als Herr Bonssinesq anzunehmen geneigt ist.

Mehr Gewicht legen wir dem zweiten Einwurf bei, welchen der mehrfach genannte Forscher gegen die bisher dargestellten Lehren erhebt. Wir werden aus dem Folgenden ersehen, dass es mit Hülfe der Potentialtheorie möglich ist, den Bewegungszustand in der Nähe der Oeffnung vollständig zu bestimmen, sobald nur die zur Ebene der letzteren senkrechten Componenten der Geschwindigkeit für alle Punkte der Oeffnung bekannt sind. Legt man nun die Ausdrücke von Navier zu Grunde, so erhält man für die Geschwindigkeit am

---

1) Essai sur la théorie de l'écoulement d'un liquide par un orifice en mince parois.

Comptes rendus LXX 33, 117, 1279. 1870.

Rande an Stelle des richtigen Wertes $\sqrt{2gh}$ die Werte $0{,}59\sqrt{2gh}$ resp. $0{,}57\sqrt{2gh}$ (vergl. Bonssinesq a. a. O. pag. 1282), während der Ausdruck von Bidone den Wert $\frac{\pi}{4}\sqrt{2gh}$ liefert.

§. 4. Herr Bonssinesq sucht nun die locale Ausflussgeschwindigkeit, wie wir die erwähnte Componente der Geschwindigkeit für Punkte der Oeffnung nennen wollen, so zu bestimmen, dass die von ihm bei Navier gerügten Uebelstände vermieden werden. Es handelt sich auch bei ihm um die Ausflusserscheinungen bei kleinen kreisförmigen und schmalen, von zwei parallelen Geraden begrenzten Oeffnungen in dem dünnen horizontalen Boden eines Gefässes.

Bei der mathematischen Behandlung dieses Problems darf die Existenz eines Geschwindigkeitspotentiales vorausgesetzt werden d. h. die Componenten der Geschwindigkeit sind die Ableitungen einer Function nach den betreffenden Coordinaten.

Herr Boussinesq bedient sich eines Coordinatensystems, dessen (x, y) Ebene mit dem ebenen Boden des Gefässes zusammenfällt, während die z Achse die der Schwere entgegengesetzte Richtung hat. Bei kreisförmigen Oeffnungen soll der Mittelpunkt zugleich Anfangspunkt des Coordinatensystems sein, während bei spaltförmigen Oeffnungen die x Achse mit der Mittellinie der Oeffnung zusammenfällt. Das Geschwindigkeitspotential φ genügt zunächst der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$$

An den festen Grenzen ist die Ableitung von φ nach der Normale, $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ gleich null. In endlicher Entfernung von der Oeffnung können, da vorausgesetzt wurde, dass der Oeffnung Radius resp. Breite unendlich klein gegen die Dimensionen des Gefässes sei, die Componenten der Geschwindigkeit als unendlich klein betrachtet werden (vergl. Kirchhoff Mechanik pag. 348—349).

In irgend einem Elemente *do* der Oeffnung sei nun die locale Ausflussgeschwindigkeit d. h. die verticale Componente der Geschwindigkeit gleich f, so dass also

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{\partial\varphi}{\partial n}=-f$$

ist. Dann erhalten wir einen Ausdruck, welcher all den angegebenen Bedingungen wenigstens angenähert genügt, durch die Formel

$$\psi = \frac{1}{2\pi}\int \frac{f\,do}{\varepsilon}$$

wo ε die Entfernung des Elementes do von demjenigen Punkte bezeichnet, für welchen ψ bestimmt werden soll. In der Tat ist für die Punkte der Oeffnung

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = -f$$

für die Punkte des horizontalen Bodens ist

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0$$

während für die Punkte der anderen festen Wände, da sie in endlicher Entfernung von der Oeffnung liegen, $\frac{\partial\psi}{\partial x}$, $\frac{\partial\psi}{\partial y}$, $\frac{\partial\psi}{\partial z}$ und damit auch $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ unendlich klein von der Ordnung der Oeffnung werden. Dass der erwähnte Ausdruck auch der Hauptbedingung, nämlich der partiellen Differentialgleichung $\Delta(\varphi) = 0$ genügt, ist bekannt.

Herr Boussinesq legt desbalb seinen ferneren Betrachtungen über die Ausflusserscheinungen den genannten Ausdruck zu Grunde, ohne den Beweis zu liefern, dass die Geschwindigkeitscomponenten sich überall und also auch namentlich in der Nähe der Oeffnung unendlich wenig von den Ableitungen der Grösse ψ unterscheiden. Um diesen Beweis zu liefern, fügen wir zu φ so eine additive Constante, dass die Differenz $\chi = (\varphi - \psi)$ in einem Punkte endlicher Entfernung von der Oeffnung verschwindet. Dann wird diese Differenz selbst, sowie ihre Ableitungen für alle Punkte in endlicher Entfernung von der Oeffnung unendlich klein. Für den horizontalen Boden, sowol für die festen Teile als für die Oeffnung, wird $\frac{\partial\chi}{\partial n}$ gleich null. Es ist also zunächst nach dem Mittelwertssatz $\frac{\partial\chi}{\partial z}$ überall unendlich klein. Da nun für Punkte, deren Abstand von deren Boden des Gefässes ein endlicher ist, die Differenz $\chi = \varphi - \psi$ unendlich klein ist, so wird χ überall unendlich klein sein. Dieselbe Betrachtung wie für χ selbst, lässt sich für $\frac{\partial\chi}{\partial x}$ und $\frac{\partial\chi}{\partial y}$ durchführen. Denn für den Boden des Gefässes ist

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial x\,\partial z} = 0$$

während diese Grösse in endlicher Entfernung von der Oeffnung

ebenso wie $\frac{\partial \chi}{\partial x}$ unendlich klein ist. Daraus folgt dann zunächst, dass $\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial z}$ überall unendlich klein ist, und daraus wiederum dieselbe Eigenschaft von $\frac{\partial \chi}{\partial x}$.

In der Tat liefert also der von Herrn Boussinesq aufgestellte Ausdruck für Punkte in der Nähe der Oeffnung und in dieser selbst eine angenäherte Darstellung der Bewegungserscheinungen unter der Voraussetzung, dass mindestens eine Dimension der Oeffnung sehr klein gegen die Dimensionen des Gefässes ist.

Für die beiden Arten von Oeffnungen, welche in Betracht gezogen werden, darf bei geeigneter Form des Gefässes in voller Genauigkeit, bei einer allgemeinen gewählten Form wenigstens in erster Näherung die locale Ausflussgeschwindigkeit als eine Function betrachtet werden, welche lediglich durch den Abstand r vom Mittelpunkte resp. den Abstand y von der Mittellinie der Oeffnung bedingt ist. Dann wird bei kreisförmigen Oeffnungen das Geschwindigkeitspotential in einem Punkte r, z gegeben durch die Formel

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{f(\varrho)\, \varrho\, d\varrho\, d\varphi}{\sqrt{z^2 + \varrho^2 - 2\varrho\, r \cos\varphi + r^2}}$$

Dagegen darf bei spaltförmigen Oeffnungen, wie man leicht ableiten kann,

$$\varphi = -\frac{1}{\pi} \int_{-b}^{+b} f(\eta)\, d\eta \log \sqrt{z^2 + (y-\eta)^2}$$

gesetzt werden.

Dieses sind die Gleichungen, aus denen Herr Boussinesq einen seiner Einwände gegen die Entwicklungen von Navier abgeleitet hat.

Die Function f muss nun folgenden Bedingungen genügen:

1) Da am Rande, wie schon mehrfach hervorgehoben ist, die Richtung der Geschwindigkeit in der Ebene der Oeffnung liegt, so verschwindet dort f.

2) Die Grösse der Geschwindigkeit, welche nach den bisherigen Entwicklungen an den eben gekennzeichneten Stellen durch $-\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ resp. $-\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ dargestellt wird, ist dort gleich $\sqrt{2gh}$.

Eine dritte Bedingung leitet Herr Boussinesq aus dem oben mitgeteilten Experiment von Lagerjhelm ab; sie lautet, dass der Druck in der Mitte gleich dem hydrostatischen Drucke ist, und dass also die Geschwindigkeit, welche wegen der Symmetrie der Verhältnisse dort durch f repräsentirt wird, verschwindet.

Wir lassen dahingestellt, ob unsere oben ausgesprochenen Zweifel an der Richtigkeit der Folgerungen, welche Herr Boussinesq aus dem Beobachtungsresultat von Lagerjhelm zieht, gerechtfertigt sind; jedenfalls vermochten die Speculationen, welche Herr Boussinesq mitteilt, um die dritte Bedingung für f auf anderem Wege plausibel zu machen, nicht dieselben gänzlich zu zerstreuen. Wie es sich aber auch mit dieser Bedingung verhalten möge, jedenfalls ist so viel klar, dass sie allein in Gemeinschaft mit den beiden vorhergehenden nicht hinreicht die Function f auch nur angenähert zu bestimmen.

Herr Boussinesq nimmt zunächst an, dass $f(r)$ sowol als $f_1(y)$ sich in der Form von nach geraden Potenzen aufsteigenden Reihen entwickeln lasse, welche wegen der Bedingung 3) mit $\left(\frac{r}{R}\right)^4$ resp. $\left(\frac{y}{b}\right)^2$ beginnen müssen. Weniger gerechtfertigt ist die Specialisirung dieser Reihen, welche Herr Boussinesq vornimmt, um die erste Bedingung zu befriedigen, indem er setzt:

$$f(r) = \frac{r^4}{R^4}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\left\{c_0 + c_1\frac{r^2}{R^2} + c_2\left(\frac{r}{R}\right)^4 \ldots\right\}$$

resp.

$$f_1(y) = \left(\frac{y}{b}\right)^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)\left\{c_0' + c_1'\left(\frac{y}{b}\right)^2 + c_2'\left(\frac{y}{b}\right)^4 \ldots\right\}$$

Die Möglichkeit $f(r)$ und $f_1(y)$ in dieser Form darzustellen ist wesentlich an die Bedingung geknüpft, dass der Convergenzbezirk der Reihen über den Rand der Oeffnung hinausreicht. Das ist nun aber bei der singulären Rolle, welche der Rand offenbar bei den Ausflusserscheinungen spielt, durchaus nicht so selbstverständlich als Herr Boussinesq anzunehmen scheint. Ein Beweis wäre also jedenfalls wünschenswert gewesen, und zwar um so mehr, als Herr Boussinesq, ohne einen Versuch einer Fehlerbestimmung auch nur anzudeuten, die Reihen bei ihren ersten Gliedern abbricht und also setzt:

$$f(r) = c_0\left(\frac{r}{R}\right)^4\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \qquad f_1(y) = c_0'\left(\frac{y}{b}\right)^2\left(1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right).$$

Die Constanten c_0 und c_1 werden jetzt durch die Bedingung 2) bestimmt, nach welcher die horizontale Randgeschwindigkeit gleich

$\sqrt{2gh}$ ist, und zwar bedient sich Herr Bonssinesq der entwickelten Ausdrücke für das Geschwindigkeitspotential. Dabei ergiebt sich

$$c_0' = \tfrac{1}{2}\pi\sqrt{2gh} \quad \text{und} \quad c_0 = \frac{3^2.5^2.7}{628}\pi\sqrt{2gh}$$

Nach den bisherigen Entwicklungen haben die Functionen $f(r)$ und $f_1(y)$ in der Tat einige Eigenschaften mit der localen Ausflussgeschwindigkeit gemein. Es ist aber durch das bisher Vorgebrachte nicht nachgewiesen, dass die genannten Ausdrücke für jede der Oeffnungen genau genug übereinstimmen, um die Annahme zu rechtfertigen, die Ausdrücke

$$\frac{1}{2b}\int_{-b}^{+b} f_1(y)\,dy \quad \text{und} \quad \frac{2}{R^2}\int_0^R f(r)r\,dr$$

seien die Werte der mittleren Ausflussgeschwindigkeit. Nach der Meinung des Verfassers kann die Uebereinstimmung der sich ergebenden Ausdrücke

$$\frac{\pi}{5}\sqrt{2gh} = 0{,}628\sqrt{2gh}$$

resp.

$$\frac{525\pi}{2512}\sqrt{2gh} = 0{,}657\sqrt{2gh}$$

mit dem erfahrungsmässigen Wert der Ausflussgeschwindigkeit $0{,}62\sqrt{2gh}$ bei der Willkür der Entwicklung nur als eine zufällige betrachtet werden. Dazu kommt, dass der für kreisförmige Oeffnungen abgeleitete Wert weit mehr von der Erfahrung abweicht als der für spaltförmige Oeffnungen. Herr Bonssinesq erklärt diese Erscheinung durch die Reibung, welche sich bei kreisförmigen Oeffnungen in einem höheren Masse geltend mache, als bei spaltförmigen Oeffnungen; daher sei bei letzteren der Unterschied zwischen Theorie und Erfahrung geringer als bei ersteren. Bei Gasen, deren Compressibilität hier nicht in Betracht komme, sei die Reibung eine geringere, und daher stimme der für Gase beobachtete Ausflusscoefficient kreisförmiger Oeffnungen (0,65) besser mit dem theoretischen Werte überein.

Auf einen Mangel seiner Entwicklungen macht Herr Bonssinesq selbst aufmerksam. Es ist leicht einzusehen, dass im Innern des von der Flüssigkeit erfüllten Raumes, also auch namentlich in der Oeffnung, der Druck nicht unter den Druck der Atmosphäre hinabsinken und daher die Geschwindigkeit in keinem Punkte der Oeffnung

grösser als $\sqrt{2gh}$ sein dürfe. Nun erreichten aber die $f_1(y)$ und $f(r)$ d. h. die verticalen Componenten der Geschwindigkeit schon für sich betrachtet an den Stellen

$$y = \frac{b}{\sqrt{2}} \quad \text{resp.} \quad r = R\sqrt{\frac{2}{3}}$$

die Werte

$$\tfrac{3}{8}\pi\sqrt{2gh} \quad \text{resp.} \quad \frac{700.\pi}{6283}\sqrt{2gh},$$

die, wie man leicht erkennt, grösser sind als $\sqrt{2gh}$. Herr Bonssinesq sieht sich daher genötigt, die von ihm angebenen Werte der örtlichen Ausflussgeschwindigkeit einer Aenderung zu unterwerfen, indem er für die fraglichen Functionen jetzt folgende Form annimmt:

$$f_1 = \frac{3\pi}{2}\sqrt{2gh}\,\frac{y^2}{b^2}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)\left\{1+m'\left(1-K'\frac{y^2}{b^2}+K_1'\frac{y^4}{b^4}\right)\right\}$$

$$f = \frac{1575\pi}{628}\sqrt{2gh}\,\frac{r^2}{R^2}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)\left\{\frac{r^2}{R^2}+m\left(1-K\frac{r^2}{R^2}+K_1\frac{r^4}{R^4}\right)\right\}$$

Gleichsam als hätte er bewiesen, dass die aus der früheren, von ihm selbst in einem gewissen Sinne als unzulässig hingestellten Form der beiden Functionen abgeleiteten Ausflusscoefficienten unanfechtbar richtig wären, legt nun Herr Bonssinesq diesen Functionen die Bedingung auf, dass sie die Ausflusscoefficienten 0,628 resp. 0,657 liefern, und erhält dadurch, wie man leicht sieht, je eine lineare Gleichung für die Grössenpaare K', K_1' und K, K_1. Eine zweite lineare Gleichung für jedes dieser Grössenpaare liefert die Bedingung, dass die Randgeschwindigkeit gleich $\sqrt{2gh}$ sein soll. Führt man die betreffenden Rechnungen aus, so erhält man:

$$K' = \frac{14}{3} \quad \text{und} \quad K_1' = \frac{21}{5}$$

resp.

$$K = \frac{2885}{715} \quad \text{und} \quad K_1 = \frac{1}{3}(5k-10)$$

Damit der Mangel vermieden werde, welcher den zuerst aufgestellten Formeln für die locale Ausflussgeschwindigkeit anhaftete, muss m' nach den Angaben des Herrn Bonssinesq etwa gleich 1 und m ungefähr 0,8 sein.

Dies ist der Inhalt der Abhandlung des Herrn Boussinesq. Das Gesagte wird das Urteil rechtfertigen, welches ich in dem Bericht über meinen Vortrag die Contractio venae betreffend [1]) über dieselbe

---

1) Verhandl. der phys. Ges. zu Berlin 1887. Nr. 7. pag. 40—43.

ausgesprochen habe. Jedenfalls sind die Ausflusscoeffizienten theoretisch nicht bestimmt; vielmehr ist als Ergebniss der Arbeit die Herstellung mehr oder minder brauchbarer Interpolationsformeln für die locale Ausflussgeschwindigkeit bei kreisförmigen und geradlinig begrenzten spaltförmigen Oeffnungen zu betrachten, mit Rücksicht auf gewisse Forderungen, unter denen sich auch vorgeschriebene Werte der Ausflusscoefficienten befinden. Die letzteren müssten als willkürlich betrachtet werden, wenn sie nicht auch der Erfahrung einigermassen entsprächen.

§. 5. Durch die Untersuchungen über stationäre Flüssigkeitsbewegung der Herren Kirchhoff [1]) und von Helmholtz [2]) sind endlich, wie Lord Rayleigh [3]) zum ersten Mal ausgesprochen hat, die Hülfsmittel entwickelt, welche eine rationelle Lösung des hier behandelten Problems wenigstens für spaltförmige Oeffnungen gestatten. Es lässt sich nämlich das Studium der Flüssigkeitsbewegung, welche durch den Einfluss der Schwere in der Nähe der Oeffnung zu Stande kommt, zurückführen auf die Untersuchung eines Falles stationärer, ohne Einfluss äusserer Kräfte zu Stande kommender Flüssigkeitsbewegung, dessen Bestimmung Herr Kirchhoff in seiner berühmten Abhandlung angedeutet und in seiner Mechanik wirklich ausgeführt hat.

Es befinde sich die Oeffnung, deren Grenzen den kleinen Abstand $2b$ haben mögen, in dem horizontalen Boden des Gefässes. Ziehen wir jetzt nur Punkte in Betracht, deren Entfernung von der Oeffnung unendlich klein ist, so darf man, wie schon gelegentlich der Besprechung der Abhandlung des Herrn Boussinesq bemerkt ist, annehmen, dass die Flüssigkeitsbewegung in Ebenen vor sich geht, welche auf den Grenzen des Spaltes senkrecht stehen, und das Geschwindigkeitspotential nur von zwei Dimensionen abhängig wird. Legen wir das von Herrn Bouissinesq benutzte Coordinatensystem zu Grunde, so genügt dasselbe der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Im Innern des Gefässes ist für Punkte, deren Entfernung von der Oeffnung unendlich klein gegen die Dimensionen des Gefässes, aber unendlich gross gegen die Breite der Oeffnung ist, wie sich aus

---

1) Crelles Journal LXX 1869.

2) Monatsberichte der berliner Akademie April 1868. 215.

3) Philosophical Magazine (5) II 1876. 441—447.

der Formel des Herrn Boussinesq für das Geschwindigkeitspotential ergiebt, die Geschwindigkeit nach der Oeffnung gerichtet und umgekehrt proportional der Entfernung von derselben. Was nun die Strahlgrenze betrifft, so können wir bei hinreichender Kleinheit der Oeffnung annehmen, dass die Bewegung sich unendlich wenig von einer stationären unterscheidet, und dass also in erster Näherung die Richtung der Geschwindigkeit gleich derjenigen der Strahlgrenze, oder, was dasselbe besagt, die Ableitung von φ nach der Normale gleich null gesetzt werden kann. Für diejenigen Punkte der Strahlgrenze, deren Entfernung von der Oeffnung schon als unendlich gross gegen die Breite der letzteren, aber noch als unendlich klein gegen die Dimensionen des Gefässes betrachtet werden kann, ist die Richtung der Geschwindigkeit nahezu parallel der Achse des Strahles d. h.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

In erster Näherung darf man ferner in dem in Betracht gezogenen Teil der Strahlgrenze die Geschwindigkeit gleich $\sqrt{2gh}$ setzen.

Wir führen jetzt an Stelle der unabhängigen Variabeln zwei andere

$$\xi = \frac{y}{b} \qquad \eta = \frac{z}{b}$$

ein, d. h. wir nehmen die halbe Breite der Oeffnung zur Längeneinheit.

An Stelle der Function φ betrachten wir die Function

$$\Phi = \frac{\varphi}{b\sqrt{2gh}}$$

Dann genügt Φ der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = 0$$

An den Linien, welche den festen Boden des Gefässes und den freien Grenzen des Strahles entsprechen, ist $\frac{\partial \Phi}{\partial N}$ d. h. die Ableitung von Φ nach der Normale null.

An den letzt bezeichneten Stellen ist ausserdem

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\right)^2 = 1$$

Für Punkte im Gefäss, deren Entfernung R von der Oeffnung gegen die Breite unendlich gross ist, ist

$$\varphi = -\frac{2ab}{\pi}\sqrt{2gh}\log R$$

und daher nach dieser Formel des Herrn Boussinesq für das Geschwindigkeitspotential die Geschwindigkeit nach der Oeffnung gerichtet und gleich $\frac{2ab}{\pi R}\sqrt{2gh}$, wo α den Ausflusscoefficienten bezeichnet. Es ist leicht hieraus abzuleiten, dass wenn $\varrho = \sqrt{\xi^2+\eta^2}$ bei positivem η unendlich gross wird, auch Φ unendlich gross wird und zwar wie $-\frac{2\alpha}{\pi}\log\varrho$. Wird x gegen b negativ unendlich gross, also η überhaupt negativ unendlich gross, so wird $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ und daher auch

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{2gh}} - \frac{\partial\Phi}{\partial\xi} = 0.$$

Diese Bedingungen, welche Φ bis auf eine willkürliche additive Constante als Function von ξ und η bestimmen, sind nun dieselben wie diejenigen, welchen das Geschwindigkeitspotential in dem erwähnten von Herrn Kirchhoff und Lord Rayleigh untersuchten Fall stationärer Flüssigkeitsbewegung als Function der Coordinaten genügt. Es sei uns gestattet die Lösung des Problems soweit sie für die Bestimmung der Contractio venae erforderlich ist, hier in einer etwas modificirten Weise wiederzugeben.

Bekanntlich kann man jede Lösung der angegebenen partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2} = 0$$

auffassen als den reellen Teil einer Function

$$\Omega = \Phi + i\Psi$$

von $\zeta = \xi + i\eta$ betrachten. Fasst man sowol Φ und Ψ als auch ξ und η als rechtwinklige Coordinaten auf, so erhält man zwei Gebiete, von denen das eine eine conforme d. h. in den kleinsten Teilen ähnliche Abbildung des anderen ist.

Die Grösse Ψ ist bekanntlich diejenige Function von ξ und η oder $\frac{y}{b}$ und $\frac{x}{b}$, welche gleich einer Constanten gesetzt die Gleichung der Stromlinien liefert. Den Grenzen des Gebietes (ξ, η) entsprechen also zwei parallele Geraden, welche sich nach beiden Seiten ins Un-

endliche erstrecken. Zu den Punkten mit positiven η und unendlichen ξ gehören Punkte, deren Φ negativ unendlich ist, während zu den Punkten mit negativ unendlichen η, wie leicht zu sehen, positiv unendliche Werte Φ gehören.

Dadurch sind die Grenzen des Gebietes

$$\Omega = \Phi + i\Psi$$

bestimmt, wenn wir noch festsetzen, dass der begrenzenden Stromlinie mit negativen Abscissen der Wert $\Psi = 0$ entsprechen soll. Die Flüssigkeit strömt nun überall in einer Richtung, welche der nach dem Innern des Gefässes gerichteten x-Achse mehr oder minder entgegengesetzt ist, d. h. $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ und damit auch $\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}$ ist negativ. Es ist aber bekanntlich

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}$$

und in Folge dessen $\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}$ überall positiv; daher entspricht der Stromlinie mit positivem ξ ein constanter positiver, vorläufig allerdings noch unbekannter Wert ψ_1 von Ψ.

Die Grenzen des Gebietes ζ sind nicht vollständig bestimmt; dagegen lässt sich ein drittes Gebiet ermitteln, aus welchem sich ζ sehr leicht als Function von Ω und damit umgekehrt Ω als Function von ζ ableiten lässt. Fassen wir nämlich auch den reellen und den imaginären Teil von

$$\frac{d\Omega}{d\zeta} = Z = X + iY = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - i\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}$$

als rechtwinklige Coordinaten auf, so erhalten wir eine conforme Abbildung der Gebiete ζ und Ω, deren Grenzen wir vollständig ermitteln können.

Wir haben schon bemerkt, dass $\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}$ überall negative Werte hat; demgemäss haben alle in Frage kommenden Punkte des Gebietes Z positive Ordinaten. Ferner strömt das Wasser überall der Z Achse zu, also ist für positive ξ $\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}$ negativ und für negative $\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}$ positiv. Gehen wir auf der Linie $\eta = 0$ von $\xi = \infty$ bis $\xi = 1$, so ist

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = 0$$

und $\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}$ nimmt von 0 bis -1 ab. Verfolgen wir die von $\xi = 1$,

$\eta = 0$ ausgehende freie Strahlgrenze, so wächst X wieder bis zum Werte null, während Y von 0 bis 1 zunimmt, und zwar in der Weise, dass $X^2 + Y^2 = 1$ ist. Dieser Teil des Gebietes ist also das zu negativen Abscissen und positiven Ordinaten gehörige Kreisviertel mit dem Radius 1 und dem Mittelpunkt null. Der anderen Stromlinie, also der Linie $\Psi = 0$ entspricht erstlich das zwischen 0 und und $+1$ liegende Stück der Abscissenachse und der Viertelkreis mit dem Radius 1, welcher die Punkte $X = 0$, $Y = +1$ und $X = +1$, $Y = 0$ mit einander verbindet. Setzen wir fest, dass dem Punkte $\xi = -1$, $\eta = 0$ der Punkt $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ entsprechen soll, was erlaubt ist, weil Φ eine willkürliche additive Constante enthält, so entspricht auch dem Punkte $\xi = 1$, $\eta = 0$ der Wert $\Phi = 0$; denn $\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}$ ist eine ungerade und in Folge dessen Φ eine gerade Function in Bezug auf ξ. Den beiden Ecken des begrenzenden Halbkreises im Gebiete Z entsprechen also die Punkte $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ und $\Phi = 0$, $\Psi = \psi_1$. Wird Φ negativ unendlich, so wird die Geschwindigkeit und damit Z unendlich klein; wird dagegen Φ positiv unendlich, so nähert sich Z der Grenze $+i$.

Eine diesen Bedingungen entsprechende conforme Abbildung der Gebiete Z und Ω wird nun vermittelt durch die Gleichung

$$e^{-\frac{\pi}{\psi_1}\Omega} = \frac{Z^2+1}{2Z},$$

welche zu einer beiderseits eindeutigen wird durch die Bedingung, dass der absolute Betrag von Z zwischen 0 und 1, und der imaginäre Teil von Ω, zwischen 0 und und ψ_1 liegen soll. Aus der Gleichung

$$\frac{d\Omega}{d\zeta} = Z$$

folgt dann, da dem Punkte $\Phi = 0$, $\Psi = \psi_1$ der Punkt $\xi = 1$, $\eta = 0$ entsprechen sollte, die Gleichung

$$\zeta = \int_{i\psi_1} \frac{d\Omega}{Z} + 1$$

in welcher nur noch die Constante ψ_1 unbekannt ist. Wir erhalten dieselbe, indem wir bedenken, dass für $\xi = 0$ Z rein imaginär ist. Der Linie ξ gleich null entspricht daher die Linie $\psi = \frac{1}{2}\psi_1$. Es muss also der reelle Teil des Ausdrucks

$$\int_{i\psi_1}^{\Phi+\frac{i}{2}\psi_1} \frac{d\Omega}{Z}+1$$

gleich 0 oder der reelle Teil von $\int_{\Phi+\frac{i}{2}\psi_1}^{i\psi_1} \frac{d\Omega}{Z}$ gleich 1 sein, wie auch immer Φ und der Integrationsweg in dem durch die Linien $\psi = 0$ und $\psi = \psi_1$ begrenzten Gebiete gewählt worden möge. Wir wählen für Φ einen sehr grossen Wert R und gehen dann auf der Linie $\Phi = R$ von $R+\frac{i}{2}\psi_1$ bis $R+i\psi_1$ und von dort aus auf der Linie $\Psi = \psi_1$ von $R+i\psi_1$ bis $i\psi_1$. Bezeichnen wir den reellen Teil einer Grösse durch ein vorgesetztes $\Re$, so erhalten wir die Bedingung

$$\Re\int_{R+\frac{i}{2}\psi_1}^{R+i\psi_1} \frac{d\Omega}{Z}+\Re\int_{R+i\psi_1}^{i\psi_1} \frac{d\Omega}{Z} = 1$$

Der erste Teil ist, wie leicht zu sehen, der Wert ξ, welcher zu $\Phi = R$ und $\psi = \psi_1$ gehört, also die halbe Breite des Strahles an der durch dieses Wertepaar gekennzeichneten Stelle seiner Grenze, gemessen durch die halbe Breite der Oeffnung. Für grosse Werte R ist also der erste Teil mit dem Ausflusscoefficienten identisch. Für solche Werte kann aber $Z = i$ gesetzt werden, und es ist also

$$\Re\int_{R+\frac{i}{2}\psi_1}^{R+i\psi_1} \frac{d\Omega}{Z} = \int_{\frac{1}{2}\psi_1}^{\psi_1} d\psi = \tfrac{1}{2}\psi_1$$

In dem zweiten Teile hat Z den absoluten Betrag 1. X ist negativ, Y positiv. Wir setzen daher

$$Z = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$$

Für die untere Grenze ist α eine sehr kleine Grösse δ, für die obere gleich $\frac{\pi}{2}$. Ferner ist dann

$$e^{-\frac{\pi}{\psi_1}\Omega} = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$$

nnd also

$$d\Omega = \frac{\psi_1}{\pi}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)d\alpha$$

Das Integral, nm welches es sich handelt, hat demnach den Wert

$$\frac{\psi_1}{\pi}\int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}\,d\alpha$$

Sein reeller Teil $\frac{\psi_1}{\pi}\int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)d\alpha$ nähert sich also der Grenze $\frac{\psi_1}{\pi}$. Die Grösse ψ_1 ist daher bestimmt dnrch die Gleichnng

$$\psi_1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\right) = 1$$

demnach ist der Ausflusscoefficient

$$\tfrac{1}{2}\psi_1 = \frac{\pi}{2+\pi} = 0{,}611.$$

Dnrch Betrachtnngen, wie sie in der mathematischen Physik nicht selten sind, überzengt man sich leicht, dass dieser Wert des Ausflnsscoefficienten nicht an die Bedingnng geknüpft ist, dass die parallelen Grenzen Gerade sind, wenn nnr voransgesetzt werden darf, dass die Breite der Oeffnnng im allgemeinen unendlich klein gegen den Krümmnngsradins der Mittellinie ist. So ist z. B. $\frac{\pi}{2+\pi}$ anch der Ansflusscoefficient für Oeffnnngen, welche von zwei concentrischen Kreisen begrenzt sind, deren Radien sehr wenig von einander verschieden sind.

§. 6. Für andere als spaltförmige Oeffnnngen scheint eine strenge Lösnng des in Frage stehenden Prohlems bisher noch nicht gefnnden zn sein. Denn das Ergebniss der schwer verständlichen Speculationen des Herrn J. C. Hansen [1]) in Adelaide über diesen Gegenstand kann

1) Ueber das sogenannte Toricelli'sche Theorem; Poggendorff Annalen Bd. 133. Vergl. Poggendorff Annalen Bd. 134. 1868.

bei den Widersprüchen gegen streng erwiesene Lehren der Hydrodynamik, welche im Laufe derselben zu Tage treten, trotz seiner scheinbaren Uebereinstimmung mit Beobachtungsresultaten nicht als eine solche betrachtet werden.

Dagegen hat Herr G. O. Hanlon [1]) ein Verfahren bekannt gemacht, das ohne Aufwand grosser Rechnungen für beliebige kleine Oeffnungen wenigstens eine untere Grenze für den Ausflusscoefficienten zu bestimmen gestattet. Darauf, dass dieses Verfahren in dem Fall einer Oeffnung in ebener Wand nicht den wirklichen Wert der Ausflusscoefficienten liefert, wie Herr Hanlon anzunehmen scheint, hat schon Clerk Maxwell [2]) hingewiesen. Dagegen hat Lamb [3]) mit Recht hervorgehoben, dass in dem Falle einer nach dem Innern des Gefässes gerichteten Röhre die ermittelte Zahl $\frac{1}{2}$ in der Tat den theoretischen Wert des Ausflusscoefficienten repräsentirt.

Wir wollen zunächst die Gleichung ableiten, aus welcher durch Unterdrückung eines positiven Gliedes unmittelbar die Bedingung des Herrn Hanlon hervorgeht. Dabei wollen wir speciell den noch nicht erledigten Fall einer Oeffnung ins Auge fassen, deren Dimensionen sämtlich unendlich klein von derselben Ordnung sind.

Wir betrachten den Teil der flüssigen Masse, welcher in einer über der Oeffnung beschriebenen Halbkugel enthalten ist, deren Radius R unendlich klein von geringerer Ordnung als die Dimensionen der Oeffnung ist, und einen sich daran anschliessenden Teil des Strahles, der von einer der Oeffnung parallelen Ebene begrenzt ist, deren Abstand von der Gefässwand ebenfalls als unendlich gross gegen die Dimensionen der Oeffnung angesehen werden kann, während derselbe gegen die Dimensionen des Gefässes unendlich klein ist. Es ist schon mehrfach hervorgehoben, dass dann die Annahme gestattet sei, das Wasser ströme mit der Geschwindigkeit $\sqrt{2gh}$ in senkrechter Richtung durch diese Ebene.

Die Resultante der in dieser Richtung auf die flüssige Masse während des Zeitelementes dt wirkenden äusseren Kräfte muss dann gleich dem während derselben Zeit erfolgenden Zuwachs des Bewegungsmomentes sein. In dem mathematischen Ausdruck dieser

---

1) The vena contracta; Proceed. of the London Math. Soc. III 4—6, 6—8. 1869—1871.

2) Proceedings of the London Mathematical Society III, 6—8. 1869—1871.

3) Lamb. Hydrodynamik übers. von Reiff. Freiburg u. Tübingen 1884.

Beziehung wollen wir nur solche Glieder beibehalten, welche unendlich klein von der Ordnung der Oeffnung sind, dagegen Glieder höherer Ordnung vernachlässigen. Dann können wir zunächst also von der Wirkung der Schwere auf den Strahl absehen und brauchen nur das Gewicht des halbkugelförmigen Teiles der Masse in Betracht zu ziehen. Ferner wirkt als äussere Kraft der Druck, welchen die Gefässwände, die Luft und die umgebende Flüssigkeit auf den in Betracht gezogenen Teil der Flüssigkeit ausüben. An den Grenzen des Strahles ist dieser Druck gleich dem Atmosphärendruck P. Den Druck an der festen Wand und in der Halbkugel können wir als Combination dreier Kräfte betrachten, von denen zwei der constante durch die Atmosphäre bewirkte Druck P und der durch die Schwere bedingte Druck der nach Innen gerichteten Normale des Gebietes parallel sind, während die dritte nach Aussen gerichtet ist und die Grösse $\frac{\varrho}{2}V^2$ hat, wo ϱ die Dichtigkeit und V die Geschwindigkeit bezeichnet. Der Teil der letztbezeichneten Kraft, welcher von der Halbkugel herrührt, hat, wie leicht aus der Formel des Herrn Boussinesq abzuleiten, die Grössenordnung $S\frac{S}{4R^2\pi}$, wo S die Grösse der Oeffnung bezeichnet. Wir unterdrücken denselben also. Bezeichnen wir nun mit dw ein Element der festen Wand der Oeffnung, so wirkt, in der Richtung der nach aussen gerichteten Normalen der letzteren, erstlich die Kraft

$$\tfrac{1}{2}\varrho\int dw\,V^2.$$

Der constante Teil des Druckes, nämlich P, wird aufgehoben durch den Druck, welchen der Strahl erleidet.

Der Einfluss des Gewichtes der halbkugelförmigen Masse, würde aufgehoben werden, wenn in allen Punkten der ebenen wie der halbkugelförmigen Begrenzung derselben der hydrostatische Druck wirkte. Deshalb hat die Resultante der noch nicht berücksichtigten Kräfte die Richtung der nach Aussen gehenden Normale der Oeffnung. Ihre Grösse wird angegeben durch den Druck, welchen die Flüssigkeit im Falle des Gleichgewichtes auf einen Verschluss der Oeffnung ausüben würde, d. h. durch

$$\varrho g h S$$

Bei einer stationären Bewegung, wird ein Zuwachs des Bewegungsmomentes eines Teiles der flüssigen Masse nur durch die Elemente der Grenze gebildet. Bezeichnen wir mit N die Geschwindigkeitscomponente nach der Normale an der Grenze des Gebietes,

mit X diejenige nach einer festen Richtung, so ist, wie leicht zu sehen, das über die Grenzen des Gebietes erstreckte Integral

$$\varrho \int d\sigma\, XN dt$$

der fragliche Zuwachs des Bewegungsmomentes.

Für die feste Wand ist $N=0$; ebenso für die an die Luft grenzenden Teile des Strahles. Der von der Halbkugel herrührende Teil hat wieder die Grössenordnung $S\frac{S}{4R^2\pi}$, ist also zu vernachlässigen. In dem noch fehlenden Teil der Begrenzung ist

$$N = \sqrt{2gh}, \quad X = \sqrt{2gh}$$

und die Grösse der Fläche $= S'$, also der Zuwachs des Bewegungsmomentes $S'2gh\varrho dt$. Demnach erhalten wir für den Querschnitt des contrahirten Strahles folgende Gleichung:

$$2gh\varrho S' = \varrho ghS + \frac{\varrho}{2}\int dw\, v^2$$

Indem man den letzten Teil unterdrückt, erhält man die einfachere Beziehung des Herrn Hanlon

$$2S' = S \quad \text{oder} \quad S' : S = \tfrac{1}{2}$$

welche aber richtiger zu schreiben wäre

$$\frac{S'}{S} > \tfrac{1}{2}$$

Mit Hülfe des von Herrn Boussinesq aufgestellten Ausdruckes für das Geschwindigkeitspotential der Punkte im Innern des Gefässes, lassen sich aus der obigen Gleichung zwei engere Grenzen für den Ausflusscoefficienten bei kreisförmigen Oeffnungen ableiten, als die bisher ermittelten Grenzen $\frac{1}{2}$ und 1.

Der mehrfach erwähnte Ausdruck für das Geschwindigkeitspotential war

$$\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{f\varrho' d\varrho' d\varphi}{\sqrt{\varrho^2 - 2\varrho\varrho'\cos\varphi + \varrho'^2 + z^2}}$$

wo ϱ und z Cylindercoordinaten des betreffenden Punktes im Innern des Gefässes bezeichnen. Für Punkte der festen Wand ist $z = 0$ und $\varrho > r$. Nach einer bekannten Formel darf man nun

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\varrho^2 - 2\varrho\varrho' \cos\varphi + \varrho'^2}} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{\varrho^2 - \varrho'^2 \sin^2 u}}$$

setzen und erhält dadurch folgenden Ausdruck für das Geschwindigkeitspotential eines Punktes der festen Wand

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{f\varrho' d\varrho' d\varphi}{\sqrt{\varrho^2 - \varrho'^2 \sin^2\varphi}}$$

Hieraus ergieht sich die Grösse der Geschwindigkeit

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} = \frac{\varrho}{2\pi} \int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{f\varrho' d\varrho' d\varphi}{\sqrt{(\varrho^2 - \varrho'^2 \sin^2\varphi)^3}}$$

Wir machen nun die durch die Bedeutung von f hinlänglich gerechtfertigte Annahme, dass diese Grösse für alle Punkte der Oeffnung positiv ist; im entgegengesetzten Fall würde durch einen Teil der Oeffnung Wasser in das Gefäss einströmen. Dann ist der zuletzt angegebene Ausdruck offenbar grösser als

$$\frac{1}{2\pi\varrho^2} \cdot \int_0^r \int_0^{2\pi} f\varrho' d\varrho' d\varphi$$

Das Doppelintegral ist nun, wie man leicht erkennt, die mittlere Ausflussgeschwindigkeit multiplicirt mit der Grösse der Oeffnung, also

$$\sqrt{2gh}\, r^2 \pi\alpha = \sqrt{2gh}\, S$$

Das Integral

$$\frac{1}{2} \int dw V^2 = \pi \int_r^R \varrho\, d\varrho\, V^2$$

in welchem mit Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung für $R = \infty$ geschrieben werden kann, ist also grösser als

$$\frac{\alpha^2}{8} 2gh r^2 \pi$$

wir erhalten daher für den Ausflusscoefficienten α folgende Relation

$$\alpha > \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8}\alpha^2,$$

aus welcher, da α ein echter Bruch ist, folgt

$$\alpha > 4 - \sqrt{12}$$

oder

$$\alpha > 0{,}536.$$

In ähnlicher Weise lässt sich aus der entwickelten Gleichung eine obere Grenze für den Ausflusscoefficienten ableiten. Um das zu zeigen, entwickeln wir die Geschwindigkeit nach fallenden Potenzen von ϱ und setzen

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} = \frac{\sqrt{2gh}\,\pi r^2}{2\pi\varrho^2}\sum_0^\infty A_m a_m \frac{r^{2m}}{\varrho^{2m}}$$

wobei

$$a_m r^{2m+2}\pi\sqrt{2gh} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r f\,\varrho'^{2m+1} d\varrho' \quad \left(m \geqq 0\right)$$

$$A_m = (2m+1)\left\{\frac{1.3\ \ldots\ 2m-1)}{2.4\ \ldots\ 2m}\right\}^2 \left(m \geqq 1\right),$$
$$A_0 = 1$$

sein soll.

Diese für alle Werte ϱ, welche gleich oder grösser als r sind, convergente Reihe zerlegen wir in zwei Teile, von denen der erste die $M+1$ ersten Glieder, der andere alle folgenden Glieder umfasst. In dem letzteren ersetzen wir in jedem Gliede den Factor $\left(\frac{r}{\varrho}\right)^{2m+2}$ durch $\left(\frac{r}{\varrho}\right)^{2M+4}$, und erhalten dadurch folgenden Ausdruck, welcher grösser als die Geschwindigkeit ist:

$$\sqrt{2gh}\left\{\frac{\pi r^2}{2\pi\varrho^2}\sum_0^M A_m a_m \frac{r^{2m}}{\varrho^{2m}} + \frac{\pi r^{2M+4}}{2\pi\varrho^{2M+4}}\sum_{M+1}^\infty A_m a_m\right\}$$

Am Rande der Oeffnung ist

$$-\frac{d\varphi}{\partial\varrho} = \sqrt{2gh}$$

und daher

$$\tfrac{1}{2}\sum_0^\infty A_m a_m = 1$$

Benutzen wir diese Relation, so können wir den eben aufgestellten Ausdruck schreiben:

$$\sqrt{2gh}\left\{\frac{r^{2M+4}}{\varrho^{2M+4}} + \tfrac{1}{2}\sum_0^M A_m a_m\left(\frac{r^{2m+2}}{\varrho^{2m+2}} - \frac{r^{2M+4}}{\varrho^{2M+4}}\right)\right\}$$

Indem wir jetzt für a_m den, wie leicht zu erkennen, grösseren Wert $a_0 = \alpha$ setzen, vergrössern wir diesen Ausdruck noch mehr; es ist also

$$V = -\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} < \sqrt{2gh}\left\{\frac{r^{2M+4}}{\varrho^{2M+4}} + \frac{\alpha}{2}\sum_{0}^{M} A_m\left(\frac{r^{2m+2}}{\varrho^{2m+2}} - \frac{r^{2M+4}}{\varrho^{2M+4}}\right)\right\}$$

oder, wenn wir den rechtsstehenden Ausdruck V_M nennen, $V < V_M$ und in Folge dessen

$$2gh\,\alpha r^2\pi < gh\,r^2\pi + \pi\int_r^\infty \varrho\,d\varrho\,V_M^2$$

Zunächst setzen wir für M den Wert 0; dann erhalten wir

$$2gh\,\alpha r^2\pi < gh\,r^2\pi + 2gh\,\pi\int_r^\infty \varrho d\varrho\left\{\frac{\alpha}{2}\frac{r^2}{\varrho^2} + \left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{r^4}{\varrho^4}\right\}^2$$

$$2gh\,\alpha r^2\,\pi < gh\,r^2\pi + 2gh\,r^2\pi\left\{\frac{\alpha^2}{8} + \frac{\alpha}{4}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) + \left(1-\frac{\alpha}{2}\right)^2\frac{1}{6}\right\}$$

oder

$$\alpha^2 - 22\alpha + 16 > 0$$

d. h.

$$\alpha < 11 - \sqrt{105} \quad \text{oder} \quad \alpha < 0{,}753.$$

Die obere Grenze, welche wir für α aus dem obigen Ausdruck für irgend einen Wert M ableiten können, kommen nicht beständig mit wachsendem M dem wahren Wert näher, wie aus dem Verhalten der Differenz

$$V_M - V_{M+1} = \sqrt{2gh}\,\frac{r^{2M+4}}{\varrho^{2M+4}}\left(1-\frac{r^2}{\varrho^2}\right)\left\{1-\frac{\alpha}{2}\sum_{0}^{M+1} A_m\right\}$$

unmittelbar hervorgeht.

Ist nun für die obere Grenze α'_M, welche wir aus V_M ermitteln können,

$$1-\frac{\alpha'_M}{2}\sum_{0}^{M+1} A_m$$

negativ, so genügt α'_M nicht nur der Gleichung, aus welcher es bestimmt wurde, sondern auch der Bedingung

$$2gh\,\alpha r^2\pi < gh\,r^2\pi + \tfrac{1}{2}\int dw\,V_{M+1}^2$$

Es ist also von einem Uebergange von M zu $M+1$ nur so lange ein Vorteil zu erwarten, als

$$1-\frac{\alpha'_M}{2}\sum_{0}^{M+1} A_m > 0$$

ist. Da nun aber:

$$A_0 = 1, \quad A_1 = 0{,}75, \quad A_2 = 0{,}703, \quad A_3 = 0{,}683, \quad A_4 = 0{,}672$$

und α also auch $\alpha_M > 0{,}536$ ist, so ist schon für $M \geqq R$

$$1 - \frac{\alpha_M}{2} \sum_0^{M+1} A_m < 0.$$

Der geringste Wert, welchen wir für die obere Grenze von α ermitteln können, gehört also zu einem Wert M, der kleiner als 4 ist. Andrerseits erkennt man schon aus dem Werte α_0', dass $\alpha_1' < \alpha_0'$ und daher auch $\alpha_2' < \alpha_1'$ sein muss. Es können also überhaupt nur $M = 2$ und $M = 3$ in Betracht kommen.

Im ersteren Fall erhalten wir folgende Bedingung

$$\alpha < 0{,}571 + 0{,}077\,\alpha + 0{,}167\,\alpha^2$$

oder

$$\alpha^2 - 5{,}53\,\alpha + 3{,}42 > 0$$

d. h.

$$\alpha < 0{,}71.$$

Hieraus erkennt man, dass $M = 3$ keinen genaueren Wert liefert.

Die beiden ermittelten Grenzen 0,536 und 0,71 sind in so fern interessant, als ihr arithmetisches Mittel dem beobachteten Wert 0,62 oder dem theoretisch abgeleiteten Wert $\frac{\pi}{2+\pi}$ sehr nahe kommt. Nimmt man also einen dieser Werte auch für kreisförmige Oeffnungen an, so macht man einen Fehler der zwischen $-0{,}09$ und $+0{,}84$, resp. $-0{,}10$ und $0{,}07$ liegt.

XVIII.

Das n dehnige $(n+1)$eck in Beziehung auf seine Hauptträgheitsaxen.

Von

R. Hoppe.

§. 1. Bestimmung des erzeugenden Punktes.

Der Kürze wegen nenne ich ein Gebilde von n Dimensionen n dehnig oder eine n dehnung; linear heisst es, wenn es allein durch lineare Gleichungen zwischen den Coordinaten des erzeugenden Punktes bestimmt wird.

Ein n dehniges $(n+1)$eck wird begrenzt von $n+1$ $(n-1)$ dehnigen $n$ecken, welche seine Seiten heissen. Diese Erklärung führt den Begriff des erstern auf den des zweidehnigen Dreiecks zurück. Hiernach ist ein Tetraeder ein dreidehniges Viereck. Das definirte Gebilde ist mithin ein Analogon zu Dreieck und Tetraeder. Sylvester gebraucht dafür den Namen „Plasma", wol in der Auffassung als Elementargebilde aller linear begrenzten Gebilde, indem sich letztere aus lauter solchen Plasmen zusammensetzen lassen.

Betrachtet man nun in einem Plasma P_n eine Seite P_{n-1} als Basis, so bestimmt diese nebst ihrer Gegenecke A_{n+1} als Spitze das ganze P_n. Ebenso ist P_{n-1} bestimmt durch eine Seite P_{n-2} als Basis und die zugehörige Spitze A_n, u. s. f. bis die Reihe mit einer Geraden $P_2 \equiv A_1 A_2$ als Basis des Dreiecks $P_3 \equiv A_1 A_2 A_3$ schliesst.

Den gleichen Gang wenden wir auf Bestimmung des erzeugenden Punktes von P_n an. Sei B_n ein beliebiger Punkt im Innern von P_n.

Wir ziehen die Transversale $A_{n+1} B_n B_{n-1}$, wo B_{n-1} in der Basis P_{n-1} liegt, und setzen:

$$A_{n+1} B_{n-1} : A_{n+1} B_n = 1 : u_n$$

dann ist B_{n-1} erzeugender Punkt von P_{n-1}. Ebenso ziehen wir die Transversale $A_n B_{n-1} B_{n-2}$ nach P_{n-2} und setzen:

$$A_n B_{n-2} : A_n B_{n-1} = 1 : u_{n-1}$$

So fahren wir fort. Zuletzt fällt die Radialprojection B_1 von B_2 in die Gerade P_2 und teilt diese im Verhältniss:

$$A_2 A_1 : A_2 B_1 = 1 : u_1$$

Sei x die Abscisse von B_n auf beliebiger Axe, x_1, x_2, ... die Abscissen der Ecken A_1, A_2, ..., x_1', x_2', ... die von B_1, B_2, ... Dann ist

$$x_1' = (x_1 - x_2) u_1 + x_2$$
$$x_2' = (x_1' - x_3) u_2 + x_3 = (x_1 - x_2) u_1 u_2 + (x_2 - x_3) u_2 + x_3$$
etc.
$$x_n' = (x'_{n-1} - x_{n+1}) u_n + x_{n+1} =$$
$$(x_1 - x_2) u_1 u_2 \ldots u_n + (x_2 - x_3) u_2 u_3 \ldots u_n + \ldots (x_n - x_{n+1}) u_n + x_{n+1}$$

Diese letzte Abscisse ist die gesuchte des erzeugenden Punktes B_n. Man kann ihren Wert in 2 Arten entwickelt schreiben:

$$x = \sum_{k=1}^{k=n+1} (x_k - x_{k+1}) u_k u_{k+1} \ldots u_n \qquad (x_{n+2} = 0) \qquad (1)$$

$$x = \sum_{k=1}^{k=n+1} x_k (1 - u_{k-1}) u_k u_{k+1} \ldots u_n \qquad (u_0 = 0) \qquad (2)$$

Der so bestimmte Punkt durchläuft das ganze P_n, wenn alle u unabhängig von 0 bis 1 variiren.

§. 2. Berechnung der Integrale zur Bestimmung der Hauptträgheitsaxen.

Wendet man die Substitution (1) auf n orthogonale Coordinatenaxen der $xyz \ldots$ an; so ist die Functionsdeterminante

$$- \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & x_2 - x_3 & \ldots & x_n - x_{n+1} \\ y_1 - y_2 & y_2 - y_3 & \ldots & y_n - y_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} u_2 u_3^2 u_4^3 \ldots u_n^{n-1}$$
$$= \Delta u_2 u_3^2 u_4^3 \ldots u_n^{n-1} \qquad (3)$$

wo Δ constant. Hieraus ergibt sich das Volum:

$$P_n = \Delta \int_0^1 \dots \int_0^1 u_2 u_3^2 u_4^3 \dots u_n^{n-1} \partial u_1 \partial u_2 \dots \partial u_n = \frac{\Delta}{n!} \qquad (4)$$

Das statische Moment stellt sich bei Anwendung von Gl. (2) folgendermassen dar:

$$\int x \partial P_n = n! P_n \int_0^1 \dots \int_0^1 \partial u_1 \partial u_2 \dots \partial u_n \times$$

$$\sum_{k=1}^{k=n+1} x_k u_2 u_3^2 \dots u_{k-1}^{k-2} (1 - u_{k-1}) u_k^k u_{k+1}^{k+1} \dots u_n^n$$

$$= n! P_n \sum_{k=1}^{k=n+1} x_k \frac{1}{1} \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{k-2} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \frac{1}{k+1} \cdots \frac{1}{n+1}$$

$$= n! P_n \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{x_k}{(n+1)!} = \frac{P_n}{n+1} \sum_{k=1}^{k=n+1} x_k$$

Demnach ist der Schwerpunkt von P_n Anfang der Coordinaten, wenn

$$\Sigma x_k = 0; \quad \Sigma y_k = 0; \quad \text{etc.} \qquad (5)$$

Er ist, wie man sieht, zugleich der Schwerpunkt der gleich belasteten Ecken von P_n.

Seien jetzt die Abscissen x, y auf 2 beliebig gerichteten, von demselben beliebigen Punkte als Anfang ausgehenden Geraden genommen. Dann erhält man nach Anwendung der Substitution (2) auf beide Abscissen:

$$\int xy \partial P_n = n! P_n \int_0^1 \dots \int_0^1 \partial u_1 \partial u_2 \dots \partial u_n \times$$

$$u_2 u_3^2 \dots u_n^{n-1} \sum_{k=1}^{k=n+1} x_k (1 - u_{k-1}) u_k \dots u_n \times$$

$$\sum_{k=1}^{k=n+1} y_k (1 - u_{k-1}) u_k \dots u_n$$

$$= n! P_n \int_0^1 \dots \int_0^1 \partial u_1 \dots \partial u_n \Sigma \Sigma v_{k,h} x_k y_h$$

wo $v_{k,h}$ entsprechend den Termen $k \gtrless h$ folgende 3 verschiedene Formen hat:

$$v_{k,h} = \begin{cases} u_2 u_3^2 \ldots u_{h-1}{}^h - 2(1 - u_{h-1}) u_h{}^h \ldots u_{k-1}{}^{k-1}(1 - u_{k-1}) u_k{}^{k+1} \ldots u^{n+1} \\ u_2 u_3^2 \ldots u_{k-1}{}^{k-2}(1 - u_{k-1})^2 u_k{}^{k+1} \ldots u_n{}^{n+1} \\ u_2 u_3^2 \ldots u_{k-1}{}^{k-2}(1 - u_{k-1}) u_k{}^k \ldots u_{h-1}{}^{h-1}(1 - u_{h-1}) u_h{}^{h+1} \ldots u_n{}^{n+1} \end{cases}$$

Der letzte Ausdruck gibt offenbar gleiches Resultat mit dem ersten. Entsprechend dem ersten und zweiten findet man:

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 v_{k,h}\, \partial u_1\, \partial u_2 \ldots \partial u_n =$$

$$\begin{cases} \frac{1}{1}\frac{1}{2}\cdots\frac{1}{h-2}\left(\frac{1}{h-1}-\frac{1}{h}\right)\frac{1}{h+1}\cdots\frac{1}{k-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\frac{1}{k+2}\cdots\frac{1}{n+2} \\ \frac{1}{1}\frac{1}{2}\cdots\frac{1}{k-2}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{2}{k}+\frac{1}{k+1}\right)\frac{1}{k+2}\cdots\frac{1}{n+2} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 : (n+2)\,! \\ 2 : (n+2)\,! \end{cases}$$

folglich ist

$$\int xy\, \partial P_n = \frac{P_n}{(n+1)(n+2)} (\Sigma x_k \Sigma y_k + \Sigma x_k y_k) \qquad (6)$$

$$(k = 1, 2, \ldots n+1)$$

Ist nun der Schwerpunkt Coordinatenanfang, so fällt nach Gl. (5) der erste Teil weg, und man hat:

$$\int xy\, \partial P_n = \frac{P_n}{(n+1)(n+2)} \Sigma x_k y_k \qquad (7)$$

Auch dieser Wert stimmt mit demjenigen überein, welcher einer auf die Eckpunkte gleichverteilten Masse entspricht.

§ 3. Bestimmung der Hauptträgheitsmomente und Hauptträgheitsaxen.

Lässt man die Axen der x und y zusammenfallen, so dass $x = y$ wird, so wird Gl. (7), welche für 2 beliebige Axenrichtungen hergeleitet ist:

$$\int x^2\, \partial P_n = \frac{P_n}{(n+1)(n+2)} \Sigma x_k^2 \qquad (8)$$

Wendet man diese Formel auf n orthogonale Axen der x, y, z, ... an, und addirt alle Formeln, mit Ausnahme einer einzigen, z. B. der auf die x bezüglichen, so stellt

$$\int (y^2 + z^2 + \ldots)\, \partial P_n = \frac{P_n}{(n+1)(n+2)} \Sigma (y_k^2 + z_k^2 + \ldots) \qquad (9)$$

das Trägheitsmoment von P_n für die beliebige Axe der x, dio jedocb dnrcb den Schwerpnnkt gehen mnss, dar.

Die orthogonalen Axen der x, y, z, ... sind Hanptträgheitsaxen, wenn für alle Axen und Combinationen derselben

$$\int x\partial P_n = \int y\partial P_n = \ldots = 0$$

$$\int xy\partial P_n = 0; \quad \int xz\partial P_n = 0; \quad \text{etc.}$$

Die Bedingungen dafür lanten also:

$$\sum_{k=1}^{k=n+1} x_k y_k = 0; \qquad \sum_{k=1}^{k=n+1} x_k z_k = 0; \quad \text{etc.} \tag{10}$$

$$\sum_{k=1}^{k=n+1} x_k = 0; \qquad \sum_{k=1}^{k=n+1} y_k = 0; \quad \text{etc.} \tag{5}$$

Elimlnirt man die Coordinaten von A_{n+1}, so lauten die erstern:

$$\sum_{k=1}^{k=n} x_k \sum_{k=1}^{k=n} y_k + \sum_{k=1}^{k=n} x_k y_k = 0; \quad \text{etc.} \tag{11}$$

Stellt man sich nun die Anfgabe, dle Coordinaten der Ecken eines Plasmas in Bezng anf ein gegebenes orthogonales Axensystem so zn bestimmen, dass diese Axen Hanptträgheitsaxen werden, so bat man $n(n+1)$ verfügbare Grössen und $\frac{1}{2}n(n+1)$ zn erfüllende Gleichnngen, so dass $\frac{1}{2}n(n+1)$ Grössen willkürlich bleiben.

Nnn lässt sicb bemerken, dass alle Bedingungsgleicbungen in Bezng anf die gleicbnamigen Coordinaten bomogen sind; man kann daher snbstitniren

$$Ax_1, Ax_2, \ldots \text{ für } x_1, x_2, \ldots$$
$$By_1, By_2, \ldots \text{ für } y_1, y_2, \ldots$$
$$\text{etc.}$$

d. h. es ergibt slch der Satz:

„Jedes n dehnlgo $(n+1)$eck, dessen Lage der genannten For-„derung genügt, behält diese Elgenscbaft, wenn man es in beliebigen „Coordinatenrichtnngen beliebig proportional dehnt oder comprimirt, „während die Axen in Ruhe bleiben."

Da die gemeinsamen Factoren A, B, ... n Willkürliche vertreten, so lassen sich n nnbestimmte Grössen nacb Beqnemlichkeit festsetzen, z. B. die Coordinaten der ersten Ecke A_1. Dann sind A,

B, ... die einzigen Lineargrössen und zwar ohne Einfluss auf die Natur der Lösung, brauchen daher bei Untersuchung der Aufgabe nicht geschrieben zu werden. Die übrigen $\frac{1}{2}n(n-1)$ Willkürlichen hingegen sind reine Zahlen und zwar specifische Moduln der Figur.

Ist die Anzahl der Willkürlichen unter die ungleichnamigen Coordinaten so verteilt, dass die $m$te Coordinate von $n-m+1$ Punkten willkürlich oder gegeben ist, so reducirt sich die oben bezeichnete Aufgabe auf eine Reihe Systeme linearer Gleichungen, die nach einander zu lösen sind.

Seien z. B. gegeben

$$x_1 x_2 \ldots x_{n-2} x_{n-1} x_n$$
$$y_1 y_2 \ldots y_{n-2} y_{n-1}$$
$$z_1 z_2 \ldots z_{n-2}$$
etc.

dann ist y_n linear bestimmt durch

$$\Sigma x \, \Sigma y + \Sigma xy = 0$$

dann z_{n-1} und z_n durch

$$\Sigma x \, \Sigma z + \Sigma xz = 0$$
$$\Sigma y \, \Sigma z + \Sigma yz = 0$$

und so die immer um 1 wachsende Anzahl der Gesuchten neuer Benennung durch ein immer um 1 wachsendes System linearer Gleichungen, zuletzt x_{n+1}, y_{n+1}, ... durch die Gl. (5).

Die Lösung ist im allgemeinen möglich und eindeutig. Bedingung ist nur, dass in jedem jener linearen Gleichungssysteme mindestens eine der aus den Coefficienten der Gesuchten gebildeten Determinanten nicht null ist. Da nun jene Determinanten in der letzt vorhergehenden Coordinatenreihe linear sind, so lässt sich die Bedingung stets durch eine der gegebenen Coordinaten erfüllen, und es bedarf keiner Untersuchung der Ausnahmen.

§. 4. Auflösung des letzten Gleichungssystems.

Die n Coordinaten eines Punktes seien bezeichnet:

$$x, y, \ldots u$$

Alle Coordinaten ausser den u seien bereits berechnet; es sollen nur noch die Gleichungen

$$\Sigma x\,\Sigma u + \Sigma x\,u = 0; \text{ etc.}$$

oder geordnet

$$(\Sigma x + x_1)u_1 + (\Sigma x + x_2)u_2 + \ldots (\Sigma x + x_n)u_n = 0; \text{ etc.}$$

also $n-1$ homogene lineare Gleichungen zwischen den n Grössen $u_1 \ldots u_n$ aufgelöst werden.

Wir fügen als $n$te Gleichung hinzu:

$$H_1 u_1 + H_2 u_2 + \ldots H_n u_n = \xi(H_1, H_2, \ldots H_n)$$

Dann ergibt die Auflösung:

$$\Delta u_k = \Delta_k \xi(H_1, \ldots H_n) \tag{12}$$

wo

$$\Delta = \begin{vmatrix} \Sigma x + x_1 & \Sigma x + x_2 & \ldots & \Sigma x + x_n \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ H_1 & H_2 & \ldots & H_n \end{vmatrix}$$

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} \Sigma x + x_1 & \ldots & \Sigma x + x_{k-1} & 0 & \Sigma x + x_{k+1} & \ldots & \Sigma x + x_n \\ \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\ H_1 & \ldots & H_{k-1} & 1 & H_{k+1} & \ldots & H_n \end{vmatrix}$$

Setzt man $H_k = 1$, alle übrigen $H = 0$, so wird

$$\Delta = \Delta_k$$

und man erhält:

$$u_k = \xi(0, 0, \ldots 1 \ldots 0) = \xi_k(1)$$

die 1 an $k$ter Stelle zu denken. Jetzt wird nach Gl. (12)

$$\frac{\xi_k(1)}{\Delta_k} = \frac{\xi(H_1, \ldots H_n)}{\Delta}$$

unabhängig von k und lässt sich, da eins der u willkürlich ist, $= 1$ setzen. Dann ist die Function $\xi = \Delta$. Betrachtet man die Elemente der Determinante Δ als Binome, so gibt die Zerlegung derselben:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \Sigma x & x_2 & \ldots & x_n \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ 0 & H_2 & \ldots & H_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & \Sigma x & x_3 & \ldots & x_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\ H_1 & 0 & H_3 & \ldots & H_n \end{vmatrix} + \ldots$$

$$+ \begin{vmatrix} x_1 & \ldots & x_{n-1} & \Sigma x \\ \ldots & & \ldots & \ldots \\ H_1 & \ldots & H_{n-1} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ \ldots & & \ldots \\ H_1 & \ldots & H_n \end{vmatrix}$$

Die Teile sind sämtlich Unterdeterminanten einer Determinante von der Ordnung $n+1$, nämlich

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ \Sigma x & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & H_1 & H_2 & \dots & H_n \end{vmatrix}$$

Subtrahirt man von der ersten Verticalreihe alle übrigen, so kommt:

$$\Delta = \begin{vmatrix} n+1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ -\Sigma H & H_1 & H_2 & \dots & H_n \end{vmatrix}$$

$$-(n+1)\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & & \dots \\ H_1 & H_2 & \dots & H_n \end{vmatrix} - \Sigma H \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Setzt man

$$G_k = (n+1)H_k - \Sigma H$$

$$\varphi(G_1, G_2, \dots G_n) = \xi(H_1, H_2, \dots H_n)$$

so wird

$$\varphi(G_1, G_2, \dots G_n) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & & \dots \\ G_1 & G_2 & \dots & G_n \end{vmatrix} \qquad (13)$$

und die Auflösung lautet nnn:

$$u_k = -\varphi(1, 1 \dots -n, \dots 1) \qquad (14)$$

wo $-n$ das $k$te Argnment der Fnnction ist, die übrigen den Wert 1 haben.

Die vorhergehenden Gleichnngssysteme zur Bestimmnng der $n+1$ ersten Coordinaten gestatten keine entsprechende Reduction, weil sie nicht homogen in den Gesuchten sind. Wir beschränken nns daher anf die Dnrchführnng für specielle n.

§. 5. Ausführnng der Rechnung für $n = 2, 3, 4$.

Für $n = 2$ seien die Coordinaten von A_k

$k = 1$	2	3
$x = 1$	α	$-1-\alpha$
$y = \alpha$	$-\beta$	$\beta-\alpha$

und zwar α gegeben, $\frac{\beta}{\alpha}$ gesncht. Bedingung ist:

$$(1+a)(\alpha-\beta)+\alpha-a\beta=0$$

woraus:

$$(2+a)\alpha=(1+2a)\beta$$

oder nm Brüche zn meiden:

$$\alpha=1+2a; \qquad \beta=2+a \tag{15}$$

Fügt man die Dimensionsfactoren hinzu, so wird

$$\left.\begin{array}{lll} x_1=A & x_2=Aa & x_3=-A(1+a) \\ y_1=B(1+2a) & y_2=-B(2+a) & y_3=B(1-a) \end{array}\right\} \tag{16}$$

Aus diesen Werten findet man nach Gl. (3) (4)

$$\Delta=3AB(1+a+a^2); \qquad P_2=\tfrac{3}{2}AB(1+a+a^2) \tag{17}$$

nnd nach Gl. (9) die Hanptträgheitsmomente bzhw. für die x nnd y Axe:

$$\left.\begin{array}{l} \int y^2\,\partial P_2=\frac{1}{2}P_2B^2(1+a+a^2) \\ \int x^2\,\partial P_2=\frac{1}{2}P_2A^2(1+a+a^2) \end{array}\right\} \tag{18}$$

Für $n=3$ sei

$k=1$	2	3	4
$x=1$	a	c	$-1-a-c$
$y=\alpha$	$b\alpha$	$-\beta$	$-(1+b)\alpha+\beta$
$z=\gamma$	$-\delta$	$-\varepsilon$	$-\gamma+\delta+\varepsilon$

(19)

wo a, b, c gegeben, $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\delta}{\gamma}$, $\frac{\varepsilon}{\gamma}$ gesncht. Die Bedingungen sind:

$$\begin{array}{l} (1+a+c)[(1+b)\alpha-\beta]+(1+ab)\alpha-c\beta=0 \\ (1+a+c)(\gamma-\delta-\varepsilon)+\gamma-a\delta-c\varepsilon=0 \\ [(1+b)\alpha-\beta](\gamma-\delta-\varepsilon)+\alpha\gamma-b\alpha\delta+\beta\varepsilon=0 \end{array}$$

Die erste gibt:

$$\alpha=1+a+2c; \quad \beta=(2+a+c)(1+b)-(1-a)b \tag{20}$$

Nach Einsetznng dieser Werte findet man aus den zwei letzten, welche die Verhältnisse $\gamma:\delta:\varepsilon$ bestimmen, Ansdrücke, welche sich nach Beseitigung des gemeinsamen Nenners übersichtlich folgendermassen darstellen:

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= 2\varkappa(1+3b)+4(a-b)\\ \delta &= 2\varkappa(3+b)-4a(a-b)\\ \varepsilon &= 2\varkappa(b-1)-2c(a-b)\\ \varkappa &= 1+a+c+a^2+ac+c^2 \quad \text{oder}\\ 2\varkappa &= (1+a+c)^2+1+a^2+c^2 \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Für $b=4$ sei

$k=1$	2	3	4	5
$x=1$	a	d	f	$-1-a-d-f$
$y=\alpha$	$b\alpha$	$e\alpha$	$-\beta$	$-(1+b+e)\alpha+\beta$
$z=\gamma$	$c\gamma$	$-\delta$	$-\varepsilon$	$-(1+c)\gamma+\delta+\varepsilon$
$t=\zeta$	$-\lambda$	$-\mu$	$-\nu$	$-\zeta+\lambda+\mu+\nu$

(22)

wo a, b, c, d, e, f gegeben, $\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\delta}{\gamma}, \frac{\varepsilon}{\gamma}, \frac{\mu}{\zeta}, \frac{\nu}{\zeta}$ gesucht. Die Bedingungen sind:

$$\begin{aligned}
&(1+a+d+f)[(1+b+e)\alpha-\beta]+(1+ab+de)\alpha-f\beta=0\\
&(1+a+d+f)[(1+c)\gamma-\delta-\varepsilon]+(1+ac)\gamma-d\delta-f\varepsilon=0\\
&[(1+b+e)\alpha-\beta][(1+c)\gamma-\delta-\varepsilon]+(1+bc)\alpha\gamma-e\alpha\delta+\beta\varepsilon=0\\
&(1+a+d+f)(\zeta-\lambda-\mu-\nu)+\zeta-a\lambda-d\mu-f\nu=0\\
&[(1+b+e)\alpha-\beta](\zeta-\lambda-\mu-\nu)+(\zeta-b\lambda-e\mu)\alpha+\beta\nu=0\\
&[(1+c)\gamma-\delta-\varepsilon](\zeta-\lambda-\mu-\nu)+(\zeta-c\lambda)\gamma+\delta\mu+\varepsilon\nu=0
\end{aligned}$$

Aus der ersten ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 1+a+d+2f\\ \beta &= (1+a+d)(1+b+e)+1+ab+de \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Aus den 2 folgenden findet man:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 2\vartheta(1+b+3e)+\pi(a-1,\ a+4,\ a-1)\\ \delta &= 2\vartheta[(3+b+e)+(1+3b+e)c]\\ &\quad +\pi(d-a,\ -4d-a,\ d+4a)+c\pi(1+4d,\ 1-d,\ -4-d)\\ \varepsilon &= 2\vartheta[(e-1)+(e-b)c]\\ &\quad +\pi(f-a,\ -4f-a,\ f-a)+c\pi(1+4f,\ 1-f,\ 1-f) \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

wo

$$2\vartheta = (1+a+d+f)^2+1+a^2+d^2+f^2 \tag{25}$$

$$\pi(L,\ M,\ N) = \begin{vmatrix} L & 1 & 1\\ M & a & b\\ N & d & e \end{vmatrix} \tag{26}$$

Das letzte Gleichungssystem gibt unmittelbar nach Gl. (13) und (14)

$$\left.\begin{array}{ll} \zeta = -\varphi(-4,\ 1,\ 1,\ 1); & \lambda = \varphi(1,\ -4,\ 1,\ 1) \\ \mu = \varphi(1,\ 1,\ -4,\ 1); & \nu = \varphi(1,\ 1,\ 1,\ -4) \end{array}\right\} \tag{27}$$

$$\varphi(D,\ E,\ F,\ G) = \begin{vmatrix} 1 & a & d & f \\ \alpha & b\alpha & e\alpha & -\beta \\ \gamma & c\gamma & -\delta & -\varepsilon \\ D & E & F & G \end{vmatrix} \tag{28}$$

wo für α, β, γ, δ, ε die gefundenen Werte einzusetzen sind.

In den vorstehenden Formeln ist auf den Fall wo eine Coordinate von A_1 null ist, nicht Rücksicht genommen Es ist leicht die Formeln hierfür einzurichten, indem man jeder Coordinate von A_1 einen allgemeinen Factor hinzufügt, der dann im besondern null werden kann. Doch auch ohne dies hat die Rechnung keine Schwierigkeit: die Formeln sind homogen in jeder Coordinatenreihe zu denken; ist eine Coordinate von A_1 null, so braucht man nur alle Terme niedern Grades in Bezug auf die gleichnamigen Coordinaten zu streichen.

Numerische Beispiele.

Dreieck, $n = 2$.

$k = 1$	2	3	J
$x = 1$	2	−3	7
$y = 5$	−4	−1	21

Tetraeder, $n = 3$.

$k = 1$	2	3	4	J
$x = 1$	1	2	−4	11
$y = 2$	4	−5	−1	23
$z = 25$	−19	−5	−1	506

Pentatop, $n = 4$.

$k = 1$	2	3	4	5	J
$x = 2$	0	−1	−1	0	3
$y = 0$	−1	−1	1	1	2
$z = -2$	−2	3	−7	8	65
$t = 4$	−9	7	1	−3	78

Hier bedeutet J bezüglich auf die x die Grösse

$$J_x = \frac{(n+1)(n+2)}{2P_n} \int x^2 \partial P_n$$

woraus sich die Hauptträgheitsmomente zusammensetzen lassen.

§. 6. Symmetrischer Ausdruck der Coordinaten der Tetraederecken.

Für ungerade n allein lässt sich die Aufgabe stellen:

Es sind $\frac{1}{2}(n+1)$ Eckpunkte eines n dehnigen $(n+1)$ecks bezüglich auf die Hauptträgheitsaxen gegeben; die übrigen $\frac{1}{2}(n+1)$ Eckpunkte sollen gefunden werden.

In der folgenden Lösung für $n = 3$ seien die Ecken A_1 und A_2 gegeben, zunächst A_3 gesucht; aus diesen dreien ergibt sich A_4 nach dem Gesetze des Schwerpunkts. Das Summenzeichen erstrecke sich über die Indices 1, 2, und es sei zur Abkürzung

$$a = \Sigma x; \quad b = \Sigma y; \quad c = \Sigma z$$
$$f = bc + 2\Sigma yz; \quad g = ca + 2\Sigma zx; \quad h = ab + 2\Sigma xy$$

Dann sind die Bedingungen:

$$(b+y_3)(c+z_3) + \Sigma yz + y_3 z_3 = 0$$
$$(c+z_3)(a+x_3) + \Sigma zx + z_3 x_3 = 0$$
$$(a+x_3)(b+y_3) + \Sigma xy + x_3 y_3 = 0$$

Diese werden, wie die Einsetzung sofort ergibt, erfüllt durch die Werte:

$$2x_3 = \frac{r}{f} - a; \quad 2y_3 = \frac{r}{g} - b; \quad 2z_3 = \frac{r}{h} - c$$

$$r^2 = -fgh$$

Die Lösung ist demnach nur reell, wenn fgh negativ ist. Verschwindet f, g oder h, so rückt A_3 in unendliche Ferne.

XIX.

Ueber die sphärisch-elliptische Bewegung.

Von

Herrn **Bruno Decker**

in Niederzwönitz (Kgr. Sachsen).

1.

Auf der Kugel ϱ befinden sich das feste Centrum M und der freibewegliche Massenpunkt m. Zwischen beiden Punkten sei die noch unbekannte Anziehungs- oder Abstossungskraft R tätig. Wir fragen: Welche Grösse muss das in Richtung der Verbindungslinie der gegebenen Punkte wirkende R haben, damit das bewegliche m eine sphärische Ellipse beschreibt, deren einer Brennpunkt in dem festen M liegt?

Diese Frage zu beantworten, scheint es besonders zweckmässig, sich sphärischer Polarcoordinaten zu bedienen (Schell: Theorie der Bewegung und der Kräfte 1. Aufl. p. 309). Wir bezeichnen mit O den Mittelpunkt der gegebenen Kugel, mit M_1 den zweiten Brennpunkt der von m zubeschreibenden, sphärischen Ellipse, mit σ den sphärischen Abstand der Punkte M und m, mit σ_1 denjenigen der Punkte M_1 und m und mit $\pi - \varphi$ den Neigungswinkel der Halbebenen OMm und OMM_1. Alsdann repräsentiren σ, φ die sphärischen Polarcoordinaten des beweglichen m.

Die Gleichung der sphärischen Ellipse in diesen Coordinaten ergiebt sich unter Zugrundelegung der Fundamentalformel der sphärischen Trigonometrie mit Berücksichtigung der Bedingung

$$\sigma + \sigma_1 = \text{grosse Achse } \alpha$$

auf folgende Weise:

$$\cos\frac{\sigma_1}{\varrho} = \cos\frac{\sigma}{\varrho}\cos\frac{\gamma}{\varrho} + \sin\frac{\sigma}{\sigma}\sin\frac{\gamma}{\varrho}\cos(\pi - \varphi)$$

— sphärische Brennpunktdistanz

$$\gamma\cos\varphi = \frac{\cos\frac{\sigma}{\varrho}\cos\frac{\gamma}{\varrho} - \cos\frac{\alpha-\sigma}{\varrho}}{\sin\frac{\sigma}{\varrho}\sin\frac{\gamma}{\varrho}}$$

$$= \operatorname{cotg}\frac{\sigma}{\varrho}\,\frac{\cos\frac{\gamma}{\varrho} - \cos\frac{\gamma}{\varrho}}{\sin\frac{\gamma}{\varrho}} - \frac{\sin\frac{\alpha}{\varrho}}{\sin\frac{\gamma}{\varrho}}$$

$$= a\operatorname{cotg}\frac{\sigma}{\varrho} - b$$

für

$$a = \frac{\cos\frac{\gamma}{\varrho} - \cos\frac{\alpha}{\varrho}}{\sin\frac{\gamma}{\varrho}}$$

$$b = \frac{\sin\frac{\alpha}{\varrho}}{\sin\frac{\gamma}{\varrho}}.$$

Zur Lösung des vorliegenden Problems nun beachten wir an erster Stelle, dass das Princip der lebendigen Kraft selbst gilt, wenn ein materieller Punkt gezwungen ist, sich auf einer gegebenen Fläche oder Curve zu bewegen, dass also

$$\tfrac{1}{2}m\frac{ds^2}{dt^2} = \int R\,ds.$$

Zweitens besteht aber auch der Flächensatz und zwar für die Gerade OM (Jacobi: Vorlesungen über Dynamik p. 223) [1]). Die gezwungene Bewegung des Punktes m lässt sich nämlich als eine freie, von den festen Centren O und M hervorgerufene auffassen, sobald

1) In das bereits erwähnte Werk von Schell hat sich ein kleiner Irrtum insofern eingeschlichen, als es da Seite 371 Zeile 14, 15 und 16 heisst: „Weil ferner in dem vorliegenden Falle offenbar das Princip der Flächen für die Projection der Bewegung vom Pole aus auf irgend eine Ebene, z. B. auf die Tangentenebene des Poles gilt, so etc.“ Die Gültigkeit des Flächensatzes beschränkt sich auf die Gerade OM.

man die Wirkung des Centrums O mit dem Druck identificirt, den die Kugelfläche bei der Bewegung des Massenpunktes m erfährt. Dieser Druck ist b, nebenbei bemerkt, gleich der Summe zweier Componenten von der Lage des Kugelradius. Die eine dieser Componenten rührt her von der in Richtung der Verbindungslinie der beiden gegebenen Punkte wirkenden, gesuchten Kraft, die andere von der in Richtung des Krümmungshalbmessers der beschriebenen Bahn wirkenden Centrifugalkraft (Navier: Lehrbuch der höheren Mechanik p. 130).

Um jetzt die Relation des Flächensatzes zu erhalten, projiciren wir die Bewegung auf eine zu OM senkrechte Ebene. Hat dann der Elementarsector der Projectionsbewegung den Wert $\frac{1}{2}a\,ds_0$, so lautet die Flächenbeziehung

$$a\,ds_0 = C\,dt,$$

wofür wir die Gleichung

$$\frac{a^2 ds_0^2}{C^2\,dt^2} = 1$$

substituiren wollen. Dabei bedeutet a den Abstand des Punktes m von dem festen Radius OM, ds_0 den sphärischen Abstand desselben Punktes von demjenigen grössten Kreisbogen, der durch M und den Endpunkt von ds geht.

Die Elimination von dt^2 aus dieser und der Gleichung der lebendigen Kraft ergibt nun die Kraft R, wenn die beschriebene Bahn, und die beschriebene Bahn, wenn die Kraft R bekannt ist. Der erstere Fall ist zunächst der unsere.

Indem wir die Gleichung der beliebigen Kraft durch das Quadrat der Flächengleichung dividiren, erhalten wir

$$\tfrac{1}{2}m\,C^2\,\frac{ds^2}{a^2\,ds_0^2} = \int R\,dr.$$

Diese Gleichung verwandelt sich in

$$\tfrac{1}{2}m\,C^2\,\frac{d\sigma^2 + \varrho^2 \sin^2\frac{\sigma}{\varrho}\,d\varphi^2}{\varrho^4 \sin^4\frac{\sigma}{\varrho}\,d\varphi^2} = \int R\,dr$$

oder in

$$\tfrac{1}{2}m\,C^2\left\{\frac{1}{\varrho^4 \sin^4\frac{\sigma}{\varrho}}\left(\frac{d\sigma}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{\varrho^2 \sin^2\frac{\sigma}{\varrho}}\right\} = \int R\,dr,$$

sofern wir berücksichtigen, dass für unser Coordinatensystem zu ersetzen ist

$$ds^2 \quad \text{durch} \quad d\sigma^2 + ds_0^2$$

$$a^2 \quad „ \quad \varrho^2 \sin^2 \frac{\sigma}{\varrho}$$

$$ds_0^2 \quad „ \quad \varrho^2 \sin^2 \frac{\sigma}{\varrho} d\varphi^2 .$$

Zur Beseitigung des hierin allein noch störenden $\left(\frac{d\sigma}{d\varphi}\right)^2$ wenden wir uns an die Gleichung der von m zu beschreibenden, sphärischen Ellipse

$$\cos\varphi = a \operatorname{cotg} \frac{\sigma}{\varrho} - b.$$

Diese liefert

$$\frac{d\sigma}{d\varphi} = \sin\varphi \, \frac{\varrho \sin^2 \frac{\sigma}{\varrho}}{a}$$

oder

$$\left(\frac{d\sigma}{d\varphi}\right)^2 = \left(1 - \left(a \operatorname{cotg} \frac{\sigma}{\varrho} - b\right)^2\right) \frac{\varrho^2 \sin^4 \frac{\sigma}{\varrho}}{a^2}.$$

Der Gleichung für R lässt sich also die Form geben

$$\tfrac{1}{2} m \frac{C^2}{a^2 \varrho^2} \left\{ 1 - \left(a \operatorname{cotg} \frac{\sigma}{\varrho} - b\right)^2 + \frac{a^2}{\sin^2 \frac{\sigma}{\varrho}} \right\} = \int R \, dr$$

und hieraus findet sich

$$R = \tfrac{1}{2} m \frac{C^2}{a^2 \varrho^2} \left\{ \frac{2a}{\varrho \sin^2 \frac{\sigma}{\varrho}} \left(a \operatorname{cotg} \frac{\sigma}{\varrho} - b\right) - \frac{2a^2 \cos \frac{\sigma}{\varrho}}{\varrho \sin^3 \frac{\sigma}{\varrho}} \right\} \frac{d\sigma}{dr}$$

$$= \tfrac{1}{2} m \, \frac{C^2}{a^2 \varrho^3 \sin^3 \frac{\sigma}{\varrho}} \left\{ 2a^2 \cos \frac{\sigma}{\varrho} - 2ab \sin \frac{\sigma}{\varrho} - 2a^2 \cos \frac{\sigma}{\varrho} \right\} \frac{d\sigma}{dr}$$

$$= - m \frac{b}{a} \, \frac{C^2}{\varrho^3 \sin^2 \frac{\sigma}{\varrho}} \, \frac{d\sigma}{dr}$$

Da aber Bogen (σ) und Sehne (r) eines Kreises durch die Bedingung

$$\sin \frac{\sigma}{2\varrho} = \frac{r}{2\varrho}$$

aneinander gebunden sind, so erhält man schliesslich

$$R = -m\,\frac{\sin\frac{\alpha}{\varrho}}{\cos\frac{\gamma}{\varrho}-\cos\frac{\alpha}{\varrho}}\,\frac{C^2}{\varrho^2\sin^2\frac{\sigma}{\varrho}\cos\frac{\sigma}{2\varrho}}$$

$$= \frac{\text{const}}{r^2\left(1-\frac{r^2}{4\varrho^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

für

$$\text{const} = -m\,\frac{C^2}{\varrho}\,\frac{\sin\frac{\alpha}{\varrho}}{\cos\frac{\gamma}{\varrho}-\cos\frac{\alpha}{\varrho}}$$

Dies Resultat ist leicht auf seine Richtigkeit hin zu prüfen, weil es sich für $\varrho = \infty$ auf das Newton'sche Gesetz in der Form (Navier p. 155)

$$R = -m\,\frac{C^2}{a(1-e^2)r^2}$$

wo

$$C = r^2\frac{d\varphi}{dt}$$

reduciren muss.

Wird nun ϱ sehr gross, so nähert sich die Potenz $\left(1-\frac{r^2}{4\varrho^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ der reellen Einheit, lässt sich $\sin\frac{\alpha}{\varrho}$ durch $\frac{\alpha}{\varrho}$ ersetzen, sodass im Nenner ϱ^2 auftritt, und führt $\dfrac{\cos\frac{\gamma}{\varrho}-\cos\frac{\alpha}{\varrho}}{\frac{1}{\varrho^2}}$ durch Differentiation auf

$$\frac{\varrho^3}{2}\left(\frac{\alpha}{\varrho^2}\sin\frac{\alpha}{\varrho}-\frac{\gamma}{\varrho^2}\sin\frac{\gamma}{\varrho}\right) = \frac{\alpha^2-\gamma^2}{2} \qquad (\alpha = 2a,\ \ \gamma = 2c)$$

$$= 2a^2\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right) \qquad \left(\frac{c}{a} = e\right)$$

$$= 2a^2(1-e^2)$$

Man erhält also für die Ebene, wie erwartet,

$$R = -m\,\frac{2a}{2a^2(1-e^2)}\,\frac{C^2}{r^2}$$

$$= -m\,\frac{C^2}{a(1-e^2)r^2}$$

$$C = \varrho^2\sin^2\frac{\sigma}{\varrho}\,\frac{d\varphi}{dt} \qquad (\sigma = r)$$

$$= r^2\frac{d\varphi}{dt}$$

2.

Wir haben das gestellte Problem zunächst mit Hülfe sphärischer Polarcoordinaten gelöst, da sich von vornherein erkennen liess, dass diese Coordinaten für die sphärisch-elliptische Bewegung eine Behandlung ähnlich der der eben-elliptischen Bewegung in gewöhnlichen Polarcoordinaten gestatten würden. Eine Lösung in elliptischen Kugelcoordinaten dürfte indes nicht minder interessant sein, und zwar deshalb, weil hierbei die Gleichungen der sphärischen Ellipse nicht besonders auftreten werden.

Wir definiren nach Hesse: Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes 3. Aufl. p. 319 als elliptische Kugelcoordinaten die Grössen ϱ, σ, τ durch die Beziehungen

$$x^2+y^2+z^2 = \varrho^2$$

$$\frac{x^2}{\alpha-\sigma}+\frac{y^2}{\beta-\sigma}+\frac{z^2}{\gamma-\sigma}=0$$

$$\frac{x^2}{\alpha-\tau}+\frac{y^2}{\beta-\tau}+\frac{z^2}{\gamma-\tau}=0,$$

für welche

$$\infty > \varrho > 0$$
$$\alpha > \tau > \beta > \sigma > \gamma.$$

Diese ergeben

$$x^2 = \varrho^2\frac{(\alpha-\sigma)(\alpha-\tau)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$$

$$y^2 = \varrho^2\frac{(\beta-\sigma)(\beta-\tau)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}$$

$$z^2 = \varrho^2\frac{(\gamma-\sigma)(\gamma-\tau)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

$$ds^2 = dx^2+dy^2+dz^2$$

$$= \frac{\varrho^2}{4}\frac{\sigma-\tau}{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}d\tau^2.$$

Bei der Berechnung von ds^2 ist berücksichtigt, dass

$$\varrho = \sigma = \text{const}$$

als Gleichungen der sphärischen Ellipse in elliptischen Kugelcoordinaten.

Die Relation der lebendigen Kraft lautet mithin jetzt

$$m\frac{\varrho^2}{\gamma}\frac{\sigma-\tau}{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}\frac{d\tau^2}{dt^2}=\int R\,dr$$

Was die quadrirte Flächenbeziehung

$$a^2\,ds_0{}^2=C^2dt^2$$

anlangt, so findet sich

$$\begin{aligned}\alpha^2&=\varrho^2-\left(x\frac{x_0}{\varrho}+z\frac{z_0}{\varrho}\right)^2\\&=\varrho^2\left(1-\left(\frac{\sqrt{(\alpha-\sigma)(\alpha-\tau)}}{\alpha-\gamma}+\frac{\sqrt{(\gamma-\sigma)(\gamma-\tau)}}{\gamma-\alpha}\right)^2\right).\end{aligned}$$

Die Coordinaten x_0, 0, z_0 oder $\varrho\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}}$, 0, $\varrho\sqrt{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}}$ gehören dem Punkte M an. Ferner ist

$$\begin{aligned}ds_0{}^2&=ds^2-d\sigma^2\\&=ds^2-(da^2+de^2)\end{aligned}$$

$d\sigma$ hat hier dieselbe Bedeutung wie in Teil 1. de bezeichnet die Entfernung des Punktes $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ von einer Ebene, die wir uns durch den Punkt x, y, z senkrecht zu OM gelegt denken, die also die Kugel in einem Kreise schneidet, dessen Radius a ist. Das Quadrat dieser Entfernung $\left(dx\frac{x_0}{\varrho}+ds\frac{z_0}{\varrho}\right)^2$ resultirt gleich $\frac{r^2}{\varrho^2}dr^2$, wenn man in Betracht zieht, dass

$$\begin{aligned}r^2&=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\\&=2\varrho^2-2xx_0-2zz_0\end{aligned}$$

Alle diese zum Formiren der Gleichung für R notwendigen Beziehungen nun vereinfachen sich noch wesentlich mit Hülfe der Substitutionen

$$\sqrt{\frac{\alpha-\sigma}{\alpha-\gamma}}=\sin\lambda,\quad \sqrt{\frac{\gamma-\sigma}{\gamma-\alpha}}=\cos\lambda \qquad (\sin^2\lambda+\cos^2\lambda=1)$$

$$\sqrt{\frac{\alpha-\tau}{\alpha-\gamma}}=\sin\mu,\quad \sqrt{\frac{\gamma-\tau}{\gamma-\alpha}}=\cos\mu \qquad (\sin^2\mu+\cos^2\mu=1)$$

$$\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}}=\sin\nu,\quad \sqrt{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}}=\cos\nu \qquad (\sin^2\nu+\cos^2\nu=1).$$

Deren Anwendung führt nämlich auf

$$ds^2 = \varrho^2 \frac{\sin^2\lambda - \sin^2\mu}{\sin^2\nu - \sin^2\mu} d\mu^2$$

$$a^2 = \varrho^2 \sin^2(\mu - \lambda)$$

$$da^2 = \varrho^2 \cos^2(\mu - \lambda)\, d\mu^2$$

$$r^2 = 2\varrho^2 \left(1 - \frac{\sqrt{(\alpha-\sigma)(\alpha-\tau)}}{\alpha-\gamma} - \frac{\sqrt{(\gamma-\sigma)(\gamma-\tau)}}{\gamma-\alpha}\right)$$

$$= 2\varrho^2(1 - \cos(\mu-\lambda))$$

$$= 4\varrho^2 \sin^2 \frac{\mu-\lambda}{2}$$

$$dr^2 = \varrho^2 \cos^2 \frac{\mu-\lambda}{2}\, d\mu^2$$

$$de^2 = \varrho^2 \sin^2(\mu-\lambda)\, d\mu^2$$

$$d\sigma^2 = \varrho^2 d\mu^2$$

$$ds_0^2 = \varrho^2 \left(\frac{\sin^2\lambda - \sin^2\mu}{\sin^2\nu - \sin^2\mu} - 1\right) d\mu^2$$

$$= \varrho^2 \frac{\sin^2\lambda - \sin^2\nu}{\sin^2\nu - \sin^2\mu} d\mu^2$$

$$\frac{ds^2}{a^2\, ds_0^2} = \frac{\sin^2\lambda - \sin^2\mu}{\varrho^2 \sin^2(\mu-\lambda)(\sin^2\lambda - \sin^2\nu)}$$

$$= \frac{1}{\varrho^2} \frac{\sin(\lambda+\mu)}{\sin(\lambda-\mu)}$$

endlich

$$R = \tfrac{1}{2} m \frac{C^2}{\varrho^2(\sin^2\lambda - \sin^2\nu)} \frac{\sin(\lambda-\mu)\cos(\lambda+\mu) + \sin(\lambda+\mu)\cos(\lambda-\mu)}{\sin^2(\lambda-\mu)} \frac{d\mu}{dr}$$

$$= \tfrac{1}{2} m \frac{C^2}{\varrho^2} \frac{\sin 2\lambda}{\sin^2\lambda - \sin^2\nu} \frac{1}{\sin^2 \frac{\mu-\lambda}{2} \cos^2 \frac{\mu-\lambda}{2}}$$

$$= \frac{\text{const}}{r^3 \left(1 - \frac{r^2}{4\varrho^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

da

$$\sin \frac{\mu-\lambda}{2} = \frac{r}{2\varrho}$$

Und dies Resultat stimmt mit dem von p. 434 überein.

3.

Fragen wir jetzt umgekehrt: Welche Bahn beschreibt der Punkt m, wenn die Kraft R den Wert $\frac{\text{const}}{r^2\left(1-\frac{r^2}{4\varrho^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$ hat?

Nach der Bemerkung von p. 432 giebt uns die Antwort auf diese Frage die daselbst unten annotirte Gleichung

$$\tfrac{1}{2}mC^2\left\{\frac{1}{\varrho^4\sin^4\frac{\sigma}{\varrho}}\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2+\frac{1}{\varrho^2\sin^2\frac{\sigma}{\varrho}}\right\}=\int R\,dr$$

für

$$R=\frac{\text{const}}{r^2\left(1-\frac{r^2}{4\varrho^2}\right)^{\frac{1}{2}}}\qquad\left(r=2\varrho\sin\frac{\sigma}{2\varrho}\right)$$

$$=\frac{\text{const}}{4\sin^2\frac{\sigma}{2\varrho}\cos^2\frac{\sigma}{2\varrho}}$$

$$=\frac{\text{const}}{\sin^2\frac{\sigma}{\varrho}\cos\frac{\sigma}{2\varrho}}\qquad\left(dr=\cos\frac{\sigma}{2\varrho}\,d\sigma\right)$$

oder

$$R\,dr=\text{const}\frac{d\,\frac{\sigma}{\varrho}}{\sin^2\frac{\sigma}{\varrho}}$$

Die beschriebene Bahn wird demnach durch die Differentialgleichung

$$\frac{1}{\varrho^4\sin^4\frac{\sigma}{\varrho}}\frac{d\sigma^2}{d\varphi^2}+\frac{1}{\varrho^2\sin^2\frac{\sigma}{\varrho}}=C'\operatorname{cotg}\frac{\sigma}{\varrho}+C'',$$

wo C' und C'' zwei Constanten, charakterisirt.

Diese Gleichung bringen wir auf die Form

$$d\varphi=\frac{d\sigma}{\varrho^2\sin^2\frac{\sigma}{\varrho}\sqrt{\left\{C'\operatorname{cotg}\frac{\sigma}{\varrho}+C''-\frac{1}{\varrho^2\sin^2\frac{\sigma}{\varrho}}\right\}}}$$

welche sich unter Zuhülfenahme der Substitution

$$\operatorname{cotg}\frac{\sigma}{\varrho}=x$$

durch die einfachere

$$d\varphi = -\frac{dx}{\sqrt{\{\varrho^2 C'' - 1 + \varrho^2 C' x - x^2\}}}$$

ersetzen lässt. Nnn weiss man, dass

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2)}} = \frac{-1}{\sqrt{-c}} \arcsin \frac{2cx+b}{\sqrt{(b^2-4ac)}} + \text{const}$$

Es findet sich mithin

$$\varphi = \arcsin \frac{\varrho^2 C' - 2x}{\sqrt{\{\varrho^4 C'^2 + 4(\varrho^2 C'' - 1)\}}} + \psi$$

$$= \arcsin \frac{c' - \operatorname{cotg} \frac{\sigma}{\varrho}}{c''} + \psi$$

oder endlich

$$c'' \sin(\varphi - \psi) = c' - \operatorname{cotg} \frac{\sigma}{\varrho}.$$

Die erhaltene Gleibhnng, in welcher σ nnd φ variabel, c', c'' nnd ψ Constanten, repräsentirt einen sphärischen Kegelschnitt. Dies nachzuweisen, wählen wir den Pnnkt Q znm Ursprung eines rechtwinkligen Parallelcoordinatensystems, dessen Z Achse mit der Geraden OM, dessen ZX Ebene mit der Ebene $\varphi = \psi$ nnd dessen ZY Ebene mit der Ebene $\varphi = \psi + \frac{\pi}{2}$ znsammenfällt. Alsdann wird

$$\sin(\varphi - \psi) = \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$$

$$\operatorname{cotg} \frac{\sigma}{\varrho} = \frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$$

nnd transformirt sich

$$c'' \sin(\varphi - \psi) = c' - \operatorname{cotg} \frac{\sigma}{\varrho}$$

in

$$c'' y + z = c' \sqrt{(x^2+y^2)}$$

oder in

$$c' x^2 + (c' - c'') y^2 - z^2 - 2c'' yz = 0,$$

eine homogene Gleichnng 2. Grades, die als solche einem Kegel 2. Ordnnng mit der Spitze im Coordinatenanfangspnnkte angehört. Der freibewegliche Massenpnnkt m beschreibt demnach infolge der Einwirkung der Centralkraft

$$R = \frac{\text{const}}{r^2 \left(1 - \frac{r^2}{4\varrho^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

eine Bahn, die sich als Schnitt einer Kugel mit einem Kegel 2. Ordnung, dessen Spitze im Mittelpunkte der Kugel liegt, documentirt, d. h. er beschreibt einen sphärischen Kegelschnit.

In welchem Falle dieser Kegelschnitt eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel ist, dies zu untersuchen, können wir uns deshalb ersparen, weil die Geometrie auf der Kugeloberfläche einen Unterschied zwischen sphärischer Ellipse, Hyperbel und Parabel nicht kennt (Hesse p. 51). —

Zum Schlusse noch eine kurze Bemerkung über die Zeit als Function des Ortes.

Der Flächensatz

$$C\,dt = \varrho^2 \sin^2 \frac{\sigma}{\varrho}\, d\varphi$$

ergiebt unter der Annahme

$$\cos\varphi = a \operatorname{cotg} \frac{\sigma}{\varrho} - b$$

oder

$$\sin^2 \frac{\sigma}{\varrho} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\cos\varphi + b}{a}\right)^2}$$

die Zeit

$$t = \frac{a^2 \varrho^2}{C} \int \frac{d\varphi}{\alpha + \beta \cos\varphi + \cos^2\varphi}$$

wo

$$\alpha = a^2 + b^2$$
$$\beta = 2b$$

Mittelst der Substitution

$$e^{i\varphi} = z$$

verwandelt sich

$$\frac{d\varphi}{\alpha + \beta\cos\varphi + \cos^2\varphi} \quad \text{in} \quad -4 \frac{z^2\,dz}{z^4 + 2\beta z^3 + (4\alpha + 2) z^2 + 2\beta z + 1}$$

Die 4 Wurzeln der reciproken Gleichung

$$z^4 + 2\beta z^3 + (4\alpha + 2) z^2 + 2\beta z + 1 = 0$$

sind imaginär. Wir zerlegen drum

$$\frac{z^2}{z^4 + 2\beta z^3 + (4\alpha + 2) z^2 + 2\beta z + 1} \quad \text{in} \quad \frac{M_1 z + N_1}{(z - \alpha_1)^2 + \beta_1^2} + \frac{M_2 z + N_2}{(z - \alpha_2)^2 + \beta_2^2}$$

(Navier: Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung 4. Aufl. p. 247 bis 255) und erhalten damit

$$t = -\frac{4a^2\varrho^2}{C}\left\{\frac{M_1}{2}\log((z-\alpha_1)^2+\beta_1^2)+\frac{M_1\alpha_1+N_1}{\beta_1}\operatorname{arctg}\frac{z-\alpha_1}{\beta_1}\right.$$
$$\left.+\frac{M_2}{2}\log((z-\alpha_2)^2+\beta_2^2)+\frac{M_2\alpha_2+N_2}{\beta_2}\operatorname{arctg}\frac{z-\alpha_2}{\beta_2}+\text{const}\right\}$$

Die Constanten M_1, M_2, N_1, N_2, α_1, α_2, β_1, β_2, const sind unschwer zu berechnen.

Dass dieser Ausdruck noch der Umbildung bedarf, ist augenscheinlich. Ich hoffe gelegentlich hierauf zurückkommen zu können.

XX.

Ueber den geometrischen Ort der Mittelpunkte von Kreisen, welche durch zwei Punkte gehen und eine Gerade treffen.

Von

Franz Schiffner.

Zwei Punkte A, B und eine Gerade G des Raumes liegen entweder in einer Ebene oder nicht. Da im ersteren Falle die Mittelpunkte M aller Kreise, welche durch A und B gehen und G treffen, einer geraden Linie angehören, so wollen wir für die folgenden Untersuchungen voraussetzen, durch A, B und G lasse sich keine Ebene legen. Eine Ebene, die A und B enthält und zur Geraden G parallel ist, wird aber immer noch möglich sein; diese wollen wir als Ebene der x und z Coordinaten, den Halbirungspunkt O der Strecke $AB = 2m$ als Ursprung des Coordinatensystems, AB als z Achse wählen. Es ist dann A durch $(0,\ 0,\ m)$, B durch $(0,\ 0,\ -m)$ und G durch $(z = ax + b,\ y = c)$ bestimmt; ein beliebiger Punkt C der Geraden G habe die Coordinaten x_1, y_1, z_1, der Mittelpunkt M des durch A, B und C gelegten Kreises die Coordinaten x, y, z.

Der Punkt M muss, weil er von A und B gleiche Abstände hat, in der xy Ebene liegen; es ist deshalb immer $z = 0$. Wir haben jetzt noch zu berücksichtigen, dass MA oder $MB = MC$, dass M ein Punkt der Ebene ABC, und dass C ein Punkt der Geraden G sein soll, welche Bedingungen durch folgende Gleichungen ausgedrückt erscheinen;

$$x^2+y^2+m^2=(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+z_1^2$$
$$x_1y=xy_1,\quad z_1=ax_1+b,\quad y_1=c$$

Eliminirt man daraus x_1, y_1, z_1, so ergiebt sich als Gleichung des verlangten geometrischen Ortes der Punkte M:

$$c^2x^2+a^2c^2x^2+2abcxy+c^2y^2+b^2y^2-m^2y^2-2cx^2y-2cy^3=0$$

Diese Gleichung

$$F(x,\ y)=0$$

ist vom 3. Grade, die Punkte M liegen also auf einer Curve der 3. Ordnung C_3.

$$F(x,\ y)=0$$

enthält weder absolute noch lineare Glieder, C_3 hat deshalb in O einen Doppelpunkt und ist eine Unicursalcurve oder eine Curve vom Geschlechte Null. Die Natur des Doppelpunktes richtet sich nach den daselbst berührenden Geraden t und t_1. Die Gleichung dieses Tangentenpaares ist

$$t.t_1=(c^2+a^2c^2)x^2+2abcxy+(c^2+b^2-m^2)y^2=0$$

Sie lässt sich in zwei Factoren zerlegen, weshalb die Tangenten im Doppelpunkte O

$$c(1+a^2)x+aby\pm\sqrt{(m^2-c^2)(1+a^2)-b^2}\,.\,y=0$$

oder auch

$$abcx\pm cx\sqrt{(m^2-c^2)(1+a^2)-b^2}+(c^2+b^2-m^2)y=0$$

sind. O ist sonach ein Knotenpunkt, Rückkehrpunkt oder isolirter Punkt, je nachdem

$$m^2(1+a^2)\gtreqless c^2(1+a^2)+b^2 \quad \text{ist.}$$

Um die unendlichen Punkte von C_3 zu finden, führen wir in

$$F(x,\ y)=0$$

$x=r\omega$, $y=s\omega$ ein, dividiren durch ω^3 und setzen $\omega=\infty$. Es ergiebt sich die Gleichung

$$2cr^2s+2cs^3=0$$

welche durch $s=0$ und

$$\frac{r}{s}=\pm\sqrt{-1}=\pm i$$

befriedigt wird. C_3 hat also nur einen reellen unendlichen Punkt, zwei unendliche Punkte sind imaginär. Da für den reellen Punkt

$\frac{x}{y} = \infty$ sein muss, so kann er nur eine unendlich grosse Abscisse haben und seine Ordinate wird sich ergeben, wenn man

$$F(x, y) = 0$$

durch x^2 dividirt und dann $x = \infty$ setzt. Man erhält

$$c^2 + a^2 c^2 - 2cy = 0$$

woraus

$$y = \frac{c}{2}(1 + a^2)$$

folgt. Da

$$\frac{x}{y} = \pm i$$

die zwei Geraden sind, welche zu den unendlichen imaginären Kreispunkten der Ebene gehen, so müssen diese in C_3 liegen, und C_3 ist somit eine circulare Curve 3. Ordnung oder eine Curve mit Kreisasymptoten.

Die Untersuchungen über Asymptoten der C_3 bestätigen das Resultat über ihre unendlichen Punkte. Soll nämlich

$$y = Ax + B$$

eine Asymptote sein, so muss

$$F(x, Ax) = 0$$

für $x = \infty$ einen endlichen Wert für A ergeben. man erhält:

$$A = 0 \quad \text{und} \quad A = \pm i$$

Die einzige reelle Asymptote hat die Gleichung

$$y = B$$

und es muss noch

$$F(x, B) = 0$$

für $x = \infty$ einen endlichen Wert für B liefern. Es resultirt

$$B = \frac{c}{2}(1 + a^2),$$

weshalb C_3 die eine reelle Asymptote S

$$y = \frac{c}{2}(1 + a^2)$$

hat. Sie schneidet C_3 noch in dem Punkte p:

$$x = -\frac{(b^2 - m^2 - a^2c^2)(1+a^2)}{4ab}, \qquad y = \frac{c}{2}(1+a^2)$$

Da sich für die imaginären Asymptoten

$$y = \pm ix + B \quad \text{aus}$$
$$F(x, \pm ix + B) = 0$$

bei $x = \infty$

$$B = \frac{b^2 - m^2 - a^2c^2}{4c} \mp \frac{ab}{2}i$$

ergibt, so sind die imaginären Asymptoten

$$y = \pm ix + \frac{b^2 - m^2 - a^2c^2}{4c} \mp \frac{ab}{2}i$$

Man erkennt, dass sie sich in dem reellen Punkte R

$$x = \frac{ab}{2}, \qquad y = \frac{b^2 - m^2 - a^2c^2}{4c}$$

schneiden. Der Punkt R ist ein Brennpunkt der Curve; nach Eckard (Ztschr. f. Mathem. u. Phys. 10. Bd.) das Centrum der Curve 3. Grades mit Kreisasymptoten.

Zur Bestimmung einzelner Punkte der Curve C_3 gibt es verschiedene Methoden.

Die Berechnung wird einfach, wenn man die Coordinaten als Functionen eines Parameters darstellt. So erhält man z. B. für $\frac{y}{x} = \alpha$:

$$x = \frac{c^2(1+a^2) + 2abc\alpha + (c^2 + b^2 - m^2)\alpha^2}{2c\alpha(1+\alpha^2)}$$

und

$$y = \frac{c^2(1+a^2) + 2abc\alpha + (c^2 + b^2 - m^2)\alpha^2}{2c(1+\alpha^2)}$$

Eine Construction einzelner Punkte lehrt uns zunächst die darstellende Geometrie.

Man hat einen beliebigen Punkt C' der Geraden G', welche parallel OX im Abstande c gezogen wurde, mit O zu verbinden, auf den Senkrechten zu OC' in O und C' resp. $O(A) = m$ und $C'(C) = z_1$ aufzutragen und findet im Schnitte der Symmetralen von (A) (C) mit OC' einen Curvenpunkt M.

Vielfach kann auch der Umstand mit Vorteil ausgenutzt werden, dass sich die Curvengleichung

$$F(x,\ y) = 0$$

aus linearen und quadratischen Teilen zusammensetzen lässt. Wir erwähnen:

1) $(c^2 - 2cy)(x^2+y^2)+(acx+by+my)(acx+by-my) = 0$

2) $(m^2+c^2-2cy)(x^2+y^2)+(acx+by+mx)(acx+by-mx) = 0$

3) $(c^2+a^2c^2-2cy)(x^2+y^2)+y(b^2y+2abcx-a^2c^2y-m^2y) = 0$

4) $2cy(x^2-abx+y^2)$

$+(y\sqrt{m^2-b^2-c^2}+cx\sqrt{1+a^2})(y\sqrt{m^2-b^2-c^2}-cx\sqrt{1+a^2}) = 0$

wozu noch

$$2cy(x^2+y^2)-t.t_1 = 0$$

zu rechnen wären.

Diese Gleichungen haben die Form

$$\alpha\varphi+\beta\gamma = 0,$$

in welcher α, β, γ linear sind. Man kann also C_3 als das Erzeugniss der Strahlen

$$\beta+\lambda\alpha = 0$$

und der Kreise

$$\varphi-\lambda\gamma = 0$$

auffassen.

Für die Form 3) sind die Geraden

$$g \ldots \beta+\lambda\alpha = 0$$

zu OX parallel, nämlich

$$y = \frac{\lambda c^2(1+a^2)}{2\lambda c-1}$$

und die Kreise k

$$\varphi-\lambda\gamma = 0 \quad \text{oder} \quad x^2+y^2-2\lambda abcx-\lambda(b^2-m^2-a^2c^2)y = 0$$

gehen durch O und haben ihre Mittelpunkte $\mathfrak{M}$

$$x = \lambda abc, \quad y = \frac{\lambda}{2}(b^2-m^2-a^2c^2)$$

auf der Geraden $\mathfrak{L}$

$$(b^2-a^2c^2-m^2)x-2abcy = 0,$$

welche durch O und das Centrum R geht und auf der Geraden Op senkrecht steht. Für $a = \frac{1}{2c}$ ist R Mittelpunkt des Kreises k und $y = \infty$ die entsprechende Gerade g. Für $\alpha = \infty$ wird aus dem Kreise k die Gerade Op, aus g die Asymptote S. g und k berühren sich, oder C_3 hat eine zu OX parallele Tangente, wenn g von $\mathfrak{M}$ um den Kreishalbmesser absteht. Die Bedingung hierfür führt auf eine quadratische Gleichung nach λ, welche

$$\lambda = \frac{1}{4a^2b^2c}\Big[2a^2b^2-(1+a^2)(b^2-m^2-a^2c^2 \pm \sqrt{(b^2-m^2-a^2c^2)^2+4a^2b^2c^2}\Big)\Big]$$

liefert, weshalb C_3 zwei Punkte P_1 und P_2 hat, in denen die Tangenten zur reellen Asymptote parallel sind. In unserem Falle sind es dieselben Punkte, für welche

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(c^2+a^2c^2)x-2cxy+abcy}{cx^2-abcx-(c^2+b^2-m^2)y+3cy^2}$$

null wird. Auf beide Arten findet man, dass P_1 und P_2 die Coordinaten haben:

$$x = \frac{1}{4ab}\Big[2a^2b^2-(1+a^2)(b^2-m^2-a^2c^2 \pm \sqrt{(b^2-m^2-a^2c^2)^2+4a^2b^2c^2}\Big]$$

$$y = \frac{1}{4c}\Big[2c^2(1+a^2)+b^2-m^2-a^2c^2 \pm \sqrt{(b^2-m^2-a^2c^2)^2+4a^2b^2c^2}\Big]$$

Eckardt (a. a. O.) nennt diese Punkte Scheitel der Curve und beweist von ihnen, dass die Curve in Bezug auf dieselben ihre eigene Inverse ist.

Als inverse Curve von C_3 für O als Centrum der Inversion findet man den Kegelschnitt:

$$c^2(1+a^2)x^2+2abcxy+(b^2+c^2-m^2)y^2-2cy=0$$

welcher OX in O berührt, den Mittelpunkt

$$x = \frac{ab}{(m^2-c^2)(1+a^2)-b^2}, \qquad y = \frac{c(1+a^2)}{(m^2-c^2)(1+a^2)-b^2}$$

hat, und dessen Achsenrichtungen durch

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{1}{2abc}\Big[b^2-m^2-a^2c^2 \pm \sqrt{(b^2-m^2-a^2c^2)^2+4a^2b^2c^2}\Big]$$

bestimmt sind.

Ausserdem steht C_3 noch mit einer Parabel und mit einem Kreise in innigen Beziehungen. Es ergibt sich nämlich — wenn O als Pol gewählt wird — C_3 als die Fusspunktscurve der Parabel

$$(x-ab)^2+2c(1+a^2)\left(y-\frac{b^2+c^2-m^2}{2c}\right)=0$$

mit einer zu OY parallelen Achse, dem Scheitel $x=ab$, $y=\frac{b^2+c^2-m^2}{2c}$, von welchem Brennpunkt und Leitlinie um $\frac{c}{2}(1+a^2)$ abstehen.

Ferner erkennt man aus der Polargleichung von C_3

$$r = \frac{c(1+a^2)}{2\sin u} + \frac{b^2 - m^2 - a^2c^2}{2c}\sin u + ab\cos u$$

dass sich der Radiusvector der Curve aus dem Radiusvector der Asymptote $\frac{c(1+a^2)}{2\sin u}$ und dem Radiusvector eines Kreises zusammensetzt, welch' letzterer durch O geht und den Punkt $x = \frac{ab}{2}$, $y = \frac{b^2 \quad m^2 - a^2c^2}{4c}$ d. i. das Centrum R der Curve, zum Mittelpunkte hat.

Damit sind neue Anhaltspunkte für die Construction von Curvenpunkten gewonnen, bezüglich welcher wir nur erwähnen, dass bei Anwendung der Parabel die Scheiteltangente (in ihrer Eigenschaft als Fusspunktscurve für den Brennpunkt als Pol) eine Hauptrolle spielt, und dass bei der Anwendung des Kreises und der Asymptote die Richtung der betreffenden Radienvectoren nicht übersehen werden darf. Obige Parabel zeigt auch, dass wir früher die Natur des Doppelpunktes richtig beurteilt haben, weil unter den dort angegebenen Bedingungen $m^2(1+a^2)$ grösser, gleich oder kleiner als $c^2(1+a^2)+b^2$ der Pol ausserhalb, auf oder innerhalb der Parabel liegt.

Die von Durège (Ztsch. f. M. u. Ph. 14. Bd.) gelehrte Construction einzelner Punkte circularer Curven (wenn man durch zwei in einer zur reellen Asymptote parallelen Geraden liegende Punkte der Curve einen beliebigen Kreis legt, dessen Mittelpunkt mit dem Centrum der Curve verbindet und auf diese Gerade vom Schnittpunkte der reellen Asymptote mit C_3 eine Senkrechte zieht, so trifft letztere den Kreis in zwei Curvenpunkten) wird in unserem Falle besonders einfach, wenn wir als Parallele zur Asymptote die Achse OX annehmen, weil dann die beiden Curvenpunkte nach O fallen, die Kreise OX berühren und ihre Mittelpunkte auf OY liegen.

Was die Construction von Curventangenten betrifft, so ist zu bemerken, dass sich hier Eckardts Methode (a. a. O.) sehr gut eignet. Nach derselben hat man durch den Curvenpunkt P, für welchen die Tangente zu construiren ist, die Gerade PD parallel zur Asymptote und die Gerade Pp zu ziehen und ihre Schnitte D, E mit C_3 zu bestimmen; die Perpendikel in den Mittelpunkten von PD und pE treffen sich dann in einem Punkte N der Normalen von P. Nach unseren früheren Entwicklungen muss nun der Punkt D auch einem Kreise k angehören, der durch O geht und seinen Mittelpunkt in $\mathfrak{L}$ hat, weshalb die Symmetrale von OP die Gerade $\mathfrak{L}$ im Mittelpunkte von k schneidet; ferner muss nach einem weiteren Satze von Eckhardt der Punkt E von R so weit abstehen wie p: es lassen sich somit die Punkte D, E und folglich auch N leicht ermitteln und damit ist auch die Tangente des Punktes P — als Senkrechte zu NP — gefunden.

Pola, im November 1886.

Litterarischer Bericht
XVII.

Geometrie.

Kegelschnittbüschel und Kegelschnittscharen. Von Josef Heller, k. k. Professor an der k. k. Staats-Oberrealschule in Linz. Linz 1886. Selbstverlag. 51 S.

Die Schrift behandelt nach einander: das Wesen der Kegelschnittbüschel (System von Kegelschnitten mit 4 festen Punkten) und Kegelschnittscharen (mit 4 festen Tangenten); Pol und Polare; Tangenten an die Kegelschnitte eines Büschels oder einer Schar; Brennpunkte; projectivische Beziehungen; Entstehungsarten und Constructionen der Kegelschnitte eines Büschels oder einer Schar; Charakteristik der Kegelschnitte eines Büschels; einer Schar. Bei der Grundlegung verfährt sie analytisch mit Anwendung trimetrischer Coordinaten und homogener Gleichungen, im weitern fährt sie synthetisch fort; vom Dualismus der Reciprocität wird angemessener Gebrauch gemacht. Als zur Verfügung gewesene Litteratur werden die Schriften von J. Steiner, R. Standigel, H. Schröter, Clebsch, Salmon, A. Milinowski, J. Töplitz und H. Durège genannt. H.

Représentation géométrique des coniques et quadriques imaginaires par M. Gaston Tarry. Paris 1886. Ganthier-Villars. 31 S.

Nachdem die Theorie der conjugirten imaginären Punkte, der conjugirten imaginären Geraden und idealen Geraden aufgestellt ist, wird der Kegelschnitt definirt als eine Curve, die von einer beliebigen Geraden in 2 reellen oder conjugirt imaginären Punkten getroffen wird, so beschaffen, dass der geometrische Ort der conjugirten Punkte, welche zu einem beliebigen festen Punkte harmonisch sind, in Bezug auf die Schnittpunkte der Curve mit einer variabeln durch den festen Punkt gehenden Geraden, stets eine gerade Linie sei — und das

Carnot'sche Fundamentaltheorem bewiesen: Zeichnet man ein Dreieck ABC in der Ebene eines Kegelschnitts und bezeichnet die Pare von reellen oder conjugirt imaginären Schnittpunkten des Kegelschnitts mit den Dreiecksseiten durch $A'A''B'B''C'C''$, so hat man die Relation:

$$\frac{BA'.BA''}{CA'.CA''} \cdot \frac{CB'.CB''}{AB'.AB''} \cdot \frac{AC'.AC''}{BC'.BC''} = 1$$

Hieraus folgen Sätze über conjugirte, reciprok conjugirte, complementäre, ideale und supplementäre Kegelschnitte. H.

Synthetisch-geometrische Theorie der Krümmung von Kurven und Flächen 2. O. Von Dr. Carl Cranz, Privatdocent an der polytechnischen Schule in Stuttgart. Stuttgart 1886. J. B. Metzler. 90 S.

Es wird die Aufgabe gelöst, die wichtigsten Beziehungen der Krümmung von ebenen Curven und Flächen 2. Grades ohne Rechnung, auf Grund der projectivischen Geometrie, unter dem allgemeinen Gesichtspunkt der Collineation zu entwickeln. Bei den Curven 2. Grades ist es die Collineation eines Kegelschnitts und eines Kreises, bei den Flächen die zweier Kegelschnitte im Raume. Laut der Ankündigung sollen auch kinematische Betrachtungen ausgeschlossen sein. Diese werden jedoch schon in den Begriff der Krümmung hineingelegt. Denn der Krümmungskreis wird erklärt als das Resultat eines durch 3 Curvenpunkte oder an 3 Curventangenten gelegten Kreises, das beim Zusammenfallen einer jeden Trias erreicht wird — das ist in beiden Fällen ein gemeinsames Ergebniss der Variation bei doppelter Variationsfreiheit. In Betreff der Curven wird der Reihe nach behandelt: die dualistische Definition der Krümmung und des Krümmungskreises; die Collineation eines Kreises und eines Kegelschnitts als Curve 2. Ordnung; der Krümmungskreis, einige einfache Constructionen des Radius; der Krümmungskreis eines Kegelschnitts als Curve 2. Classe; Anwendung auf einfache Krümmungsmittelpunktconstructionen; weitere Anwendungen; Beziehungen zwischen den Krümmungskreisen an verschiedenen Punkten desselben Kegelschnitts, Methode von Staudt; Uebungsaufgaben. In Betreff der Flächen 2. Grades werden zuerst einleitende Sätze aufgestellt, dann folgende Gegenstände behandelt: die Krümmungen der schiefen Schnitte der Fläche; die Beziehungen zwischen den Krümmungen der Normalschnitte; einzelne Fläche in Bezug auf die Krümmungsverhältnisse; Punkte constanter Krümmung der Normalschnitte. Focalkegelschnitte. H.

Untersuchungen zur allgemeinen Theorie der krummen Oberflächen und geradlinigen Strahlensysteme. Von Dr. Reinhold

Lilienthal, Dozent an der Universität Bonn. Bonn 1886. Eduard Weber. 111 S.

Die Untersuchungen gehen darauf aus, eine Fläche durch eine mit 2 Parametern p, q variirende Gerade zu bestimmen, deren Beziehung zur Fläche verfügbar bleibt. Sie beginnt mit der Einführung der Fundamentalgrössen der Rechnung: das System der Geraden ist vergleichbar mit dem Normalensystem, und es entsprechen alsdann die Hauptkrümmungsradien ϱ_1, ϱ_2 zwei Drehpunktsabständen der Geraden, der Stellungswinkel σ, d. i. Winkel zwischen der einen Krümmungslinie und der einen Parameterlinie, dem Winkel τ, welcher die Stellung der beiden zum Strahl gehörenden Hauptebenen bestimmt, die 3 Coefficienten im Quadrat des Linienelements E, F, G 4 analog dargestellten Grössen e, f, f', g, zwischen denen eine Relation besteht. Im ersten Abschnitt, welcher die nötigen Formeln der Flächentheorie ohne Bezugnahme auf das Strahlensystem entwickelt, ist u. a. enthalten: die Darstellung von ∂x, ∂y, ∂z in Differentialen des Richtungscosinus der Normale, den Hauptkrümmungen und dem Stellungswinkel, ferner ein Satz über Minimalflächen. Der 2. Abschnitt behandelt nun das Problem aus der Theorie der Strahlensysteme als Verallgemeinerung im angedeuteten Sinne, stellt ∂x, ∂y, ∂z dar und gibt die Integrationsbedingungen. Der 3. Abschnitt führt Strahlensysteme ein, welche aus 3 erzeugenden Functionen einer complexen Variabeln hergeleitet sind, und vollzieht das gleiche. Es werden ermittelt die Krümmungsverhältnisse der für die betrachteten Strahlensysteme charakteristischen Flächen, mit Anwendung auf Minimalflächen, die Bedingungen, unter denen ein Strahlensystem sich aus erzeugenden Functionen herleiten lässt, und die, unter denen eine Fläche erzeugende Functionen besitzt, woran sich Bemerkungen über Minimalflächen schliessen. H.

Marcus Baker: A group of circles related to Feuerbach's circle. Bull. of the Philos. Soc. of Washington. VIII. Math. Sect. p. 45—52.

Der Verfasser beginnt mit einigen Beobachtungen an den Höhen- und Mittentransversalen und dem Umkreise des Dreiecks, construirt dann über der Figur als Basis einen Kegel (resp. Pyramiden mit derselben Spitze), schneidet die Flächen durch Ebenen parallel der Basis und projicirt die Schnittfiguren auf die Basisebene. Dadurch erhält er Gruppen von Kreisen, Punkten und Geraden und Sätze in Bezug auf dieselben und als leichte Folge davon die 12 Punkte des Feuerbach'schen Kreises. Vorher geht die Geschichte dieses Kreises. H.

Altes nnd Neues zur Lehre von den morkwürdigen Pnnkten des Dreiecks. Von Professor Uhlich. Programm der Fürsten- und Landesschnle zu Grimma 1886. 4°. 34 S.

Der erste Teil der Abhandlung betrifft ausschliesslich einen der Symmetriepunkte des Dreiecks, den Punkt der kleinsten Entfernungssumme von den Ecken, nnd gibt die Geschichte dieses Pnnktes, der Lösungen des Problems ihn zu finden und zu construiren nnd anderer sich daran knüpfenden Probleme und Sätze, eine Geschichte, die mit der Lösung durch Thomas Simpson 1750 beginnt und eine bedentende Anzahl grossentcils unabhängiger Arbeiten bis in die neneste Zeit nmfasst. Der zweite Teil enthält eine Reihe eigener Untersnchungen des Verfassers, die sich an die Ansetznng dreier ähnlichen Dreiecke an die Seiten eines beliebigen Dreiecks anschliessen. H.

Lehrbnch der Krystallberechnnng. Mit zahlreichen Beispielen, die mit Hilfe der sphärischen Trigonometrie auf Grund einer stereographischen Projection berechnet wurden. Von Ferdinand Henrich, Oberlehrer am Realgymnasium in Wiesbaden. Mit in den Text gedruckten Figuren. Stuttgart 1886. Ferdinand Enke. 300 S.

Dies Lehrbuch nnterscheidet sich von den bisher vorhandenen wesentlich durch die fast durchgängig angewandte stereographische Projection und zeichnet sich ans durch die grosse Anzahl von Beispielen. Nach einer Einleitung und nach Darlegung der Theorie der stereographischen Projection lehrt es: die Berechnung der regulären Krystalle, dann complicirter Combinationen, dann des tetragonalen Systems, dann complicirter Combinationen desselben, dann des hexagonalen, rhombischen, monosymmetrischen, triklinen Systems, dann die Theorie der Zwillingskrystalle und deren Anwendnng auf das hexagonale nnd rhombische System, dann bezüglich anf schiefwinkligo Axen, und das trikline System. H.

Technik.

Theorie der Kraftmaschinen. Von Dr. F. Grashof, Grossherzogl. Badisch. Geheimrath nnd Professor am Polytechnikum zu Carlsruhe. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. In 5 Lieferungen. Hamburg nnd Leipzig (1886 beginnend). Leopold Voss.

Das Werk zeichnet sich ans durch die Vereinigung exact wissenschaftlicher, nicht erst aus technischer Praxis abstrahirter Begriffe mit dem vollen, allseitigen Interesse an den technischen Anfgaben und Erfordernissen. Zum Verständniss setzt es keine andere als

elementare Mathematik voraus, und auf technischer Seite keine Specialbekanntschaft, da alles Vorkommende seinem Wesen nach hinreichend erläutert wird. Es beginnt mit ausführlicher Erklärung und Ordnung der Begriffe, welche sich auf die Wirkung von Kräften beziehen und teilt sich dann zuerst nach den zu Gebote stehenden Kräften, und innerhalb deren nach den Vorrichtungen zur Verwertung dieser Kräfte für technische Zwecke. Seine Aufgabe ist es, die wirklichen Effecte, daraus die Maximaleffecte, Effectverluste und Erfordernisse zu berechnen. Die bis jetzt erschienenen 2 Lieferungen auf 320 Seiten erstrecken sich auf Mensch und Tier als Motor und Wassermotoren, unter letztern Wasserräder und Turbinen, deren verschiedene Arten und Teile einzeln behandelt werden. H.

Lehrbuch der technischen Mechanik. Von Lehrecht Henneberg und Oscar Smreker. I. Theil. Statik der starren Systeme. Von Lehrecht Henneberg, ordentl. Professor an der Grossh. technischen Hochschule zu Darmstadt. Darmstadt 1886. Arnold Bergstraesser. 374 S.

Das ganze Lehrbuch wird aus 4 Teilen bestehen; die übrigen, welche auf den vorliegenden folgen sollen, sind: Grundzüge der Dynamik, Theorie der Elasticität und Festigkeit, Hydraulik. An der Bearbeitung des ersten Teils sind specifisch technische Gesichtspunkte nicht zu erkennen. Man findet darin die allgemeinen Principien der Statik in gewöhnlicher Weise in vollem Umfange und uneingeschränkter Anwendung der niedern und höhern Mathematik behandelt. Bemerkbar ist nur ein durch die Sache nicht gerade geforderter Beginn im Einfachen, sofern der Theorie für den Raum immer die Theorie für die Ebene vorausgeht. Die successiven Gegenstände sind: Zusammensetzung von Kräften mit demselben Angriffspunkt, dann mit verschiedenen Angriffspunkten, Schwerpunkt, Gleichgewicht am nicht freien Körper, Princip der virtuellen Verrückungen, graphische Zerlegung eines Kräftesystems, Fachwerk, Theorie der Reibung, Reibungswiderstände an speciellen Getrieben nebst 2 Tabellen. Die Figuren stehen auf 12 Tafeln. H.

Die Laboratorien der Elektrotechnik und deren neuere Hilfsapparate. Ein Handbuch für Elektriker, Mechaniker, Telegraphoningenieure, Lehrer und Studirende der Physik. Von August Neumayer, kgl. bayr. Telegraphen-Beamter. Mit 52 Abbildungen. Wien, Pest. Leipzig 1887. A. Hartleben. 231 S.

Das Buch gibt die Beschreibung und in den Text gedruckte Abbildung der von 51 Erfindern in Aufnahme gebrachten Apparate, welche sich auf Elektrotechnik beziehen, in folgender Ordnung: Ab-

loseferuröhre, Elektrometer, Galvanometer, Stromquellen, Messbrücken und Widerstände, Stromschlüssel, Commutatoren, Wippen, Klemmen, Leitungsdrähte, Luft- und Bodenleitungen, Voltameter, Nebenapparate der Laboratorien, Laboratorien. Es bildet den 33. Band in Hartleben's Elektrotechnischer Bibliothek. H.

Die elektrotechnische Photometrie. Von Dr. Hugo Krüss. Mit 50 Abbildungen. Wien, Pest, Leipzig 1886. A. Hartleben. 272 S.

Die Messung der Intensität des elektrischen Lichtes ist weit schwieriger und weniger einfach als die andrer Lichtquellen wegen der starken Variation und wegen des Farbenunterschiedes in Vergleich mit den zugrunde gelegten Lichtarten. Infolge dessen hat die Gesamtheit der Arbeiten, welche diese Schwierigkeiten zu überwinden suchen, einen grossen Umfang angenommen und ist die gegenwärtige geordnete Zusammenstellung ein verdienstliches Werk. Voraus geht das Litteraturverzeichniss. Dann werden nach einander behandelt: die Grundlagen der Photometrie, die Photometer, besondere Vorrichtungen zur elektrotechnischen Photometrie, Normal- und Vergleichslichtquellen, die elektrotechnische Photometrie, der Glanz der Lichtquellen, das Mass der Beleuchtung, der Lichtverlust durch Absorption, die Spectrophotometrie. Die Abbildungen stehen im Text. Das Buch bildet den 32. Band der elektrotechnischen Bibliothek. H.

La photographie instantanée théorie et pratique. Par Albert Londe, Officier d'Académie, membre de la Société Française de Photographie, Directeur du service photographique à l'hôpital de la Salpétrière. Paris 1886. Gauthier-Villars. 146 S.

Das Buch gibt Rechenschaft über die Kunst der augenblicklichen photographischen Aufnahme, ihre Aufgaben und deren Lösungsmittel, Methoden und Apparate. Nach einer historischen Einleitung handelt es vom Objectiv und Diaphragma, vom Lichte, von den empfindlichen Präparaten, vom Schliesser und seiner Bewegung, von der Bereitung der Platten, Regulirung der Oeffnungszeiten, Grenzen derselben, Einfachheit des Mechanismus und seiner Functionirung, Messung der Oeffnungszeiten, Gradnirung der Schliesser, deren Eigenschaften, Format der Bilder, Winkelverstellung bewegter Objecte, Beschaffenheit der anwendbaren empfindlichen Präparate, Anwendung von Visirapparaten zur richtigen Stellung' die 2 Arten momentaner Photographie.

H.

La photographie des débutants, procédé négatif et positif. Par M. Léon Vidal, Officier de l'Instruction publique, Professeur à

l'École nationale des Arts décoratifs. Paris 1886. Ganthier-Villars. 151 S.

Das Buch gibt Anfängern, insbesondere Touristen, Unterweisung im Photographiren und handelt nach einander von den negativ empfindlichen Tafeln und Papieren, der Wahl der Apparate, der Isolirung der empfindlichen Schichten, Bereitung, Befestigung, Alaunen und Waschen der Negativen, Verstärkung, Reduction, Anstreichen und Retouchiren der Negativen, Bildung der Häutchenform, positiven Eindrücken auf mit Salz und Albumin behandeltem Papiere, directen und photomechanischen Eindrücken, Aufstellung und Retouche der Bilder, augenblicklicher Photographie, Anwendung eines Taschenapparats, Vergrösserung mit künstlichem Lichte. H.

Naturwissenschaftlich-technische Umschau. Illustrirte populäre Halbmonatsschrift über die Fortschritte auf den Gebieten der angewandten Naturwissenschaft und technischen Praxis. Für Gebildete aller Stände. Herausgegeben von Th. Schwartze, Ingenieur in Leipzig. II. Jahrgang. Jena 1886. Fr. Mauke (A. Schenk).

Von dieser Zeitschrift liegen dem Ref. 2 Hefte von je 2 Bogen vor. Der Inhalt gehört vorwiegend den Grenzgebieten gegenwärtiger Forschung und den neuesten Erfindungen an, also gerade denjenigen Gegenständen, die sich am wenigsten zur Verbreitung eignen. Die Artikel sind verständlich und im Sinne ernster Belehrung geschrieben, sie mögen daher als anziehende Lectüre für Wissbegierige unter den Nichtgelehrten und Unbeteiligten von Manchen gern aufgenommen werden. H.

Selbstregistrirende Barometer, Thermometer, Hygrometer, Manometer. General-Depot: O. H. Meder, optisch-mechan. Institut in Leipzig.

Auf einer durch ein Uhrwerk wöchentlich einmal um ihre Axe rotirenden Scala wird von einer mit dem Mechanismus in Verbindung gebrachten, besonders construirten Feder der jeweilige Stand der betreff. Instrumente gezeichnet. Die 4 Apparate sind auf dem Ankündigungsbogen abgebildet. Sie sind bereits in vielfacher Verwendung in Gebrauch. H.

Physik.

The mathematical theory of electricity and magnetism. By H. W. Watson, D. Sc., F. R. S., and S. H. Burbury, M. A. Vol. I. Electrostatics. Oxford 1885. Clarendon press. 268 S.

Das Buch ist zum Gebrauch der Studenten bearbeitet, wozu das Werk von Maxwell über Elektricität und Magnetismus nicht ganz geeignet schien. Es schickt, um Unterbrechungen zu vermeiden, in den ersten 3 Capiteln die Entwickelungen der mathematischen Theoreme, Green's Theorem, die Theorie der harmonischen Kugelfunction und der Potentiale, voraus. Dann folgt in den 11 übrigen Capiteln: die Beschreibung der Erscheinungen, die Theorie der Elektricität, Anwendung auf besondere Fälle, die Theorie der Inversion in ihrer Anwendung auf Probleme, elektrische Systeme in 2 Dimensionen, Systeme von Conductoren, elektrische Energie, specifische elektrische Capacität, elektrischer Strom, voltaische und thermoelektrische Ströme, Polarisation der Dielektricität. H.

Lehrbuch der Elektricität und des Magnetismus. Von E. Mascart, Professor am Collège de France, Director des Bureau central météorologique, und J. Joubert, Professor am Collège Rollin. Autorisirte deutsche Uebersetzung von Dr. Leopold Levy. Erster Band. Mit 127 in den Text gedruckten Abbildungen. Berlin 1886. Julius Springer. 592 Seiten.

Die Elektricität hat unter den Naturkräften die zwei Eigentümlichkeiten, dass ihre Erscheinungen äusserst mannichfaltig und verschiedenförmig sind, und nur ein geringer Teil von ihnen ohne Experiment beobachtet werden kann. Sie treten als blosse Symptome gedachter und nur sehr unvollkommen vorstellbarer Objecte und Zustände auf. Infolge dieses Umstandes ist das sonst beliebte Verfahren, erst die Erscheinung, dann die Theorie zu lehren, hier nicht wol anwendbar; man kann, wenn man überhaupt beides trennen will, nur die Theorie vorausgehen lassen, welche zur Deutung der Erscheinung und zur Leitung des Experiments ganz unentbehrlich ist. Letzteres ist auch im vorliegenden Lehrbuche derart geschehen, dass der jetzt erschienene erste Band allein die Theorie, der später folgende zweite die Experimente enthält. Bei einer so durchgreifenden Sonderung kann man sich freilich nicht verhehlen, dass sich der Vortragende die Möglichkeit entzieht, die Theorie, soweit sie noch Gegenstand gegenwärtiger Forschung ist, auf das Mass der Gewährleistung durch das Experiment zurückzuführen. Der gegenwärtige Standpunkt wird also nur einseitig dargestellt. Daher sagt auch das Vorwort, der zutreffende Titel des ersten Bandes sei: Versuch einer mechanischen Theorie der Elektricität. Die einzelnen Abschnitte der Theorie sind die folgenden: statische Elektricität, u. zw. Einleitung, Potential, allgemeine Sätze, elektrisches Gleichgewicht, Arbeit der elektrischen Kräfte, Dielektrica, speciolle Fälle des Gleichgewichts, Elektricitätsquellen; elektrische Ströme, u. zw. Fortpflanzung der

Elektricität im stationären Zustande, veränderlicher Zustand, Energie der Ströme, thermoelektrische Ströme; Magnetismus, u. zw. Einleitung, Constitution der Magnete, specielle Fälle, magnetische Induction, die Magnete, magnetischer Zustand der Erde; Elektromagnetismus, Elementarwirkungen, specielle Fälle, Induction, speciello Fälle davon, Eigenschaften des elektromagnetischen Feldes, Inductionserscheinungen in nicht linearen Leitern, optische Erscheinungen, elektrische Einheiten, allgemeine Theorien, Ergänzungen. H.

Handbuch der statischen Elektricität. Von E. Mascart, Professor am Collège de France, Director der meteorologischen Centralanstalt in Paris. Deutsche Bearbeitung von Dr. Ignaz Wallentin, k. k. Professor am Staatsgymnasium im IX. Bezirke Wien's, ehem. Privatdocent für mathematische Physik an der technischen Hochschule in Brünn. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. Erster Band, II. Abtheilung. Wien 1885. A. Pichler's Witwe u. Sohn. 390 S.

Das Werk ist beim Erscheinen der 1. Abteilung 1883 im 278. litt. Bericht S. 19 besprochen. Die einzelnen Abschnitte sind: Einleitung, Gesetze der elektrischen Wirkungen, Zerstreuung der Elektricität, Verteilung der Elektricität, Beispiele davon, elektrische Influenz, Theorie der elektrischen Erscheinungen, (Potential, Theoreme, Arbeit, Energie), Anwendung der Theorie auf die elektrische Verteilung (elektrische Bilder, Vergleichung der Phänomene mit denen der Wärmeleitung), Theorie der Dielektricität (Anwendung auf specielle Fälle, Instrumente zur Beobachtung und Messung (elektrische Pendel, Wageelektrometer, Drehungsapparate, Entladungselektrometer, elektrische Thermometer, Galvanometer), Versuche in Bezug auf Influenz und Condensation (Anziehungen und Abstossungen, elektrische Capacitäten, Luftcondensatoren, Rolle des isolirenden Mediums in den Condensatoren, specifisches Inductionsvermögen, Methoden zu dessen Bestimmung). H.

Die Grundlehren der Elektricität und ihre wichtigsten Anwendungen. Für Gebildete aller Stände dargestellt von Dr. Max Wildermann, Gymnasial-Oberlehrer. Mit einem Titelbilde und 263 in den Text gedruckten Abbildungen. Freiburg i. Br. 1885. Herder. 502 S.

Der Verfasser ist der Ansicht, dass, nachdem die Elektricität in ihren Anwendungen ein so bedeutender Factor des öffentlichen Lebens geworden sei, auch die Kenntniss derselben dem Volke zugänglich gemacht werden müsse. Um deren Erteilung von der Vorbedingung mathematischer Bildung zu befreien, habe man auf die quantitative Seite der Elektricitätslehre ganz zu verzichten. Bei Be-

schränkung auf die Qualität der Erscheinungen bietet die Elektricität offenbar noch einen sehr reichlichen Stoff zur Mitteilung. Der Vortrag ist dann ausschliesslich beschreibend und die Belehrung kann nur receptiv aufgenommen werden. Infolge dessen ist kein Grund, Theorie und Erfahrung, Statik und Dynamik getrennt zu behandeln. Dem entsprechend gibt das vorliegende Buch durchweg Beschreibung der äussern und innern Vorgänge sowie der Apparate und Experimente. Seine Hauptteile sind die zwei auf dem Titel stehenden: Grundlehren und Anwendungen. Der erste behandelt nach einander: die einfachsten elektrischen Erscheinungen, Wirkungen des Stromes auf den durchströmten Leiter, die Wechselbeziehungen zwischen Elektricität und Magnetismus, die älteren Stromerreger, neue elektrische Maschinen — der zweite: Verwendungen des Batteriestromes, das elektrische Licht, Galvanoplastik und galvanische Gewinnung von Reinmetall, elektrische Uebertragung der Kraft und ihre Anwendungen, das Telephon. H.

Handbuch der physikalischen Maassbestimmungen. Von Dr. B. Weinstein, Privat-Docent an der Universität zu Berlin und Hilfsarbeiter bei der Kaiserl. Normal-Aichungs-Commission. Erster Band. Die Beobachtungsfehler, ihre rechnerische Ausgleichung und Untersuchung. Berlin 1886. Julius Springer. 524 S.

In Bezug auf die Ausgleichungsrechnung sind dem Buche viele Arbeiten vorausgegangen, auf die es sich stützt; doch haben dieselben nur astronomische und geodätische Messungen im Auge gehabt. Die Lehre von physikalischen Massbestimmungen hingegen ist nur einmal, von Kohlrausch, bearbeitet worden und nur soweit, als sie bei ersten physikalischen Arbeiten als Leitfaden dienen sollte. Nach dem Muster dieser Arbeit will nun der Verfasser versuchen, dieselbe als selbständige Disciplin im weitesten Umfange darzustellen. Die Abschnitte des Buches sind: die Beobachtungsfehler und die Theorie ihrer Ausgleichung, u. zw. Uebersicht über die möglichen Fehler bei Beobachtungen, Problem bei der Ausgleichungsrechnung (Messungen und Untersuchungen), Theorie der Ausgleichungsrechnung; Theorie der zufälligen Fehler (Ausgleichung einfacher Messungen), u. zw. Princip des arithmetischen Mittels, Uebergang von den wahren Verhältnissen zu den wahrscheinlichsten (praktische Ausgleichungsrechnung), Uebersicht über die Ergebnisse, Kritik von Beobachtungen und Ausgleichung, Zahlenbeispiel; zusammengesetzte Messungen, u. zw. unbedingte, bedingte, Determinanten und lineare Gleichungen, Kritik, Zusammenstellung; Ausgleichung von Untersuchungen, u. zw. Ableitung der Normalgleichungen, Fehlerrechnung, Nebenbedingungen, abhängige

Beobachtungen, Form der Beobachtungsgleichungen, Gewicht jeder, Schemata, Kritik; Interpolation, Differentiation und Quadratur.

H.

Die modernen Theorien der Chemie und ihre Bedeutung für die chemische Mechanik. Von Dr. Lothar Meyer, ord. Prof. der Chemie an der Universität Tübingen. Fünfte Auflage. Breslau 1884. Maruschke u. Berendt. 626 S.

Die 4. Auflage ist bez. Buch I. u. II. im 263sten, bez. Buch III. im 278sten litt. Bericht, bzbw. S. 34 u. 18 besprochen. Durchgreifende Aenderungen hat der von der Wärme handelnde Abschnitt erfahren, indem der Verfasser seinen Widerspruch gegen die Ansicht, dass die den chemischen Umsatz begleitende Wärmewirkung das Mass der Affinität sei, schärfer hervortreten lassen und mit aller Entschiedenheit betonen wollte, dass nur mit kinetischen Theorien, nicht aber mit der Annahme ruhender, mit Anziehung begabter Atome zu einer besseren Erkenntniss der Affinität zu gelangen sei. Im Abschnitte über Massenwirkung sind die Formeln etwas vereinfacht. Sonstige Aenderungen, Nachträge und Berichtigungen sind nicht besonders angezeigt. H.

Ueber die Zustandsbedingungen der Flüssigkeiten und Gase sowie über den Aether. Von Johann Kelling. Karlsruhe 1886. 56 S.

Die vorliegende Arbeit ist ein Versuch, die gegebenen Zustände des Stoffes aus einfachen Hypothesen durch Rechnung herzuleiten. Es wird angenommen, dass Körperatome einander und Aetheratome anziehen, letztere einander abstossen, die Functionen beider Kräfte und der Dichte der Aetherhüllen Potenzen des Abstands sind. Infolge der Rechnung werden gewisse Exponenten ausgeschlossen. Die Rechnung wird mit Isolirung der betrachteten Complexe durchgeführt, und darauf gebaut, dass die ausserhalb liegenden Massen nur auf die Constanten Einfluss haben. Es werden nach einander behandelt: der Ruhestand, Bewegungszustand, Verdampfung, numerische Rechnung für Wasserdampf, Bewegungsausgleich zwischen den Molecülen und dem Aether, Temperatur und Wärme, Wassererwärmung und Verdampfung, die grösste Dichte des Wassers, Zustände andrer Stoffe und am Schlusse eine Reihe von Resultaten aufgestellt. H.

Zeitschrift zur Förderung des physikalischen Unterrichts. Herausgegeben und redigirt vom Physikalisch-technischen Institut Lisser u. Benecke. Erster Jahrgang 1884, zweiter 1885. Berlin, Lisser u. Benecke.

Jeden Monat erscheint ein Heft von 1½ bis 2 Bogen, welches Beschreibung und Abbildung von Apparaten geeignet zu Demonstrationen im physikalischen Unterrichts enthält. H.

Vermischte Schriften.

Mathesis, recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne. Publié par P. Mansion, Professeur ordinaire à l'Université de Gand, Correspondent de l'Académie royale de Belgique, etc. et J. Neuberg, Professeur à l'Université de Liège, Membre de la Société royale des sciences de Liège, etc. avec la collaboration de plusieurs Professeurs belges et étrangers. Tome sixième, année 1886. Gand 1886. Ad. Hoste. Paris, Gauthier-Villars.

Der 6. Band enthält folgende Abhandlungen und Noten.

J. Neuberg: Ueber den Tarry'schen Punkt. — Note über die Stropboide.

S. Realis: Ueber einige neue Relationen zwischen den hyperbolischen und Kreisfunctionen.

Barbarin: Axen der ebenen Schnitte der Flächen 2. Grades.

E. Cosáro: Ueber eine Bedingung, welche Familien von Curven definirt. — Quellen von Identitäten. — Bemerkungen über eine Formel von Newton. — Algebraische Sätze.

Lemoine und Neuberg: Noten über die Geometrie des Dreiecks.

Novarese: Ueber eine Eigenschaft des hyperbolischen Paraboloids.

M. d'Ocagne: Ueber ein Grenzproblem.

P. Mansion: Periodische Kettenbrüche. — Note über eine Form des Restes in der Taylor'schen Formel für die Functionen einer Imaginären. — Sätze von Descartes und Euler. — Division des Winkels. — Allgemeine Principien der Theorie der Grenzen.

G. Tarry: Ueber die associirten ähnlichen Figuren.

Habich: Ueber eine Aufgabe betreffend Roulletten.

Cl. Thiry: Ueber den Neunpunktekreis.

Fanquembergne: Aufgabe über die Kugel.

E. Lucas: Ueber die vollkommenen Zahlen.

E. Catalan: Verschiedenes.

C. Bergmans: Sätze über die Parabel.

E. Gelin: Ueber die Combinationen mit Wiederholung.

P. Seelhoff: Eine neue vollkommene Zahl.

M. Baker: Flächeninhalt des Dreiecks.

Dewulf: Tangente und Brennpunkt der Focale von Quetelet.

Ph. Gilbert: Ueber einige Sätze von Sluse.

Massau und Mister: Verallgemeinerung des Satzes von Sluse.

G. de Longchamps: Ueber die potentielle Curve des Dreiecks.

Stern und Lucas: Ueber die vollkommenen Zahlen.

Le Paige und Massau: Ueber den Satz von Sluse. H.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XIV.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Fortschritte, die, der Physik im J. 1879. Dargestellt v. d. physikal. Gesellschaft zu Berlin. 35. Jahrg. Red. v. Neesen. 2. u. 3. Abth. entb.: Optik, Wärmelehre, Elektricitäts-Lehre u. Physik d. Erde. Berlin, G. Reimer. 26 Mk.

Wöckel, L., Geometrie d. Alten in einer Sammlung v. 856 Aufgaben. Neu bearb. u. verb. v. Th. E. Schröder. 13. Aufl. Nürnberg, Korn. Geb. 1 Mk. 80 Pf.

Methode und Principien.

Meyer, W., kosmische Weltansichten. Astronomische Beobachtungen u. Ideen aus neuester Zeit. Berlin, Allg. Ver. f. dtsch. Literatur. 5 Mk.

Lehrbücher.

Gallien, K., Lehrbuch d. Mathematik f. höhere Schulen. 1. Thl. Arithmetik u. Algebra. 2. Thl. Planimetrie. Berlin, Weidmann'sche B. 2 Mk.

Haller v. Hallerstein, F. Baron, Lehrbuch d. Elementar-Mathematik. Nach d. Lehrplan f. d. kgl. preuss. Cadetten-Corps bearb. v. C. Strübing u. B. Hülsen. 3. Thl. Pensum d. Sekunda. 2. Aufl. Berlin, Nauck & Co. Geb. 4 Mk. 50 Pf.

Sammlungen.

Bardey, E., arithm. Aufgaben nebst Lehrbuch d. Arithmetik. 4. Aufl. Leipzig, Teubner. 2 Mk.

— method. geordnete Aufgabensammlung, mehr als 8000 Aufgaben entb. üb. alle Theile d. Elementar-Arithmetik. 13. Afl. Ebd. 2 Mk. 70 Pf.

Gräfe, F., Auflösungen u. Beweise d. Aufgaben u. Lehrsätze aus d. analyt. Geometrie d. Punktes, d. geraden Linie, d. Kreises u. d. Kegelschnitte. Ebd. 2 Mk.

Hois, A., Sammlung v. Beispielen u. Aufgaben aus d. allgem. Arithmetik u. Algebra. 71. Aufl. Köln, Du Mont-Schauberg. 3 Mk.

Henner, F., Aufgabensammlg. zum Rechenunterricht. 6. Aufl. Ansbach, Seyhold. 1 Mk. 20 Pf.

Hochheim, A., Aufgaben aus d. analyt. Geometrie der Ebene. 3. Hft.: Die Kegelschnitte. 2. Abth. A. Aufgaben. B. Auflösungen. Leipzig, Teubner. 2 Mk. 80 Pf.

Kleyer, A., vollständ. gelöste Aufgaben-Sammlung a. allen Theilen d. Rechenkunst etc. 266.—282. Hft. Stuttgart, Maier. à 25 Pf.

Kommerell, F., Aufgaben aus d. descriptiven Geometrie. Zusammengestellt v. H. Böklen. Tübingen, Fues. 1 Mk.

Matthiessen, L., Schlüssel zur Sammlung v. Beispielen u. Aufgaben aus d. allgem. Arithmetik u. Algebra v. E. Heis. 3. Aufl. 2 Bde. Köln, Du Mont-Schauberg. 15 Mk.

Mayer, J., Sammlg. v. arithmet. Aufgaben a. d. nothwendigsten Definitionen u. Gesetzen f. Mittelschulen. 10. Aufl. d. P. Luther'schen Aufgabensammlg. Regensburg, Pustet. 2 Mk.

Wallentin, F., Auflösgn. zu d. Maturitätsfragen aus d. Mathematik. Wien, Gerold's S. 3 Mk. 60 Pf.; geb. 4 Mk.

Tabellen.

Blater, J., Napiertafel, enth. d. 9 Vielfachen aller Zahlen vermittelst Zusammensetzen der dazu erforderl. Stäbchen zur bequemeren u. rascheren Ausführg. v. Multiplikationen u. Divisionen m. Gebrauchsanweisg. Hrsg. nach Angabe von A. Steinhauser. Mit Text. Mainz, Frey, Verl. 1 Mk.

Ganss, F. G., fünfstellige vollständige logarithm. u. trigonometr. Tafeln. 25. Aufl. Halle, Strien. 2 Mk.

Gravelius, H., fünfstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln f. d. Decimal-Eintheilung d. Quadranten. Berlin, G. Reimer. Kart. 6 Mk.

Hoüel, G. J, fünfstell. Logarithmentaf. d. Zahlen u. d. trigonometr. Functionen. Neue Ausg. Berlin, Cohn. 2 Mk.

Teichmann, K., u. H. Gross, vierstellige mathemat. Tafeln. 2. Aufl. Stuttgart, Wittwer's Verl. 60 Pf.

Wolff, H., u. J. Baumann, Tabellen zur Berechnung d. agonischen Elementaranalyse. Berlin, Springer. 30 Pf.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Adam, R., Schule d. Kopfrechnens. Zum Handgebrauch f. Lehrer. 1. Thl. Gera, Hofmann. 2 Mk.

Ameseder, A., zur Auflösung d. Gleichgn. 4. u. 5. Grades durch Bewegungsmechanismen. Wien, Gerold's S. 20 Pf.

— Zur Theorie d. Thetacharakteristiken. Ebd. 20 Pf.

Antenbeimer, F., Elementarbuch d. Differential- u. Integralrechnung m. zahlreichen Anwendungen aus d. Analysis, Geometrie, Mechanik, Physik etc. 3. Aufl. Weimar, B. F. Voigt. 9 Mk.

Bruns, H., üb. e. Aufg. d. Ausgleichungsrechnung. Leipzig, Hirzel. 2 Mk.

Eichenberg, S., üb. d. quadrat. Reciprocitätsgesetz u. einige quadrat. Zerfällgn. d. Primzahlen. Göttingen, Vandenhoeck & R. 1 Mk. 60 Pf.

Fuhrmann, W., Wegweiser in d. Arithmetik, Algebra u. niedere Analysis, bestehend in e. geordneten Sammlg. v. Begriffen, Formeln u. Lehrsätzen in diesen Disziplinen. Leipzig, Teubner. Kart. 1 Mk.

Gegenbauer, L., d. mittlere Anzahl d. Darstellgn. e. ganzen Zahl durch o. Summe v. bestimmten Vielfachen o. Quadraten. Wien, Gerold's S. 20 Pf.

— üb. d. Classenanzahl d. quadrat. Formen v. negativer Determinante. Ebd. 20 Pf.

— arithmet. Notiz. Ebd. 20 Pf.

Kleinpaul's E., Anweisung zum prakt. Rechnen. 5. Aufl. umgearb. v. F. Mertens 1. u. 2. Heft. Bremen, Heinsius. 3 Mk. 50 Pf.

Krause, M., d. Transformation d. hyperellipt. Funktionen erster Ordng. nebst Anwendgn. Leipzig, Teubner. 10 Mk.

Krieg v. Hochfelden, F. Frhr., üb. die durch den Integralausdruck

$$\Phi(t) = S_z \frac{R_1(\zeta, w)}{R_2(\zeta, w) - t} dz$$

dargestellten Funktionen, wobei $R_1(\zeta w)$ u. $R_2(\zeta, w)$ algebraische Funktionen einer u. derselben Riemann'schen Fläche sind. Wien, Gerold's S. 50 Pf.

Mandl, J., üb. e. Classe v. algebraisch auflösbaren Gleichgn. fünften, sechsten u. siebenten Grades. Ebd. 25 Pf.

Mertens, F., üb. d. bestimmend. Eigenschaften der Resultate v. n-Formen m. n-Veränderlichen. Ebd. 60 Pf.

— üb. d. Invarianten dreier ternärischen quadratischen Formen. Ebd. 35 Pf.

Ruland, N., prakt. Anleitg. zum gründl. Unterricht in d. Algebra. Ausführl. Auflösg. der in Dr. E. Heis' Sammlg. v. Beispielen u. s. w. enthaltenen Aufgaben. 2. Thl. Die Gleichungen u. Progressionen. 6. Aufl. bearb. v. K. Ruland. Bonn, Cohen & S. 7 Mk.

Schirdewahn, G., üb. d. Umkehrproblem der hyperellipt. Integrale dritter Gattung u. erster Ordnung. Oels, Grüneberger & Co. 1 Mk.

Stelz, O., Vorlesgn. üh. allgem. Aritbmetik. 2. Thl. Arithmetik d. complex. Zablen. Leipzig, Teubner. 8 Mk.

Geometrie.

Ameseder, A., üh. Configuratien u. Polygone auf hiquadratischen Curven. Wien, Gerold's S. 50 Pf.

Behek, K., üb. hyperellipt. Curven. Ebd. 40 Pf.

— üh. d. verallgemeinerte Correspondenzprincip. Ebd. 30 Pf.

Burmester, L., Lehrbuch d. Kinematik. 1. Bd. Die ebene Bewegung. 2. Lfg. Leipzig, Felix. 18 Mk.

Cranz, C., synthetische geometr. Theorie d. Krümmung v. Kurven u. Flächen 2. Ordng. Stuttgart, Metzler'sche Verl. 3 Mk.

Dietsch, C., Leitfaden d. darstellenden Geometrie. Erlangen, Deichert. 2 Mk. 40 Pf.

Ernst, Ch. u. L. Stelte, Lehrbuch d. Geometrie. 1. Thl. Planimetrie. Strassburg, Schultz & Co., Verl. 1 Mk. 50 Pf.

Foil, M., üh. Euler'sche Polyeder. Wien, Gerold's S. 50 Pf.

Heinze, K., genetische Stereometrie. Bearb. v. F. Lucke. Leipzig, Teubner. 6 Mk.

Hofmann, F., d. Construct. doppelt berührender Kegelschn. m. imaginären Bestimmungsstücken. Ebd. 3 Mk. 20 Pf.

Kaiser, H., Einführg. in d. neuere analytische u. synthet. Geometrie. Wiesbaden, Bergmann. 6 Mk. 70 Pf.

Kohn, G., üb. d. Vierseit u. sein associirtes Viereck. Das Fünfflach und sein associirtes Fünfeck. Wien, Gerold's S. 60 Pf.

Küpper, C., üh. geometr. Netze. Prag, Calve. 66 Pf.

— hyperelliptische C^3n. Ebd. 1 Mk. 44 Pf.

Mandl, J., d. Pohlke'sche Lehrsatz d. Axenometrie u. o. Verallgemeinerg. desselben. Wien, Gerold's S. 60 Pf.

Renschle, C., Praxis d. Kurvendiskussion. 1. Thl. Kurvendiskussion in Punktkoordinaten m. e. Anh. üh. analyt.-geometr. Principien. Stuttgart, Metzler'sche Verl. 3 Mk. 80 Pf.

Reye, Th., die Geometrie der Lage. Verträge. 1. Abth. 3. Aufl. Leipzig, Banmgärtner. 7 M.; geb. 9 Mk.

Schlegel, N., üb. Entwickelg. u. Stand d. n-dimensionalen Geometrie, m. besond. Berücksichtg. d. vierdimensionalen. Leipzig, Engelmann. 75 Pf.

Schreiber, G., Lehrbuch d. Perspektive. 3. Aufl. Durchgesehen v. A. F. Viehweger. Leipzig, Oehmigke's Verl. 10 Mk.

Seelhoff, P., Flächen- u. Körperberechng. in Lehrsätzen u. Aufgaben nebst Regeln u. Uebungsbeispielen aus d. Arithmetik u. Algebra zum Gebrauche f. Navigationsschulen. 3. Aufl. Bremen, Heinsius. 2 M.; geb. 2 Mk. 40 Pf.

Schwarz, A., üb. e. ein- u. zweideutige Verwandschaft zwischen Grundgeh. zweiter Stufe. Wien, Gerold's S. 50 Pf.

Westberg, H., die Elemente d. Geometrie. 6. Aufl. Reval, Kluge. Kart. 2 Mk.

Wirtinger, W., über nat. Raumcurven 4. Ordnung. Wien, Gerold's S. 40 Pf.

Trigonometrie.

Kapteyn, J. C., u. W. Kapteyn, die höheren Sinus. Wien, Gerold's S. 1 Mk.

Kleyer, A., Lehrbuch d. Goniometrie (Winkelmessungslehre). Stuttgart, Maier. 7 Mk.

Ofenheim, A., Ritter v., die sphärische Trigonometrie u. analyt. Geometrie in dem f. die k. k. Kriegsschule vorgeschrieb. Umfange. Wien, Seidel & S. 3 Mk.

Praktische Geometrie u. Geodäsie.

Fennel, O., d. Wagner-Fennel'schen Tachymetor. Berlin, Springer. 2 Mk.

Kalender f. Messkunde auf d. J. 1887. Hrsg. v. M. Clouth. 1. Thl. Trier, Lintz. 1 Mk. 40 Pf.; geb. 2 Mk.

Mechanik.

Berthold, G., Studien üb. Protoplasmamechanik. Leipzig, Felix. 14 Mk.

Korteweg, D. J., üb. Stabilität period. ebener Bahnen. Wien, Gerold's S. 80 Pf.

Lampel, A., üb. Drehschwingungen e. Kugel m. Luftwiderstand. Ebd. 45 Pf.

Müller, F. A., das Problem d. Continuität in Mathematik u. Mechanik. Marburg, Elwert. 3 Mk.

Reiff, R., zur Kinematik d. Potentialbewegung. Tübingen, Fues. 20 Pf.

Schmidt, A., d. element. Behandlg. d. Kreiselproblems. Wien, Gerold's S. 40 Pf.

Seydler, A., Ausdehng. d. Lagrange'schen Behandlg. d. Dreikörper-Problems auf d. Vierkörper-Problem. Prag, Calve. 60 Pf.

Töpler, E., zur Ermittlung d. Luftwiderstandes nach d. kinetischen Theorie. Wien, Gerold's S. 1 Mk.

Technik.

Bibliothek, elektro-technische. 33. Bd. die Laboratorien der Elektrotechnik u. deren neuere Hilfsapparate. Von A. Neumayer.

34. Bd. Elektricität u. Magnetismus im Alterthume. Von A. Ritter v. Urhanitzky. 35. Bd. Magnetismus u. Hyneptismus. Von O. Gessmann. Wien, Hartleben. à 3 Mk.; geh. à 4 Mk.

Canter, O., d. techn. Telegraphendienst. 3. Aufl. Breslau, Kern's Verl. Geh. 6 Mk.

Heuneberg, L., u. O. Smreker, Lehrbuch d. techn. Mechanik. 1. Thl. Statik d. starren Systeme v. L. Heuneberg. Darmstadt, Bergsträsser. 9 Mk.

Kalender f. Elektrotechnik f. 1887. Bearb. v. J. Krämer. Wien, Perles. Geb. 3 Mk.

Kalender f. Elektrotechniker. Hrsg. v. F. Uppenborn. Jahrg. 1887. Münster, Oldenbourg. Geb. 4 Mk.

Kalender f. Geometer u. Culturtechniker. Hrsg. v. W. Schlebach. Jahrg. 1887. Stuttgart, Wittwer's Verl. Geb. 3 Mk.

Rebrbeck, E., Vademecum f. Elektrotechniker. 1887. Halle, Knapp. 2 Mk. 50 Pf.

Optik, Akustik und Elasticitätslehre.

Castigliano, A., Theorem d. Gleichgewichtes elastischer Systeme u. deren Anwendung. Aus d. Franz. v. E. Hauff. Mit 50 Holzschn. u. e. Atlas v. 10 Taf. Wien, Gerold's S. 20 Mk.

Helmboltz, H. v., Handbuch d. physiol. Optik. 2. Aufl. 3. Lfg. Hamburg, Voss. 3 Mk.

Hering, E., üb. Newton's Gesetz d. Farbemischung. Leipzig, Freytag. 1 Mk. 50 Pf.

Lommel, E., die Beugungserscheinu. geradlinig begrenzter Schirme. Münchn, Franz'scher Verl. 4 Mk. 50 Pf.

Loschmidt, J., Schwingungszahlen e. elast. Hohlkugel. Wien, Gerold's S. 30 Pf.

Meisel, F., geometr. Optik, e. mathemat. Behandlung d. einfachsten Erscheinu. auf d. Gebiete d. Lehre v. Licht. Halle, Schmidt's Verl. 6 Mk.

Miller, A., der primäre u. sekundäre longitudinale Elastizitätsmodul u. die thermische Konstante d. Letzteren. München, Franz'scher Verl. 1 Mk. 80 Pf.

Pscheidl, W., Bestimmung d. Brennweite e. Concavlinse mittelst d. zusammengesetzten Mikroskopes. Wien, Gerold's S. 20 Pf.

Erd- und Himmelskunde.

Bidschof, F., Untersuchgn. üb. d. Bahn d. Planeten (220) Stephanie. Wien, Gerold's S. 30 Pf.

Birkenmajer, L., üb. die durch d. Fortpflanzg. d. Lichtes hervorgerufenen Ungleichheiten in d. Bewegung der physischen Doppelsterne. Analyse der Bahn ξ Ursae majoris (Struve 1523). Ebd. 1 Mk. 20 Pf.

Falb, R., das Wetter u. der Mond. Eine meteorolog. Studie. Wien, Hartleben. 1 Mk. 50 Pf.

Forster, A., eine durch eigenthüml. Beziehungen zwisch. Planetenentfernungen u. Planetenmassen veranlasste neue Hypothese d. Entwicklg. d. Sonnensystems. Vortrag. Stuttgart, Metzler'sche Verl. 50 Pf.

Franz, J., Anleitg. z. Beobachtg. d. total. Sonnenfinsterniss in Ost- u. Westpreussen am Freitag, d. 19. August 1887 früh. Berlin, Friedländer & S. 30 Pf.

Harlacher, A. R., d. hydrometr. Beobachtungen im J. 1885. Tabellarisch u. graphisch dargestellt. Prag, Calve. 3 Mk.

Kalender, astronomischer, f. 1887. Hrsg. v. d. k. k. Sternwarte. Wien, Gerold's S. Kart. 1 Mk. 60 Pf.

Kalender, meteorolog., hrsg. v. W. Zenker. 1. Jahrg. 1887. Berlin, Asher & Co. Geh. 3 Mk.

Klein, H. J., Stern-Atlas f. Freunde d. Himmelskunde. 1. Lfg. Leipzig, Mayer. 1 Mk. 20 Pf.

Kühnert, F., üb. d. definitiven Elemente d. Planeten (153) Hilda. Wien, Gerold's S. 60 Pf.

Liznar, J., üb. d. Stand d. Normalharometers d. meteorolog. nst. in Wien gegenüber d. Normalharometern d. anderen meteorolog. Centralstellen Europa's. Ebd. 50 Pf.

Mahler, E., Untersuchung e. im Buche „Nahum" auf d. Untergang Ninive's bezogenen Finsternlss. Ebd. 80 Pf.

Möller, M., Wetter-Berather. Anleitung zum Verständniss u. zur Wochenbestimmung d. Witterung. Hamburg, Friederichsen & Co. 1 Mk. 20 Pf.

Nissl, G. v., Bahnbestimmg. d. Meteors v. 17. Juni 1885. Wien, Gerold's S. 30 Pf.

Oppolzer, Th., Ritter v., Bahnbestimmung der Planeten (237) Cölestina. Ebd. 30 Pf.

-- üb. d. astronom. Refraction. Ebd. 2 Mk. 60 Pf.

Romberg, H., genäherte Orte d. Fixsterne, von welchen in den astronom. Nachrichten Bd. 67 bis 112 selbständige Beobachtgn. angeführt sind. Für die Epoche 1853 hergeleitet u. nach den geraden Aufsteiggn. geordnet. Leipzig, Engelmann. 4 Mk.

Roth, F., d. Einfluss d. Reibung auf d. Ablenkung d. Bewegungen längs d. Erdoberfläche. Halle, Schmidt's Verl. 80 Pf.

Schurig, R., Himmels-Atlas, enth. alle m. blossen Augen sichtbaren Sterne beider Hemisphären. Fol. Leipzig-N., Gaehler. Kart. 3 Mk.

Veröffentlichungen d. grossherzogl. Sternwarte zu Karlsruhe. Hrsg. v. W. Valentiner. 2. Hft. Beobachtgn. am Medienkreis. Karlsruhe, Braun. Kart. 16 Mk.

Vierteljahrsschrift der astronom. Gesellschaft. Hrsg. v. E. Schönfeld u. H. Seeliger. 21. Jahrg. 3. Hft. Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Weiss, E., üb. d. Berechnung d. Präcession m. besond. Rücksicht auf d. Reduction e. Sternkataloges auf e. andere Epoche. Wien, Gerold's S. 1 Mk. 50 Pf

Woeikof, A., die Klimate der Erde. Nach dem Russ. 1. Thl. Jena, Costenoble. 10 Mk.

Physik.

Boltzmann, L., d. 2. Hauptsatz d. mechan. Wärmetheorie. Vortrag. Wien, Gerold's S. 50 Pf.

Braun, F., über Gesetz, Theorie u. Hypothese in der Physik. Antrittsrede. Tübingen, Fues. 80 Pf.

Calgary, A., u. J. N. Tenfelhart, d. elektro-magnetische Telegraph. I. die Grundlehren. Bearb. v. A. C. II. Batterien, Apparate u. Schaltungslehre. Bearb. v. J. N. T. Wien, Hof- & Staatsdruckerei. 6 Mk.

Exner, F., üb. d. Ursache u. d. Gesetze d. atmosphärischen Elektricität. Wien, Gerold's S. 1 Mk. 50 Pf.

Jungclaus, H. A., Magnetismus u. Deviation d. Kompasse in eisernen Schiffen. 2. Aufl. Bremerhaven, Tienken. Geb. 5 Mk.

Klein, H., Leitfaden u. Repetitorium der Physik m. Einschluss d. einfachen Lehren d. Chemie u. mathemat. Geographie. Leipzig, Teubner. Kart. 1 Mk. 60 Pf.

Klemenčič, J., Untersuchgn. üb. d. Verhältniss zwischen dem elektrostatischen u. elektromagnet. Masssystem. II. Wien, Gerold's S. 50 Pf.

Kleyer, A., d. elektr. Erscheingn. u. Wirkgn. in Theorie u. Praxis. 56.—59. Hft. Stuttgart, Maier. à 25 Pf.

Mascart, E., Handbuch d. statischen Elektricität. Deutsche Bearbeitg. v. J. G. Wallentin. 2. Bd. 1. Abth. Wien, Pichler's W. & S. 9 Mk.

Müller-Pouillet's Lehrbuch d. Physik u. Meteorologie. 9. Aufl. v. L. Pfaundler. 1. Bd. Braunschweig, Vieweg & S. 12 Mk.

Recknagel, G., Kompendium d. Experimental-Physik 2. Aufl. 1. Thl. Kaiserslautern, Tascher. pro 2 Thle. kplt. 15 M.; in 1 Bd. geb. 17 Mk.

Sternberg, M., geometr. Untersuchg. üb. d. Drehg. d. Polarisationsebene im magnet. Felde Wien, Gerold's S. 50 Pf.

Wüllner, A., Lehrbuch der Experimental-Physik. 4. Bd. Die

Lehre v. Magnetismus u. v. d. Elektricität. 4. Aufl. Leipzig, Teubner. 16 Mk. 80 Pf.

Zimmermann, W. F. A., Naturkräfte u. Naturgesetze. Ein allgem. verständl. Handbuch der Physik. 4. Aufl. v. B. Dürigen. 1.—3. Lfg. Berlin, Hempel. à 50 Pf.

Vermischte Schriften.

Annalen, mathematische. Hrsg. v. F. Klein u. A. Mayer. 28. Bd. (4 Hfte.) 1. Hft. Leipzig, Teubner. prcplt. 20 Mk.

Berichte üb. d. Verhandlgn. d. k. sächs. Gesellsch. d. Wissenschaften zu Leipzig. Mathemat.-physik. Classe. 1886. I—IV. Leipzig, Hirzel. 4 Mk.

Jacobi's, C. G. J., gesammelte Werke. 4. Bd. Hrsg. v. K. Weierstrass. Berlin, G. Reimer. 18 Mk.

Mittheilungen, mathemat.-naturwissenschaftl., hrsg. v. O. Bökler. III. Jahrg 1887. Tübingen, Fues. 2 Mk.

Sitzungsberichte der mathem.-physik. Classe d. k. b. Akademie d. Wissenschaften zu München. Jahrg. 1886. 2. Hft. München, Franz'scher Verl. 1 Mk. 20 Pf.

Sitzungsberichte der kais. Akademie d. Wissenschaften. Mathemat.-naturwissenschaftl. Classe. 2. Abth. Enth. d. Abhandlgn. aus d. Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie u. Astronomie. 93. Bd. 1.—5. Hft. Wien, Gerold's S. 17 Mk. 60 Pf.

Die in Fr. Manke's Verlag in Jena im 3. Jahrgange erscheinende

Naturwissenschaftlich-Technische Umschau.

Illustrierte populäre Halbmonatsschrift

über die Fortschritte auf den Gebieten

der angewandten Naturwissenschaft und technischen Praxis.

Für Gebildete aller Stände.

Unter Beteiligung hervorragender Mitarbeiter

herausgegeben von

Th. Schwartze,

Ingenieur in Leipzig.

hat in kürzester Zeit unter Technikern, Fabrikanten, Ingenieuren, Gross-Industriellen, Apothekern, in Berg- und Hüttenwerken, in höheren Schulen und in allen sich für obige Gebiete interessirenden Kreisen des In- und Auslandes die weiteste Verbreitung gefunden.

Preis pro Quartal durch Post oder Buchhandel bezogen 3 Mark.

Probehefte sind durch jede Buchhandlung, sowie direkt vom Verleger gratis und franco zu beziehen.

☞ Einschlägige Inserate finden zweckmässigste Verbreitung.

Litterarischer Bericht
XVIII.

Lehrbücher.

Die Grundlagen der Arithmetik unter Einführung formaler Zahlbegriffe dargelegt von Dr. Otto Reichel, Professor am Kgl. Kaiserin-Augusta-Gymnasium zu Charlottenburg, Dozent an der Kgl. landwirtschaftlichen Hochschule zu Berlin, Mitglied der Prüfungskommission für Landmesser daselbst. Hülfsbuch für den Unterricht. Teil I. Natürliche, algebraische, gebrochene Zahlen. Berlin 1886. Haude u. Spener. 32 S.

Der vorliegende 1. Teil, dem ein zweiter zur Behandlung der Irrationalen und Imaginären folgen soll, beschränkt sich auf die 4 ersten Operationen. Das Buch unterscheidet sich dadurch von den gewöhnlichen Lehrbüchern, dass es den logischen Inhalt der Doctrin nach aussen kehrt, zur Hauptsache macht und den verborgenen Gedanken nicht unausgesprochen lässt, während man sonst das Sachliche als eigentlichen Zweck in den Vordergrund zu stellen und das Begriffliche nur, soweit es zu deutlicher Auffassung nötig ist, nebenbei zu berücksichtigen pflegt. Es ist sehr anzuerkennen, dass in den ans Licht gezogenen begrifflichen Punkten keine Misgriffe vorkommen, und dass darunter gerade die wichtigsten getroffen sind. Folgende mögen hervorgehoben werden. Die Lehre beginnt mit der natürlichen Zahl, erweitert den Zahlbegriff in bestimmt ausgesprochenen Schritten und beweist die Gültigkeit aller Sätze für jede Erweiterung besonders. Die Wertermittelung eines Ausdrucks hat die Aufgabe ihn dekadisch darzustellen. Hiermit ist offenbar das Specielle statt des Allgemeinen ausgesprochen, wodurch aber auf jenem Standpunkte die Sache vielleicht nur um so deutlicher auf-

gefasst wird. Soll der Satz weiterhin ausreichen, so muss es heissen: der Ausdruck soll in beabsichtigter Form dargestellt werden, z. B. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ oder $ac+bc=(a+b)c$ oder umgekehrt. Jene kurze Stelle im Lehrbuch (S. 6) wehrt der in manchen Lehrbüchern stattfindenden Unklarheit, welche das transformirende Rechnen ($ac+bc=(a+b)c$) als ein Ausrechnen (Evalnation) hinstellen, das Ziel aber im Dunkeln lassen. Worauf endlich der Verfasser am meisten Gewicht legt, ist, dass der erweiterte Zahlbegriff durch das Fortgelten der Gleichungen und Sätze definirt wird, nicht also durch die Darstellbarkeit, die nur für gewisse Fälle gelten kann, also nicht die Negativen durch entgegengesetzte Richtungen, nicht die Brüche durch Teilung der Einheit. Die Rechtfertigung dieses ohne Zweifel ideell einzig richtigen Vorgehens, das jedoch aus pädagogischen Erwägungen bisher gemieden worden ist, steht nicht im Buche. Sie beruht darauf, dass kein Resultat der Schuldoctrin letztes Resultat, das Examen nicht Ziel des Unterrichts ist. Jede praktische Anwendung der Resultate hingegen führt ein partielles Ziel herbei. Hier muss das negative Resultat durch Addition oder durch subtractive Anwendung positiv, der Bruch durch Multiplication (einschl. verkleinerte Einheit) erst ganze Zahl werden. In diesem schliesslichen positiven ganzzahligen Resultate liegt die Bedeutung des in der Rechnung gebrauchten und aus ihr hervorgehenden Negativen und des Bruchs. Jene pädagogischen Bedenken aber lassen sich leicht beseitigen. Es ist in der Tat eine unabweisliche Forderung, dass der reine Gedanke, um vom Schüler aufgenommen zu werden, von einer Vorstellung begleitet sei. Der Gedanke der negativen und gebrochenen Zahl, der bis zu seiner Realisirung s. z. s. in der Luft schwebt, bedarf für die Lernenden einer begleitenden Vorstellung, und diese liefert ihm die specielle Darstellung durch entgegengesetzte Richtung und geteilte Einheit. Beide dienen also demselben Zwecke, zu welchem man allgemeinen Erklärungen Beispiele als Hülfe der Auffassung beigibt. Nicht ihre Anwendung, sondern die Basirung der Doctrin auf sie ist zu verwerfen.

Müssen wir nun gleich dem Gedanken der Bearbeitung beistimmen, so können wir doch die Ausführung nur als ersten Versuch, an dem noch viel zu verbessern ist, anerkennen. Der Ausdruck ist nicht immer exact. So z. B. ist die Erklärung des Addirens (S. 7.) nicht zutreffend: 5 Buchstaben $abcde$, als Summe von 2 Buchstaben und 3 Buchstaben, umfassen 2 Einheiten ab, 3 Einheiten abc, aber noch andre! Kein Wort sagt, dass letztere Einheiten andre sein sollen. Doch wollen wir hierbei nicht verweilen. Wesentlich ist auszusetzen, dass den Erweiterungen des Zahlbegriffs der Schlussstein fehlt, mit der welchem der weitere Begriff erst Eigentum des

Schülers wird. Sind -4 und $\frac{2}{3}$ einmal Zahlen, und soll ein Buchstab jede Zahl bedeuten können, so muss unter einem Buchstaben auch der negative und gebrochene Wert verstanden werden. So lange der Schüler $-p$ gewohnheitsmässig für das Zeichen einer negativen Zahl hält, hat er auch die Erweiterung nicht verstanden und weiss nicht, was sie bedeuten soll. Im Buche selbst, wo die Buchstaben durchweg natürliche Zahlen bedeuten, fehlt es nicht an Stellen, die zu dieser Gedankenlosigkeit verleiten. Dieser Mangel, der vielleicht hier ein formeller zu sein scheint, wird ein sachlicher in der Lehre von den Gleichungen, wo die Bedeutung des Buchstabens für die Gesuchte nicht auf natürliche Zahlen beschränkt sein kann. Ferner enthält das Buch die Erklärungen der Null, der Negativen und der Brüche, aber so versteckt, dass man Mühe hat zu finden, wo sie eigentlich stehen. Da man vom Schüler bei jeder Erweiterung verlangt, dass er von seiner Gewohnheit abgehen und seinen Begriff verändern soll, so muss auch die Stelle, von der an der neue Begriff gelten soll, deutlich gekennzeichnet und die Erklärung unumwunden und unvermischt mit andern Gedanken an die Spitze eines neuen Abschnitts gestellt sein. Ferner sind die Aussagen (S. 28.) über $\frac{a}{0}$ sofern sie diesem Zeichen eine Bedeutung als Zahl vorhehalten, unrichtig, und die Einschränkungen „im bisherigen Sinne“ und „zunächst“ einfach zu streichen. Was im Vorstehenden bemerkt ist, bedarf nur einer Correction, die keine Schwierigkeit hat. Es bleibt aber an einen wichtigen Punkt zu erinnern, der die neue selbständig productive Arbeit des Verfassers in Anspruch nimmt. Der sachliche Inhalt ist unter der Menge des Formellen und der der Logik dienenden Ausführungen zu sehr versteckt. Es muss dahin gestrebt werden, das Ganze einfacher und übersichtlicher zu gestalten. Wenn andre Lehrbücher die Logik hintansetzen, so steht ihnen der Rechtfertigungsgrund zur Seite, dass die Logik nicht durch Ueberlieferung in genauester Wortfassung, sondern durch Ausübung zur Aneignung gelangt. Es ist daher nicht ganz zu verwerfen, wenn sie lieber manches nicht zum Bewusstsein ziehen und dem späteren Nachdenken überlassen als es aussprechen, bevor ein genügendes Material zu Gebote steht, an dem es verständlich werden kann. Allein die Unmöglichkeit ist nicht erwiesen beide Forderungen zu vereinen, alle Punkte zum Bewusstsein zu ziehen und doch die Rücksicht auf die Fähigkeit des Schülers es zu verwerten in vollem Masse zu beobachten. Die rechte Einfachheit geht immer erst aus vollkommener Strenge hervor. Wir wollen daher wünschen, dass der Verfasser bei eventuellen Verbesserungen von dem einmal begonnenen richtigen Wege nicht wieder abweicht. Hoppe.

System der Aritbemetik uud Algebra als Leitfadeu für deu Uuterricbt iu höberou Scbulen. Von Dr. Hermauu Schubert, Oberlebrer an der Gelebrteuschule des Johauueums in Hamburg. Potsdam 1885. Aug. Steiu. 222 S.

Das Buch zeicbuet sich durch Strenge, Ausführlichkeit, Vielseitigkeit nnd eine der leicbteu Uebersicht dieueude frei gewählte Ordnung aus. Iu Betreff der Strenge ist anzuführen, dass der Verfasser unbeirrt durch ühlicbe, aber falsche pädagogiscbe Rücksichten, das ideell richtige Vorgeheu iu folgeudeu Punkteu gewäblt bat. Der Zahlbegriff gebt aus der uatürlicheu Zahl durcb snccessive Erweiterung, welche nach eiuander die Null uud die Negativeu, die Brüche die Irratioualeu und die Imaginären involvirt, bervor. Die Zablen in erweitertem Sinue werdeu nicht durch ihre für bestimmte Fälle mögliche Darstellung, sonderu durcb das hier so genannte Priucip der Ansuabmslosigkeit definirt. Der Bucbstab als Zeichen einer beliebigeu oder unbekauuteu Zabl bedentet die Zabl im erweiterten Siuue gemäss der jedesmal erreichteu Stufe. Ausführlicb nud vielseitig ist es, soferu es sich uicbt mit einer Darstellungsform begnügt, sondern alle erdenklicben Mittel uud Formeu zuzieht, durch welcbe jede Lebre verdeutlicht, vergegeuwärtigt nud zur Auwendnug fertig gemacht werden kauu. Definitioueu, Erläuteruugeu, Sätze u. s. w. werden in Formel, Wortausdruck uud Beispiel, ausserdem aber durch Darstellung der Zahl auf der geradeu Linie gegebeu. Mit dem Notwendigeu wird aucb das Nützliche vorbnuden. Aucb die Ausdehuung des Lebrstoffs überscbreitet die gewöhulicheu Greuzen. Besonders ist hervorzubebeu, dass vollständige Erkläruug des Begriffs der uueudlicheu Grössen gegebeu und auf den Begriff der Irratioualeu angewaudt wird. In Aubetracht der grossen Mouge vorgeführter Dinge bat die Ordnung mehr Wichtigkeit als sonst. Durcb gesonderte Numeriruug, und soweit es die Sacbe gestattet, gleichmässige Folge ist dafür gesorgt, dass das Erlernte jederzeit leicht wiedergefnnden werden kauu, die zur Auweudung aufgestellteu, im Gedächtniss zu behaltenden Sätze uud Formelu sicb nicht nuter deu Erkläruugeu, Betrachtungeu und Erläuterungen verbergen; welcbe vorübergehendem Zwecke dienen. Noch ist die höchst willkommeue Zugabe zu erwähnen, welcbe die anf jedeu Abschnitt folgenden bistoriscben Notizen gewähreu. Hier werden die Zeit uud die Urbeber der einzelueu Einführungen uud Tbeorien knrz aufgeführt.

Bei den so grosseu Vorzügen fiudeu sicb jedoch auch 3 Misgriffe, die sämtlicb daraus bervergeheu, dass die betreffendeu Lehren zu früb vorgetrageu sind. Die Darstelluug einer Zahl durch Scala auf der geraden Linie hat offenbar nur Siuu, nachdem anf der Linie ein Nullpunkt festgesetzt ist. Da dies die Erklärnng der Null vor-

aussetzt, so kann jene Darstellung nicht wol anders als nach erster Erweiterung eintreten. Im Buche dagegen ist sie schon vor aller Erweiterung eingeführt und sogar zur Addition verwandt; der erste Scalenstrich ist mit 1 numerirt, und unbeachtet gelichen, dass bei Addition mittelst Aneinanderlegens zweier Scalen (wie dies zu geschehen hat, ist nicht gesagt) immer eine Einheit verloren geht; denn legt man zwei Scalen mit 7 und 5 Strichen dicht zusammen, so fällt der Eins-Strich der zweiten auf den Sieben-Strich der ersten, und man erhält nur 11 statt 12 Striche. Zweitens ist die Associationsfreiheit von der Addition schon auf die Subtraction ausgedehnt, ehe von negativen Zahlen etwas bekannt war. Es geschieht dies mit der Gleichung $a-(b-c)=a-b+c$. Hier ist vorausgesetzt $b>c$ und $a>b-c$, aber nicht $a>b$, daher hat die rechte Seite für $a<b$ noch keinen Sinn. Wollte man den Fall $a<b$ vorläufig ausschliessen, so würde man in eine verwickelte Casuistik verfallen. Es leuchtet ein, dass die Auflösung der Klammern um den Subtrahenden erst nach Einführung der Negativen gelehrt werden kann. Drittens steht die Lehre von den unendlichen Grössen an der unrechten Stelle, nämlich bei zweiter Erweiterung. Erst bei Einführung der Irrationalen ist sie notwendig und fruchtbar, bis dahin ist sie müssig und darum Quelle von allerlei Unklarheiten. Letztere werden durch manche Aeusserungen sehr begünstigt. Es ist zwar nirgends $\pm\infty$ eine Erweiterung des Zahlbegriffs genannt. Da jedoch das Princip der Ausnahmslosigkeit proclamirt ist, und sonst kein Fall des Gegenteils vorkommt, so kann das Schweigen darüber, dass $\frac{a}{0}$ eine Ausnahme ist und bei keiner Erweiterung von Begriffen und Betrachtungsweisen aufhört Ausnahme zu sein, nicht befriedigen. Die Aeusserungen, welche in §. 11. und §. 13. diesen Punkt berühren, sind nur geeignet das Gute wieder zu verderben, Zweifel und Unklarheit in die anfänglich richtige Darstellung hineinzuziehen. In §. 11. steht: „$a:0$ muss zunächst für unausführbar erklärt werden". Hiernach bleibt eine Ausführbarkeit doch vorbehalten! Obwol hier noch weiter nur von Unausführbarkeit die Rede ist, so folgt in §. 13.: „$\frac{a}{0}=\infty$ bedeutet, wenn a positiv ist, folgendes etc.". Vorher geht die Erklärung des Grenzwerts nebst der Bemerkung, dass man das Zeichen lim in gewissen Fällen weglässt. Hier ist umgekehrt der Grenzwert 0 statt der Unendlichkleinen x geschrieben, und gerade in einem Falle, wo es unzulässig ist, nämlich bei Stetigkeitsunterbrechung. Ein exacter Ausdruck, das musste vor allem gesagt werden, kann $\frac{a}{0}$ nicht sein. Bei Einführung als

Symbol ist dem Verfasser entgangen, dass das Vorzeichen nicht bloss von a, sondern auch vom Nenner x abhängt, dass es also für positives und negatives a heissen müsste $= \pm \infty$. Dass man aber überhaupt bei erster Erklärung einer neuen Sache Symbole einführt, ist so unsinnig als die abgekürzte Schreibung eines erst mitzuteilenden, bis dahin unbekannten Namens. Hiermit zugleich ist zu verwerfen, was über die Form $\frac{0}{0}$ gesagt ist. Die Gleichung $0.x = 0$ sagt über x nichts aus; daraus zu ziehen $x = \frac{0}{0}$ ist falsch. Alles zusammengefasst: mit 0 kann nicht dividirt werden, weder in der Arithmetik noch in der Analysis. Hätte der Verfasser die Lehre von den Unendlichen vorgebracht, wo sie sofort nützlich ist, und sie zu Beweisen für die Sätze von den Irrationalen, über die er leicht hinweggeht, verwandt, so würde er wahrscheinlich nicht auf jene ganz unnützen Symbole verfallen sein, weil es hier auf exacten Ausdruck ankommt.

Die Abschnitte des Buches sind: Einführung in die arithmetische Sprache, Operationen erster, zweiter Stufe, Anwendungen der Gesetze beider, Quadratisches, die 3 Operationen dritter Stufe, Combinatorik, Kettenbrüche, Diophantische Gleichungen. Charakteristisch ist zuerst, dass ein grosser Teil der „Rechengeschäfte" gleich vorweg behandelt wird. Manches muss freilich erst hinzukommen, wo die Gegenstände erklärt sind. Unter den „Anwendungen" sind enthalten: Proportionen, Zahlentheorie, Zahlsysteme historisch, lineare Gleichungen, arithmetische Reihen. Im Abschnitt „Quadratisches" worden die Irrationalen und die Imaginären eingeführt und die quadratischen Gleichungen behandelt. Die Potenzen folgen erst im nächsten Abschnitt. Hoppe.

Lehrbuch der Arithmetik und Algebra mit zahlreichen Aufgaben, und einem Anhange, der systematisch geordnete Gleichungen enthält, für höhere Lehranstalten und zum Selbstunterricht. Von F. Henrich, Oberlehrer am Realgymnasium in Wiesbaden. Zweite, umgearbeitete und erweiterte Auflage. Wiesbaden 1886. Chr. Limbarth.

Zufolge der Abfassung, obwol Titel und Vorrede darüber schweigen, ist dies Buch nicht für Ausbildung des mathematischen Urteils, sondern allein für Aneignung der Fertigkeit im Rechnen, Beherrschung des Gegenstandes und Lehrgebiets bestimmt; es kann daher den Forderungen des höhern Unterrichts nicht genügen, ist mithin auch kein geeignetes Lehrbuch zum Gebrauch an höheren Lehranstalten, sondern mehr für Mittel- und Fachschulen förderlich, weil eine wesentliche Seite der mathematischen Bildung darin ganz un-

berücksichtigt bleibt. Charakteristisch ist zunächst, dass gleich anfangs die Zahl durch ihre Darstellung in Strecken auf einer geraden Linie erklärt und, und da zu dieser Erklärung auch weiterhin keine Ergänzung hinzukommt, stets als identisch mit der Strecke betrachtet wird. Hiernach ist also die unbenannte und anders benannte Zahl überhaupt weder definirt noch erläutert. Nichtsdestoweniger kommt die Zahl als Anzahl nicht selten im Buche vor; die Erklärung wird also wieder vergessen, und die logische Discrepanz ignorirt. Durch die Darstellung der Zahl in Strecken werden nun die Null, die Negativen, die Brüche und die Irrationalen erklärt. Es hätte ebenso wie die Brüche auch jede Multiplication mit Ganzen und mit Brüchen durch veränderte Einheit erklärt werden können. Aber hier gerade wird inconsequenter Weise auf die natürliche Erklärung durch Addition gleicher Zahlen eingelenkt. Die angeblichen Beweise, z. B. für die Vertauschbarkeit der Factoren, sind oft nichts weiter als specielle Bestätigungen. Soviel zur Begründung des vorstehenden Urteils. Als Anweisung zum Rechnen betrachtet ist das Lehrbuch vorzüglich. Es umfasst ausser den 7 Grundoperationen die arithmetischen und geometrischen Reihen, die Combinatorik, die Kettenbrüche, die Wahrscheinlichkeitsrechnung, die Gleichungen 1. 2. und 3. Grades und die Lehre von den Imaginären. Auf jeden Abschnitt folgen Uebungsbeispiele. Für die Gleichungen enthält ein besonderer Anhang noch eine reiche Sammlung derselben.

Hoppe.

Leitfaden für den Geometrie-Unterricht in Mittelschulen und gehobenen Volksschulen. Von M. Kröger, Hauptlehrer in Hamburg. Hamburg 1886. Otto Meissner. 94 S.

Dies Buch gibt aus der gesamten Geometrie das Wichtigste für praktische Anwendung von Seiten derer, die nicht Mathematik studiren wollen. Die durchaus sorgsame und umsichtige Bearbeitung hat im Auge die Entwickelung genügender Raumanschauung, wichtiger mathematischer Begriffe und Erteilung der für nötig erachteten Kenntnisse. Die Darstellungsform ist die in kurz gefassten Sätzen, in deren Zusammenhang eine meist vorhergehende, auf das Resultat hinleitende Erläuterung, seltener eine nachfolgende Grundangabe Einblick verschafft, während angeknüpfte Fragen und Constructionsaufgaben zur Selbsttätigkeit der Schüler auffordern. Das Elementarste ist am eingehendsten und ausführlichsten behandelt, im weitern Fortgang tritt mehr und mehr auswählende Beschränkung ein. Die Lehrgegenstände sind: Uebersicht der Gebilde und ihr Verhältniss, Linien und Winkel, Dreiecke und Vielecke, Congruenz, Parallelo-

gramme und Trapeze, Flächenmessung, Kreis und Kreismessung, Proportionalität und Aehnlichkeit, Lage der Geraden und Ebenen im Raume, Körper, Körperberechnung, einige Formeln für Dreiecke, Constructionen mittelst Kreisbogen, Kegelschnitte. Die Figuren stehen im Texte. H.

Die Darstellung der Planimetrie nach induktiver Methode zum Gebrauche an höheren Lehranstalten und zum Selbstunterichte. Von Ferd. Behl, Seminarlehrer. Mit 185 in den Text gedruckten Figuren. Hildesheim 1886. August Lax. 159 S.

Das Eigentümliche der Darstellung besteht in der Umstellung der Reihenfolge, welche sonst lautet: Lehrsatz, Voraussetzung, Behauptung, Beweis — hier hingegen: Voraussetzung, Beweis, Behauptung Lehrsatz. So steht wirklich überall geschrieben: der Verfasser hat nicht einmal soviel für das Verständniss getan, dem veränderten Lehrgang auch die zutreffenden Namen anzupassen. Mit dem Beweise sind Folgerungen gemeint, deren Ziel dem Schüler noch Geheimniss ist, und zwar sollen diese durch Fragen entwickelt werden, durch deren Beantwortung der Schüler die Meinung gewinnen soll, er habe den daraus hervorgehenden Satz selbst gefunden. Was ferner Behauptung heisst, ist vielmehr das Schlussergebniss der Reihe, von Folgerungen; durch dessen Formulirung entsteht der Lehrsatz. Bei Wiederholung soll dagegen der umgekehrte Weg eingeschlagen werden. Der Vorfasser beruft sich auf seine langjährige Erfahrung, indem er diese Methode für die einzig richtige erklärt. Die Gestaltung des Vorliegenden in der Ausführung macht nicht den Eindruck, als ob dadurch irgend Interesse erweckt werden könnte. Solange der Schüler den Satz oder die Aufgabe nicht kennt, um die es sich handelt, fehlt ihm das Ziel aller Betrachtung, die Fragen erscheinen bedeutungslos, er muss sich, ohne sich selbst leiten zu können, beständig vom Lehrer im Dunkeln herumführen lassen und wird wol meistens am Ziele angelangt sich erst sagen lassen müssen, was herausgekommen ist. Dass mit einer solchen Methode gute Erfolge gewonnen worden seien, wird behauptet; ebenso wird aber auch behauptet, dass die sogenannten Beweise folgerichtig seien, während doch ein angeblicher Beweis für den Parallelensatz das Gegenteil zeigt. Die Lehrgegenstände sind: Linien und Winkel, Dreieck, Viereck, Vieleck, Kreis, ein- und umschriebene Figuren, Flächengleichheit, Ausmessung, Aehnlichkeit, Flächenverhältniss. Hierauf folgt eine Sammlung von Aufgaben aus der berechnenden Geometrie. Die Figuren stehen im Texte. H.

Erster Kursus der Planimetrie. Für Gymnassien, Real- und Bürgerschulen und zum Gebrauche für Hauslehrer bearbeitet von Dr. August Wiegand. Dreizehnte, verbesserte Auflage. Mit 102 Holzschnitten. Halle a. S. 1886. H. W. Schmidt. 99 S.

Die gegenwärtige Anflage unterscheidet sich wesentlich dadurch von der vorhergehenden, dass der Parallelentheorie ein Axiom zugrunde gelegt ist, nämlich folgendes: Durch einen Punkt lässt sich mit einer Geraden immer eine und nur eine Parallele ziehen. Hiermit ist eine Berichtigung vollzogen, andere sind noch zu erwarten. In der Einleitung § 9. steht noch immer: Gleiche Grösson darf man in allen Aussagen für einander setzen. Für Grössen in abstracter Bedeutung — wir sagen dann „Werte" — hat Gleichheit mehrerer keinen Sinn. Ist also von Substitution die Rede, so können nur mehrere Repräsentanten desselben einen Wertes, Ausdrücke, Linien, Flächen u. s. w. gemeint sein; man setzt einen Repräsentanten für den andern, der Wert bleibt, was er ist. Dann aber trifft der Satz offenbar nur zu bei Aussagen über Grössen, nicht über Gestalt und Lage. Der vorliegende erste Cursus umfasst die Lehre von der Geraden, dem Kreise, den Winkeln und Parallelen, Dreiecken, Vielecken, Parallelogrammen, Linien und Winkeln und Figuren am Kreise. Hierauf folgt eine Sammlung von Sätzen und Aufgaben zur Uebung.

H.

Wiegands Lehrbuch der Planimetrie. Dritter Cursus der Planimetrie zugleich als Vorbereitung auf die neuere Geometrie. Für den Schulgebrauch bearbeitet von Friedrich Meyer, Oberlehrer am Stadt-Gymnasium zu Halle. Dritte, vollständig umgeändorte Auflage. Mit Holzschnitten. Halle a. S. 1885. H. W. Schmidt. 95 S.

Die erwähnten Umänderungen sind notwendig gewesen wegen grosser Mängel im Ausdruck und in der Zusammenordnung, sowie wegen einer Reihe irrtümlicher Behauptungen. Das Buch reiht sich denjenigen Hülfsmitteln an, welche in die Kenntniss der projectivischen Geometrie einführen. Als Schulbuch ist es unter der Voraussetzung, dass in der Prima der Realgymnasien die Elemente der projectivischen Geometrie einen Unterrichtsgegenstand bilden, zum Lehrbuch dafür bearbeitet. Die darin behandelten Gegenstände sind der Reihe nach: Transversalen, anharmonisches Verhältniss und harmonische Teilung, Aehnlichkeitspunkte, perspectivische und schiefe Lage, Inversion, Pol und Polare, Potenz, Potenzlinie, Potenzkreis, Aehnlichkeitspolaren, Tactionsproblem des Apollonius, Maxima und Minima ebener Figuren.

H.

Die analytische und projektivische Geometrie der Ebene, die Kegelschnitte auch nach den Methoden der darstellenden und der elementar-synthetischen Geometrie mit Uebungsaufgaben für höhere Lehr-Anstalten und für den Selbstunterricht bearbeitet von Dr. Heinr. Funcke, Oberlehrer an der Ober-Realschule in Potsdam. Potsdam 1885. Aug. Stein. 107 S.

In der Abfassung des vorliegenden Buchs hat den Verfasser die Absicht geleitet alles das darin zusammenzustellen, was den Schülern der Oberrealschule aus den Lehren über die ebenen Curven mitzuteilen erlaubt und den Studirenden der mechanischen Technik zu kennen und zu verstehen nötig ist. Die Form des Vortrags ist die pragmatische, der Lehrgang der synthetische, jedoch mit angemessener Benutzung der Hülfsmittel, welche die projecktivische und analytische Geometrie darbietet. Zu den letztern werden gegen Ende auch die Differentialrechnung zugezogen, dagegen bleibt ausgeschlossen, was Integralrechnung erfordert. Die Kegelschnitte werden aus dem Kegel durch Projection hergeleitet. Die Lehrgegenstände sind der Reihe nach: der Punkt, die Gerade, der Kreis, die Kegelschnite, eine grössere Anzahl anderer, algebraischer und transcendenter ebener Curven. H.

Lehrbuch der Stereometrie. Für das Selbststudium bearbeitet von W. Burckhardt, Verfasser der Mathematischen Unterrichtsbriefe. Mit vielen in den Text gedruckten Holzschnitten. Leipzig (1886) Gressner u. Schramm. 133 S.

Eigentümlich ist an dem Buche der Plauderstil des Vortrags, in welchem jeder Gegenstand mit grösst möglicher Dehnung der Rede dem Leser vorgeführt wird, während der wirklich didaktische Fortschritt ganz concinn, kein Wort zu wenig oder zu viel, in gebräuchlichen Zeichen mit der Figur daneben, sich eng und ohne einen Wink von da an aufzumerken daran schliesst. Es ist als habe der Verfasser beabsichtigt, dem Schüler, indem er ihn 5 Minuten unterhält und nur 1 Minute Denken von ihm verlangt, den Eindruck zu geben, als sei ihm die Doctrin fast spielend beigebracht worden. Die behandelten Gegenstände sind die gewöhnlichen: die Ebenen und die geraden Linien, die Lage zweier Ebenen zu einander, körperliche Ecken, Polyeder, Cylinder, Kegel, Kugel, Berechnung der Kugelteile, die regelmässigen Polyeder. Einzelne Aufgaben kommen vor. Lösungen im Anhang. H.

Lehrbuch der sphärischen Trigonometrie nebst vielen Beispielen über deren Anwendung zum Gebrauche an höheren Lehranstalten und beim Selbststudium. Von Dr. Carl Spitz. Dritte, durchgesehene Auflage. Mit 42 in den Text gedruckten Figuren. Leipzig 1886. C. F. Winter. 175 S.

Zum Zweck, das Studium der sphärischen Trigonometrie leichter und instructiver zu machen, ist erstlich eine Reihe von Sätzen über die sphärischen Gebilde vorausgeschickt, ferner die Herleitung der Relationen mit denen am rechtwinkligen Dreieck begonnen. Es folgt dann die Herleitung der Relationen zwischen 4, dann 5, dann 6 Stücken des allgemeinen Dreiecks, dann die Berechnung des Flächeninhalts, dann die Anwendung zur Lösung verschiedener Aufgaben.

H.

Lehrbuch der Physik für höhere Bürgerschulen und technische Lehranstalten. Von Dr. W. H. Behse, Rektor der städtischen Gewerbeschule in Dortmund. Mit 229 in den Text gedruckten Abbildungen. Weimar 1887. Bernhard Friedrich Voigt. 229 S.

Für die Bearbeitung und Anordnung des Lehrbuchs ist der Schulgebrauch massgebend gewesen; dem gemäss ist der Lehrstoff auf die Classen verteilt. Die Reihenfolge richtet sich nach dem Standpunkte der mathematischen Vorkenntnisse: Die Abschnitte über allgemeine Eigenschaften der Körper, Wärme, Magnetismus und Elektricität, welche in qualitativer Hinsicht viel Erklärung erfordern, werden nur nach dieser Seite behandelt und gehen deshalb voraus. Dann folgt das Licht, wo die mathematische Betrachtung nicht fehlen kann, zuletzt die Mechanik, wo sie Hauptsache ist. Ein Anhang über den Schall ist nicht für Bürgerschulen bestimmt. Preis 4 mk, 50 pf.

H.

Lehrbuch der Physik. Mit einem Anhange: Die Grundlehren der Chemie und der mathematischen Geographie. Von Dr. Peter Münch, Realgymnasialdirektor. Mit 326 in den Text gedruckten Abbildungen und einer Spektraltafel in Farbendruck. Achte Auflage. Freiburg i. Br. 1886. Herder. 443 S.

Frühere Auflagen sind im 217. 241. 251. und 274. litt. Berichte besprochen. Die achte unterscheidet sich durch eine Angabe über den Wärmeausdehnungscoefficienten und durch Rücksicht auf Uebersichtlichkeit in Anordnung und Druck. H.

Vermischte Schriften.

Bulletin de la Société Mathématique de France. Publié par les Secrétaires. Tome XIV. Paris 1886. An siége de la Société.

Der 14. Band enthält folgende Abhandlungen:

Bioche: Ueber eine Abhandlung von Poisson.

G. Fouret: Ueber die Untersuchung zweier ebenen Curven oder Flächen, deren Punkte sich zugleich durch Homologie und durch reciproke Polaren entsprechen. — Ueber eine Verallgemeinerung des Koenig'schen Satzes betreffend die lebendige Kraft eines materiellen Systems. — Ueber eine Art von Transformation der Determinanten.

Maurice d'Ocagne: Ueber eine recurrente Reihe. — Ueber gewisse Reihen irreductibler Brüche.

Paul Tannery: Ueber ein Problem von Fermat.

Danthevillo: Ueber den Hypercycle und die Theorie der Polarcykel.

H. Picquet: Note über das Plücker'sche Konoid.

H. Poincaré: Ueber die Determinanten unendlich hoher Ordnung.

A. E. Pellet: Ueber die Gleichung 4. Grades und die elliptischen Functionen.

De Presle: Ueber die Zerlegung einer quadratischen Form in eine Summe von Quadraten linearer und unabhängiger Formen. — Ueber die Entwickelung der elliptischen Functionen in trigonometrische Reihen. — Multiplication zweier Determinanten desselben Grades.

Nou: Neue Construction der Selbstschattencurve einer Rotationsfläche und deren Tangente in beliebigem Punkte.

Emile Lemoine: Einige Fragen in Bezug auf das Studium der Antiparallelen der Seiten eines Dreiecks.

J. Deruyts: Ueber den Wert des Restes der Näherungsformeln für die Berechnung der bestimmten Integrale. H.

Litterarischer Bericht
XIX.

Sammlungen.

Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben aus der Stereometrie. Im Anschluss an nachgelassene Papiere des Oberlehrers Dr. Kretschmer bearbeitet von Dr. H. Thieme, ord. Lehrer am Realgymnasium zu Posen. Leipzig 1885. B. G. Teubner. 92 S.

Dies Buch füllt unzweifelhaft einen bisher vorhandenen Mangel aus. Während immer neue Sammlungen von Aufgaben jeder Art, vorzugsweise aber von Constructionsaufgaben, für Uebungen in der Planimetrie erscheinen, gibt es zu gleichem Zwecke für die Stereometrie noch äusserst wenig Uebungsstoff, und dieser beschränkt sich in unverhältnissmässigem Grade auf Rechenaufgaben. Der Vorfasser findet keinen Grund dieser Ungleichheit in der Sache selbst; er sagt vielmehr im Vorwort: „Und doch ist die Stereometrie durchaus nicht in höherem Grade eine rechnende Wissenschaft als die Planimetrie". Diese Aeusserung widerlegt sich bei jeder näheren Betrachtung. Schon die factische Gestaltung der Doctrin zeigt, dass die Stereometrie mehr in ein Rechnen übergeht als die Planimetrie. Der Lehre von den Geraden und Winkeln entspricht die Lehre von der Lage der Geraden und Ebenen im Raume. Diese elementarsten Grundlehren sind das einzige, worin auf beiden Seiten in voller Allgemeinheit ohne Ausscheidung der räumlichen Qualitäten die Anschauung den Lehrstoff bewältigt. Den Lehren von Congruenz und Aehnlichkeit entsprechen nur partiell Specialbetrachtungen, die kein Thema zu erschöpfen streben. Die sphärische Geometrie als Analogon der Kreislehre lenkt bald in die Trigonometrie, d. h. in das Rechnen, ein. Auch in Betreff der Flächengleichheit, welche zu so vielen Verwandlungsaufgaben Anlass bietet, ist von der analogen Körperverwandlung nicht die Rede. So ist auch die höhere synthetische

Geometrie viel fruchtbarer im Gebiete der Ebene als des Raumes. Die Erklärung der ungleichen Gestaltung liegt sehr nahe. Für das unendlich weitere Gebiet der räumlichen Gebilde mit entsprechend weiterer qualitativer Mannichfaltigkeit besitzen wir doch keine entsprechend erweiterten, sondern nur dieselben Geisteskräfte. Daher sind wir in der Stereometrie früher als in der Planimetrie genötigt die Qualitäten auf Quantitäten zurückzuführen. Demnach ist nicht nur die Theorie, namentlich die Schuldoctrin, auf Seiten der Stereometrie in höherem Grade rechnend, sondern muss es auch der Natur der Sache nach sein. Handelt es sich aber um Uebungsaufgaben, so wird jene Ungleichheit teils gehoben, teils compensirt. Zunächst fällt bei der Uebungsaufgabe der Gesichtspunkt der Allgemeinheit ganz weg. Fehlt also auch die analoge Theorie für manche Gebiete der Planimetrie, so gibt es doch eine unbegrenzte Menge instructiver Specialfälle, die mit Anwendung planimetrischer Sätze zu lösende, geeignete Aufgaben zur Stereometrie liefern. Ferner lassen sich die räumlichen Gebilde durch Projectionen auf ebene reduciren, d. i. die qualitative Mannichfaltigkeit durch Isolirung verringern. Auch hierin ist die Aufgabe nicht an die Grenzen der Theorie gebunden; denn projiciren im einzelnen Falle kann der Schüler auch ohne Theorie der Projection. Dieses und manches andre ist nun im vorliegenden Buche recht vielseitig zu Aufgaben benutzt. Offenbar ist es weit schwieriger, bei so complicirter Sachlage instructive Aufgaben zusammenzufinden; als in der Planimetrie, wo der Stoff unmittelbar entfaltet vorliegt, und mag sich wol daraus der bisherige Mangel zum Teil erklären. Um so verdienstlicher und dankenswerter ist das Unternehmen, welches bahnbrechend mit der Bewältigung der Schwierigkeit einen Anfang macht. Das Buch ist in 14 Abschnitte geteilt. Der 1., 2., 9. und 10. Abschnitt führen durch Uebungen in das Darstellungsverfahren ein. Specielle Gebilde werden in den übrigen die Ecken, das Prisma, die Pyramide, die Polyeder, Cylinder, Kegel, Kugel, geometrische Oerter, Potenzörter, Pole und Polaren, das Tactionsproblem, die Kegelschnitte behandelt. Die Aufgaben sind teils construirend, teils abzählend oder sonst beurteilend, nur wenige berechnend. H.

Sammlung von arithmetischen und algebraischen Fragen und Aufgaben, verbunden mit einem systematischen Aufbau der Begriffe, Formeln und Lehrsätze der Arithmetik, für höhere Schulen. Von Dr. Hermann Schubert, Oberlehrer an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Erstes Heft: Für mittlere Klassen. Zweite Auflage. Potsdam 1886. Aug. Stein. 224 S.

Die erste Anflage ist im 2. litt. Bericht S. 21 besprochen worden. In der 2 ten sind noch eingekleidete Gleichungen hinzugekommen, im übrigen stimmt sie mit der ersten überein. H.

Flächen- und Körperberechnung in Lehrsätzen und Aufgaben nebst Regeln und Uebungsbeispielen aus der Arithmetik und Algebra zum Gebrauche für Navigationsschulen. Von P. Seelhoff. Dritte, veränderte und vermehrte Anflage. Bremen 1886. M. Heinsius. 106 S.

Das Buch besteht aus 2 Teilen: der erste enthält Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra, der Reihe nach über das Rechnen mit gemeinen Brüchen, mit Decimalbrüchen, mit Zahlen, die Vorzeichen haben, mit Potenzen, mit Wurzeln, mit Logarithmen, über die Auflösung und Reduction von Gleichungen, einiges über Geldrechnung und über Teilbarkeit. Die Regeln sind in der neuen Anflage vor jeder Classe von Aufgaben ausgesprochen. Die Aufgaben in den meisten Rechnungsarten sind rein numerisch, nur bei einigen, wo es sich um die Ausdrucksform handelt, kommen Buchstaben in Anwendung. Aufgaben aus der Praxis, deren Ansatz erst zu finden ist, sind vorhanden, wiewol nur in geringer Anzahl. Der zweite Teil des Buches enthält die Lehre von der Berechnung der Flächen und Körper (mit Anwendung auf die Segelflächen) an welche sich Aufgaben anschliessen. Die Inhaltsformeln sind am Schlusse zusammengestellt. Viele Aufgaben sind durch neue ersetzt. H.

Mathematische Aufgaben zum Gebrauche in den obersten Klassen höherer Lehranstalten. Aus den bei Entlassungsprüfungen an preussischen Gymnasien und Realgymnasien gestellten Aufgaben ausgewählt und mit Hinzufügung der Resultate zu einem Uebungsbuche vereint von Prof. H. C. E. Martus, Direktor des Sophien-Realgymnasiums in Berlin. Zweiter Teil: Resultate. Fünfte Anflage. Leipzig 1883. C. A. Koch. 294 S.

Die 3. Anflage der Aufgaben ist im 223. litt. Ber. S. 29, die 4 te im 248. l. B. S. 39, die 3. Anflage der Resultate im 231. l. B. S. 36 besprochen. Mit Resultaten werden nicht bloss die sich ergebenden Zahlen und algebraischen Ausdrücke, sondern die erschöpfenden Angaben, welche den in jeder Aufgabe enthaltenen Fragen genügtun, bezeichnet. H.

Dr. Ernst Kleinpaulsche Aufgaben zum praktischen Rechnen. Für Gymnasien, Realgymnasien, sowie für mehrstufige Bürger- und Töchterschulen. Zwölfte, gänzlich neu bearbeitete Auflage von Dr. F. Mertens. Bremen 1886. M Heinsius. 94+76+144 S.

Vorstufe zu den Dr. Ernst Kloinpaulschen Aufgaben zum praktischen Rechnen. Für die Vorschulen der Gymnasien und Realgymnasien, sowie für die Unterklassen der mehrstufigen Bürger- und Töchterschulen. Von Dr. F. Mertens. Bremen 1886. M. Heinsius. 76 S.

Diese Aufgabensammlung zeichnet sich aus durch erschöpfende Gründlichkeit und Vielseitigkeit, mit welcher zuerst eine völlige Vertrautheit mit dem Zahlengebiet, seiner Verwendung und Handhabung erzielt, dann bei Einübung der Rechnungsarten jede in der gemeinen Praxis auftretende Frageform berücksichtigt wird. Die 12. Auflage unterscheidet sich von allen früheren durch die Einführung der Decimalbruchrechnung und aller Consequenzen derselben. Zu letztern gehört namentlich der Wegfall der mehrfachen Schreibung mehrfacher Benennung und der Reduction der Benennungen auf einander, soweit diese in Decimalverhältnissen stehen, wie es in unserer Zeit fast durchgängig in den europäischen Münz-, Gewichts- und Massordnungen der Fall ist. Die Sammlung bestand früher aus 2 und besteht jetzt aus 3 Heften. Das erste enthält die 4 Grundrechnungen in ganzen unbenannten, einfach und mehrfach benannten Zahlen, sowie die einfachsten Fälle der Bruchrechnung; das zweite die gemeinen Brüche, die Decimalbrüche und die einfachsten Fälle der bürgerlichen Rechnungsarten; das dritte Verhältnisse und Proportionen, Procent-, Gesellschafts-, Mischungs-, Münz-, Wechsel- und Warenrechnungen, Contocorrente, Quadrat- und Kubikwurzeln, Flächen- und Körperberechnungen. Die Vorstufe behandelt in 3 Cursen das Zahlengebiet von 1 bis 1000. H.

Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene mit den Resultaten für höhere Lehranstalten und für den Selbstunterricht. Von Dr. Oskar Janisch, weil. Direktor des Realgymnasiums zu Landeshut in Schl. Herausgegeben von Dr. H. Fnucko, Oberlehrer an der Ober-Realschule in Potsdam. Potsdam 1886. Aug. Stein. 200 S.

Diese reiche Sammlung von Aufgaben, vom Director Janisch grösstenteils selbst gefunden, von seinem Sohne zusammengestellt und abgesehen von einigen Vereinfachungen unverändert vom Herausgeber beibehalten, bietet Gelegenheit zur Einübung des Coordinatengebrauches durch Beispiele in unerschöpflicher Menge, wiewol nur in geringer Ausdehnung der Mannichfaltigkeit. In allen Aufgaben wird die Bestimmung des Ortes eines Punktes gefordert, der unter gegebenen Bedingungen variirt. Sowol die gegebenen Raumgebilde, nach welchen das Buch eingeteilt ist, als auch die resultirenden Oerter sind ausschliesslich Gerade, Kreise, Parabeln, Ellipsen, Hy-

perheln. Es hat an sich Interesse die Kegelschnitte in einer so vielfachen Entstehung kennen zu lernen. Das Verfahren der Lösung wird in den Aufgaben selbst nicht gezeigt noch angedeutet. Statt dessen sind ausgeführte Lösungen ausgewählter Beispiele als Einleitung vorausgeschickt. Aus diesen möchte sich indes die Methode schwerlich erkennen lassen. H.

A synopsis of elementary results in pure mathematics: containing propositions, formulae and methods of analysis, with abridged demonstrations. Supplemented by an index to the papers on pure mathematics which are to be found in the principal journals and transactions of learned societies both english and foreign, of the present century. By G. S. Carr, M. A. London 1886. Francis Hodgson. Cambridge, Macmillan and Bowes. 935 S.

Das Werk ist ein Versuch alle Sätze der Mathematik geordnet zusammenzustellen. Die Reihenfolge ist die didaktische, so dass durch Ergänzung aller Deductionen ein universelles Lehrbuch entstehen würde. Nur sind über diesen Entwickelungsgang zwei Teilungsprincipe gestellt. Der erste Hauptteil enthält die elementare Mathematik, und zwar erst Arithmetik, dann Geometrie, der zweite die höhere Mathematik, erst die reine Analysis, dann die synthetische, dann die analytische Geometrie. In der Analysis kann man die Grenze der erreichten Stufe finden. Sie wird nur bis zu gewissem Punkte verfolgt; es sind z. B. die elliptischen Functionen ausgeschlossen, und die Geometrie geht nur um ein geringes über die Gebilde 2. Grades hinaus in die Flächentheorie ein. Jedenfalls ist die Ausdehnung des Werkes weit grösser als es der Titel verspricht. Die Bearbeitung zeugt von grossem Tact und Fleiss in der Auswahl derjenigen Angaben, welche man veranlasst sein kann zu suchen. Die Auffindung wird durch mehrere Verzeichnisse erleichtert; bei häufigem Gebrauche wird man bald finden, wo das Gewünschte zu suchen ist. H.

Tabellen.

Fünfstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln für die Decimaltheilung des Quadranten mit ausführlichen Tafeln zum Uebergang von der neuen Theilung des Quadranten in die alte und umgekehrt nebst vierstelligen Tafeln der Zahlenwerthe der trigonometrischen Functionen, sowie gewöhnlichen Logarithmentafeln und Quadrattafeln. Mit einem Vorworte von W. Foerster, Geh. Regierungsrath, Di-

rector der Königl. Sternwarte und Professor an der Universität zu Berlin. Herausgegeben von H. Gravelius. Berlin 1886. Georg Reimer. 203 S.

Im Vorworte wird die Frage des Uebergangs von der gewöhnlichen zur Decimalteilung des Quadranten nach allen Seiten hin beleuchtet und alle Einwände dagegen erwogen. Das Urteil lautet dahin, dass die Vorteile der Decimalteilung die Nachteile (unter denen sich ganz allein der Verlust einer directen Drei- und Vierteilung aufweisen lässt) und einige zur Zeit veranlasste Umstände bei weitem überwiegen, mit Hinzufügen nur, dass den trigonometrischen Tafeln auch Reductionstafeln beigegeben werden müssen. An dieser Stelle mögen zwei Punkte hervorgehoben werden. Wenn man bisher gezögert hat, Tafeln mit Decimalteilung herauszugeben, weil die Decimalteilung der Winkel nicht in Gebrauch sei, so ist offenbar die Causalverbindung geradezu die verkehrte: die Decimalteilung kann vielmehr nicht in Aufnahme kommen, so lange die nötigen Hilfsmittel, nämlich eine fünfstellige und eine siebenstellige trigonometrische Tafel, fehlen. Konnte noch ein Zweifel sein, dass nach Herausgabe derselben ihr Gebrauch sich in nächster Zeit einbürgern würde, so ist das Verdienst des Bearbeiters und des Verlegers um so mehr anzuerkennen, welche den ersten, ganz unentbehrlichen Schritt getan haben, bessere Zustände herbeizuführen. Ferner muss der Einwand, dass die Instrumente bereits für die alte Winkelteilung eingerichtet seien, als ganz nichtig erscheinen, wenn man erwägt, dass niemand Bedenken trägt, bei Beobachtungsapparaten Scalen anzuwenden, deren Zahlen zum Gebrauche erst reducirt werden müssen. Die Reductionsarbeit, auch wenn sie zweimal nötig sein sollte, ist verschwindend gering einerseits gegen die Beobachtungsarbeit, andrerseits gegen die Arbeit der Rechnung mit den erlangten Daten. Dies ist schon der Fall, wo sie mit gewöhnlicher Rechnung vollzogen wird; im Gegenwärtigen wird sie noch ausserdem durch eine besondere Tafel unterstützt. Die spätere Herausgabe 6 und 7stelliger Tafeln wird in Aussicht gestellt. Der Verfasser hat es für geraten gehalten, die der gewöhnlichen analoge mehrfache Benennung der Teilwinkel zu gebrauchen und dringt nur darauf, dass dazu nicht dieselben Wörter und Zeichen, Grad, Minute etc., in Anwendung kommen. Jedenfalls ist die mehrfache Benennung nur in Rücksicht auf die Tafeln als Raumersparung empfohlen. Bei Angaben und in der Rechnung ist jede Benennung ausser dem Quadranten, sowie jedes Zeichen dafür zu verwerfen, weil diese Einführungen die erreichte Vereinfachung wieder verringern. Wünschenswert ist dagegen ein kleines, keinem Alphabet entnommenes Zeichen für den Quadranten selbst, hier bezeichnet durch *q*. Das Werk enthält 10 Tafeln, welche

geben: die Logarithmen der Zahlen, Verwandlung der natürlichen Logarithmen in briggische und umgekehrt, die Logarithmen der sin, cos, tg, cot, die Differenz der Logarithmen der sin und tg vom Logarithmus des Bogens für kleine Winkel, die trigonometrischen Functionen selbst, die Kreisbogen, Reduction der mehrfach benannten alten Benennung, Relation von Bogenmass und Zeitmass, Quadrate der Zahlen bis 10000, einige wichtige Zahlen. Die Logarithmen der trigonometrischen Functionen sind direct für die Zehntausendtel Quadranten, die der Functionen selbst für die Tausendtel angegeben. Die Grösse der Ziffern ist mittelmässig, der Druck sehr deutlich. H.

Tabellen für die Zinses-Zinsen- und Renten-Rechnung mit Anwendung derselben auf die Berechnung von Anlehen, Construction von Amortisationsplänen etc. Von Simon Spitzer. Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage. Wien 1886. Carl Gerold's Sohn. 513 S.

Das Werk enthält eine Unterweisung in den 6 Rechnungsarten, welche die Renten- und Schuldentilgungspraxis erfordern, nebst den zugehörigen, teils den Tafeln von Violeine und Ritter entlehnten, teils vom Verfasser berechneten Tafeln. Von den Rechnungsarten sind die 2te, 4te, 6te bzhw. die reciproken der 1sten, 3ten, 5ten. Die Tafeln gehen bis auf 8 Bruchstellen, unter 2 Entrees, nämlich horizontal die Procente des Zinsfusses, vertical die Zeit gestellt, erst das Anwachsen des Capitals, beginnend mit 1, dann endigend mit 1, ebenso bei gleichmässiger Nachzahlung in gleichen Terminen, dann die Schuldentilgung in gleichen Terminen; reciprok den Betrag der jedesmaligen Abzahlung. H.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate von Carl Friedrich Gauss. In deutscher Sprache herausgegeben von Dr. A. Börsch und Dr. P. Simon, Assistenten im Königl. Preussischen Geodätischen Institut. Berlin 1887. P. Stankiewicz. 208 S.

In diese Sammlung sind folgende 7 Abhandlungen von Gauss aufgenommen worden. Theorie der den kleinsten Fehlern unterworfenen Combination der Beobachtungen. Aus der Theorie der Bewegung der Himmelskörper, welche in Kegelschnitten die Sonne umlaufen: Bestimmung der Bahn, die beliebig viele Beobachtungen so genau als möglich erfüllt. Aus der Untersuchung über die elliptischen Elemente der Pallas aus den Oppositionen der Jahre 1803 bis 1809.

Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen. Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf eine Aufgabe der praktischen Geometrie. Chronometrische Längenbestimmungen. Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona durch Beobachtungen am Ramsden'schen Zenithsector. Ausserdem einige Auszüge und Bemerkungen zu einzelnen Stellen.

H.

Cours de mathématiques spéciales. Première partie: Algèbre. Par M. G. de Longchamps, Professeur de mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne. Paris 1883. Ch. Delagrave. 671 S.

Das Buch enthält die Vorlesungen des Verfassers am Lyceum, die es nach eigner Aussage fast genau wiedergibt. Eigentümlich am Lehrgang ist, dass der Vortrag bei den Principien nie verweilt, sondern nach den nötigen Definitionen sogleich in eine Reihe interessanter Sätze und Specialbetrachtungen übergeht, sich also Erledigung einer Frage niemals zum Ziele setzt. Was unter dem Titel „Algebra" zusammengefasst ist, umfasst einen Teil der höhern Algebra und einen Teil der reinen Analysis. Die einzelnen Gegenstände sind folgende: Identitäten, combinatorische Analysis, binomische Formel, Quadratwurzel und $m$te Wurzel aus Polynomen, Determinanten, lineare Gleichungen, homogene Gleichungen, Irrationalzahlen, imaginäre Ausdrücke, quadratische und biquadratische Gleichungen, Transformation irrationaler Ausdrücke, Ungleichungen, Kettenbrüche, Stetigkeit der Functionen, die Zahl e und die Logarithmen, Differentiation, Taylorsche Reihe, Variationslauf der Functionen, unbestimmte Ausdrücke, quadratische Formen, Satz von Alembert, symmetrische Functionen, Elimination, gleiche Wurzeln, Transformation der Gleichungen, Erniedrigung ihres Grades, Grenzwerte der Wurzeln, Wurzeln und rationale Factoren, Satz von Rolle, Satz von Descartes, Satz von Sturm, Näherungsmethoden, Zerlegung rationaler Brüche, algebraische Auflösung der Gleichungen 3. und 4. Grades, algebraische Division, Multiplication der Determinanten, Satz von Sylvester, neue Darlegung der Principien der Rechnung mit Imaginären. An die Behandlung jedes Themas schliesst sich eine Reihe von Aufgaben.

Das Buch hat später eine Vermehrung erhalten durch das hinzukommende

Supplément conforme au nouveau programme du 22 mai 1885. Paris 1885. 173 S.

Diese Ergänzung behandelt: die Reihen, die Unendlichkleinen, den Begriff des bestimmten Integrals, die Quadraturen, die endlichen Differenzen und die Interpolation. H.

Geometrie.

Cours de mathématiqnes spéciales. Deuxième partie: Géométrie analytiqne à deux dimensions. Par M. G. de Longchamps, Professeur de mathématiqnes spéciales au Lycée Charlemagne. Paris 1884. Ch. Delagrave. 636 S.

Der 2. Teil des Cursus charakterisirt sich durch die gleiche Eigenschaft der Lehrweise, die wir am ersten bemerkt haben: der Lehrstoff wird als eine Menge von Sätzen betrachtet, unter denen die instructivsten zur Mitteilung ausgewählt sind. Der Reihe von Sätzen gehen genügende Erklärungen voraus, auf dieselbe folgen Uebungen. Das Unterscheidende der analytischen Geometrie sieht der Verfasser in der Anwendung der Coordinaten und in dem rechnenden Deductionsgang, ihr Hauptgegenstand sei die Lehre von den Curven und Flächen. Die Themata sind der Reihe nach: Coordinaten, einige berühmte Curven, Bildung homogener Ausdrücke, Transformation der Coordinaten, analytische Theorie der Geraden, Formeln, Kreis; Tangenten, Enveloppen, Polaren, Asymptoten, singulare Punkte, Mittelpunkte, Durchmesser, Axen, Homothetie und Aehnlichkeit, Kegelschnitte aus der allgemeinen Gleichung, Classification, Reduction der Gleichung, Invarianten, Brennpunkte und Directricen, Sätze von Desargues, Mac-Laurin und Braikenridge, Pappus, Chasles, Pascal, Brianchon, Newton, Carnot, Schnitt zweier Kegelschnitte, Ellipse, ihre homographische Transformation, Hyperbel, Parabel, Construction der Kegelschnitte und der Curven überhaupt, unicursale Curven, Polarcoordinaten, ebene Schnitte des Kegels und Cylinders, graphische Construction der Wurzeln einer gegebenen Gleichung. H.

Die Elemente der projectivischen Geometrie. Von Dr. Emil Weyr, o. ö. Professor an der k. k. Universität in Wien. Zweites Heft. Theorie der Curven zweiter Ordnung und zweiter Classe. Mit 19 Holzschnitten. Wien 1887. Wilhelm Braumüller. 228 S.

Das erste Heft ist im 3. litt. Bericht S. 34 besprochen. Das zweite enthält die Theorie der Kegelschnitte und die Theorie der Büschel und Reihen von Kegelschnitten, soweit letztere innigst mit dem Theoreme von Desargues zusammenhängt. Auf Netze ist nicht eingegangen worden. Die behandelten Themata sind der Reihe nach: Curven und Flächen überhaupt, die Curven 2. Ordnung als Erzeugnisse projectivischer Strahlenbüschel, das eingeschriebene einfache Sechseck, die Curven 2. Classe als Erzeugnisse projectivischer Punktreihen, das umgeschriebene einfache Sechsseit, die Polareigenschaften der Kegelschnitte, projectivische Punkt- und Tangentensysteme an Kegelschnitten, gemeinschaftliche Elemente zweier Kegelschnitte, Durchmesser und Axen, Brennpunkte. H.

Vermischte Schriften.

Acta Mathematica. Zeitschrift herausgegeben von G. Mittag-Leffler. IX. Stockholm 1887. F. u. G. Beijer. Berlin, Mayer und Müller, Paris, A. Hermann.

Der Inhalt des 9. Bandes ist:

L. Bendixson: Ueber eine Ausdehnung der Ganss'schen Interpolationsformel ins unendliche.

P. Tschebyschoff: Ueber die Darstellung der Grenzwerte der Integrale durch Integral-Residuen. — Ueber die Summen der Coefficienten der Reihen von positiven Termen.

A. Markeff: Ueber eine von Tschebyscheff gestellte Maximum- und Minimum-Aufgabe.

G. Loria: Ueber einen Beweis des Fundamentaltheorems der Theorie der algebraischen Gleichungen.

H. Debriner: Die Flächen constanter Krümmung mit einem System sphärischer Krümmungslinien dargestellt mit Hülfe von Thetafunctionen zweier Variabeln.

A. Weber: Theorie der Abel'schen Zahlkörper. IV.

Chr. Zeller: Kalenderformeln.

Hj. Mellin: Ueber einen Zusammenhang zwischen gewissen linearen Differential- und Differenzengleichungen.

T. J. Stieltjes: Note über eine Entwickelung des Integrals $\int_0^a e^{x^2} \partial x$. — Ueber die Wurzeln der Gleichung $X_n = 0$.

J. Hacks: Einige Sätze über Summen von Divisoren.

H. Gyldén: Untersuchungen über die Convergenz der Reihen, welche zur Darstellung der Coordinaten der Planeten angewandt werden.

E. Netto: Ueber orthogonale Substitutionen.

A. Berger: Herleitung einiger analytischen Formeln aus einem elementaren Satze der Zahlentheorie.

H. Poincaré: Ueber die Residuen der Doppelintegrale.

And. Lindstedt: Ueber ein Theorem des Herrn Tisserand aus der Störungstheorie. II.

Atti della Reale Accademia dei Lincei. Anno CCLXXXIII. 1885—86. Serie quarta. Rendiconti pubblicate per cura dei Segretari. Volume II. Roma 1886.

Der 2. Band enthält folgende mathematische und allgemein physikalische Arbeiten.

G. Frattini: Ueber die Erzeugung der Operationsgruppe und einen Satz der Zahlentheorie. — Erweiterung und Inversion eines Satzes der Zahlentheorie.

L. Bianchi: Ueber die dreifach orthogonalen Flächensysteme, welche eine Schar pseudosphärischer Flächen enthalten. — Ueber die gemeinsamen Lösungen zweier partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung mit 2 Variabeln.

G. Jung: Ueber die von 3 Systemen erzeugten Flächen, die sich aus einander mittelst birationaler Transformation herleiten lassen. — Ueber die vielfachen ebenen Transformationen. — Von 2, einer beliebigen birationalen Transformation associirten vielfachen Transformationen.

E. Padova: Eigenschaft der Bewegung eines Rotationskörpers, auf den Kräfte mit der Potentialfunction $H\cos^2\vartheta$ wirken.

F. Keller: Ueber die Jolly'sche Methode der Bestimmung der mittleren Dichte der Erde.

F. Brioschi: Die neuen Moduln für die hyperelliptischen Functionen zweier Variabeln. — Ueber den Reihenausdruck dieser Functionen. — Ueber die Eigenschaften einer Classe binärer Formen. — Ueber eine Transformationsformel für vielfache Integrale.

L. Kronecker: Ueber die irreducibeln algebraischen Flächen mit unendlich vielen ebenen Schnitten, die sich in 2 Curven teilen.

C. Segre: Ueber fundamentale Räume einer Homographie.

M. Pieri: Ueber die Doppelnormalen einer algebraischen Raumcurve — einer algebraischen Fläche.

L. Palazzo: Ueber die Bestimmung des Inductionscoefficienten der magnetischen Stäbe durch Lamont's Methode.

V. Cerruti: Ueber die Deformation einer homogenen isotropen Kugel.

F. Chizzoni: Ueber eine gewisse Familie von Flächen, die sich in einer involutorischen Transformation 3. Grades im Raume treffen. — Ueber eine gewisse Familie von Flächen, welche eine neue Familie von Cykliden enthält.

P. Cassani: Ein allgemeiner Satz über die normalen Linien der verschiedenen Räume.

D. Besso: Ueber eine Classe linearer Differentialgleichungen 2. Ordnung und über die Gleichung 5. Grades.

P. Pizzetti: Ein Satz über den mittleren Fehler einer Function von Grössen, die aus der Erfahrung bestimmt sind.

E. Cesàro: Ueber einige Operationsgruppen. — Algebraische Formen in arithmetischer Verbindung.

G. Lazzeri: Ueber die birationalen Reciprocitäten in der Ebene.

P. Visalli: Ueber eine Reihe von Flächen, die sich Punkt für Punkt auf einer Ebene darstellen lassen.

G. Ricci: Ueber die Systeme von Integralen, die von einer linearen homogenen partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung unabhängig sind.

E. Bertini: Ueber die Bündel von Gebilden 2. Grades in einem Raume von n Dimensionen.

Volterra: Ueber eine Eigenschaft einer Classe transcendenter Functionen

S. Pincherle: Einige vom Prof. Appell an Polynomen gemachte Beobachtungen.

R. De Paolis: Ueber die projectiven Involutionen.

II.

Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Afdeeling Natuurkunde. Derde reeks. Tweede deel. Amsterdam 1886. Johannes Müller.

Der 2. Teil enthält folgende mathematische und allgemein physikalische Arbeiten.

C. H. C. Grinwis: Der Einfluss von Leitern auf die Verteilung der elektrischen Energie.

Ch. M. Schols: Die halbconvergente Reihe zur Berechnung des Integrals

$$\psi(Z) = e^{Z^2} \int_z^\infty e^{-z^2} \partial z$$

Eine äquivalente Projection mit Minimum-Abweichung für ein kreisförmiges Terrain von geringer Ausdehnung.

Stieltjes: Ueber einige Formeln bezüglich auf die Theorie der elliptischen Functionen. — Ueber einige bestimmte Integrale.

N. Th. Michaelis: Der Einfluss von Zugstangen auf das Aufsetzen von Drehbrücken.

J. Nienwenhuyzen Kruseman: Ueber die Potentialfunction des elektrischen Feldes in der Nähe einer geladenen Kugel.

H. A. Lorentz: Ueber den Einfluss, welchen die Bewegung der Erde auf die Lichterscheinungen ausübt. H.

Annuaire pour l'an 1887. Publié par le Bureau des Longitudes. Avec des notices scientifiques. Paris, Gauthier-Villars. 891 S.

Das gegenwärtige Annuaire enthält: den Kalender mit astronomischen und chronologischen Angaben, Masse, Gewichte und Münzen aller Staaten der Erde, Tafeln der Zinsrechnung, Geographie und Statistik, physikalische und chemische Angaben, sämtliche mit seltener Vielseitigkeit und Detaillirung. H.

Litterarischer Bericht
XX.

Methode und Principien.

Grundzüge einer Theorie der kosmischen Atmosphären mit Berücksichtigung der irdischen Atmosphäre. Bearbeitet auf Grund der dynamischen Gastheorie von Wilhelm Schlemüller, k. k. Hauptmann im 36. Infanterie-Regiment. Prag 1885. H. Dominicus. 50 S.

Der Verfasser sucht in dieser Schrift die Atmosphären der Weltkörper, unter Voraussetzung gleicher Gültigkeit für alle, durch die Relationen zwischen Druck p, Geschwindigkeit der Molecüle v, Energie E, Temperatur T und Volum ϑ zu charakterisiren. Durch Combination bekannter Resultate und Betrachtungen findet er „für ruhende, nicht bestrahlte, einfache" Atmosphären:

$$\frac{p}{p_1} = \left(\frac{v^2}{v_1^2}\right)^6 = \left(\frac{E}{E_1}\right)^6 = \left(\frac{T}{T_1}\right)^6 = \left(\frac{\vartheta}{\vartheta_1}\right)^{\frac{1}{6}}$$

also je 2 bedingt durch einander ohne mögliche Variation mit einer zweiten Unabhängigen. Nach seiner Auffassung bestehen die die Atmosphäre ausmachenden Gase aus elastischen Molecülen in schneller Bewegung ohne gegenseitigen Einfluss, bei Zusammenstoss nur ihre Bewegungen austauschend, angezogen vom Weltkörper. Er constatirt, dass die Grundlagen seiner Theorie in 2 Punkten von den gewöhnlichen abweichen: erstens nehme er, entgegen Maxwell, welcher alle verschiedenen Geschwindigkeiten der Molecüle zuliesse, an, dass die Geschwindigkeit aller Molecüle gleich sei und nur in engen Grenzen mit der Temperatur variire; zweitens habe er eine Grundgleichung der dynamischen Gastheorie von Clausius „rectificirt". Erstere Abweichung möchte wol schwerlich für irgend welche Resultate Folgen haben; dagegen wirft es ein eigentümliches Licht auf

seine Vorstellungsweise, dass er es für eine natürliche Consequenz der Identität von Temperatur und Energie der Molecüle erklärt, dass bei gemeinsamer Temperatur sich auch die Geschwindigkeiten ausgleichen müssten. In den 2 letzten Abschnitten werden, gegenüber den einfachen Atmosphären, von denen bisher die Rede war, erst die aus verschiedenen Gasen bestehenden Atmosphären, dann näherungsweise die Einflüsse der Bestrahlung, Condensation u. s. w. in Betracht gezogen. Hoppe.

Die Gay-Lussac'sche Formel. Eine Abhandlung von Professor K. Hullmann. Oldenburg 1886. H. Hintzen. 39 S.

Die Schrift besteht aus 3 verschiedenartigen Teilen: Kritische Aoussorungen des Verfassers über die Gay-Lussac'sche Formel, Antworten auf 3 Recensionen seiner frühern Schrift: „Der Raum und seine Erfüllung" — nebst Abdruck eines Teiles derselben, Sprachverbesserungen. Wir beginnen mit dem zweiten Teile. Die genannte Schrift ist in der Deutschen Literaturzeitung, im Literarischen Centralblatt und in diesem Archiv (litt. Bericht 9. S. 5) besprochen. Jede dieser Recensionen ist hier abgedruckt. Auf jedes einzelne Urteil hat der Verfasser eine Antwort, aber eine ausweichende, welche den Sinn nicht zu verstehen scheint. Es genüge auf den Fehler hinzuweisen, auf welchen er von zwei Seiten aufmerksam gemacht worden ist. Dass die Annahme, die Körperatome zögen die Aetheratome an und würden von diesen abgestossen, ein Grundgesetz der Mechanik verletzt, ist ihm zweimal von verschiedenen Referenten gesagt worden; dennoch antwortet er das zweitemal: „Mir sehr neu". Er hat also wol das erstemal den Angriff gar nicht gemerkt. Es ist schon auffallend, dass er an die Consequenzen seiner Annahme, nach welcher zwei solche Atome in gehöriger Lage eine entsprechende Last unendlich hoch heben und eine unbegrenzte lebendige Kraft aus nichts erzeugen müssten, überhaupt nicht gedacht hat. Nun aber sagt er recht naiv hierzu: „Ich habe aber von keiner Arbeitsverrichtung gesprochen". Also, was den Irrtum ans Licht bringen würde, hat er verschwiegen. Was den physikalischen Gegenstand, den des ersten Teils der Schrift, die Ausdehnung durch die Wärme betrifft, so handelt es sich bis zur letzten Seite nur um die Ungenauigkeit der Gay-Lussac'schen Formel, worüber kaum etwas neues zu Tage kommt. Schliesslich stellt der Verfasser statt der arithmetischen Progression $v=v_0(1+\alpha t)$ die geometrische $v=v_0 c^{\alpha t}$ auf. Um empirische Bestätigung bekümmert er sich nicht. In der rationellen Herleitung ist die geometrische Progression schon vorausgesetzt; es ist daher eine Täuschung, wenn er darin eine Begründung sieht. Auf das Thema der Sprachverbesserungen wird er dadurch geführt, dass jemand seinen

Ausdruck „verhältlich“ für „proportional“ getadelt hat. Eine Verdeutschung wie diese, ohne Erklärung verständlich, mit dem Vorzug um 2 Silben kürzer zu sein, kann man wol eher willkommen heissen. Ebenso lässt sich die Correction des Ausdrucks „akustische Durchsichtigkeit“ (der in einigen Schriften stehen soll) in „Durchhörigkeit“ nur billigen. Es ist dies ein Beispiel der in der Fachtechnik so sehr beliebten poetischen Uebertragung, die aber in der wissenschaftlichen Sprache nur als Verderb zu bezeichnen ist. Fehlt nämlich in einem Begriffsbezirk das Wort für einen Gegenstand, so greift man oft zuerst nach einem Wort aus dem fremden Bezirk; was akustisch mysteriös scheint, wird optisch benannt und umgekehrt, z. B. „Farbenton“ und „Tonfarbe“. Hiermit will man nicht gelehrt, aber feinfühlend scheinen. In die Sprache der exacten Wissenschaften ist jene Sucht nicht merklich eingedrungen, doch vermittelt durch eine nebelhafte Philosophie ist auch sie der Gefahr ausgesetzt. Ein wichtiger Punkt wird zuletzt genannt: was in der vulgären Sprache „Ursache und Wirkung“ heisst, ist fast immer bloss „Anlass und Folge“ und sollte, wo es auf Klarheit ankommt, nie anders heissen. Hiermit würde man die so häufigen Irrungen, die aus der Nennung einer Ursache unter vielen andern unbekannten Ursachen, als ob es immer e i n e Ursache geben müsste, hervorgehen, einfach und populär verständlich berichtigen. Hoppe.

Usus est tyrannus oder Die Hinfälligkeit der Beweise für die Rückläufigkeit des Raumes. Von Rudolf Otto Consentius. Karlsruhe 1885. J. J. Reiff. 24 S.

Dieser Schrift ist eine andre: „Die Rückläufigkeit des Raumes ein Irrtum und Ursache weiterer Irrtümer“ — 1881 vorausgegangen, die erwähnt werden muss, weil der Verfasser darauf Bezug nimmt (s. den 267. litt. Bericht S. 25.). Die gegenwärtige, welche im Grunde das gleiche Thema behandelt, zeugt von einem bedeutenden Fortschritt in der Auffassung der Sache und Klarheit der Darstellung. Sie zuerst hat den Hauptpunkt richtig erfasst, deutlich gekennzeichnet und dem Urteil eine praktisch wirkungsfähige Richtung gegeben. Der Spruch auf dem Titel in origineller Deutung bezeichnet treffend den Grundgedanken und Ausgangspunkt. Usus ist hier das Symbol der Mathematik, tyrannus bedeutet der Vernunft unzugänglich. Ausserdem nennt der Verfasser „bewiesen oder exact definirt sein“ kürzer „existiren“ und versteht unter „unendlich“ ausschliesslich „absolut (constant) unendlich“. Alles dies ist zwar nicht erklärt, aber so reichlich charakterisirt, dass man Erklärung nicht vermissen kann. Es wird eingeräumt, dass der Usus oft nützlich ist,

nur darf man das Attribut Tyrann nicht vergessen. Was der Vernunft nicht zugänglich ist, trotz seiner Widersprüche die Herrschaft behauptet, kann natürlich kein Glied eines Beweises, keine Basis einer Theorie sein. Gegen den Misbrauch zu letzterem Zwecke richtet sich die ganze Polemik. Die Annahme, dass Parallelen sich in unendlicher Ferne schnitten, sei gestattet, wenn es jemand nützlich findet; aber daraus zu schliessen, der Durchschnittspunkt könne, weil 2 Gerade nur einen Punkt gemein haben können, nur einer sein, ist falsch als Schluss aus einem Usus. Die Schlusskette wird hier in 4 Glieder zerlegt und jedes Glied einzeln gewürdigt. In gleichem Falle, meint der Verfasser, würden alle Beweise für die Rücklänfigkeit der Geraden sein müssen, nämlich sich auf einen unwissenschaftlichen Usus stützen, und damit wäre ihre Hinfälligkeit bewiesen. Einige logische Mängel finden sich in der Darstellung; wir wollen sie anzeigen, nicht um die Thesis damit anzugreifen, sondern um den Hauptgedanken ins rechte Licht zu stellen. Die Behauptung geht offenbar über das hinaus, was gezeigt ist. Es mag wahr sein, dass jene hinfälligen Beweise und keine andern aufgestellt worden sind, doch ist damit die Aussage in ihrer unbeschränkten Ausdehnung nicht gerechtfertigt. Noch mehr ist es zurückzuweisen, dass der Verfasser die Thesis seiner ersten Schrift: „Die Rücklänfigkeit des Raumes ist ein Irrtum" — die er in der zweiten in „Hinfälligkeit der Beweise dafür" verbessert hatte, noch einmal, obwol nur vorübergehend, annimmt. Ferner ist zu bemerken, dass er in seinen Beispielen für die Nützlichkeit des Usus dem Worte einen abweichenden und unrichtigen Sinn beilegt, in welchem bei der Polemik gar nicht davon die Rede ist. Die Näherungsrechnung, selbst mit Absehen vom Fehler in gewissen Grenzen, ist gar kein usus tyrannus, sondern ein auf exacte Principien basirtes, notwendiges Organ der gesamten Naturwissenschaft. Es kam darauf an, ob er ein Symbol, das in eigentlicher Bedeutung widersinnig ist, in manchen Fällen für nützlich hielt, und diese Frage ist auf S. 11 bejaht.

Nach Erledigung des angekündigten Gegenstandes kommt der Verfasser auf eine (nicht citirte) Recension seiner ersten Schrift zu sprechen, mit welcher, trotz einiger nicht stimmenden Angaben, doch wahrscheinlich die in diesem Archiv enthaltene gemeint ist. Die eine Angabe ist geradezu aus der Luft gegriffen, nämlich dass darin stehen soll, die Wissenschaft habe den Satz bewiesen. Vorher geht kein Satz, sondern nur der Titel der Schrift. Ob nun der Verfasser die Rücklänfigkeit oder den Irrtum darin mit dem bewiesenen Satze gemeint hat, bleibt zweifelhaft; jedenfalls steht in jenem Berichte nichts davon. Ferner soll der Referent „zugestanden haben, dass der Verfasser der Sache nahe käme". Das ist in der Tat am

Schlusse gesagt, aber nicht von der Schrift, sondern vom Versuche des Verfassers einen Widerspruch, in den er sich hinein verirrt hatte, zu erklären. Gleich nachher scheint ein Satz im Texte aus Versehen zu fehlen, auf den sich die daselbst folgenden Worte „Jener Vorwurf" beziehen. Die sich daran schliessende Rechtfertigung zeigt, dass der Vorwurf gegen die Anwendung des Führens ad absurdum gerichtet war. Ein Vorwurf ist im Berichte allerdings enthalten, sofern die Methode mit einer Illusion verbunden auftrat. Man kann bündig aus einer unrichtigen Annahme ein unrichtiges Resultat herleiten, wie es beim indirecten Beweise geschieht. Man kann auch, wiewol nicht objectiv bündig, aus einer sinnlosen Annahme ein sinnloses Resultat folgern oder durch Nachahmung eines vom Gegner gemachten falschen Schlusses zu offenbar falschen Resultaten gelangen und so den Gegner von seiner Incompetenz überzeugen. Immer aber ist letzteres Verfahren unlogisch — denn der eine Teil des Schlusses kann nicht gedacht werden — daher die Widerlegung des Gegners bloss auf seine Unfähigkeit gebaut den Fehler zu entdecken. Jener Bericht sagt dies mit den Worten: „Zwischen Unsinn und Unsinn einen strengen Zusammenhang statuiren ist unlogisch". Der Verfasser geht an dieser Stelle, wo er seine erste Schrift zu retten sucht, an jener Bemerkung nichtlos vorüber, als ob er sie nicht verstanden hätte, sagt noch einmal, er hätte den Usus als etwas wissenschaftliches ansehen müssen, und widerholt nur die frühern Ausführungen, mit denen er die Gegner ad absurdum geführt hat, ohne sich darüber zu erklären, welche Wirkung er einem solchen Verfahren, das ein Undenkbares als gedacht betrachtet, beimisst. Allein jene Bemerkung ist ohne Zweifel recht gut verstanden worden, das zeigt die Tatsache; denn sie bildet die Basis und Richtschnur der neuen Bearbeitung. Auf ein Führen ad absurdum geht letztere nicht mehr aus, sondern stützt alle Widerlegungen direct auf den Satz, dass von einem undenkbaren Anfang keine exacte Deduction möglich ist. Hat der Verfasser schon früher den Gedanken unabhängig von der Recension gehabt und ihn in der zweiten Schrift zu realisiren beabsichtigt, so kann es uns nur freuen, die publike Priorität wird er uns nicht bestreiten können.

Weiterhin wird das Verhalten, namentlich der Docenten gegenüber den verwerflichen Lehren besprochen und Rat erteilt. Steiner nennt den unendlich fernen Punkt eine Redensart, Standt einen uneigentlichen Punkt, eine Illusion; aber Beide lehren nicht darnach: im Vortrag ist derselbe ein eigentlicher Punkt, er wird zur Deduction verwandt, und kein Zuhörer oder Leser erfährt etwas von seinem Charakter. Der Verfasser wundert sich über den Ausspruch einer (ungenannten) „Autorität", dass man zur Auffindung mancher Beweis-

mittel allein auf die Phantasie angewiesen sei. Er mag dabei wol übersehen haben, dass es sich um Auffindung, nicht um definitive Begründung handelt. Ueberdies ist es doch eine Begriffsverwechselung, wenn jener uneigentliche Punkt, der sich noch weniger vorstellen als denken lässt, unter die Phantasieerzeugnisse gerechnet wird. Sehr lebhaft wird nun geschildert, wie die unfassbaren Lehren bezaubernden Eindruck auf die Jugend machen und aller Kritik zum Trotz geglaubt werden, wie die Docenten sich sämtlich gezwungen sehen in gleichem Geiste zu lehren, weil stets das Absonderliche den grössten Eindruck macht. Alles dies ist bekannt genug, Viele haben es erfahren, nur sehr selten wird es ausgesprochen; auf keinen Fall wird es dem Verfasser jemand bestreiten. Am Schlusse erteilt derselbe aber einen Rat, dessen Erfolglosigkeit er wol nicht überlegt hat. Um wieviel mehr, meint er, würden die Zuhörer dem Docenten zujubeln, der ihnen einmal die Wahrheit enthüllte und zeigte, in welchem falschen Glauben die Menge bisher erhalten worden ist! Ein Rätsel übt nur solange Reiz, bis es gelöst ist. Der Aufklärung hat die Menge nie zugejubelt. Hoppe.

The fixed idea of astronomical theory. By August Tischner. Leipzig 1885. Gustav Fock. 86 S.

Der Verfasser kann nicht begreifen, wie die Astronomen die Copernicanische Weltanschauung beibehalten und die Sonne als ruhend betrachten können, da sie doch wissen, dass sie sich bewegt. Eine Schrift von ihm in gleichem Sinne erschien 1881 und ist im 266. litt. Bericht S. 13 besprochen. Hierauf erhielt er durch Briefe reichlich Belehrung. In einer Brochüre hat er die Briefe abgedruckt, aber, ohne sie zu erwähnen, ohne also ein Wort zu sagen, ob er die Belehrung verstanden und ob er etwas dagegen einzuwenden hätte, in unveränderter Meinung weiter gesprochen. Auch das Gegenwärtige wiederholt nur mit andern Worten die früheren Auslassungen, abermals mit Ignoriren eines Berichts, den er selbst der Zusendung beilegt. Der Titel würde daher umgestellt besser zutreffen: The fixed idea of August Tischner concerning astronomical theory.
Hoppe.

Methodische Anleitung zum Unterricht im Rechnen. Für Lehrer und Seminaristen bearbeitet von A. P. L. Claussen, Königlichem Seminarlehrer zu Bütow. Potsdam 1885. Aug. Stein. 304 S.

Das Buch teilt sich in „allgemeine und specielle Methodik". Dem Inhalte nach ist der erstere Teil eine Besprechung der Grundsätze, erst im allgemeinen, dann in Betreff der Bruchrechnung, welche

durch Aufnahme der Decimalbruchrechnung wesentlich beeinflusst worden ist, der letztere ein ausgeführter Lehrgang. Da der Lehrgang ausschliesslich den Unterricht in der Volksschule im Auge hat, so würde es der Bestimmung dieses Archivs nicht entsprechen auf den zweiten Teil näher einzugehen; dagegen sind die im ersten Teile dargelegten methodischen Grundsätze auch hier von Interesse. Die Ziele des Rechenunterrichts sind im allgemeinen richtig charakterisirt; hierin folgt der Verfasser nur den Aussprüchen „bewährter Pädagogen". Es wird Gewicht gelegt auf die Erstrebung grösserer Selbständigkeit, Selbstcontrole, Selbstverantwortlichkeit, auf welche man früher wenig geachtet hat. Die Besprechung der Methoden hingegen lässt feste Begriffe sehr vermissen. Anstatt das Ziel als unverrückbares festzuhalten und die verschiedenen Wege zu kennzeichnen, welche dahin führen, werden grossenteils die Wege durch verschiedene Ziele unterschieden. Das mechanische Verfahren gilt dem Verfasser von vorn herein als ein solches, dass nur mechanische Fertigkeit erzeugt, weiterhin, wo er es selbst anwendet, bemerkt er, es dürfe nur nicht von Anfang getrieben werden. Doch auch dieses ist blosses Vorurteil, von Begründung ist keine Rede. Dem gegenüber wird häufig von der illusorischen Phrase des Selbstfindens Gebrauch gemacht, als ob es Methoden gäbe, bei denen das Kind „selbst fände". Bei jeder Methode, auch der rein mechanischen, findet das Kind selbst ein Resultat, es findet, dass seine bestimmte Tätigkeit dazu geführt hat, unter Umständen auch, dass es richtig ist. Dieses Finden meint der Verfasser nicht, er sagt daher anfangs Auffinden. Allein dann wird das Auffinden behauptet, aufgewiesen aber nur das Finden. Es ist geradezu ein Widerspruch, so zu lehren, dass zugleich das Kind selbst auffände. In der einen oder andern Form zeigt der Lehrer den Weg, und nur so findet das Kind, was es finden sollte. Wol kann man die Entwickelung der Fähigkeit nach eignem Urteile die Wege aufzufinden: d. h. mit Erfolg zu suchen, zum Ziele des Unterrichts nehmen. Unter den Lehrweisen aber ist wol diejenige am fernsten von diesem Ziele, welche durch eine Reihe von Fragen zur Lösung zu führen sucht; denn sie macht das Kind so unselbständig als möglich, weil es doch die Kunst des Lehrers in Stellung der Fragen auf der Schule nicht lernen kann. Diese Ueberlegung würde manche Urteile des Verfassers über die Wirkung der Methoden umkehren; doch genügt es zu constatiren, dass sie überhaupt nicht gemacht worden ist. Worin nun die verschieden benannten Methoden bestehen, ist aus den Angaben, die nicht von Weg und Mitteln, sondern nur zum Ziele sprechen, nicht zu ersehen. Erst aus dem ausgeführten Lehrgange kann der Leser sich über die eine, vom Verfasser gewählte Methode ein Urteil bilden, eine Vergleichung mit andern Methoden gibt die Darlegung nicht.

Hervortretend ist, dass mit den kleinsten Zahlen angefangen und der Zahlenumfang schrittweise erweitert wird. Hoppe.

Grundzüge der Algebra nach Grassmann'schen Prinzipien. Von Leopold Schendel. Halle a. S. 1885. H. W. Schmidt. 161 S.

Das Buch fängt ohne jede Erläuterung so an: „Es seien $e_1 \ldots e_m$ und $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_m$ zwei Gruppen von m von einander unabhängigen Grössen, welche die Eigenschaft besitzen, dass für die multiplicative Verbindung von zwei den beiden Gruppen angehörigen Grössen die Gleichungen

$$e_x \varepsilon_x = 1, \quad e_x \varepsilon_\lambda = 0 \quad \text{oder} \quad \varepsilon_x e_x = 1, \quad \varepsilon_x e_\lambda = 0$$

gelten". Wenn sich jemand gern mit solchen Widersprüchen befasst, so ist das seine Sache; jeden Anspruch aber auf Anerkennung einer Leistung für die Wissenschaft, welche in der hier vorgetragenen Doctrin liegen soll, müssen wir entschieden zurückweisen.

Hoppe.

Beweis, dass es eine Quadratur des Kreises giebt, und dass die bisher zur Berechnung des Kreises benutzte Ludolph'sche Zahl etwas zu klein ist. Von G. Kerschbaum, Steuerrath in Coburg. Coburg 1887. E. Riemann jr. 13 S.

Es werden mehrere angebliche Beweise mit Construction und Rechnung geführt, dass der Quadrant der Kreisfläche über r als Radius einem gewissen Rechtecke gleich sei, dessen Inhalt richtig als

$$= r^2 \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = 3{,}144 \ldots \frac{r^2}{4}$$

ermittelt wird. Die gesamte Behandlung zeigt so viel Geschick und gute Auffassung, dass wir den Verfasser für hinreichend befähigt halten dürfen, die wenigen falschen Gleichungen und Fehlschlüsse, welche in sonst richtiger Deduction vorkommen und merkwürdigerweise immer zu demselben Resultate — jenem ganz ungefährlichen Irrtume — geführt haben, ohne fremde Hülfe aufzufinden.

Hoppe.

Technik.

Les intégraphes, la courbe intégrale et ses applications. Étude sur un nouveau système d'intégrateurs mécaniques. Par Br. Abdank-Abakanowicz. Paris 1886. Ganthier-Villars. 156 S.

Integraph nennt der Verfasser ein von ihm erfundenes Instrument, welches zu einer gegebenen Curve die Integralcurve zeichnet. Es unterscheidet zich also von andern Integratoren, den Planimetern, dadurch dass es nicht den blossen Totalwert eines bestimmten Integrals, sondern die ganze Integralfunction angibt. Die Integralcurve entsteht hier nach folgendem Princip. Der Punkt R gleitet auf der gegebenen Curve, gleichzeitig der Punkt P auf der Abscissenaxe, so dass die Projection von PR auf die Axe constant bleibt. Der Punkt Q erzeugt dann die Integralcurve, wenn er parallel PR fortrückt und mit R gemeinsame Abscisse behält. Im Apparat ist Q der Berührungspunkt eines auf der Zeichenebene laufenden Rades, dessen horizontale Axe normal zu PR erhalten wird. Es folgt nun die Beschreibung des Apparates, dann verschiedener Integraphen und Integratoren. Dann werden die Eigenschaften, dann die Anwendungen des Integraphen erörtert. Der Anhang enthält noch 3 Noten betreffend die Anwendung des rollenden Rades zur Zeichnung gewisser Curven, die Quadratur der Diagramme, welche das Trägheitsdynamometer von Desdonits gibt, und die Studien von Coriolis. H.

Optik, Akustik und Elasticität.

Theoretische Optik gegründet auf das Bessel-Sellmeier'sche Princip. Zugleich mit den experimentellen Belegen. Von Dr. E. Ketteler, Professor an der Universität in Bonn. Mit 44 Holzstichen und 4 lithographirten Tafeln. Braunschweig 1885. Friedrich Vieweg und Sohn. 652 S.

Der Verfasser dieses Werkes, dem physikalischen Publicum durch langjährige Arbeiten in Wiedemann's Annalen, sowie durch die Auffindung der Grundgesetze der Dispersions- und Absorptionslehre bekannt, beabsichtigt in denselben die theoretische Optik auf der neuen Grundlage des Zusammenschwingens der Aether- und Körperteilchen vollständig und einheitlich zu behandeln. Die gesamte Charakterisirung können wir dem Vorworte entnehmen, welches über alle erforderlichen Punkte dentliche Auskunft erteilt. Das Werk ist (laut desselben) wesentlich hervorgegangen aus eigenen Arbeiten, welche während der letzten 20 Jahre in Poggendorff's und Wiedemann's Annalen, Carl's Repertorium, den Monatsber. d. Berl. Akademie, den Verhandl. d. naturhist. Vereins für Rheinl.-Westf. u. a. veröffentlicht sind. Doch sind dieselben, teils weil manches hinfällig geworden, teils auch des einheitlichen Gesamtzweckes wegen fast sämtlich völlig umgearbeitet, und ist die frühere analytische Bezeichnung

durch eine neue consequentere zu ersetzen versucht worden. Eine Reihe neuer Mitteilungen ist dem Bekannten hinzugefügt, zu erwähnen die Begründung eines exacten Gesetzes der Abhängigkeit der brechenden und dispergirenden Kraft von der Dichte, eine Erweiterung der Gesetze des Lichtübergangs zwischen absorbirenden Medien, eine Berücksichtigung der Oberflächenwirkung, eine Untersuchung über Strahlen mit maximalen und minimalen Dichtigkeitsänderungen, eine noch notwendige Ergänzung zur Theorie der Totalreflexion der absorbirenden Medien, eine Vergleichung der natürlichen und magnetischen Circularpolarisation, sowie die Aufstellung eines verallgemeinerten optischen Mediums, welches alle bekannten Einzeleigenschaften in sich vereinigt. Im praktischen Teile ist hinzugekommen eine umfassende Kritik der Dispersionsformeln mit Berechnung der neuern Messungen von Sarasin und Langley, sowie eine bisher noch nicht in extenso veröffentlichte Experimentaluntersuchung über die Dispersion der Dämpfe Dem Titel entsprechend umfasst das Werk alle Teile der Optik, welche einer mechanischen Behandlung fähig sind, mit einzigem vorläufigem Ausschluss der Beugungserscheinungen. Als Bessel'sches Princip wird bezeichnet das analytische Resultat der Pendelversuche Bessel's, welches namentlich in der Heranziehung des Trägheitsmoments der mitschwingenden Luft besteht und für unendlich kleine Schwingungsbogen hier als zutreffend hingenommen wird, als Sellmeier'sches Princip der Satz und die ihm zugrunde liegende Vorstellungsweise, wonach die dioptrischen Vorgänge auf einem Zusammenschwingen der beiden Bestandteile der sogenannten ponderabeln Medien beruhen, der Satz nämlich, dass die brechende Kraft eines solchen Mediums gleich ist dem Quotienten der lebendigen Kräfte seiner Körper- und Aetherteilchen. Die Abschnitte des theoretischen Teils sind: die isotropen, die anisotropen, die circular und elliptisch polarisirenden Medien. H.

Der Schall. Von Dr. Adolf Elsas. Leipzig 1886. G. Freytag. Prag, F. Tempsky. 213 S.

Das Vorliegende ist eine populäre Akustik. Ohne Voraussetzung wissenschaftlicher oder technischer Vorbildung werden die Begriffe und Erscheinungen in vielseitigster Richtung erklärt, die zur Vorstellung ausreichenden Grössenangaben gemacht, und die einfachsten Experimente mit Abbildung der Apparate beschrieben. Auf Berechnung der Schallbewegung geht natürlich das Buch nicht ein, ebnet aber in leicht verständlichem Vortrag den Boden des Studiums durch exact richtige, mit der Wissenschaft harmonirende Auffassung, wobei namentlich die Hervorhebung des Wesentlichen in jeder Beschrei-

hung sehr zu schätzen ist. Die Bearbeitung kann wol in jeder Beziehung eine vorzügliche genannt werden. H.

Kritischer Versuch über ein Maass für Schall-Intensitäten. Von M. von Banmgarten. Wien 1886. Carl Tenfen. 15 S.

Während das Ohr die Verdoppelung der Schwingungszahl unmittelbar empfindet, fehlt ihm die entsprechende Empfindung für Verdoppelung der Amplitude. Der Verfasser hegt nun die Hoffnung, dass sich die directe Unterscheidung der doppelten Intensität durch Uebung erzielen lassen würde, indem er darauf hinweist, dass auch die Tonintervallenscala nur durch Uebertragung von einem Culturvolke zum andern zum Allgemeingut geworden, nicht von jedem einzeln gefunden sei. Zu diesem Zwecke würde man damit zu beginnen haben, eine vergleichende Messung der Tonstärke zuwege zu bringen. Er schlägt vor, die Aushauchung einer Membran galvanisch zu messen, welche durch verschiedene Instrumente in Mitschwingung versetzt wird. Weiterhin bespricht er, das Thema verlassend, einige psychologische Fragen, namentlich das Gedächtniss für Tonstärken betreffend, und gibt dafür einen Versuch an. H.

Vermischte Schriften.

Nieuw Archief voor Wiskunde. Deel XIII. Amsterdam 1887. J. F. Sikken.

Der 13. Band enthält folgende Aufsätze:

P. H. Schoute: Ueber die Aufsuchung von Curven mit Mittelpunkt in einem Curvenbündel 3. Grades. — Untersuchung der Bewegung eines Punktes, auf den von einem Centrum aus 2 Kräfte ar^{-m} und br^{-n} (m, n ganze Zahlen) wirken, und der eine gegebene Anfangsgeschwindigkeit normal zum Radiusvector hat. (Preisfrage.)

P. van Geer: Die Kegelschnitte im Raume.

H. Ekama: Die Lissajous'schen Figuren.

J. Cardinaal: Bemerkungen auf Veranlassung einiger Sätze aus der Lehre von den Flächenbündeln 2. Ordnung. H.

Bulletin of the Philosophical Society of Washington. Vol. VII. IX. Washington 1885. Published by the cooperation of the Smithsonian Institution.

Im 15. litt. Bericht, S. 38 ist über Vol. VIII. berichtet, fälschlich Vol. VII. angegeben.

Das Bulletin der Mathematischen Section in Vol. VII. enthält in extenso die 2 Arbeiten:

A. Hall: Die Formeln zur Berechnung der Stellung eines Satelliten.

Kummell: Die quadratische Transformation elliptischer Integrale verbunden mit dem Algorithmus des arithmetisch geometrischen Mittels.

Im Auszuge:

G. K. Gilbert: Das Problem des Springerlaufs.

H. Faarquharr: Empirische Formeln für die Abnahme der Amplitude eines frei oscillirenden Pendels.

M. H. Doolittle: Das Eintreffen von Voraussagungen.

Nekrolog von General Benjamin Alcord mit Verzeichniss von 7 von ihm publicirten mathematischen Arbeiten.

Das Bulletin der mathematischen Section in Vol. IX. enthält keine Mitteilung von Arbeiten. H.

Revue der Fortschritte der Naturwissenschaften. Herausgegeben unter Mitwirkung hervorragender Fachgelehrten von der Redaction der „Gaea" Dr. Hermann J. Klein. (Fünfzehnter Band). Neue Folge. Siebenter Band. Nr. 1. 2. Astronomie. Meteorologie. Leipzig 1887. Eduard Heinrich Mayer. 17 Bogen.

Die Zeitschrift gibt eine Musterung der für allgemeines Verständniss reifen neuesten Resultate wissenschaftlicher Untersuchungen. Die genannten 2 Numern handeln (unter Astronomie) von der Sonne, dem Monde, den Planeten, den Meteoriten, den Fixsternen, (unter Meteorologie) von der Physik der Erde und der Atmosphäre. H.

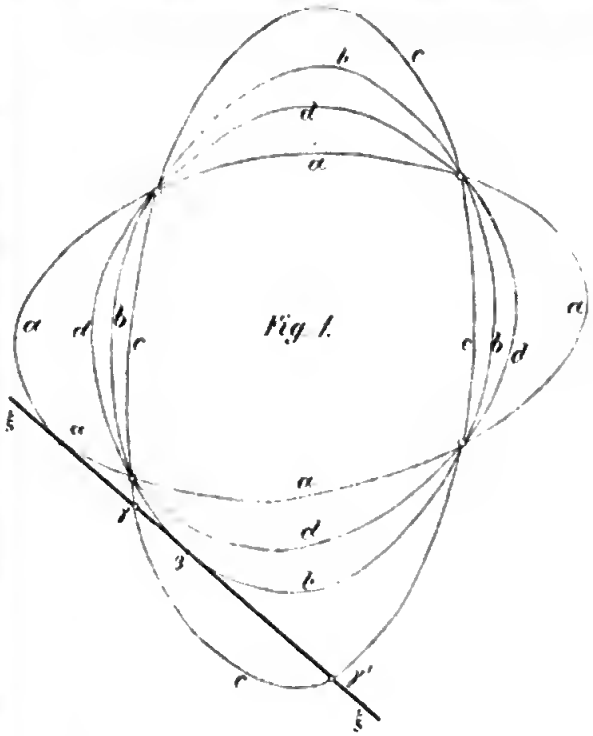


Fig. 1.

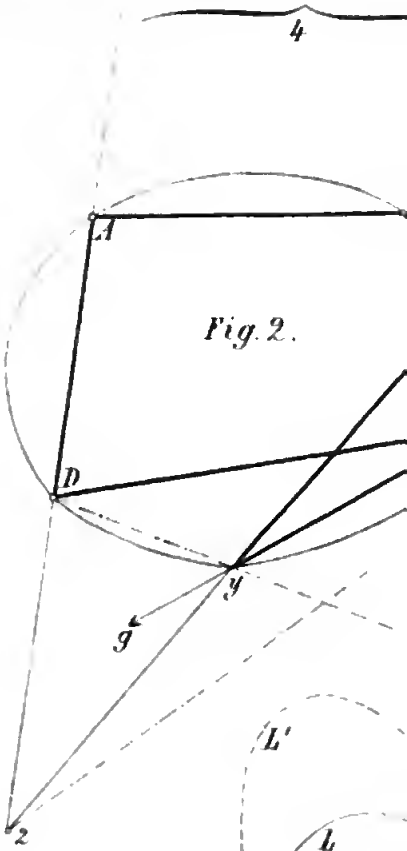


Fig. 2.

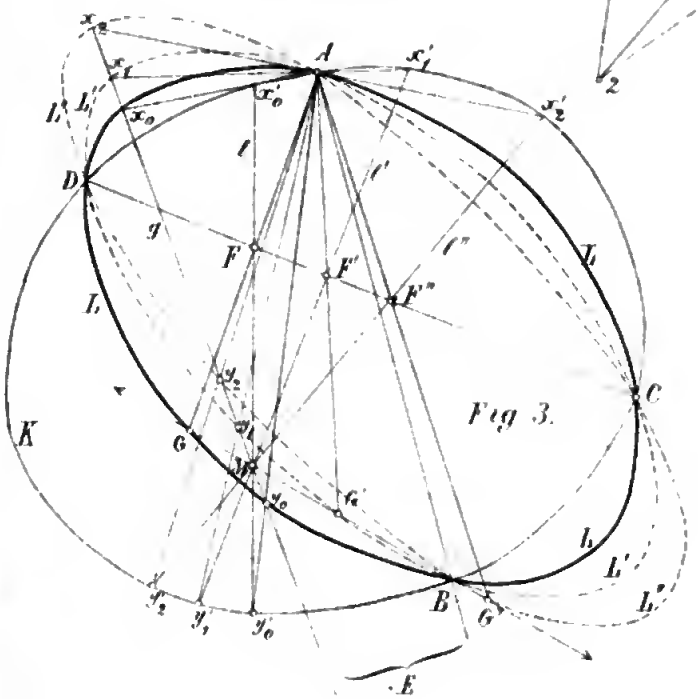
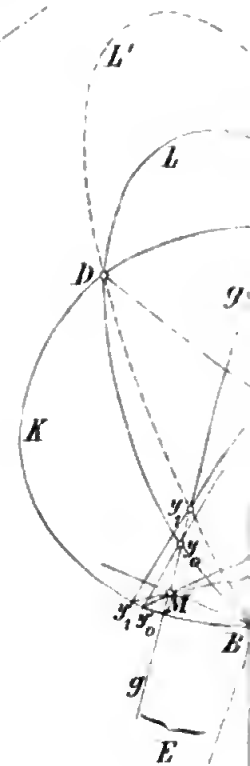
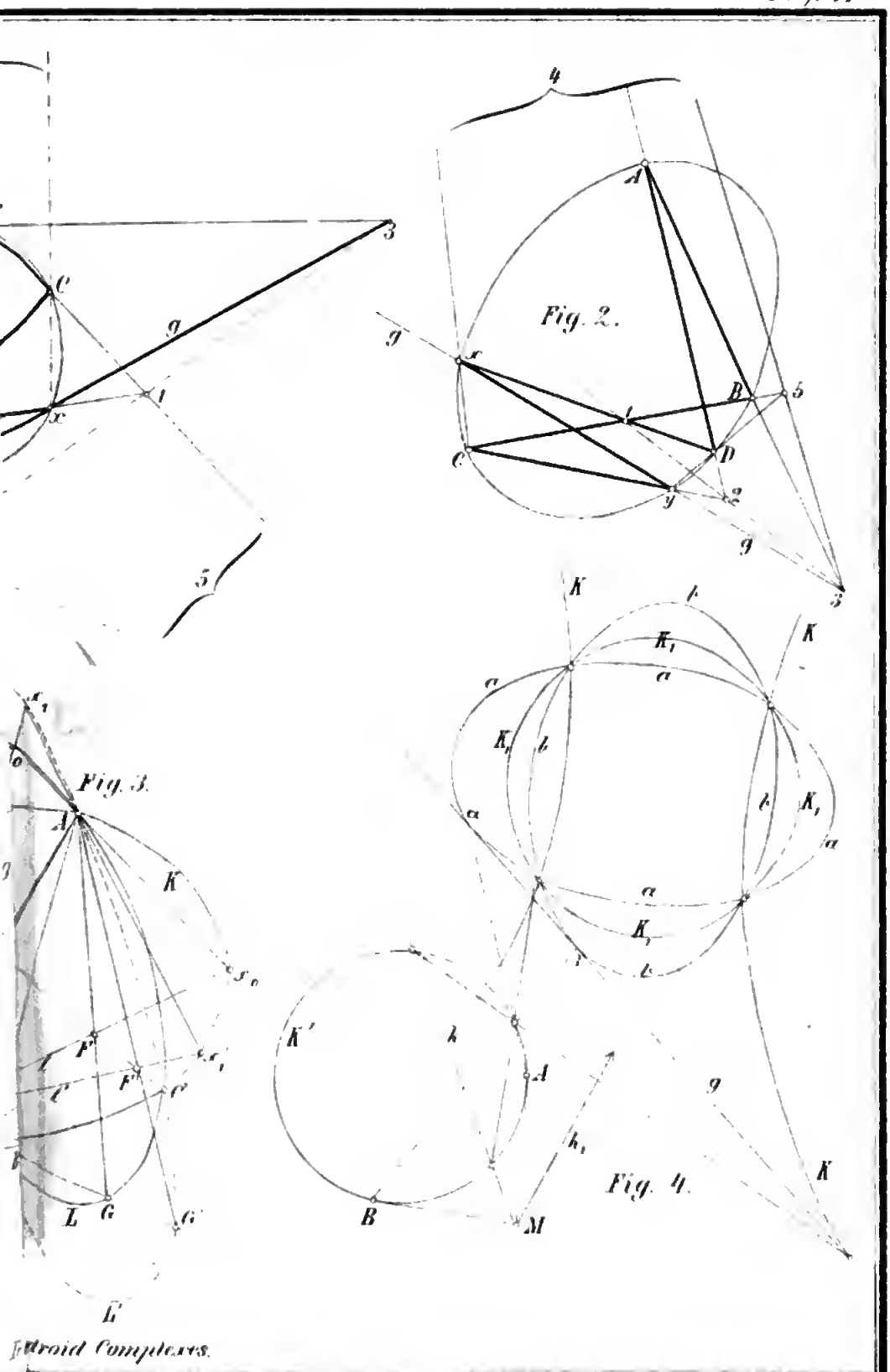


Fig. 3.





...droid Complexes.

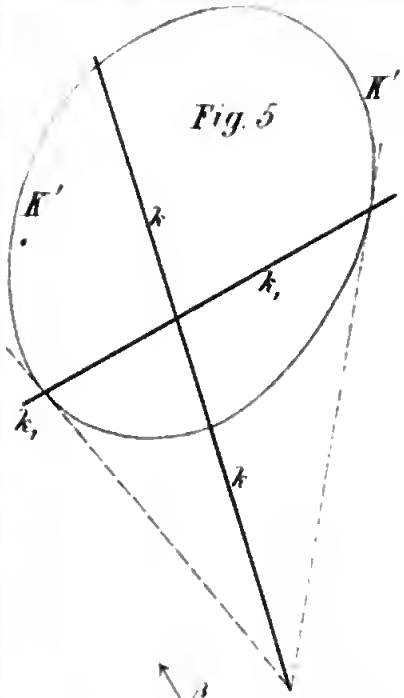


Fig. 5

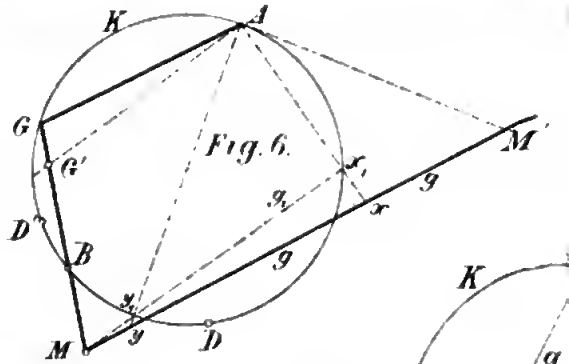


Fig. 6.

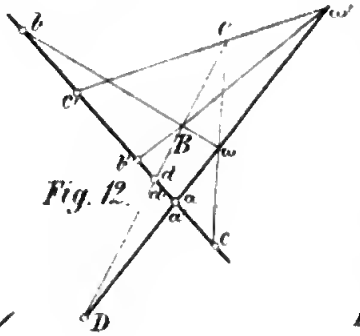
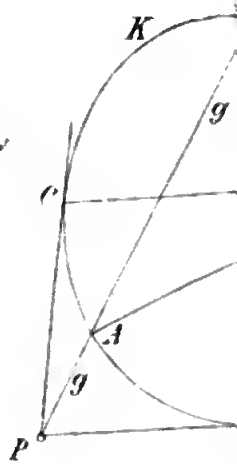


Fig. 12.



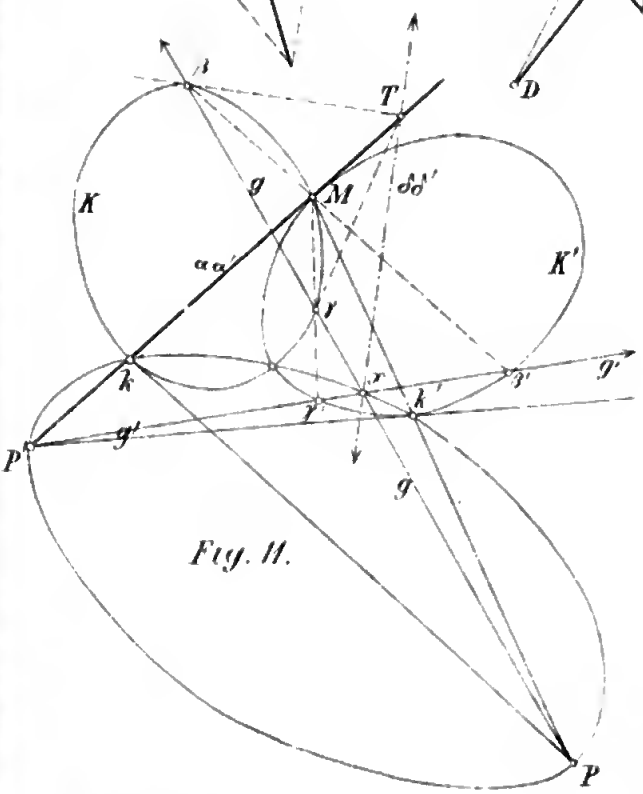
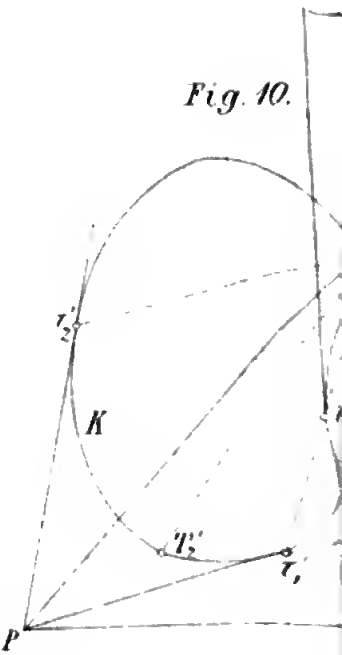


Fig. 11.

Fig. 10.



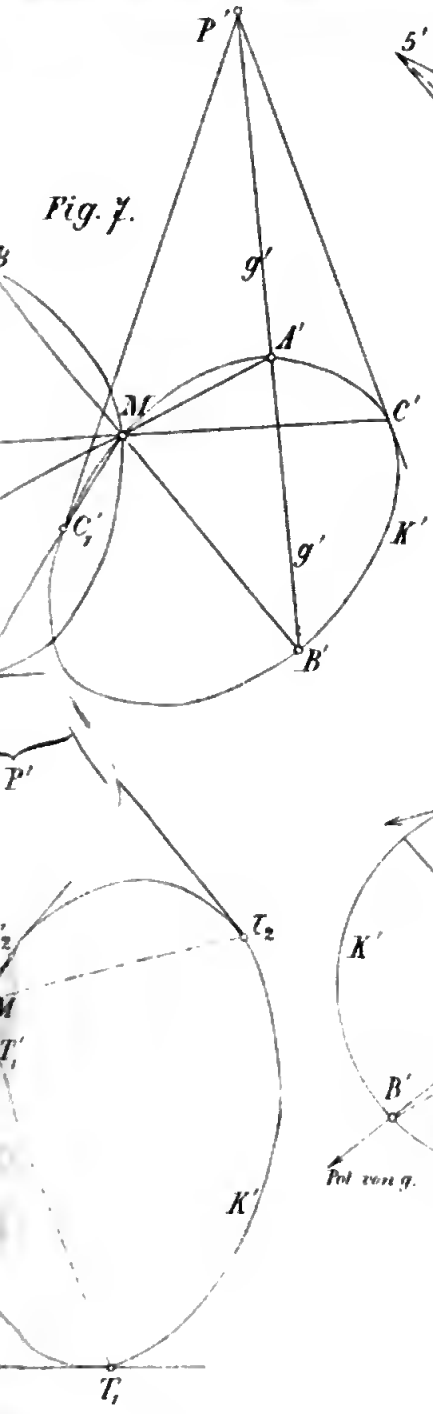


Fig. 7.

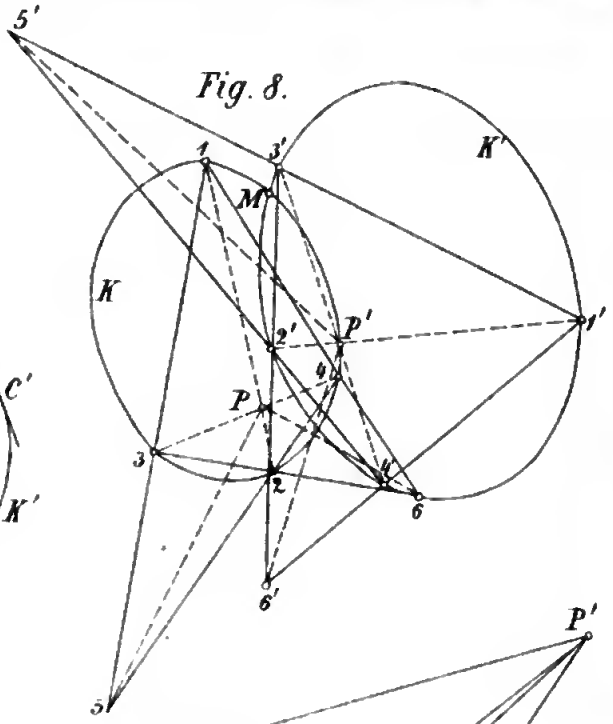


Fig. 8.

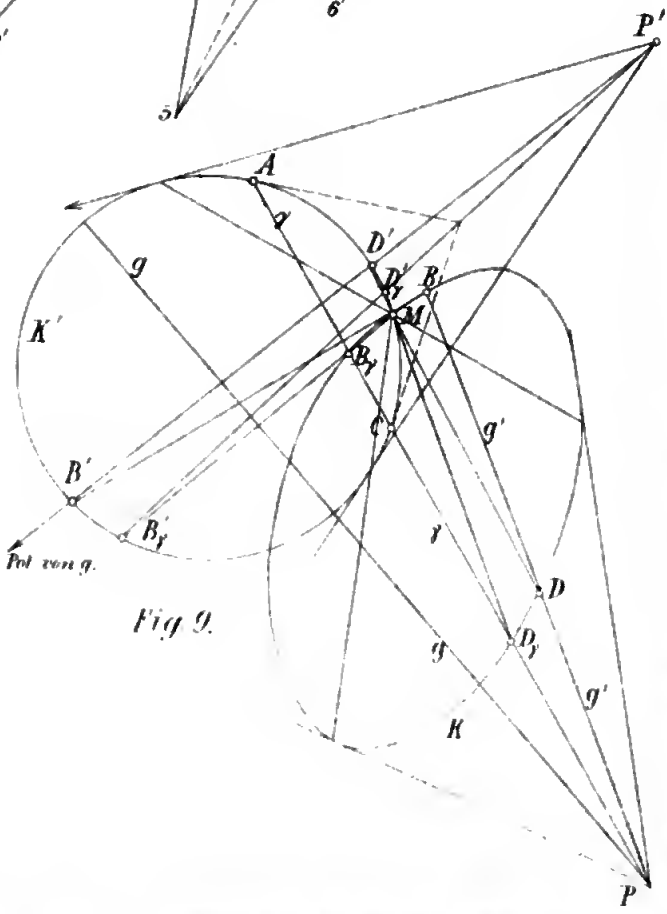


Fig 9.

adroid-Complexes.

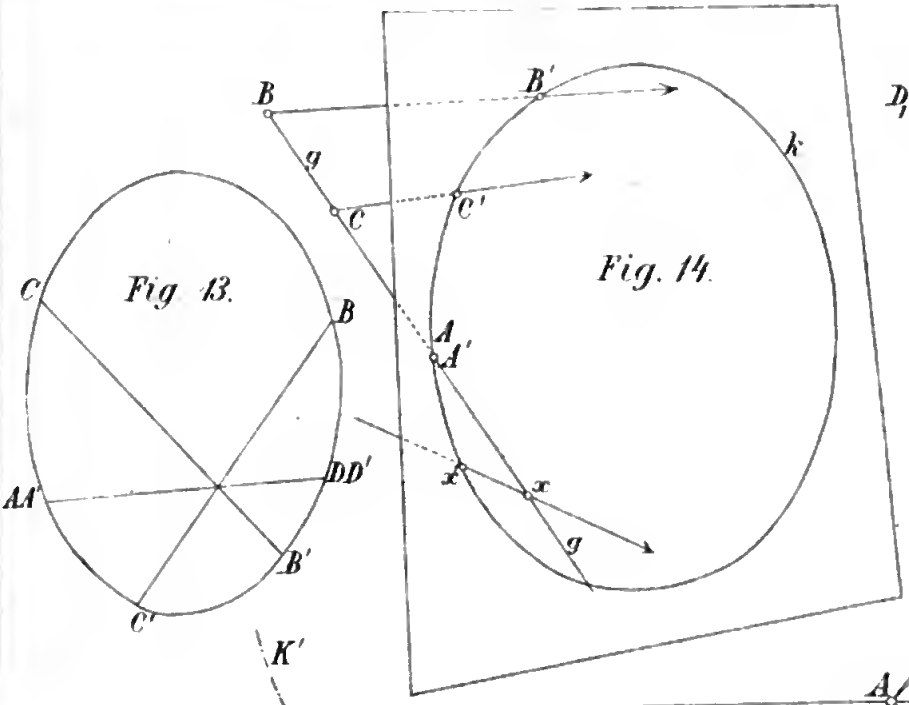


Fig. 14.

Fig. 13.

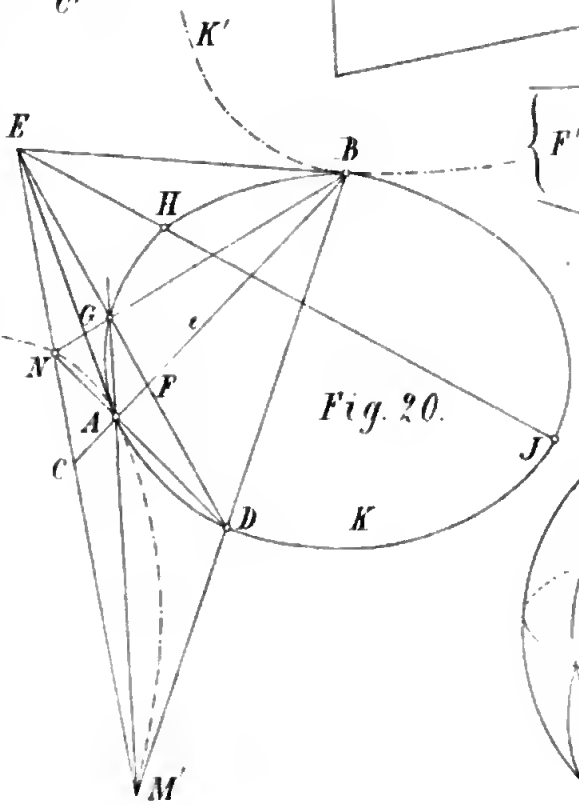


Fig. 20.

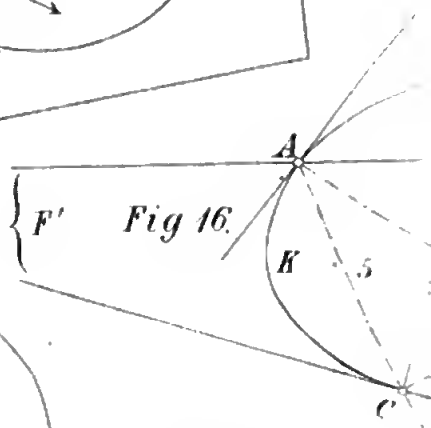


Fig. 16.

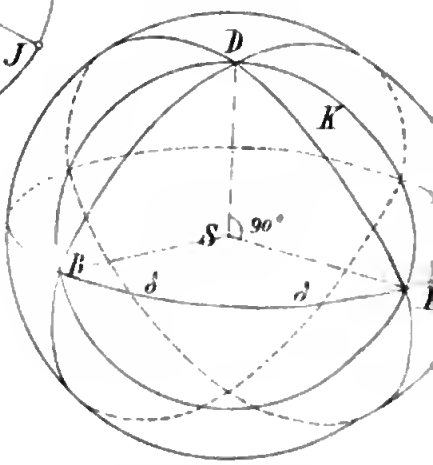


Fig. 19.

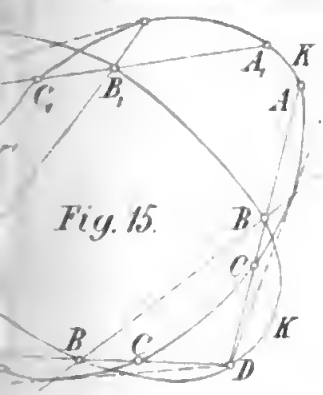
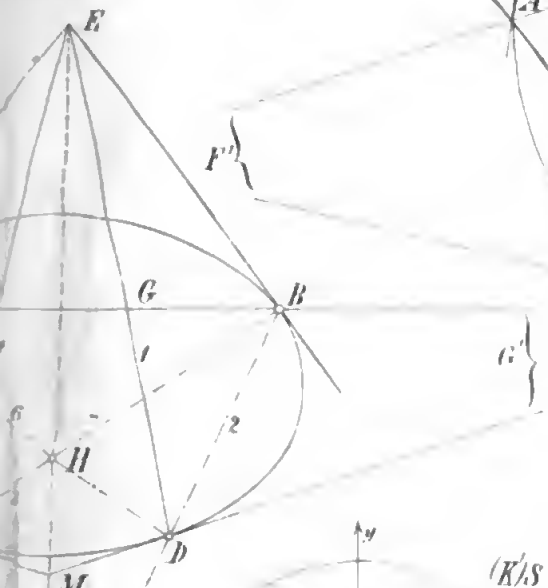


Fig. 15.



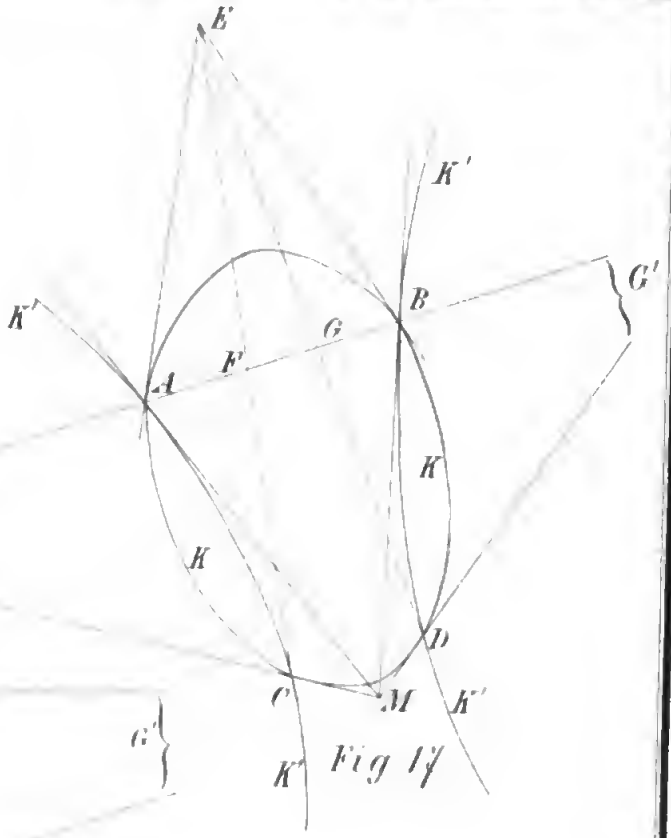


Fig 17

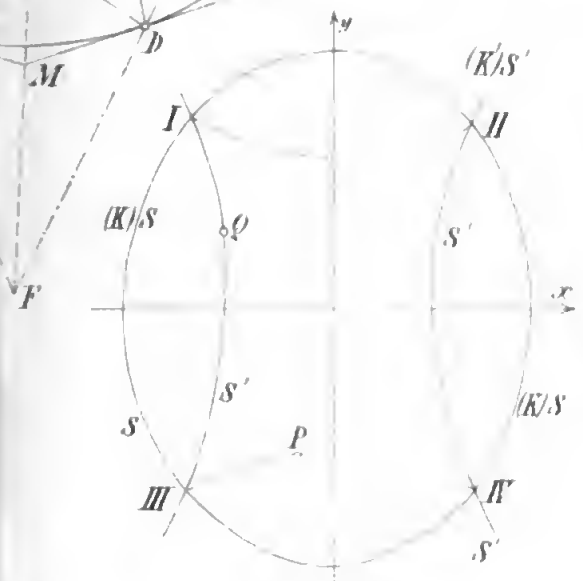


Fig. 21.

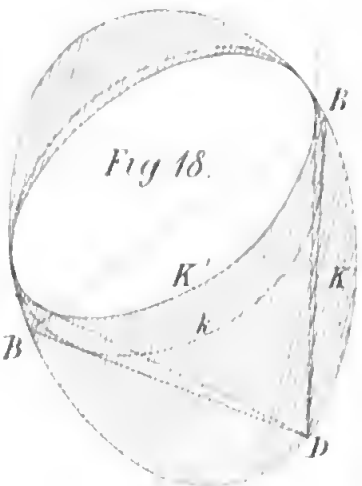


Fig 18.

...roid-Complexes.

Digitized by Google

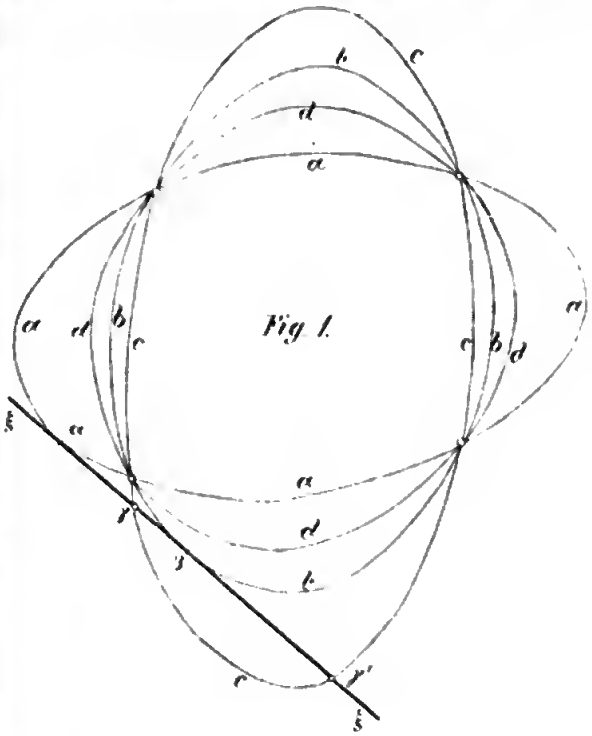


Fig 1.

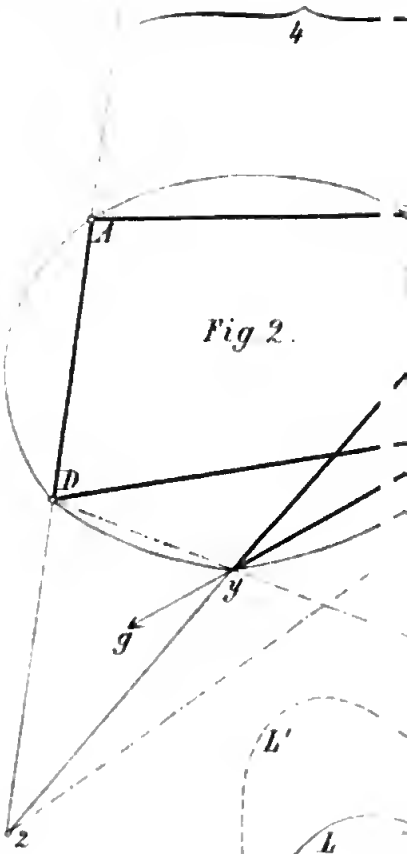


Fig 2.

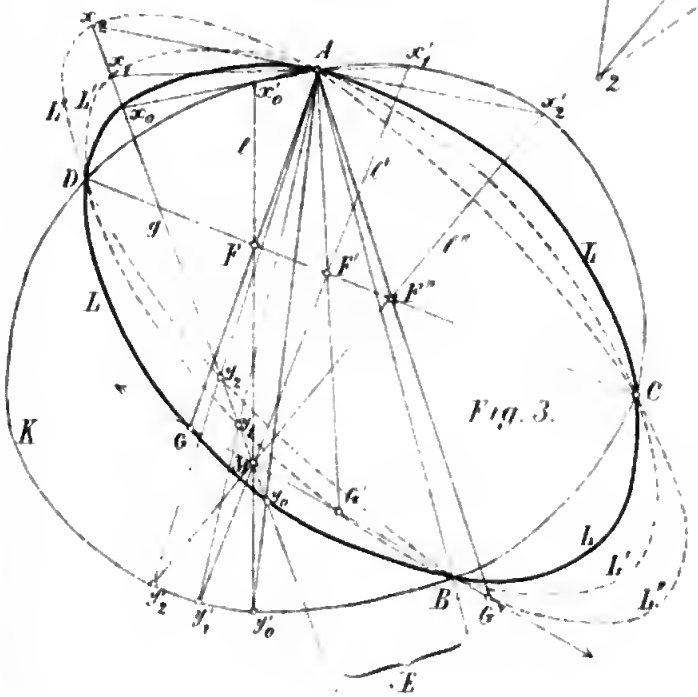
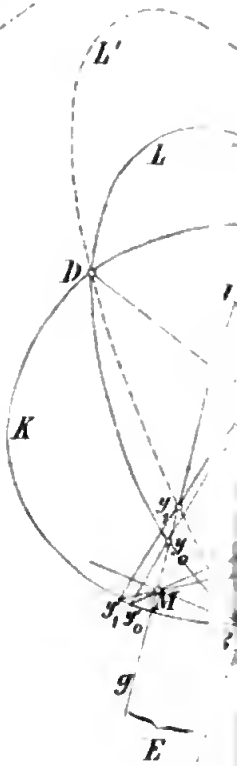
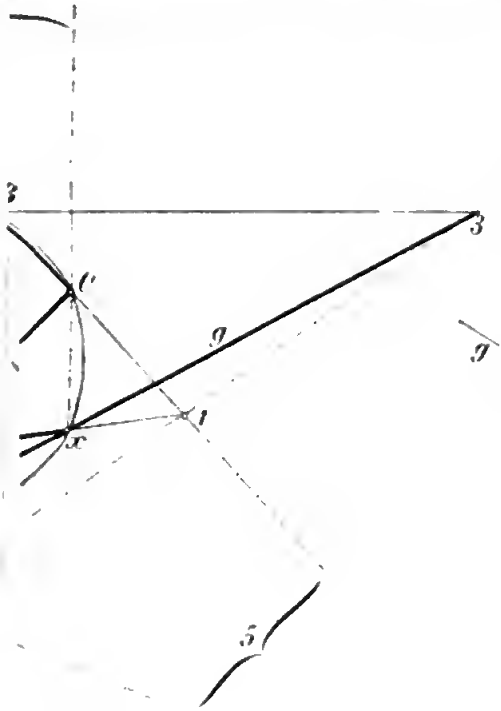


Fig. 3.





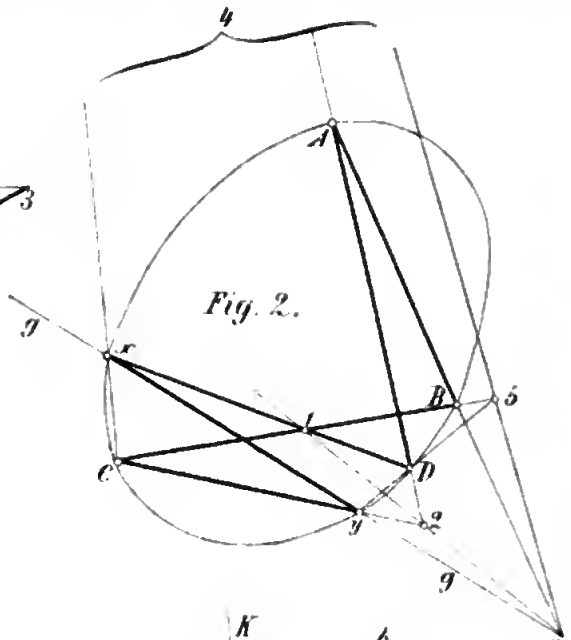


Fig. 2.

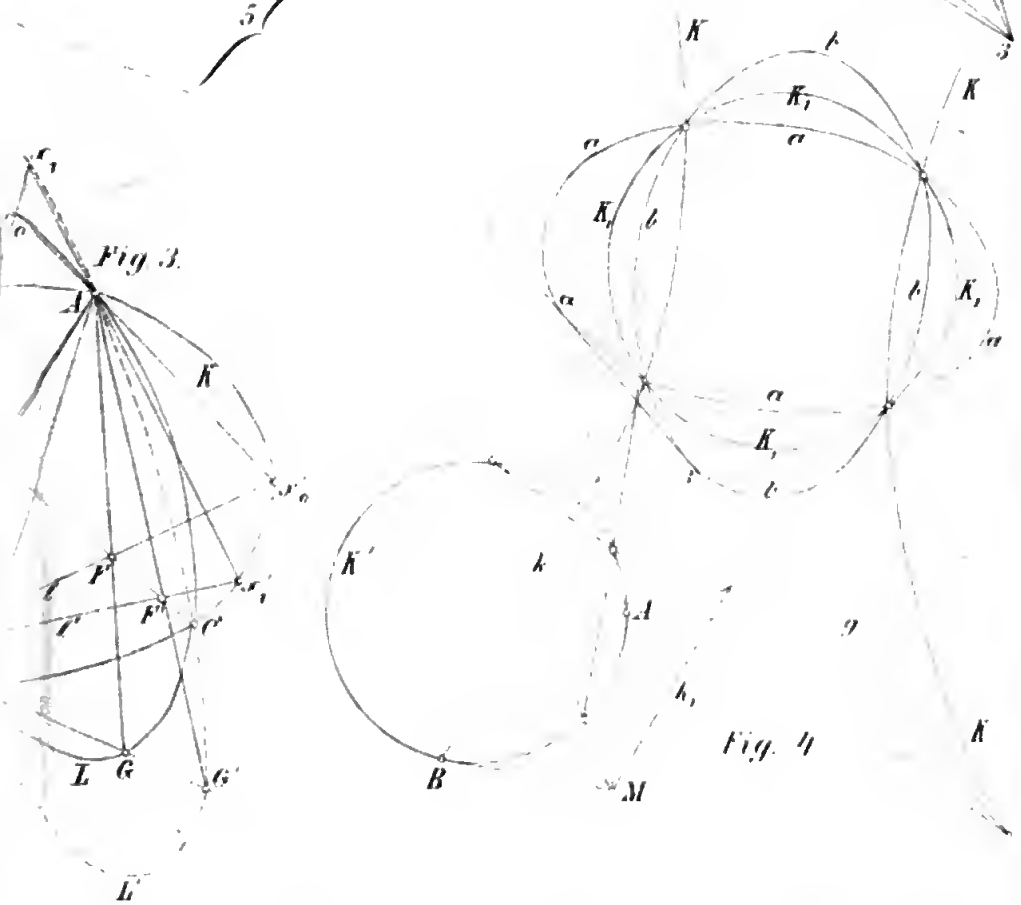


Fig. 3.

Fig. 4

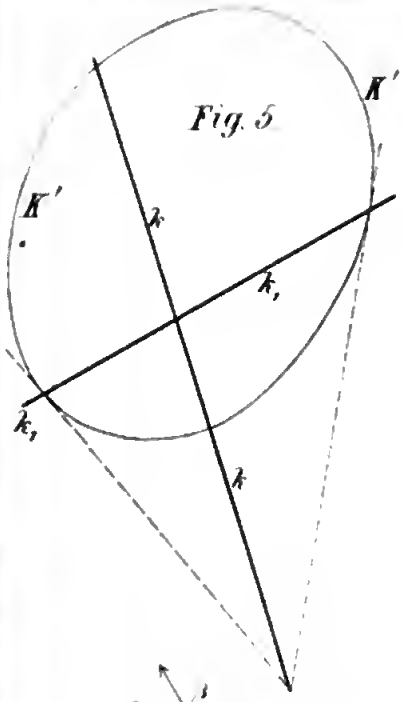


Fig. 5

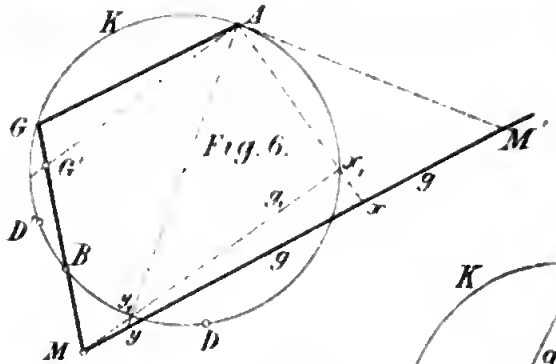


Fig. 6.

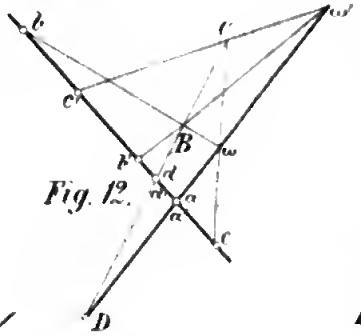
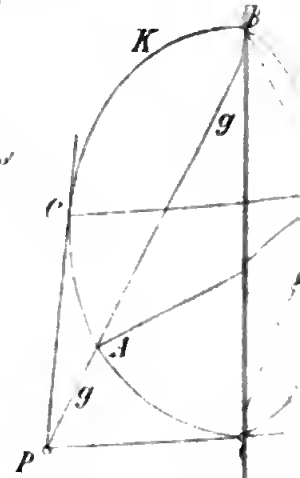


Fig. 12.



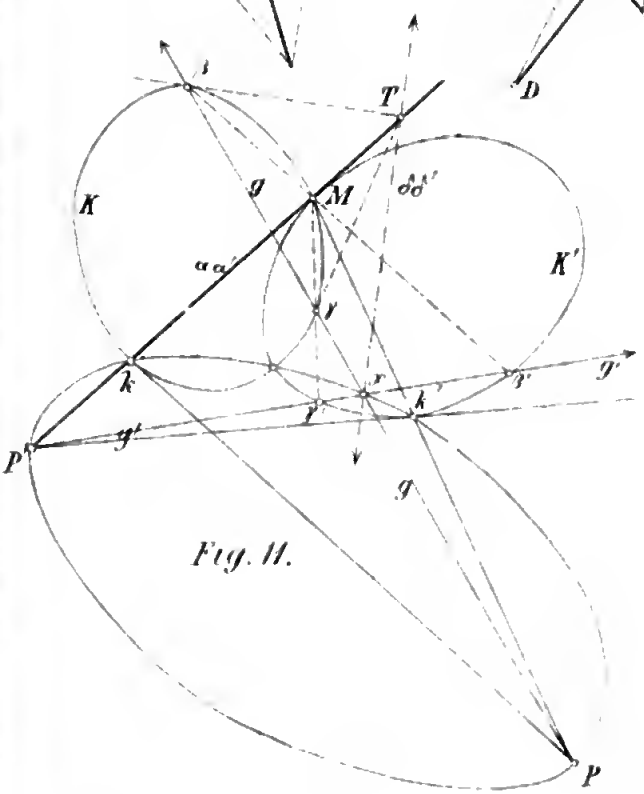
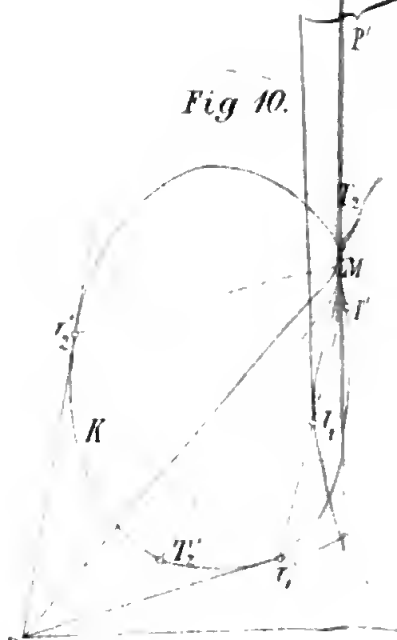


Fig. 11.

Fig 10.



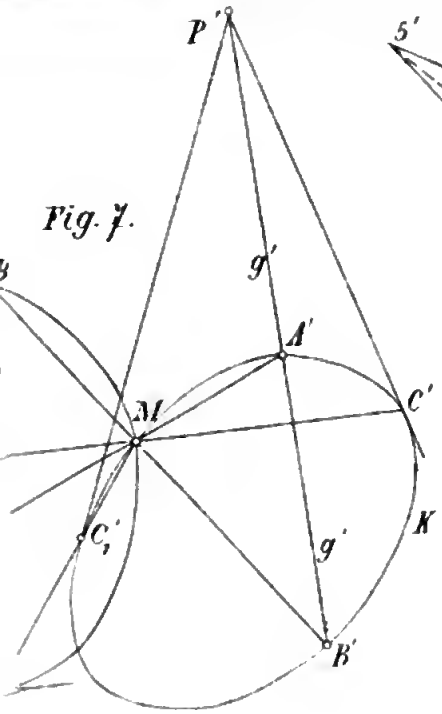


Fig. 7.

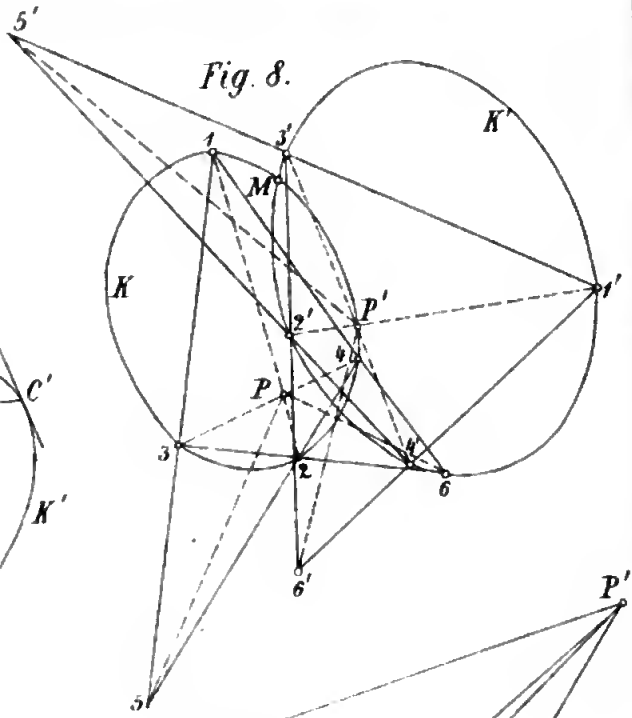
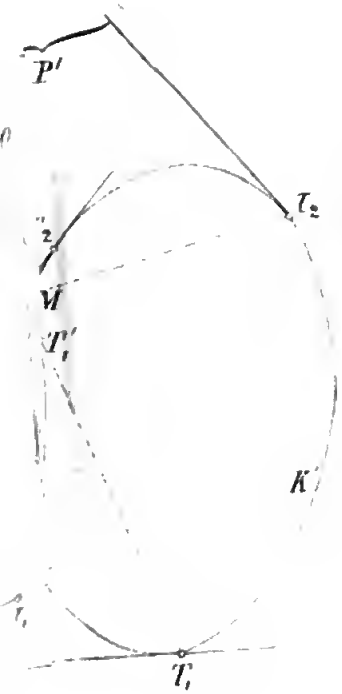


Fig. 8.



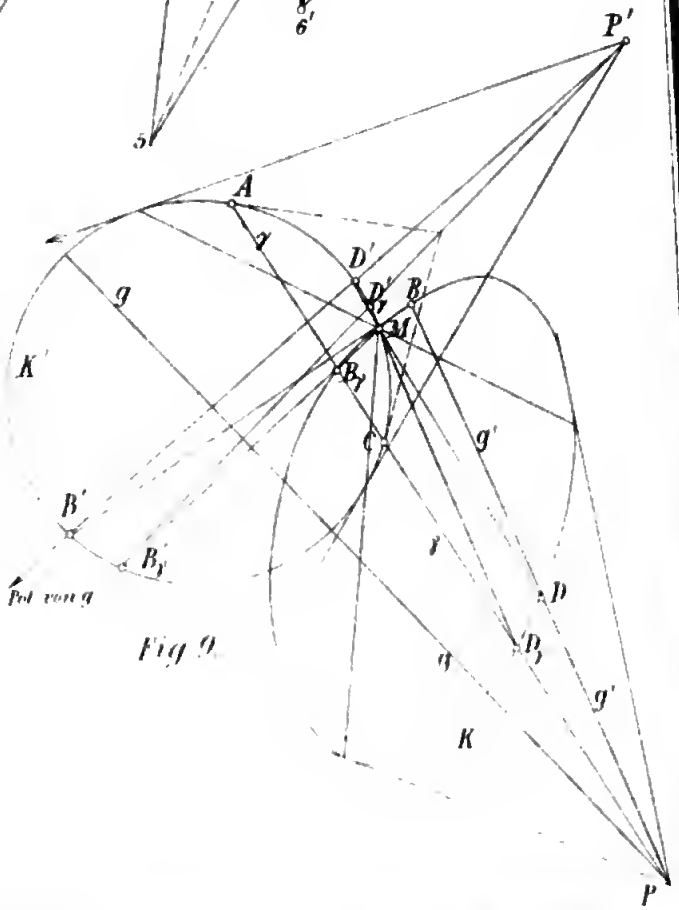
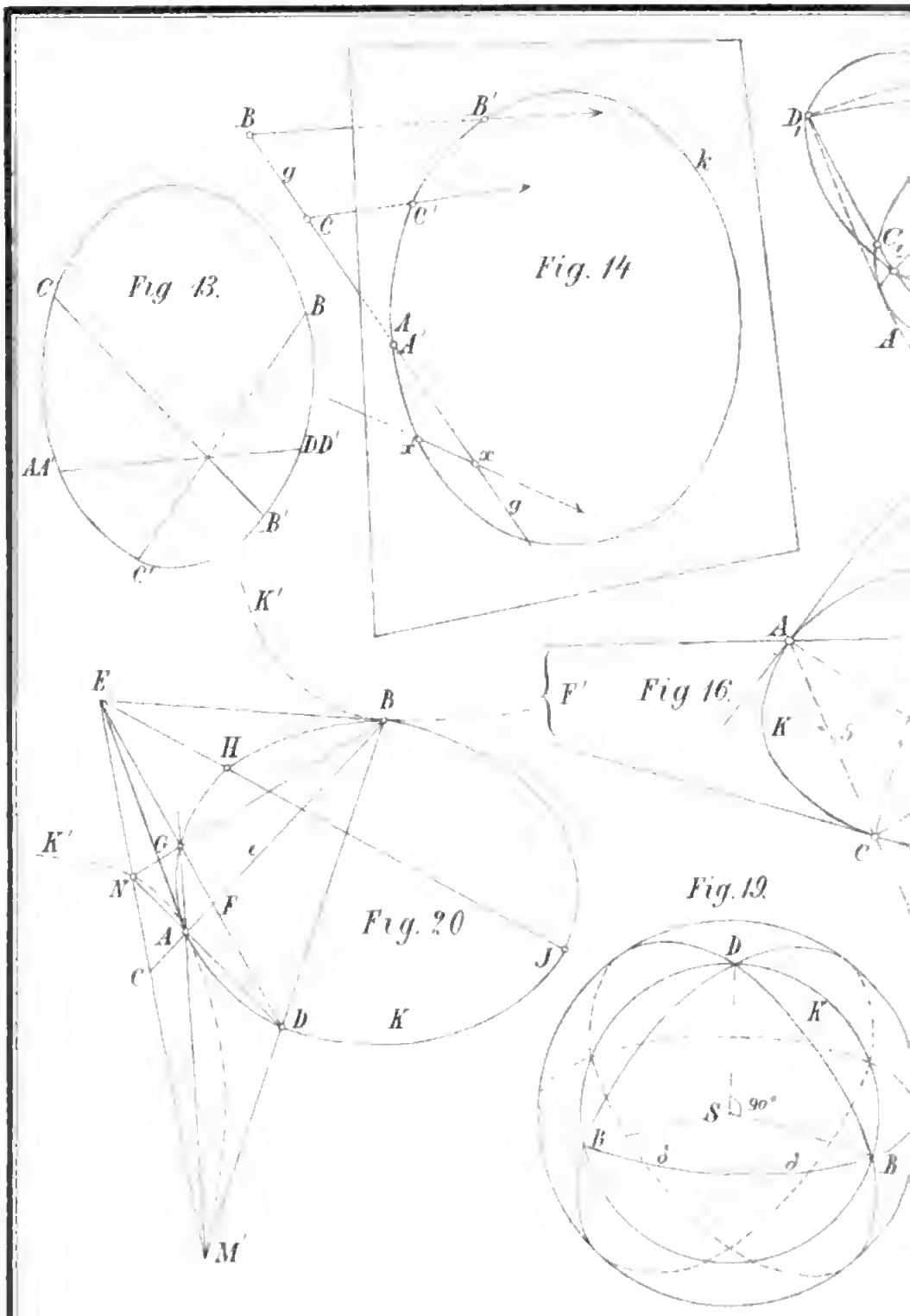


Fig. 9.

des Tracdroid Complexes.



XVI. Hofmann: Die synthetischen Grundlagen der Theorie des Tetra

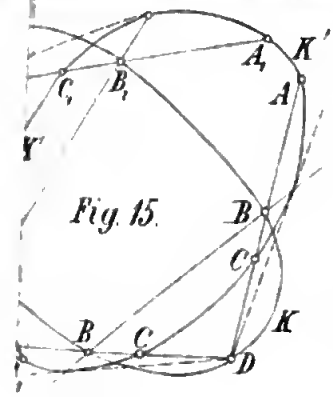
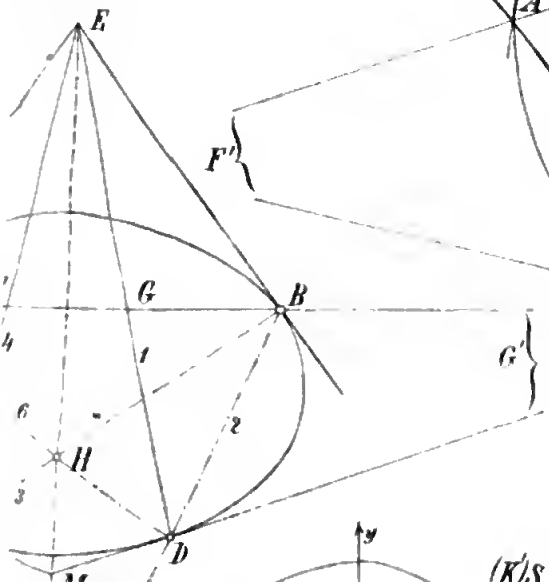


Fig. 15.



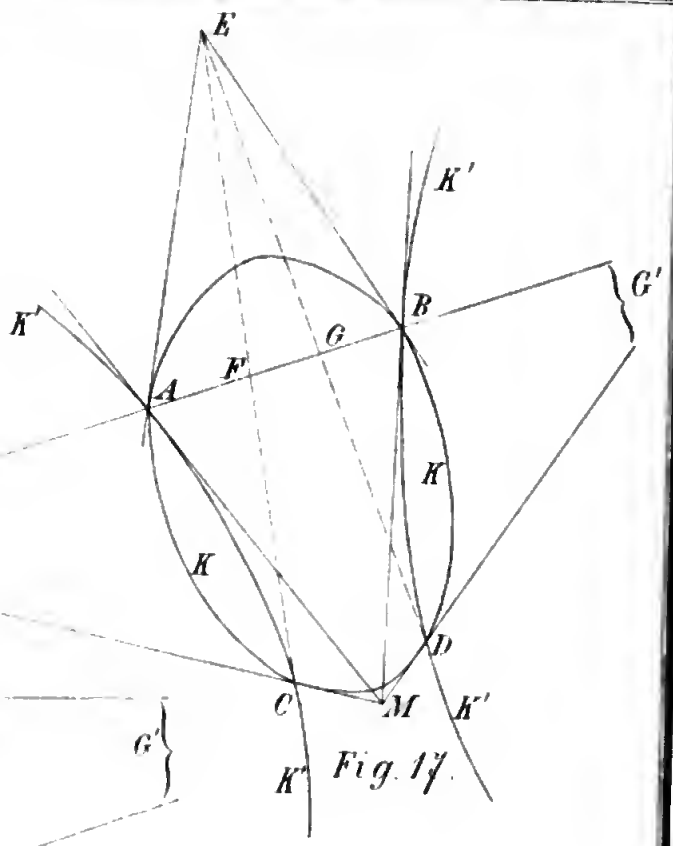


Fig. 17.

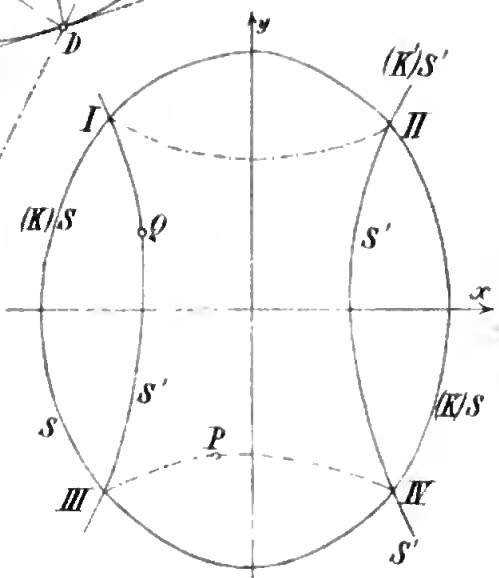


Fig. 21.

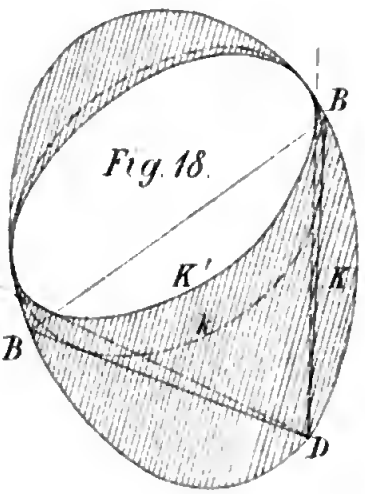


Fig. 18.

droid-Complexes.

Digitized by Google

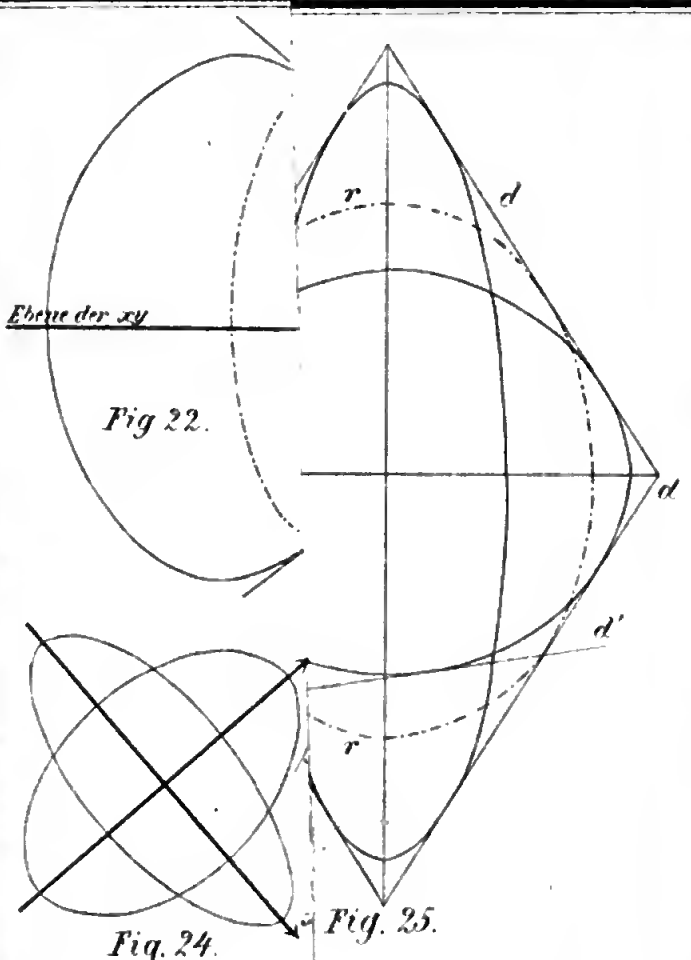
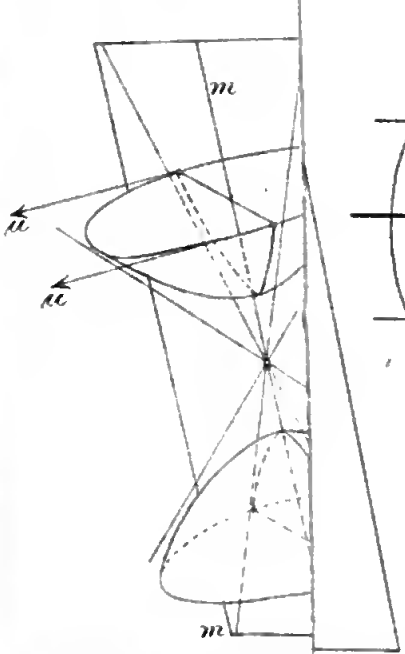


Fig 22.

Fig. 24.

Fig. 25.



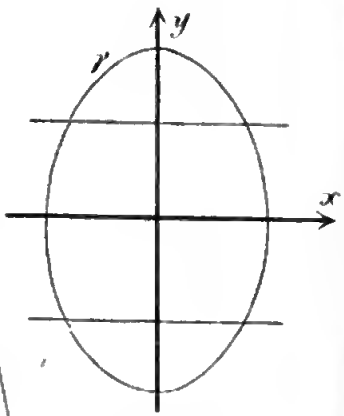


Fig. 24

ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe,

Dr. ph. Prof. an d. Univ. Berlin.

Zweite Reihe.

Sechster Teil.

Leipzig.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,

J. Sengbusch.

1888.

Inhalts-Verzeichnis

des sechsten Teils.

№ der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	Arithmetik, Algebra und reine Analysis ohne Integralrechnung.		
VII.	Zur Theorie der harmonischen Reihe. Von Heinrich Simon	I.	105
XII.	Fortsetzung	II.	220
XVII.	Bemerkung zu der Formel für das Differential einer Function mehrerer Variabeln. Von R. Hoppe	III.	351
XXII.	Zur Lehre der quadratischen Formen. Von Julius Vályi	IV.	445
	Integralrechnung.		
XVI.	Ueber die Entwickelung von $e^{-1:(1-x)}$ in eine Potenzenreihe nebst einigen Anwendungen derselben. Von Louis Saalschütz	III.	305
XXII.	Zur Function $\Gamma(x)$. Von W. Láska	IV.	448
	Geometrie der Ebene.		
V.	Construction der den Brennpunkten eines Kegelschnitts entsprechenden Punkte im collinearen System. Von Leopold Kiug	I.	88
VII.	Ueber die Normalen der Kegelschnitte. Von Emil Oekinghaus	I.	112
VIII.	Ueber die Curven vierter Ordnung mit drei Inflexionsknoten. (Schluss). Von P. H. Schoute	II.	113
XI.	Zur Theorie der Schliessungsprobleme. Von Emil Oekinghaus	II.	186

Nr der Abhandlung.		Heft.	Seite.
XII.	Znr Rectification der Hyperbel. Von Emil Oekinghaus	II.	223
XIX.	Eigenschaften gewisser Punkttripel auf der Cissolde. Von Karl Zahradnik	IV.	392
XX.	Ueber einige Winkel- und Längenrelationen am Dreieck. Von Karl Zahradnik	IV.	415
XXII.	Neuer Punkt und Gerade in der Dreiecksebene. Von Johann Hermes	IV.	437
	Geometrie des Raumes.		
III.	Erweiterung zweier Sätze auf n Dimensionen. Von R. Hoppe	I	69
IV.	Ueber Triederschnitte und Minimaltetraeder. Von O. Bermann	I.	76
XII.	Bemerkung dazu. Von O. Bermann	II.	219
VI.	Ueber mehrfach perspective Tetraeder. Von Leopold Kiug	I.	93
X.	Principien der n dimensionalen Curventheorie. Von R. Hoppe	II.	168
XV.	Mittelwerte, die Krümmung ebener Curven und krummer Flächen betreffend. Von Emannel Czuber	III.	294
	Trigonometrie.		
I.	Der Brocard'sche Winkel des Dreiecks. Von W. Fuhrmann	I.	1
XII.	Berichtigende Notiz dazu. Von W. Fuhrmann	II.	218
XIV.	Determinanten bei wiederholter Halbirung des ganzen Winkels. Von Johann Hermes . . .	III.	276
	Mechanik.		
IX.	Beitrag zur Lehre von der Bewegung eines festen Körpers in einer incompressibeln Flüssigkeit. Von Fritz Kötter	II.	157
XIII.	Potential einer elliptischen Walze (Fortsetzung). Von Ulrich Bigler	III.	225
XXII.	Momentaner Bewegungszustand eines in der Praxis viel angewandten Mechanismus. Von August Ramisch	IV.	442

Nr der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	Optik, Akustik und Elasticität.		
II.	Die Lissajeus'schen Curven. Von H. Ekama .	I.	39
	Astronomie.		
XVIII.	Die intermediäre Bahn des Planeten (17) Thetis nach Herrn Gyldén's Theorie. Von Wellmann	IV.	353
	Litterarische Berichte.		
XXI.	Boncompagni (Bull. XIX.) Enestrőm (Bihl. M. 1886 — f. Gesch. I.) Vogler (pr. Geom.) Börsch (geod. Coord.) Israel-Holtzwart (Astr.) Günther (Erdk. u. Math.) Konkoly (Hmlsphot.) Hann u. Köppen (met. Zschr. III). Bertrand (Thermodyn.) Poske (Zschr. ph. Unt. I.) Teixeira (Jorn. VII.) Neweomh (Am. J. IX.) Kiknehl (J. Coll. se. I.) Upsala (Nov. Act. XIII) Montsonris (Ann. 1887.)		
XXII.	Hengel (Alg.) Enholtz (Ar.) Bretschneider (Ar. Alg.) Seeger (Geom.) Finger (Mech.) Jansen (Phys.) Wildermann (Natnrl.) Lautesehläger (Anfg.) Mertens (Rech.) Wittstein (4st. Log.) Paulus (Mondph.) Brüssel (Bull. IX—XIII, — Ann. 1886 1887.) Tonlonse (Ann. I.) Mittag-Leffler (A. M. X.)		
XXIII.	Teixeira (anal. inf.) Stegemann (Kiepert) (Diff. Int.) Mansion (anal. Inf.) Sickenberger (Det.) Ganss (Simon) (G.'sche Rh.) Simony (alg. Op.) Darbonx (géom.) Schmidle (Fl. 2. O.) Heger (Kegschn.). Hofmann (Riem. Fl.) Beyel Axon. Persp.) Simony (top. Tats.)		
XXIV.	Lagranga (Servns) (Mech.) Poinsot (Servns) (Stat.) Petreff (Wnrsel) (Reib.) Toepler (Luftwid.) Anerbach (el. Masch.) Glaser-De-Cew (Anerbaeh) (Constr. d. el. M.) Kareis (Zschr. Elektrot. IV.) Epsteln (Geom.). Martns (astr. Geogr.) Gravé (hydr. Stud. I) Hagen (Wettertel.) Manojlovlts (astr. Kal.) Hann n. Köppen (met. Zschr. IV.) Hamh. math. Ges. (Mitt. 5. 7. 8.) Canad. Inst. (Proc. IV.) Soc. M. de Fr. (Bull. XV.) Mansion n. Nenberg (Math. VII.) Bur. de Long. (Ann. 1888.)		

Berichtigungen

im 4. Teile

Seite 434 Zeile 1 u. 3 v. ob. statt $\operatorname{tg}\beta+\frac{m^2}{n^2}$ setze $\operatorname{tg}\beta+\frac{m^2}{n^2}\operatorname{tg}^2\beta$

im 5. Teile

Seite	201	Zeile	15 u. 16	v. ob.	der Satz: „Alle etc.“ ist zu streichen.
	203		7	v. unt.	statt wird u setze wird, da u
	206		14	v. ob.	„ $= a\{1+b+b^2+\ldots\}$ setze $\lim(1-b^n)x = \lim a\{1+b+b^2+\ldots b^{n-1}\}$
	286		5	v. ob.	statt oder: wo setze oder: 2) a wo
	288		5	v. ob.	„ der „ die Anzahl der
	306		8	v. ob.	„ $\leqq$ „ $\geqq$
	309		5	v. ob.	am 2ten, $n$ten Reihenterm fehlt der Factor x, resp. x^{n-1}
	315		18	v. ob.	statt a_5' setze a_5
			9	v. unt.	„ a_2'' „ a_0''
	317		2	v. ob.	„ bedingen sich „ bedingt
			3	„ „	$\sigma<1$ und „ $\sigma>1$ dass
			4	„ „	$\tau>1$ und „ $\tau<1$ dass
	318		7	„ „	a_{r-p_1} „ a''_{r-p_1}
			8	„ „	a_{r-p_1} „ a'_{r-p_1}
			14	„ „	a_g' „ a_g
	320		5	„ „	$p(z)$ „ $p\varphi(z)$
	321		12	„ „	$r+3$ „ $r-3$
	328		1	v. unt.	„ $)^x$ „ $)^r$
	329		3	v. ob.	„ $f(x)^n f(c)^{n-1}$ „ $f^n(x) f^{n-1}(c)$

im 6. Teile

Seite 87 Zeile 4 v. ob. u. folg. berichtigt Seite 219 Zeile 18 u. f.

105 14 v. unt. statt Abhandlung setze Behaudlnug

106 3 v. ob. „ c „ $c =$

13 „ „ $k-1$ „ $k = 1$

14 „ vor Gl. (6ᵃ) schalte ein:
deren zweite sich noch auf die Form bringen lässt:

107 2 v. nut. statt σ_{2pn} setze $\sigma_{2pn}(z)$

108 1 v. ob. „ $p-2$ „ $p-1$

8 „ „ C „ $C\left(\frac{z+k}{2p}\right)$

10 „ „ $\sum_{2}$ „ $\sum_{1}$

15 „ „ Differentiatiou setze Dissertation

109 3 „ „ $\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ „ $\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\pi$

9 „ „ $2p-2$ „ $2p-1$

8 v. uut. „ $2m+4$ „ $2m+1$

5 „ „ $2m$ (im Zähler) „ 1

110 2 v. ob. „ $\frac{2}{2\pi}$ „ $\frac{2\pi}{p}$

2 v. unt. „ $\frac{2p-1}{4}$ „ $\frac{2p-1}{4}\pi$

157 1 v. ob. „ VIII „ IX

306 2 „ vor zuvor „ und

310 15 „ statt $\beta_2 = 2b_2$ und $-1 = -b_0$ setze
$-\beta_2 = 1 = b_0$

312 2 „ ist hinzuzufügen:
Die Gl. (18) lehrt, dass für $\beta = 0$ (Anfang uud Ende einer Gruppe) auch $\frac{\partial^2\beta}{\partial\xi^2} = 0$ ist, also $\frac{\partial\beta}{\partial\xi}$ sein Max. oder Miu. erreicht.

317 4 „ statt k setze λ^2

319 1 „ „ λ „ 4

7 v. nnt. „ $\sqrt{\lambda}$ „ λ

Seite	326	Zeile	5	v. unt.	statt	$\frac{8z+\pi^2}{8z}$	setze	$\frac{8z-\pi^2}{8z^2}$
	328		8	„	„	0,1719	„	0,2719
	347		1	v. ob.	„	0,0009	„	0,00009
						$\frac{1}{v^r}$		$-\frac{1}{v^r}$
	349		8	„	„	e	„	e

I.

Der Brocard'sche Winkel des Dreiecks.

Von

W. Fuhrmann.

Vorbemerkung.

In neuester Zeit sind Mathematiker verschiedener Länder au Eigenschaften des Dreiecks gestossen, welche, obwol die Untersuchungen verschiedene Ausgangspunkte hatten, einen merkwürdigen Zusammenhang zeigten. Dieser Zusammenhang wurde durch einen merkwürdigen Punkt und einen merkwürdigen Winkel des Dreiecks hergestellt.

Während der Punkt die 3 Namen: der Grebe'sche Punkt, le point de Lemoine, the symmedian-point, erhalten hat, wird der Winkel wol allgemein nach dem Vorschlage der Miss C. A. Scott (Educational Times) als der Brocard'sche Winkel bezeichnet. Unzweifelhaft gebührt Brocard das Verdienst, die genauern Untersuchungen, die sich auf diesen Winkel beziehen, angeregt zu haben, doch ist der Winkel schon von van Swinden (Grondbeginsels der Meetkunde door J. H. van Swinden c. 1816) angeführt. Derselbe hat nicht nur die Relationen

$$\cot\vartheta = \cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma$$

und

$$\frac{1}{\sin^2\vartheta} = \frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma}$$

angegeben, sondern auch die Punkte, welche mit diesem Winkel in innigem Zusammenhange stehen und die als Brocard'sche Punkte

bezeichnet werden. Ebenso giebt Deshoves in seinem Werke: Questions de trigonométrie rectiligne die Grundrelationen an. Die Untersuchungen dagegen über den Kreis, der durch diese Punkte und den vorher angegebenen Grebe'schen Punkt geht, rühren von Brocard her, weshalb dieser Kreis mit Recht als der Brocard'sche bezeichnet wird.

Nachdem Brocard schon 1880 in der Zeitschrift von J. C. V. Hoffmann für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht einige merkwürdige Eigenschaften dieses Kreises angegeben hatte, veröffentlichte er eine darauf bezügliche Abhandlung: Etude d'un nouveau cercle du plan du triangle (Association française pour l'avancement des sciences; Congrès d'Alger 1881). Andere Abhandlungen, die mehr oder weniger mit den Punkten dieses Kreises zusammenhangen, sind: Programmabhandlung von Kiehl in Bromberg: Zur Theorie der Transversalen. 1881. Programmabhandlung von Artzt in Recklinghausen: Untersuchungen über ähnliche Punktreihen auf den Seiten eines Dreiecks etc. 1884. R. Tucker in London: the triplicate ratio-circle im Quarterly journal of mathematics. 1883. Denselben folgten andere von Brocard und R Tucker. Der letztere veröffentlichte dieselben in den proceedings of the London mathematical society, während Brocard seine Hauptabhandlung noch in der Association française pour l'avancement des Sciences, Congrès de Rouen und eine andere im journal de mathématiques spéciales erschienen liess. Kleinere Sachen machte er noch in der genannten Zeitschrift von J. C. V. Hoffmann bekannt. In derselben Zeitschrift veröffentlichten noch mehrere andere Männer in Gestalt von Aufgaben geometrische Lehrsätze, welche sich an den Brocard'schen Kreis anschlossen. Es waren dies ausser den schon genannten Brocard, Artzt und Kiehl noch besonders Stoll in Bensheim, dann Böklen in Reutlingen, Dewulf, G. Tarry in Algier, Neuberg in Lüttich und der unterzeichnete Verfasser, wobei an der Lösung sich noch andere Männer (Stegemann in Prenzlau, Emmerich in Mühlheim a. R., Godt in Lübeck, Capello in Oberhausen) beteiligten. Kleinere Sachen wurden noch in den nouvelles annales de mathématiques von Lemoine und Maurice d'Ocagne angegeben; dieselben bezogen sich besonders auf den Grebe'schen Punkt. Endlich ist noch eine Arbeit von Neuberg hervorzuheben, welche mir leider nicht zugänglich war. Nachdem derselbe in der belgischen Zeitschrift Mathesis mehrere Untersuchungen über diesen Gegenstand veröffentlicht hatte, schrieb er in einer Zeitschrift, welche von der königl. belgischen Akademie herausgegeben wird, eine Abhandlung: Mémoire sur le tétraèdre. Ich habe nur ersehen können, dass der Grebe'sche und die Brocard'schen Punkte hier eine grosse Rolle spielen.

Obne behanpten zn wollen, dass alle Pnblicationon, die sich auf diesen Gegenstand beziehen, genannt sind, dürfteu doch die wesentlichsten genannt sein, und diese Angaben dürften die Mittel angeben, um diejenigen Werke ausfindig zu machen, welche weitere Untersuchnngen darüber onthalten, so dass ich boffen könnte, dass die angegebene Uebersicht keine ganz überflüssige Arbeit ist.

Diese Untersnchnngen bieten besonders der elementaren Mathematik interessante Resnltate, so dass icb glaube, dass die Sammlnng derselben auch in weiterem Kreise Interesse einflössen wird. Da die Ableitnng der Resultate auf elementar trigonometrischem Wege die leichteste ist, so schien es mir am vorteilhaftesten, die Eigenschaften, die sich auf den Brocard'schen Winkel beziehen, zunächst einheitlich zusammenzustellen. Das Thema erhält dadurcb eine angemessene Beschränknng nnd führt am leichtesten in die weiter gehendon Eigenscbaften ein.

Der Uebersicht balber teile icb die Eigenschaften in 2 Teile. Der erste hezieht sich auf symmetrische Relationen zwischen den Winkeln des Dreiecks und dem Brocard'schen Winkel. Der 2te gieht Längen nnd Grössen des Dreiecks, die sich dnrch diesen Winkel ausdrücken lassen, sowie einigo sicb daran anschliessende Eigenschaften, also immer nur solcbe, welcho mit dem Winkel in Verbindnng stehen.

A. Relationen zwiscben den Winkeln des Dreiecks und dem Brocard'schen Winkel.

Erklärung. Das Dreieck werde mit ABC (Fig. 1.) bezeichnet, die Winkel mit α, β, γ; die Seiten entsprechend mit a, b, c. Fällt man von einem Punkte P das Lot auf eine Seite a, so heisst der Fusspnnkt P_a, analog ist die Bedentnng P_b, P_c. Der Mittelpnnkt des nmgeschriebenen Kreises ist H, so dass die Mittelpnnkte der Seiten H_a, H_b, H_c sind. Liegen mehrere Punkte auf dem Lote, so erhält der einfachste nnd bekannteste den Vorzug. Der Höbenschnittpnnkt sei H', doch bezeicbnen wir die Fusspunkte der Höben mit A_a, B_b, C_c. Der Scbwerpnnkt sei G, nnd G' der Grebe'sche Punkt. Bildet eino Ecktransversalo mit einer Seite einen Winkel φ, so bezeicbuen wir die durch dieselbe Ecke gebende Transversale, welche mit der andern Seite den Winkel φ bildet, als Gegentransversale, so dass also diese Transversalen dieselbe Winkelbalbirungsiinie als die Dreieckswinkel baben. Schneiden sicb 3 Ecktransversalen in einem Pnnkte, so bekanntlich ancb die Gegentransversale. Diese so von einander abhängigen Punkte nennen wir Gegenpnnkte in Bezng anf das Dreieck. Dass H und H' solche Punkte

sind, ist bekannt, ebenso wol ist es auch von G und G' bekannt. Erklärt man den Grobe'schen Punkt auch als den Gegenpunkt des Schwerpunkts, so kann man daraus die Eigenschaft ableiten, dass die durch ihn gehenden Ecktransversalen durch die Pole der Gegenseiten in Bezug auf den umgeschriebenen Kreis gehen, und dass sie die Gegenseiten nach dem Verhältniss der Quadrate der anliegenden Seiten teilen. Der Inhalt des Dreiecks wird mit Δ bezeichnet.

1. Bestimmt man einen Winkel ϑ derartig, dass die Relation stattfindet:

$$\sin(\alpha-\vartheta)\sin(\beta-\vartheta)\sin(\gamma-\vartheta) = \sin^3\vartheta$$

und trägt diesen Winkel fortlaufend in den Ecken an den Seiten nach innen an, so werden sich diese Geraden in einem Punkte schneiden. Solcher Punkte giebt es 2, da man an jeder Ecke den Winkel an 2 Seiten antragen kann. Diese Schnittpunkte der entsprechenden Transversalen werden die Brocard'schen Punkte genannt, sie sollen mit O und O' bezeichnet werden. Die Punkte sind offenbar Gegenpunkte, denn es ist:

$$OAB = OBC = OCA = O'AC = O'BA = O'CB = \vartheta.$$

2. Aus der Relation in 1. folgt leicht:

$$\cot\vartheta = \frac{1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} = \cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma = \frac{a^2+b^2+c^2}{4\Delta}$$

Bew. Indem man die Sätze anwendet, welche ein Product von 2 Functionen Sinus oder Cosinus in eine Summe oder Differenz verwandeln, erhält man:

$$4\sin(\alpha-\vartheta)\sin(\beta-\vartheta)\sin(\gamma-\vartheta) = \sin(2\alpha+\vartheta)+\sin(2\beta+\vartheta)+\sin(2\gamma+\vartheta)-\sin 3\vartheta$$

Die Gleichung in 1. lautet also:

$$\sin(2\alpha+\vartheta)+\sin(2\beta+\vartheta)+\sin(2\gamma+\vartheta)-\sin 3\vartheta = 4\sin^3\vartheta$$

Entwickelt man die einzelnen Glieder links und benutzt die Formel

$$\sin 3\vartheta = 3\sin\vartheta - 4\sin^3\vartheta$$

so folgt:

$$(\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma)\cos\vartheta+(\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma)\sin\vartheta - 3\sin\vartheta = 0$$

oder

$$4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\cos\vartheta - 2(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)\sin\vartheta = 0$$

also

$$\cot\vartheta = \frac{\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma}{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} = \frac{2(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)}{\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma}$$

Es ist ferner:

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma) = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma - \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$$

ist also

$$\alpha+\beta+\gamma = 180^0$$

so folgt:

$$1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma+\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma+\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$$

also:

$$\frac{1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} = \cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma$$

Ferner

$$\frac{\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma}{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} = \frac{a^2+b^2+c^2}{8r^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} = \frac{a^2+b^2+c^2}{4\Delta}$$

3. Aus 2. folgt:

$$\cot\vartheta - \cot\alpha = \cot\beta+\cot\gamma$$

also

$$\frac{\sin(\alpha-\vartheta)}{\sin\alpha\sin\vartheta} = \frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}$$

oder

$$\frac{\sin(\alpha-\vartheta)}{\sin\vartheta} = \frac{\sin^2\alpha}{\sin\beta\sin\gamma} = \frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$$

ebenso

$$\frac{\sin(\beta-\vartheta)}{\sin\vartheta} = \frac{\sin^2\beta}{\sin\gamma\sin\alpha} = \frac{\sin^2\beta}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$$

$$\frac{\sin(\gamma-\vartheta)}{\sin\vartheta} = \frac{\sin^2\gamma}{\sin\alpha\sin\beta} = \frac{\sin^2\gamma}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$$

Es ist also:

$$\sin(\alpha-\vartheta):\sin(\beta-\vartheta):\sin(\gamma-\vartheta) = \sin^2\alpha:\sin^2\beta:\sin^2\gamma$$

4. Erhebt man die Gleichung:

$$\cot\vartheta = \cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma$$

in's Quadrat und addirt 1, so findet man:

$$1+\cot^2\vartheta = \cot^2\alpha+\cot^2\beta+\cot^2\gamma+3$$

da

$$\cot\beta\cot\gamma+\cot\gamma\cot\alpha+\cot\alpha\cot\beta = 1$$

ist; also auch:

$$\frac{1}{\sin^2\vartheta} = \frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}+\frac{1}{\sin^2\gamma}$$

5. Auch durch die halben Winkel lässt sich $\cot\vartheta$ elegant ausdrücken. Es ist

$$4\cot\vartheta = \cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}\cot\frac{\gamma}{2} + \cot\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cot\frac{\gamma}{2}$$

Bew. 1. Es ist

$$2\cot\varphi = \cot\frac{\varphi}{2} - \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$$

also

$$4(\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma) = \cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}+\cot\frac{\gamma}{2}+\left(\cot\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}-\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right) + \left(\cot\frac{\beta}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)+\left(\cot\frac{\gamma}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)$$

Ferner

$$\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}+\cot\frac{\gamma}{2} = \cot\frac{\alpha}{2}\cdot\cot\frac{\beta}{2}\cdot\cot\frac{\gamma}{2}$$

$$\cot\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}-\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}-\cot\frac{\alpha}{2}.\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}.\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$

also

$$4(\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma) = \cot\frac{\alpha}{2}\cdot\cot\frac{\beta}{2}\cdot\cot\frac{\gamma}{2}+\cot\frac{\alpha}{2}.\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}.\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \cot\frac{\beta}{2}.\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\cot\frac{\gamma}{2}.\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$$

Bew. 2.

$$4+4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = (1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)(1+\cos\gamma) + (1+\cos\alpha)(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma)+(1-\cos\alpha)(1+\cos\beta)(1-\cos\gamma) + (1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)(1+\cos\gamma)$$

Dividirt man durch $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$, so erhält man die Formel

$$6.\quad \cot\vartheta = \begin{vmatrix} \sin^3\alpha & \sin^3\beta & \sin^3\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \sin^3\alpha & \sin^3\beta & \sin^3\gamma \\ \sin\alpha & \sin\beta & \sin\gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Bew. Die erste Determinante kann dargestellt werden durch $\Sigma\sin^3\alpha\cos\beta - \sin^3\beta\cos\alpha$, die 2te durch $\Sigma\sin^3\alpha\sin\beta - \sin^3\beta\sin\alpha$, wo das Zeichen Σ bedeuten soll, dass die andern Glieder dadurch gebildet werden, indem β für α, γ für β, α für γ gesetzt und so fortgeschritten wird, bis man zum ersten Gliede zurückkehrt.

Es ist nun

$$\begin{aligned}\sin^3\alpha\cos\beta - \sin^3\beta\cos\alpha &= \sin\alpha\cos\beta(1-\cos^2\alpha) - \sin\beta\cos\alpha(1-\cos^2\beta)\\ &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta(\sin\alpha\cos\alpha - \sin\beta\cos\beta)\\ &= \sin(\alpha-\beta)\{1-\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)\}\\ &= \sin(\alpha-\beta)(1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin^3\alpha\sin\beta - \sin^2\beta\sin\alpha &= \sin\alpha\sin\beta(\sin^2\alpha - \sin^2\beta)\\ &= \sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)\\ &= \sin(\alpha-\beta)\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\end{aligned}$$

also

$$\frac{\sin^3\alpha\cos\beta - \sin^3\beta\cos\alpha}{\sin^3\alpha\sin\beta - \sin^3\beta\sin\alpha} = \frac{1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} = \cot\vartheta$$

Da, wenn

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1}, \quad \text{auch} \quad \frac{x+y+z}{x_1+y_1+z_1} = \frac{x}{x_1}$$

ist, so folgt daraus der Satz.

7. Wir wollen einführen:

$$\begin{aligned}\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma &= \varkappa^2,\\ \sin^2\beta\sin^2\gamma+\sin^2\gamma\sin^2\alpha+\sin^2\alpha\sin^2\beta &= \lambda^2\\ \sin\alpha.\sin\beta.\sin\gamma &= \mu\end{aligned}$$

Dann folgt aus der Gleichung in 4.

$$\sin^2\vartheta = \frac{\mu^2}{\lambda^2}, \quad \sin\vartheta = \frac{\mu}{\lambda}$$

so dass ϑ stets spitz ist. Also

$$\cos\vartheta = \frac{\sin\vartheta}{\operatorname{tg}\vartheta} = \frac{\mu}{\lambda}\cdot\frac{\varkappa^2}{2\mu} = \frac{\varkappa^2}{2\lambda}$$

nnd

$$\varkappa^2 = 2\lambda\cos\vartheta = 2\mu\cot\vartheta$$

Da auch

$$\cos^2\vartheta = \frac{\lambda^2-\mu^2}{\lambda^2}$$

ist, so folgt noch

$$4\lambda^2 - 4\mu^2 = \varkappa^4$$

also

$$\sin^4\alpha+\sin^4\beta+\sin^4\gamma = 2\lambda^2 - 4\mu^2 = 2(\lambda^2-2\mu^2)$$

8. Aus den Formeln in 7. folgt noch leicht

$$\sin 2\vartheta = \frac{\varkappa^2\mu}{\lambda^2}$$

$$\cos 2\vartheta = \frac{\lambda^2 - 2\mu^2}{\lambda^2}$$

also

$$\cot 2\vartheta = \frac{\lambda^2 - 2\mu^2}{\varkappa^2 \mu} = \frac{\sin^4\alpha + \sin^4\beta + \sin^4\gamma}{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\,(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma)}$$

9. $$\Sigma \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha - \vartheta)} = \frac{\mu}{\sin^2\vartheta}$$

Bew. $$\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha - 2\vartheta)} = \frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha\sin\vartheta} = \frac{\mu}{\sin\vartheta} \cdot \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

also

$$\Sigma \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha - \vartheta)} = \frac{\mu}{\sin\vartheta}\left\{\frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma}\right\} = \frac{\mu}{\sin^2\vartheta}$$

10. $$\Sigma \frac{\sin(\alpha - \vartheta)}{\sin\alpha} = 2\cos\vartheta$$

Bew. $$\frac{\sin(\alpha - \vartheta)}{\sin\alpha} = \cos\vartheta - \cot\alpha\sin\vartheta$$

also

$$\Sigma \frac{\sin(\alpha - \vartheta)}{\sin\alpha} = 3\cos\vartheta - \cot\vartheta\sin\vartheta = 2\cos\vartheta$$

11. $$\Sigma \sin\alpha\sin(\alpha - \vartheta) = \frac{2\mu\cos 2\vartheta}{\sin\vartheta}$$

Bew. $$\sin\alpha\sin(\alpha - \vartheta) = \sin^2\alpha\cos\vartheta - \sin\alpha\cos\alpha\sin\vartheta$$

also

$$\begin{aligned}\Sigma\sin\alpha\sin(\alpha - \vartheta) &= \varkappa^2\cos\vartheta - \frac{\sin\vartheta}{2}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)\\ &= \varkappa^2\cos\vartheta - 2\mu\sin\vartheta\\ &= 2\mu\cot\vartheta\cos\vartheta - 2\mu\sin\vartheta\\ &= \frac{2\mu\cos 2\vartheta}{\sin\vartheta}\end{aligned}$$

12. $$\Sigma \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha + \vartheta)} = \frac{\lambda(1 + 4\cos^2\vartheta)}{\varkappa^2 - \sin^2\vartheta}$$

Bew. $$\begin{aligned}\frac{\sin(\alpha + \vartheta)}{\sin\alpha} &= \cos\vartheta + \cot\alpha\sin\vartheta = \frac{\varkappa^2}{2\lambda} + \frac{2\mu}{2\lambda}\cot\alpha\\ &= \frac{\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma + 2\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma}{2\lambda}\\ &= \frac{\sin^2\beta + \sin^2\gamma}{\lambda}\end{aligned}$$

da

$$\sin^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha \quad \text{ist.}$$

Somit

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\vartheta)} = \frac{\lambda}{\sin^2\beta+\sin^2\gamma}$$

und

$$\Sigma\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\vartheta)} = \frac{\lambda(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma+3\lambda^2)}{(\sin^2\beta+\sin^2\gamma)(\sin^2\gamma+\sin^2\alpha)(\sin^2\alpha+\sin^2\beta)}$$
$$= \frac{\lambda\{3\lambda^2+2(\lambda^2-2\mu^2)\}}{\varkappa^2\lambda^2-\mu^2}$$
$$= \frac{\lambda^2(3+2\cos 2\vartheta)}{\lambda^2(\varkappa^2-\sin^2\vartheta)} = \frac{\lambda(1+4\cos^2\vartheta)}{\varkappa^2-\sin^2\vartheta}$$

13. $\Sigma\dfrac{\sin(\alpha+\vartheta)}{\sin\alpha} = 4\cos\vartheta$

14. $\Sigma\sin\alpha\sin(\alpha+\vartheta) = \dfrac{2\mu}{\sin\vartheta}$

Bew. $\sin\alpha\sin(\alpha+\vartheta) = \sin^2\alpha\cos\vartheta+\sin\alpha\cos\alpha\sin\vartheta$

also

$$\Sigma\sin\alpha\sin(\alpha+\vartheta) = \varkappa^2\cos\vartheta+2\mu\sin\vartheta$$
$$= 2\mu\cot\vartheta\cos\vartheta+2\mu\sin\vartheta = \frac{2\mu}{\sin\vartheta}$$

15. $\Sigma\dfrac{\cos(\alpha-\vartheta)}{\sin\alpha} = \dfrac{1+2\sin^2\vartheta}{\sin\vartheta}$

Bew. $\dfrac{\cos(\alpha-\vartheta)}{\sin\alpha} = \cot\alpha\cos\vartheta+\sin\vartheta$

also

$$\Sigma\frac{\cos(\alpha-\vartheta)}{\sin\alpha} = \cot\vartheta\cos\vartheta+3\sin\vartheta = \frac{1+2\sin^2\vartheta}{\sin\vartheta}$$

16. $\Sigma\dfrac{\cos(\alpha+\vartheta)}{\sin\alpha} = \dfrac{2\cos 3\vartheta}{\sin 2\vartheta}$

Bew. $\dfrac{\cos(\alpha+\vartheta)}{\sin\alpha} = \cot\alpha\cos\vartheta-\sin\vartheta$

also

$$\Sigma\frac{\cos(\alpha+\vartheta)}{\sin\alpha} = \cot\vartheta\cos\vartheta-3\sin\vartheta = \frac{\cos^2\vartheta-3\sin^2\vartheta}{\sin\vartheta}$$
$$= \frac{2\cos\vartheta(\cos^2\vartheta-3\sin^2\vartheta)}{\sin 2\vartheta}$$

Ebenso abzuleiten ist:

17. $\Sigma\sin\alpha\cos(\alpha-\vartheta) = 4\mu\cos\vartheta$
18. $\Sigma\sin\alpha\cos(\alpha+\vartheta) = 0$

19. $$\Sigma \cos\alpha\cos(\alpha-\vartheta) = 3\cos\vartheta - \frac{2\mu\cos 2\vartheta}{\sin\vartheta}$$

20. $$\Sigma \cos\alpha\cos(\alpha+\vartheta) = 3\cos\vartheta - \frac{2\mu}{\sin\vartheta}$$

Ist h eine positive oder negative ganze Zahl, so folgt ebenso

21. $$\Sigma \frac{\sin(\alpha+h\vartheta)}{\sin\alpha} = 2\cos h\vartheta + \frac{\sin(h+1)\vartheta}{\sin\vartheta}$$

z. B.

$$\Sigma \frac{\sin(\alpha+2\vartheta)}{\sin\alpha} = 2\cos 2\vartheta + \frac{\sin 3\vartheta}{\sin\vartheta} = 1+4\cos 2\vartheta$$

$$\Sigma \frac{\sin(\alpha-2\vartheta)}{\sin\alpha} = 2\cos 2\vartheta - 1 = \frac{\cos 3\vartheta}{\cos\vartheta}$$

22. $$\Sigma \frac{\cos(\alpha+h\vartheta)}{\sin\alpha} = \frac{\cos(h+1)\vartheta}{\sin\vartheta} - 2\sin h\vartheta$$

23. $$\Sigma \frac{\sin(\beta-\vartheta)\sin(\gamma-\vartheta)}{\sin\beta\sin\gamma} = 1$$

Bew. $$\frac{\sin(\beta-\vartheta)\sin(\gamma-\vartheta)}{\sin\beta\sin\gamma}$$

$$= \cos^2\vartheta + \cot\beta\cot\gamma\sin^2\vartheta - \frac{\sin^2\alpha\sin\vartheta\cos\vartheta}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$$

also

$$\Sigma \frac{\sin(\beta-\vartheta)\sin(\gamma-\vartheta)}{\sin\beta\sin\gamma} = 3\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta - 2\cot\vartheta\sin\vartheta\cos\vartheta = 1$$

24. $$\Sigma \frac{\sin(\beta+\vartheta)\sin(\gamma+\vartheta)}{\sin\beta\sin\gamma} = 3\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta + 2\cot\vartheta\sin\vartheta\cos\vartheta = 1+4\cos^2\vartheta$$

25. $$\Sigma \frac{\cos(\beta-\vartheta)\cos(\gamma-\vartheta)}{\sin\beta\sin\gamma} = 3$$

26. $$\Sigma \frac{\cos(\beta+\vartheta)\cos(\gamma+\vartheta)}{\sin\beta\sin\gamma} = -\frac{\cos 3\vartheta}{\cos\vartheta}$$

Dieso Beweise sind ganz analog den vorigen.

27. $$\Sigma \cos\alpha\cos(\beta-\vartheta)\cos(\gamma-\vartheta) = 3\cos\vartheta\,(\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\vartheta + \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\vartheta)$$

Bew. $$\cos\alpha\cos(\beta-\vartheta)\cos(\gamma-\vartheta) = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos^2\vartheta + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin^2\vartheta + \cos\alpha\sin\alpha\cos\vartheta\sin\vartheta$$

Es ist aber

$$\Sigma \cos\alpha \sin\beta \sin\gamma = 1 + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \mu\cot\vartheta$$

also

$$\Sigma \cos\alpha \cos(\beta-\vartheta)\cos(\gamma-\vartheta) = 3\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos^2\vartheta + 3\mu\cos\vartheta\sin\vartheta$$

Es macht keine Schwierigkeiten, anf analoge Weise folgende Relationen zu beweisen.

28. $$\Sigma \cos\alpha\cos(\beta+\vartheta)\cos(\gamma+\vartheta) = \cos\vartheta(3\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\vartheta - \mu\sin\vartheta)$$

29. $$\Sigma \frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\beta-\vartheta)\sin(\gamma-\vartheta)} = \frac{2\mu\cos\vartheta}{\sin^3\vartheta}$$

30. $$\Sigma \sin^2(\alpha-\vartheta) = 3\sin^2\vartheta + \frac{2\mu\cos 3\vartheta}{\sin\vartheta}$$

$$\Sigma \cos^2(\alpha-\vartheta) = 3\cos^2\vartheta - \frac{2\mu\cos 3\vartheta}{\sin\vartheta}$$

31. $$\Sigma \sin^2(\alpha+\vartheta) = 3\sin^2\vartheta + 2\mu\cot\vartheta$$
$$\Sigma \cos^2(\alpha+\vartheta) = 3\cos^2\vartheta - 2\mu\cot\vartheta$$

32. $$\sin(\alpha+\vartheta)\sin(\beta+\vartheta)\sin(\gamma+\vartheta) = 2\mu\cos\vartheta - \sin^3\vartheta = \sin\vartheta(\varkappa^2 - \sin^2\vartheta)$$

33. $$\cos(\alpha-\vartheta)\cos(\beta-\vartheta)\cos(\gamma-\vartheta) = \frac{\mu}{\sin\vartheta} - \cos^3\vartheta$$

34. $$\cos(\alpha+\vartheta)\cos(\beta+\vartheta)\cos(\gamma+\vartheta) = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos^3\vartheta - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin^3\vartheta$$
$$= -\cos^3\vartheta + \frac{\mu}{\sin\vartheta}(\cos^4\vartheta - \sin^4\vartheta)$$
$$= +\frac{\mu\cos 2\vartheta}{\sin\vartheta} - \cos^3\vartheta$$

35. $$\Sigma \sin^3\alpha\sin(\alpha-\vartheta) = \frac{2\mu^2\cos 3\vartheta}{\sin^2\vartheta} + 3\mu\sin\vartheta$$

36. $$\Sigma \sin^3\alpha\sin(\alpha+\vartheta) = \frac{2\mu^2\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta} - 3\mu\sin\vartheta$$

Bew. $\sin^3\alpha\sin(\alpha-\vartheta) = \sin^4\alpha\cos\vartheta - \sin^3\alpha\cos\alpha\sin\vartheta$

also

$$\Sigma \sin^3\alpha\sin(\alpha-\vartheta) = \cos\vartheta(\sin^4\alpha + \sin^4\beta + \sin^4\gamma) - \sin\vartheta\,\Sigma\sin^3\alpha\cos\alpha$$

Es ist aber:

$$\sin^4\alpha+\sin^4\beta+\sin^4\gamma = 2\mu\varkappa^2\cot 2\vartheta = 4\mu^2\cot 2\vartheta\cot\vartheta;$$

$$-\sin^2\alpha\cos\alpha = \sin^2\alpha\cos(\beta+\gamma) = \sin^2\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin^2\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

$$= \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin^2\alpha$$

also

$$-\Sigma\sin^2\alpha\cos\alpha = \mu-2\mu\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\mu\varkappa^2$$

$$= 3\mu-2\mu(1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)-\mu\varkappa^2$$

$$= 3\mu-2\mu\varkappa^2 = 3\mu-4\mu^2\cot\vartheta$$

Somit

$$\Sigma\sin^2\alpha\sin(\alpha-\vartheta) = 4\mu^2(\cot 2\vartheta\cot\vartheta\cos\vartheta-\cos\vartheta)+3\mu\sin\vartheta$$

$$= \frac{4\mu^2\cos\vartheta}{\sin\vartheta\sin 2\vartheta}\{\cos 2\vartheta\cos\vartheta-\sin 2\vartheta\sin\vartheta\}+3\mu\sin\vartheta$$

$$= \frac{2\mu^2}{\sin^2\vartheta}\cos 3\vartheta+3\mu\sin\vartheta$$

Der folgende Satz bedarf zum Beweise nur einer kleinen Veränderung. Man erhält zunächst

$$\frac{4\mu^2\cos\vartheta}{\sin\vartheta\sin 2\vartheta}\{\cos 2\vartheta\cos\vartheta+\sin 2\vartheta\sin\vartheta\}-3\mu\sin\vartheta$$

$$= \frac{2\mu^2\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}-3\mu\sin\vartheta$$

Leicht ergeben sich ferner noch folgende Relationen:

37. $$\Sigma\sin\alpha\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right) = \tfrac{1}{2}\Sigma\sin^2\alpha+\tfrac{1}{4}\sqrt{3}\,\Sigma\sin 2\alpha$$

$$-\mu\cot\vartheta+\sqrt{3}\mu = \frac{2\mu\cos\left(\frac{\pi}{3}-\vartheta\right)}{\sin\vartheta}$$

38. $$\Sigma\cos\alpha\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right) = \tfrac{3}{2}\sqrt{3}-\frac{2\mu\sin\left(\frac{\pi}{3}-\vartheta\right)}{\sin\vartheta}$$

39. $$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\beta+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\gamma+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\mu\sin\left(\vartheta+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\vartheta}-\tfrac{3}{8}\sqrt{3}$$

40. $$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\beta-\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\gamma-\frac{\pi}{3}\right) = \tfrac{3}{8}\sqrt{3}-\frac{\mu\sin\left(\frac{\pi}{3}-\vartheta\right)}{\sin\vartheta}$$

41. $$\Sigma\sin\alpha\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{2\mu\sin\left(\frac{\pi}{3}-\vartheta\right)}{\sin\vartheta}$$

42. $$\Sigma \sin\alpha \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\mu \sin\left(\frac{\pi}{3} + \vartheta\right)}{\sin\vartheta}$$

43. $$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\beta + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\gamma + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\mu\cos\left(\vartheta + \frac{\pi}{3}\right)}{\sin\vartheta} - \frac{1}{8}$$

44. $$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\beta - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\gamma - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\mu\cos\left(\frac{\pi}{3} - \vartheta\right)}{\sin\vartheta} - \frac{1}{8}$$

45. Die Schwerlinien eines Dreiecks ABC seien t_a, t_b, t_c und die Winkel eines Dreiecks, dessen Seiten t_a, t_b, t_c sind, seien α_0, β_0, γ_0. Man findet dann:

$$a^2 = \tfrac{4}{9}(t_b^2 + t_c^2 + 2t_b t_c \cos\alpha_0)$$

es ist ferner:

$$4t_b t_c \sin\alpha_0 = -3bc\sin\alpha$$

also

$$9a^2 = 4(t_b^2 + t_c^2) + 6bc\cot\alpha_0 \sin\alpha$$

oder da

$$4t_b^2 + 4t_c^2 = 4a^2 + b^2 + c^2$$

und

$$bc\sin\alpha = 2\Delta$$

so ist

$$5a^2 = b^2 + c^2 + 12\Delta\cot\alpha_0$$

oder

$$6a^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 12\Delta\cot\alpha_0$$

Ferner

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$2a^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 4\Delta\cot\alpha$$

$$= 4\Delta(\cot\vartheta - \cot\alpha)$$

also

$$6a^2 = 12\Delta(\cot\vartheta - \cot\alpha) = 4\Delta(\cot\vartheta + 3\cot\alpha_0)$$

und

$$3\cot\vartheta - 3\cot\alpha = \cot\vartheta + 3\cot\alpha_0$$

oder

$$2\cot\vartheta = 3(\cot\alpha + \cot\alpha_0)$$

ebenso

$$2\cot\vartheta = 3(\cot\beta + \cot\beta_0)$$

$$2\cot\vartheta = 3(\cot\gamma + \cot\gamma_0)$$

also

$$6\cot\vartheta = 3\cot\vartheta + 3(\cot\alpha_0 + \cot\beta_0 + \cot\gamma_0)$$

so dass auch

$$\cot\alpha_0 + \cot\beta_0 + \cot\gamma_0 = \cot\vartheta$$

Das Dreieck, dessen Seiten die Schwerlinien eines andern Dreiecks sind, hat mit diesem denselben Brocard'schen Winkel.

B. Bestimmnng der Längen von Linien im Dreieck nnd damit zusammenhangende Eigenschaften des Dreiecks.

1. Ans Dreieck ABC folgt leicht

$$AO = \frac{c\sin(\beta-\vartheta)}{\sin\beta} = \frac{2r\sin\gamma\sin(\beta-\vartheta)}{\sin\beta}$$

Mit Benntzung der Gleichnngen in A. N. 3. findet man

$$AO = \frac{2r\sin\beta\sin\vartheta}{\sin\alpha}, \quad \text{ähnlich} \quad AO' = \frac{2r\sin\gamma\sin\vartheta}{\sin\alpha}$$

Ebenso

$$BO = \frac{2r\sin\gamma\sin\vartheta}{\sin\beta} \qquad BO' = \frac{2r\sin\alpha\sin\vartheta}{\sin\beta}$$

$$CO = \frac{2r\sin\alpha\sin\vartheta}{\sin\gamma} \qquad CO' = \frac{2r\sin\beta\sin\vartheta}{\sin\gamma}$$

Hierans folgt noch:

$$BO.CO' = CO.AO' = AO.BO' = 4r^2\sin^2\vartheta$$

$$AO.AO' = \frac{4r^2\sin\beta\sin\gamma\sin^2\vartheta}{\sin^2\alpha} = \frac{4r^2\sin^3\vartheta}{\sin(\alpha-\vartheta)}$$

$$BO.BO' = \frac{4r^2\sin^3\vartheta}{\sin(\beta-\vartheta)}$$

$$CO.CO' = \frac{4r^2\sin^3\vartheta}{\sin(\gamma-\vartheta)}$$

$$AO.BO.CO = AO'.BO'.CO' = 8r^3\sin^3\vartheta$$

$$AO.AO'\sin\alpha + BO.BO'\sin\beta + CO.CO'\sin\gamma = 4r^2\mu = 2\Delta$$

$$\frac{CO}{AO} = \frac{\sin(\alpha-\vartheta)}{\sin\vartheta}, \qquad \frac{BO'}{AO'} = \frac{\sin(\alpha-\vartheta)}{\sin\vartheta},$$

$$\frac{AO}{BO} = \frac{\sin(\beta-\vartheta)}{\sin\vartheta}, \qquad \frac{CO'}{BO'} = \frac{\sin(\beta-\vartheta)}{\sin\vartheta},$$

$$\frac{BO}{CO} = \frac{\sin(\gamma-\vartheta)}{\sin\vartheta}, \qquad \frac{AO'}{CO} = \frac{\sin(\gamma-\vartheta)}{\sin\vartheta},$$

$$BO'.CO = 4r^2\sin\vartheta\sin(\alpha-\vartheta),$$
$$CO'.AO = 4r^2\sin\vartheta\sin(\beta-\vartheta),$$
$$AO'.BO = 4r^2\sin\vartheta\sin(\gamma-\vartheta).$$

2. Ans dem Dreieck AOO' erhält man:

$$OO'^2 = \frac{4r^2\sin^2\vartheta}{\sin^2\alpha}(\sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2\sin\beta\sin\gamma\cos(\alpha-2\vartheta))$$

setzt man

$$\cos(\alpha-2\vartheta) = \cos\alpha + 2\sin\vartheta\sin(\alpha-\vartheta)$$

so wird die Gleichung

$$\begin{aligned} OO'^2 &= \frac{4r^2\sin^2\vartheta}{\sin^2\alpha}(\sin^2\beta+\sin^2\gamma-2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha-4\sin\beta\sin\gamma\sin\vartheta\sin(\alpha-\vartheta)) \\ &= \frac{4r^2\sin^2\vartheta}{\sin^2\alpha}(\sin^2\alpha-4\sin\beta\sin\gamma\sin\vartheta\sin(\alpha-\vartheta)) \\ &= 4r^2\sin^2\vartheta\left(1-\frac{4\sin\beta\sin\gamma}{\sin^2\alpha}\sin\vartheta\sin(\alpha-\vartheta)\right) \\ &= 4r^2\sin^2\vartheta(1-4\sin^2\vartheta) \end{aligned}$$

3. Es mögen sich nun BO und CO' in A', CO und AO' in B', AO und BO' in C' schneiden, dann bezeichnet man $A'B'C'$ als das Brocard'sche Dreieck. Aus der Construction folgt:

$$\angle BOC = CO'A = 180^0-\gamma, \quad COA = AO'B = 180^0-\alpha$$
$$AOB = BO'C = 180^0-\beta$$

Wir nehmen der präcisen Vorstellung halber ein spitzwinkliges Dreieck $\alpha > \beta > 60^0 > \gamma$ an).

Dann ist $B'OA' = B'O'A' = \gamma$, also liegen $A'B'OO'$ auf einem Kreise, von dem sich ebenso beweisen lässt, dass er durch C' geht.

Der durch $A'B'C'$ bestimmte Kreis, welcher als Brocard'scher bezeichnet wird, geht also durch die Punkte O und O'. Da die Winkel des Dreiecks α, β, γ sind, so ist es ABC ähnlich. Ferner weil HC' senkr. auf AB und HA' senkr. auf BC, $A'HC' = A'B'C' = \beta$, also geht derselbe Kreis auch durch H.

4. $HA'O = 90^0-\vartheta$, ebenso $HB'O' = 90^0-\vartheta$, da über HO und HO' gleiche Winkel im Kreise von Brocard gespannt sind, so ist $HO = HO'$. Auch ist $OHO' = 2\vartheta$.

Dies lässt sich auch durch directe Berechnung finden. Aus AHO findet man:

$$HO^2 = AO^2+r^2-2r\,AO\cos(HAO)$$
$$\angle HAO = \alpha-\vartheta-90^0+\beta = 90^0-\gamma-\vartheta$$

also

$$\begin{aligned} HO^2 &= \frac{4r^2\sin^2\beta\sin^2\vartheta}{\sin^2\alpha}+r^2-\frac{4r^2\sin\beta\sin\vartheta\sin(\gamma+\vartheta)}{\sin\alpha} \\ &= \frac{r^2}{\sin^2\alpha}\{4\sin^2\beta\sin^2\vartheta+\sin^2\alpha-4\sin\beta\sin\alpha\sin\gamma\sin\vartheta\cos\vartheta \\ &\quad -4\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma\sin^2\vartheta\} \end{aligned}$$

Setzt man nun:

$$\sin\alpha\cos\gamma - \sin\beta - \cos\alpha\sin\gamma$$

so wird

$$HO^2 = \frac{r^2}{\sin^2\alpha}\{\sin^2\alpha - 4\sin\beta\sin\gamma\sin\vartheta\sin(\alpha-\vartheta)\}$$
$$- r^2(1-4\sin^2\vartheta)$$

Berechnet man HO' ebenso, so findet sich:

$$HO'^2 = r^2(1-4\sin^2\vartheta)$$

5. Die Ecktransversalen, welche die Gegenseiten nach dem Verhältniss der Quadrate der anstossenden Seiten teilen, sind zugleich Gegentransversalen der Schwerlinien und schneiden sich im Grebe'schen Punkte G'. Wir bezeichnen diese Ecktransversalen mit AG_a' BG_β', CG_γ'. Denkt man sich nun Dreieck $AG_a'C$ durch BG_β' geschnitten und wendet den Satz des Menelaus an, so folgt:

$$G'G_a' : AG_a' = a^2 : (a^2+b^2+c^2)$$

also

$$AG' : AG_a' = (b^2+c^2) : (a^2+b^2+c^2)$$

Daraus folgt:

$$ABG' : ABG_a' = (b^2+c^2) : (a^2+b^2+c^2)$$

ferner

$$ABG_a' : ABC = c^2 : (b^2+c^2)$$

also

$$ABG' : ABC = c^2 : (a^2+b^2+c^2)$$

und

$$ABG' = \frac{c^2\Delta}{a^2+b^2+c^2} = \frac{c^2}{4}\operatorname{tg}\vartheta$$

Ferner ist auch:

$$ABG' = \frac{c\,.\,G'G_c'}{2}$$

also

$$2c\,.\,G'G_c' = c^2\operatorname{tg}\vartheta$$

oder

$$G'G_c' = \frac{c}{2}\operatorname{tg}\vartheta = r\sin\gamma\operatorname{tg}\vartheta$$

ebenso:

$$G'G_a' = r\sin\alpha\operatorname{tg}\vartheta,$$
$$G'G_b' = r\sin\beta\operatorname{tg}\vartheta$$

Es folgt aber aus $BA'H_c$ sofort:

$$A'H_c = r\sin\alpha\operatorname{tg}\vartheta,$$
$$B'H_b = r\sin\beta\operatorname{tg}\vartheta$$

ebenso

$$C'H_c = r\sin\gamma\operatorname{tg}\vartheta$$

Daraus folgt: Zieht man durch die Ecken A', B', C' des Brocard'schen Dreiecks die Parallelen zu den entsprechenden Seiten des ursprünglichen Dreiecks, so schneiden sich dieselben im Grebe'schen Punkte G'.

6. Nach Nr. 5. ist $\angle HA'G'$ ein rechter Winkel, also geht der über HG' als Durchmesser beschriebene Kreis durch A'; ebenso geht er durch B' und durch C', und dieser Kreis ist also der Brocard'sche, von dem wir jetzt 7 Punkte haben. Da HG' ein Durchmesser ist, und H von O und O' gleich weit entfernt ist, so auch G'. Ist dann S der Mittelpunkt von OO', so liegen also HSG' auf einer Geraden. Es ist ferner, da

$$\angle OHO' = 2\vartheta,$$

also

$$OHS = \vartheta \text{ ist,}$$

$$HS = HO\cos\vartheta = r\cos\vartheta\sqrt{1-4\sin^2\vartheta}$$

$$G'O = HO\operatorname{tg}\vartheta = r\operatorname{tg}\vartheta\sqrt{1-4\sin^2\vartheta}$$

$$G'S = G'O\sin\vartheta = r\,\frac{\sin^2\vartheta}{\cos\vartheta}\sqrt{1-4\sin^2\vartheta}$$

$$HG' = r\left(\cos\vartheta + \frac{\sin^2\vartheta}{\cos\vartheta}\right)\sqrt{1-4\sin^2\vartheta} = \frac{r\sqrt{1-4\sin^2\vartheta}}{\cos\vartheta}$$

$$= r\sqrt{1-3\operatorname{tg}^2\vartheta}$$

also erhält man für den Radius r_b des Brocard'schen Kreises

$$r_b = \frac{r}{2}\sqrt{1-3\operatorname{tg}^2\vartheta}$$

7. Man fälle von A' die Lote auf die Seiten, nämlich $A'H_a$, $A'A_b'$, $A'A_c'$; dann ist:

$$A'H_a : A'A_b' = \sin\vartheta : \sin(\gamma-\vartheta),$$

ebenso

$$A'H_a : A'A_c' = \sin\vartheta : \sin(\beta-\vartheta)$$

also

$$A'A_b' : A'A_c = \sin(\gamma-\vartheta) : \sin(\beta-\vartheta) = \frac{1}{\sin(\beta-\vartheta)} : \frac{1}{\sin(\gamma-\vartheta)}$$

$$= \frac{1}{\sin^3\beta} : \frac{1}{\sin^3\gamma},$$

Es teilt also AA' den Winkel α so, dass sich die Sinus der Teile umgekehrt wie die Kuben der anstossenden Seiten verhalten. Analog werden BB' und CC' die Winkel β und γ teilen, so dass sich AA', BB', CC' in einem Punkte D schneiden, dessen Entfernungen von

den Seiten sich umgekehrt wie die Kuben derselben verhalten. Wir schreiben dies Resultat in der Form:

$$DD_a : DD_b : DD_c = \frac{1}{\sin^3\alpha} : \frac{1}{\sin^3\beta} : \frac{1}{\sin^3\gamma}$$
$$= \frac{1}{\sin(\alpha-\vartheta)} : \frac{1}{\sin(\beta-\vartheta)} : \frac{1}{\sin(\gamma-\vartheta)}$$

Hieraus lassen sich diese Längen leicht berechnen. Es ist nämlich

$$a\,DD_a + b\,DD_b + c\,DD_c = 2\Delta$$

also:

$$2rX\left(\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\vartheta)} + \frac{\sin\beta}{\sin(\beta-\vartheta)} + \frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma-\vartheta)}\right) = 4r^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

wo X noch ein unbestimmter Factor ist, es ist aber

$$\Sigma\,\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\vartheta)} = \frac{\mu}{\sin^2\vartheta}$$

also

$$\frac{X\mu}{\sin^3\vartheta} = 2r\mu$$

somit

$$X = 2r\sin^3\vartheta$$

also

$$DD_a = \frac{2r\sin^3\vartheta}{(\sin(\alpha-\vartheta)}, \quad DD_b = \frac{2r\sin^3\vartheta}{\sin(\beta-\vartheta)}, \quad DD_c = \frac{2r\sin^3\vartheta}{\sin(\gamma-\vartheta)}$$

8. Es schneide AD die Seite a in D_a, BD die Seite b in D_β, CD die Seite C in D_γ. Es ist dann

$$\text{Dreieck } ABD_a : AD_aC = BD_a : D_aC$$

ferner auch

$$ABD_a : AD_aC = c\sin(BAD) : b\sin(DAC)$$
$$= \frac{c}{c^3} : \frac{b}{b^3} = \frac{1}{c^2} : \frac{1}{b^2}$$

also

$$BD_a : D_aC = \frac{1}{c^2} : \frac{1}{b^2}$$

D_a teilt also BC nach dem umgekehrten Verhältniss der Quadrate der anstossenden Seiten, während G_a' dieselbe Seite nach dem Verhältniss der Quadrate teilt; daher ist

$$BG_a' = D_aC, \qquad G_a'C = BD_a$$

also

$$G_a'D_a = a - \frac{ac^2}{b^2+c^2} - \frac{ab^2}{b^2+c^2} = a\,\frac{b^2-c^2}{b^2+c^2} = a\,\frac{\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)}{\sin^2\beta+\sin^2\gamma}$$

Es verhält sich ferner:

$$G'A' : G_a'D_a = (b^2+c^2) : (a^2+b^2+c^2)$$

also

$$G'A' = \frac{a(b^2-c^2)}{b^2+c^2}\cdot\frac{b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2} = \frac{a(b^2-c^2)}{a^2+b^2+c^2} = \frac{2r\sin^2\alpha\sin(\beta-\gamma)}{\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma}$$
$$= \frac{r\sin(\alpha-\vartheta)\sin(\beta-\gamma)}{\sin\alpha\cos\vartheta}$$

Analog:

$$G'B' = \frac{r\sin(\beta-\vartheta)\sin(\alpha-\gamma)}{\sin\beta\cos\vartheta}$$

$$G'C' = \frac{r\sin(\gamma-\vartheta)\sin(\alpha-\beta)}{\sin\gamma\sin\vartheta}$$

9. Berechnungen von $AD_a = \tau_a$, $BD_\beta = \tau_b$, $CD_\gamma = \tau_c$.

Da $D_aC = \frac{ac^2}{b^2+c^2}$ ist, so giebt das Dreieck AD_aC leicht:

$$\tau_a^2 = b^2 + \frac{a^2c^4}{(b^2+c^2)^2} - \frac{2abc^2\cos\gamma}{b^2+c^2}$$
$$= \frac{b^2(b^2+c^2)^2+a^2c^4-2abc^2(b^2+c^2)\cos\gamma}{(b^2+c^2)^2}$$
$$= \frac{b^6+2b^4c^2+b^2c^4+a^2c^4-2b^2ac^2\cos\gamma-2abc^4\cos\gamma}{(b^2+c^2)^2}$$
$$= \frac{b^6+2b^3c^2(b-a\cos\gamma)+c^4(b^2+a^2-2a\cos\gamma)}{(b^2+c^2)^2}$$

Es ist aber

$$b = a\cos\gamma+c\cos\alpha,$$
$$b^2+a^2-2ab\cos\gamma = c^2$$

also erhalten wir:

$$\tau_a^2 = \frac{b^6+c^6+2b^3c^3\cos\alpha}{(b^2+c^2)^2}$$
$$= 4r^2\left\{\frac{\sin^6\beta+\sin^6\gamma+2\sin^3\beta\sin^3\gamma\cos\alpha}{(\sin^2\beta+\sin^2\gamma)^2}\right\}$$

Es ist ferner:

$$\sin^6\beta+\sin^6\gamma = (\sin^2\beta+\sin^2\gamma)^3-3\sin^2\beta\sin^2\gamma(\sin^2\beta+\sin^2\gamma)$$

Nach Nr. 12. in A. ist

$$\sin^2\beta+\sin^2\gamma = \frac{\sin(\alpha+\vartheta)\lambda}{\sin\alpha} = \frac{\mu\sin(\alpha+\vartheta)}{\sin\alpha\sin\vartheta}$$

also

$$\sin^6\beta+\sin^6\gamma=\frac{\sin^3\beta\sin^3\gamma\sin^3(\alpha+\vartheta)}{\sin^3\vartheta}-\frac{3\sin^2\beta\sin^2\gamma\sin(\alpha+\vartheta)}{\sin\vartheta}$$

$$=\frac{\sin^2\beta\sin^2\gamma}{\sin^3\vartheta}\{\sin^3(\alpha+\vartheta)-3\sin^2\vartheta\sin(\alpha+\vartheta)\}$$

also

$$\tau_a^2=\frac{4r^2\sin^3\beta\sin^3\alpha}{(\sin^2\beta+\sin^2\gamma)^2\sin^2\vartheta}\{\sin^3(\alpha+\vartheta)-3\sin^2\vartheta\sin(\alpha+\vartheta)+2\cos\alpha\sin^3\vartheta\}$$

$$=\frac{4r^2\sin\beta\sin\gamma}{\sin^2(\alpha+\vartheta)\sin^2\vartheta}\{\sin^3(\alpha+\vartheta)-3\sin^2\vartheta\sin(\alpha+\vartheta)+2\cos\alpha\sin^3\vartheta\}$$

Es ist dann:

$$\sin^3(\alpha+\vartheta)-3\sin^2\vartheta\sin(\alpha+\vartheta)+2\cos\alpha\sin^3\vartheta=\sin(\alpha+\vartheta)\{\sin^2(\alpha+\vartheta)-\sin^2\vartheta\}$$
$$-2\sin^2\vartheta(\sin(\alpha+\vartheta)-\cos\alpha\sin\vartheta)$$
$$=\sin(\alpha+\vartheta)\sin\alpha\sin(\alpha+2\vartheta)-2\sin^2\vartheta\sin\alpha\cos\vartheta$$
$$=\sin\alpha\{\sin(\alpha+\vartheta)\sin(\alpha+2\vartheta)-\sin\vartheta\sin2\vartheta\}$$
$$=\sin^2\alpha\sin(\alpha+3\vartheta)$$

Dies giebt

$$\tau_a^2=\frac{4r^2\sin^2\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin\vartheta\sin^2(\alpha+\vartheta)}\sin(\alpha+3\vartheta)$$

oder

$$\frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin\vartheta}=\frac{\sin^2\alpha}{\sin(\alpha-\vartheta)}$$

gesetzt,

$$\tau_a^2=\frac{4r^2\sin^4\alpha\sin(\alpha+3\vartheta)}{\sin^2(\alpha+\vartheta)\sin(\alpha-\vartheta)}$$

$$\tau_a=\frac{2r\sin^2\alpha\sqrt{\sin(\alpha+3\vartheta)\sin(\alpha-\vartheta)}}{\sin(\alpha+\vartheta)\sin(\alpha-\vartheta)}$$

10. Um AD zu finden, betrachten wir Dreieck ACD_a, welches durch BD_β geschnitten wird. Wir finden

$$\frac{AD}{DD_a}=\frac{a^2b^2+a^2c^2}{b^2c^2}$$

also

$$\frac{AD}{AD_a}=\frac{a^2(b^2+c^2)}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}=\frac{\sin^2\alpha(\sin^2\beta+\sin^2\gamma)}{\lambda^2}$$
$$=\frac{\sin^2\alpha\sin(\alpha+\vartheta)\sin\beta\sin\gamma}{\lambda^2\sin\vartheta}=\frac{\sin^4\alpha\sin(\alpha+\vartheta)}{\lambda^2\sin(\alpha-\vartheta)}$$
$$=\frac{\sin(\alpha+\vartheta)\sin\vartheta}{\sin\beta\sin\gamma}$$
$$=\frac{\sin(\alpha+\vartheta)\sin(\alpha-\vartheta)}{\sin^2\alpha}$$

also

$$AD = 2r\sqrt{\sin(\alpha+3\vartheta)\sin(\alpha-\vartheta)}$$

ebenso

$$BD = 2r\sqrt{\sin(\beta+3\vartheta)\sin(\beta-\vartheta)}$$

$$CD = 2r\sqrt{\sin(\gamma+3\vartheta)\sin(\gamma-\vartheta)}$$

Wir merken endlich noch:

$$\frac{DD_a}{AD_a} = \frac{\sin^2\vartheta}{\sin^2\alpha}$$

11. Indem wir die Flächeninhalte der Dreiecke ABD_a und $AA'D_a$ vergleichen, finden wir die Proportion:

$$AD_a : A'D_a = \frac{c\sin\beta}{BA'\sin\vartheta} = \frac{2\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\vartheta} = \frac{2\sin\alpha\sin\vartheta}{\sin(\alpha-\vartheta)\,\mathrm{tg}\,\vartheta}$$

$$= \frac{2\sin\alpha\cos\vartheta}{\sin(\alpha-\vartheta)}$$

also

$$\frac{AA'}{AD_a} = \frac{2\sin\alpha\cos\vartheta-\sin(\alpha-\vartheta)}{2\sin\alpha\cos\vartheta} = \frac{\sin(\alpha+\vartheta)}{2\sin\alpha\cos\vartheta},$$

$$AA' = \frac{r\sin\alpha}{\cos\vartheta}\sqrt{\frac{\sin(\alpha+3\vartheta)}{\sin(\alpha-\vartheta)}} = \frac{r\sin\alpha\sqrt{\sin(\alpha+3\vartheta)\sin\alpha-\vartheta)}}{\cos\vartheta\sin(\alpha-\vartheta)}$$

und

$$\frac{AA'}{A'D_a} = \frac{\sin(\alpha+\vartheta)}{\sin(\alpha-\vartheta)}$$

Ferner ist

$$A'D = AD - AA' = r\sqrt{\sin(\alpha+3\vartheta)\sin(\alpha-\vartheta)}\left\{2-\frac{\sin\alpha}{\cos\vartheta\sin(\alpha-\vartheta)}\right\}$$

$$= \frac{r\sin(\alpha-2\vartheta)}{\cos\vartheta\sin(\alpha-\vartheta)}\sqrt{\sin(\alpha+3\vartheta)\sin(\alpha-\vartheta)}$$

12. Berechnung von DH.

Es ist $A'H = A'H_a - HH_a = r\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\vartheta - r\cos\alpha$

$$= -\frac{r\cos(\alpha+\vartheta)}{\cos\vartheta};$$

$$DH^2 = A'H^2 + A'D^2 - 2A'H\,.\,A'D\cos(A'H, A'D)$$

$$\cos(A'H,A'D) = \frac{AA_a}{AD_a} = \frac{2r\sin\beta\sin\gamma\sin(\alpha+\vartheta)\sin(\alpha-\vartheta)}{2r\sin^2\alpha\sqrt{\sin(\alpha+3\vartheta)\sin(\alpha-\vartheta)}}$$

$$= \frac{\sin\vartheta\sin(\alpha+\vartheta)}{\sqrt{\sin(\alpha+3\vartheta)\sin(\alpha-\vartheta)}}$$

also

$$DH^2 = \frac{r^2\cos^2(\alpha+\vartheta)}{\cos^2\vartheta} + \frac{r^2\sin^2(\alpha-2\vartheta)\sin(\alpha+3\vartheta)}{\cos^2\vartheta\sin(\alpha-\vartheta)}$$
$$+ \frac{2r^2\cos(\alpha+\vartheta)\sin(\alpha-2\vartheta)\sin\vartheta\sin(\alpha+\vartheta)}{\cos^2\vartheta\sin(\alpha-\vartheta)}$$
$$= \frac{r^2}{\cos^2\vartheta\sin(\alpha-\vartheta)}\{\cos^2(\alpha+\vartheta)\sin(\alpha-\vartheta)+\sin^2(\alpha-2\vartheta)\sin(\alpha+3\vartheta)$$
$$+2\cos(\alpha+\vartheta)\sin(\alpha-2\vartheta)\sin\vartheta\sin(\alpha+\vartheta)\}$$

Nnn ist

$$\sin^2(\alpha-2\vartheta)\sin(\alpha+3\vartheta)+\sin(\alpha-2\vartheta)\sin\vartheta\sin(2\alpha+2\vartheta)$$
$$= \sin(\alpha-2\vartheta)\{\sin(\alpha-2\vartheta)\sin(\alpha+3\vartheta)+\sin(2\alpha+2\vartheta)\sin\vartheta\}$$
$$= \sin(\alpha-2\vartheta)\sin(\alpha-\vartheta)\sin(\alpha+4\vartheta)$$

also

$$DH^2 = \frac{r^2}{\cos^2\vartheta}\{\cos^2(\alpha+\vartheta)+\sin(\alpha-2\vartheta)\sin(\alpha+4\vartheta)\}$$
$$= \frac{r^2}{2\cos^2\vartheta}\{1+\cos(2\alpha+2\vartheta)+\cos 6\vartheta-\cos(2\alpha+2\vartheta)\}$$
$$= \frac{r^2\cos^2 3\vartheta}{\cos^2\vartheta}$$

$$DH = \frac{r\cos 3\vartheta}{\cos\vartheta} = r(1-4\sin^2\vartheta)$$

13. Es ist:

$$OO_a = BO\sin\vartheta = \frac{2r\sin\gamma\sin^2\vartheta}{\sin\beta},$$

$$O'O_a' = BO'\sin(\beta-\vartheta) = \frac{2r\sin\alpha\sin\vartheta\sin(\beta-\vartheta)}{\sin\beta}$$

also

$$OO_a + O'O_a' = \frac{2r\sin\vartheta}{\sin\beta}\{\sin\gamma\sin\vartheta+\sin\alpha\sin\beta\cos\vartheta-\sin\alpha\cos\beta\sin\vartheta\}$$
$$= 2r\sin\vartheta\{\sin\alpha\cos\vartheta+\cos\alpha\sin\vartheta\}$$
$$= 2r\sin\vartheta\sin(\alpha+\vartheta)$$

somit erhalten wir für den Mittelpnnkt S von OO':

$$SS_a = r\sin\vartheta\sin(\alpha+\vartheta),$$
$$SS_b = \sin\vartheta\sin(\beta+\vartheta),$$
$$SS_c = r\sin\vartheta\sin(\gamma+\vartheta)$$

$$SS_a : SS_b : SS_c = \sin(\alpha+\vartheta) : \sin(\beta+\vartheta) : \sin(\gamma+\vartheta)$$

14. Es ist

$$DD_a + 2SS_a = 2r\sin\vartheta\left\{\frac{\sin^2\vartheta}{\sin(\alpha-\vartheta)} + \sin(\alpha+\vartheta)\right\}$$

$$= \frac{2r\sin\vartheta\sin^2\alpha}{\sin(\alpha-\vartheta)} - 2r\sin\beta\sin\gamma = AA_a$$

Teilt man nun SD nach dem Verhältniss 1:2 und fällt vom Teilpunkte das Lot auf a, so findet man für dasselbe

$$\frac{DD_a + 2SS_a}{3} = \frac{2}{3}r\sin\beta\sin\gamma - \frac{AA_a}{3}$$

Ebenso

$$\frac{DD_b + 2SS_b}{3} = -\frac{BB_b}{3}$$

$$\frac{DD_c + 2SS_c}{3} = -\frac{CC_c}{3}$$

Dieser Punkt hat also von den Seiten dieselben Abstände als der Schwerpunkt G des Dreiecks. Somit ist der Schwerpunkt des Dreiecks auch der des Dreiecks DOO'.

15. Fällt man von C das Lot auf $A'B'$ und von A auf $B'C'$, so müssen diese Lote den Winkel β einschliessen, woraus leicht folgt, dass sie sich auf dem umschriebenen Kreise schneiden müssen. Auch folgt leicht, indem man von A auf $B'C'$ und von B auf $C'A'$ Lote fällt, dass sie sich ebenfalls auf dem Kreise schneiden müssen, und da der Punkt durch ein Lot und den Kreis bestimmt ist, so müssen also die Lote von A auf $B'C'$, von B auf $C'A'$, von C auf $A'B'$ sich in einem Punkte N des umgeschriebenen Kreises schneiden. Auch folgt leicht

$$\text{Wkl. } (AN_1,\ AB) = (A'H,\ A'B') = \omega$$

und hieraus, dass N in dem umgeschriebenen Kreise in Bezug auf die Ecken von ABC dieselbe Lage hat, als H im Brocard'schen Kreise in Bezug auf die Ecken des Brocard'schen Dreiecks $A'B'C'$ Daher ist

$$BN' : B'H = 2 : \sqrt{1 - 3\operatorname{tg}^2\vartheta}$$

$$BN = \frac{2B'H}{\sqrt{1-3\operatorname{tg}^2\vartheta}} = -\frac{2r\cos(\beta+\vartheta)}{\cos\vartheta\sqrt{1-3\operatorname{tg}^2\vartheta}} = -\frac{2r\cos(\beta+\vartheta)}{\sqrt{1-4\sin^2\vartheta}}$$

Dann ist:

$$NN_a = BN\sin(BN, BC) = BN\sin(\alpha+\omega)$$

Weil aber

$$(A'C',\ A'H) = \alpha + \omega$$

ist, so ist

$$HC' = 2r_b \sin(\alpha+\omega) = r\sqrt{1-3\operatorname{tg}^2\vartheta}\sin(\alpha+\omega)$$

also

$$NN_a = \frac{BN.HC'}{r\sqrt{1-3\operatorname{tg}^2\vartheta}} = -\frac{2r\cos(\beta+\vartheta)}{\sqrt{1-4\sin^2\vartheta}}\,\frac{r\cos(\gamma+\vartheta)}{r\sqrt{1-4\sin^2\vartheta}}$$

$$= -\frac{2r\cos(\beta+\vartheta)\cos(\gamma+\vartheta)}{1-4\sin^2\vartheta}$$

Verlängert man nun DH bis zum umgeschriebenen Kreise, so mag der Schnittpunkt mit dem Kreise mit P vorläufig bezeichnet werden. Da nach dem vorigen:

$$DH : HP = \cos 3\vartheta : \cos\vartheta$$

ist, so findet man:

$$PP_a = \frac{r\cos\alpha(\cos\vartheta+\cos 3\vartheta) - \dfrac{2r\sin^2\vartheta\cos\vartheta}{\sin(\alpha-\vartheta)}}{\cos 3\vartheta}$$

setzt man hier

$$\sin^3\vartheta = \sin(\alpha-\vartheta)\sin(\beta-\vartheta)\sin(\gamma-\vartheta),$$
$$\cos\vartheta+\cos 3\vartheta = 2\cos\vartheta\cos 2\vartheta$$

so wird

$$PP_a = \frac{2r\cos\vartheta}{\cos 3\vartheta}\{\cos\alpha\cos 2\vartheta - \sin(\beta-\vartheta)\sin(\gamma-\vartheta)\}$$
$$= -\frac{2r\cos\vartheta}{\cos 3\vartheta}\cos(\beta+\vartheta)\cos(\gamma+\vartheta)$$
$$= -\frac{2r\cos(\beta+\vartheta)\cos(\gamma+\vartheta)}{1-4\sin^2\vartheta} = NN_a$$

Daraus folgt, dass P der Punkt N ist. Es liegen also die Punkte DHN in einer Geraden.

Vom Punkte N bemerken wir noch Folgendes: Es ist

$$NN_a = -\frac{2r\cos(\beta+\vartheta)\cos(\gamma+\vartheta)}{1-4\sin^2\vartheta},$$

$$AN = -\frac{2r\cos(\alpha+\vartheta)}{\sqrt{1-4\sin^2\vartheta}}$$

also

$$AN.N_a = \frac{4r^2\cos(\alpha+\vartheta)\cos(\beta+\vartheta)\cos(\gamma+\vartheta)}{\sqrt{1-4\sin^2\vartheta^3}}$$

so dass

$$AN.NN_a = BN.NN_b = CN.NN_c \text{ ist.}$$

Bem. Bei unserer Annahme liegt A in dem Bogen, der zur Seite AC gehört. Man findet im allgemeinen:

$$NN_a : NN_b : NN_c = \frac{1}{\cos(\alpha + \vartheta)} : \frac{1}{\cos(\beta + \vartheta)} : \frac{1}{\cos(\gamma + \vartheta)}$$

so dass N in dem Bogen liegen wird, für welchen das Zeichen betreffenden Cosinus abweichend ist; denn offenbar muss ein Cosinus ein anders Zeichen als die andern haben. Es folgt dies aus

$$\Sigma \sin\alpha \cos(\alpha + \vartheta) = 0$$

16. Sowol HH' als SD wird durch G nach dem Verhältniss $1 : 2$ geteilt, also ist $SH \parallel DH'$, ausserdem

$$DH' = 2SH$$

Nun ist

$$SH = HO\cos\vartheta = HK\cos^2\vartheta$$

also

$$SH = r\cos^2\vartheta\sqrt{1 - 3\mathrm{tg}^2\vartheta} = \cos\vartheta\sqrt{1 - 4\sin^2\vartheta},$$

$$DH' = 2r\cos\vartheta\sqrt{1 - \sin^2\vartheta} = 2r\sqrt{\cos\vartheta\cos 3\vartheta}$$

17. Sind 4 Ecktransversalen harmonisch, so müssen auch die Gegentransversalen harmonisch sein. Man denke sich nun den Spiegelpunkt A_s' von A' in Bezug auf a bestimmt, ziehe $A_s'C'$ und $A_s'B$ und bètrachte $A_s'BC'$. Dasselbe ist dem Dreieck ABC ähnlich, weil es im Winkel β und dem Verhältniss der einschliessenden Seiten übereinstimmt. Da nun

$$BC' = \frac{c}{2\cos\vartheta}$$

ist, so also

$$A_s'C' = \frac{b}{2\cos\vartheta} = AB'$$

Ebenso ist

$$A_s'B' = AC'$$

also $AB'A_s'C'$ ein Paralleiogramm, daher geht AA_s' durch den Mittelpunkt H_a' von $B'C'$.

Es ist ferner $AC'B' \sim AOO'$ in umgekehrter Lage; in AOO' ist nun AS die Schwerlinie, also ist die Schwerlinie AH_a' in $AB'C'$ die Gegentransversale von AS in Dreieck AOO', und da AO und AO' in ABC Gegentransversalen sind, so ist die Linie AH_a' oder

AA_s' die Gegentransversale von AS in ABC. Bestimmt man nun B_s', C_s' analog wie A_s', so ergiebt sich, dass AA_s', BB_s', CC_s' sich in einem Punkte S' schneiden, welcher der Gegenpunkt von S ist.

Es sind nun AA', AH_a, AA_s', AH' 4 harmonische Strahlen, oder, was dasselbe sagt, AD, AG, AS', AH', also auch die Gegentransversalen derselben; nennen wir nun D' den Gegenpunkt von D, so sind also AD', AG', AS, AH 4 harmonische Strahlen. Von diesen liegen H, S, G' auf einer Geraden, also geht AD' durch den 4ten harmonischen Punkt von H, S, G'. Da wir für Ecktransversalen aus B und C dasselbe folgern können, so ist also der Gegenpunkt von D der 4te harmonische von HSG', conjugirt zu S. Da ferne OO' senkrecht zu HG' ist, so ist D' der Pol von OO' in Bezug auf den Brocard'schen Kreis.

18. ABC und $A'B'C'$ haben denselben Schwerpunkt. Wir beweisen dies leicht, wenn wir uns erinnern, dass 2 Dreiecke den selben Schwerpunkt haben, falls sie nur eine Schwerlinie mit Anfangs- und Endpunkt gemein haben.

Nun haben ABC und $AA'A_s'$ die Schwerlinie AH_a gemeinsam; $BA'A_s'$ und $A'B'C'$ haben aber die Schwerlinie $A'H_a'$ gemein, also hat ABC mit $AA'A_s'$ und dieses mit $A'B'C'$ denselben Schwerpunkt.

19. Es ist:

$$HS : SG' = HD' : G'D',$$
$$G'S = G'O \sin\vartheta = 2r_b \sin^2\vartheta$$
$$HS = HO \cos\vartheta = 2r_b \cos^2\vartheta$$

Setzt man nun $G'D' = x$, so heisst die Proportion:

$$\cos^2\vartheta : \sin^2\vartheta = 2r_b + x : x$$

also

$$x = \frac{2r_b \sin^2\vartheta}{\cos 2\vartheta}, \quad 2r_b + x = \frac{2r_b \cos^2\vartheta}{\cos 2\vartheta},$$

$$HD' = \frac{r \cos\vartheta}{\cos 2\vartheta}\sqrt{1 - 4\sin^2\vartheta}$$

Da nun:

$$DH' = 2r \cos\vartheta \sqrt{1 - 4\sin^2\vartheta}$$

so ist

$$DH' : HD' = 2\cos 2\vartheta : 1$$

Ferner:

$$NH : ND = = 1 : \frac{\cos\vartheta + \cos 3\vartheta}{\cos\vartheta} = 1 : 2\cos 2\vartheta$$

also

$$NH : ND = HD' : DH'$$

Da die letzten Linien parallel sind, nnd NHD in einer Geraden liegen, so anch $ND'H'$.

20. Da D' Gegenpunkt von D ist, so folgt:

$$DD_a' : D'D_b' : D'D_c = \sin(\alpha - \vartheta) : \sin(\beta - \vartheta) : \sin(\gamma - \vartheta)$$

oder

$$D'D_a' = x\sin(\alpha - \vartheta),$$
$$D'D_b' = x\sin(\beta - \vartheta),$$
$$D'D_c' = x\sin(\gamma - \vartheta)$$

Ansserdem:

$$aD'D_a' + bB'D_b' + cD'D_c' = 2\Delta$$

oder

$$xr\{\sin\alpha\sin(\alpha-\vartheta)+\sin\beta\sin(\beta-\vartheta)+\sin\gamma\sin(\gamma-\vartheta)\} = \Delta = 2r^2\mu$$

oder nach A. N. 11.

$$x\,\frac{2\mu\cos 2\vartheta}{\sin\vartheta} = 2r\mu$$

$$x = \frac{r\sin\vartheta}{\cos 2\vartheta}$$

also:

$$D'D_a' = \frac{r\sin\vartheta\sin(\alpha-\vartheta)}{\cos 2\vartheta}$$

$$D'D_b' = \frac{r\sin\vartheta\sin(\beta-\vartheta)}{\cos 2\vartheta}$$

$$D'D_c' = \frac{r\sin\vartheta\sin(\gamma-\vartheta)}{\cos 2\vartheta}$$

21. Man lege nun durch G' die Parallelen zu den Seiten, welche dieselben dann in $L_1, L_2, M_1, M_2, N_1, N_2$ treffen mögen. Um den Index festzustellon, halten wir die cyklische Reihenfolgo der Seiten $abca\ldots$ fest; diejenige Seite, welche nach dieser Reihenfolge voran geht, erhält den Index 1. Es schneidet also die Parallele zu c die Seite a in L_1 nnd b in M_2, die Parallele zu a schneidet b in M_1 und c in N_2, die Parallele zu b schneidet c in N_1 und a in L_2.

Die Symmediane AG_a' wird durch die andere in G' so geschnitten, dass

$$G_a'G' : G_a'A = a^2 : (a^2+b^2+c^2)$$

ist, ebenso

$$G_\beta'G' : G_\beta'B = b^2 : (a^2+b^2+c^2),$$
$$G_\gamma'G' : G_\gamma'C = c^2 : (a^2+b^2+c^2)$$

Daraus folgt:

$$BL_1 = \frac{ac^2}{a^2+b^2+c^2}, \quad CL_2 = \frac{ab^2}{a^2+b^2+c^2}, \quad L_1L_2 = \frac{a^3}{a^2+b^2+c^2}.$$

$$BL_2 = \frac{a(a^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2}$$

$$BN_2 = \frac{a^2c}{a^2+b^2+c^2}, \quad AN_1 = \frac{b^2c}{a^2+b^2+c^2}, \quad N_1N_2 = \frac{c^3}{a^2+b^2+c^2}.$$

$$BN_1 = \frac{c(a^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2} \quad \text{etc.}$$

Es folgt daraus:

$$BL_1 : BN_2 = c : a$$

ebenso:

$$BN_1 : BL_2 = c : a$$

also sind BL_1N_2 und BN_1L_2 ähnlich unter sich und dem Dreieck ABC. Durch L_1N_2, N_1L_2 lässt sich also ein Kreis legen, für welchen L_1N_2 und L_2N_1 antiparallel sind, daher

$$(L_1B, L_1N_2) = \alpha, \quad (N_2B, N_2L_1) = \gamma$$

Da

$$\frac{BL_1}{BA} = \frac{ac}{a^2+b^2+c^2}$$

so ist also

$$\frac{L_1N_2}{BA} = \frac{ab}{a^2+b^2+c^2}$$

oder

$$L_1N_2 = \frac{abc}{a^2+b^2+c^2} = \frac{2r\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma} = r\operatorname{tg}\vartheta$$

Es ist also auch

$$M_1L_2 = N_1M_2 = r\operatorname{tg}\vartheta$$

Die Entfernungen der so bestimmten Punkte auf je 2 anstossenden Seiten sind gleich, wobei der Index 1 dem letzten Buchstaben nach der cyklischen Reihenfolge gehört.

Die Stücke auf den Seiten selbst verhalten sich wie die Kuben der Seiten. Es ist

$$L_1L_2 = \frac{a^3}{a^2+b^2+c^2} = 2r\cdot\frac{\sin^3\alpha}{\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma} = \frac{r\sin(\alpha-\vartheta)}{\cos\vartheta},$$

$$M_1M_2 = \frac{b^3}{a^2+b^2+c^2} = 2r\,\frac{\sin^3\beta}{\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma} = \frac{r\sin(\beta-\vartheta)}{\cos\vartheta},$$

$$N_1 N_2 = \frac{c^3}{a^2+b^2+c_2} = 2r\frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma} = \frac{r\sin(\gamma-\vartheta)}{\cos\vartheta}$$

22. $L_1 L_2 N_1 N_2$ liegen auf einem Kreise; da nun $L_1 M_2 \parallel AB$ und $L_1 M_2 = N_1 M_2$ ist, so liegen auch $L_1 N_2 N_1 M_2$ auf einem Kreise, der durch $L_1 N_2 N_1$ schon bestimmt ist. Derselbe Kreis muss auch durch $N_2 N_1 M_1 M_1$ gehen, so dass die 6 Punkte $L_1 L_2 M_1 M_2 N_1 N_2$ auf einem und demselben Kreise liegen, welcher von R. Tucker der triplicate-ratio-circle genannt wird (vielleicht mit Kreis der 3ten Potenz zu übersetzen). Er heisst jetzt der erste Kreis von Lemoine.

Daraus folgt noch sofort:

$$L_1 N_1 = M_2 N_2, \quad N_1 M_1 = N_2 L_2, \quad M_1 L_1 = L_2 M_2$$

dass also die Dreiecke $L_1 M_1 N_1$ und $L_2 M_2 N_2$ einander congruent sind. Es ist dabei

$$\text{Wkl. } N_1 M_1 L_1 = N_1 M_2 L_1 = M_2 N_1 A = \gamma$$

aus analogen Schlüssen folgt, dass die andern Winkel des Dreiecks $L_1 M_1 N_1$ β und α sind, so dass die Dreiecke dem Dreieck ABC ähnlich sind.

Es mögen sich ferner

$$\begin{aligned} L_1 M_1 &\text{ und } L_2 N_2 \text{ in } A_4, \\ M_1 N_1 &\text{ „ } L_2 M_2 \text{ in } B_4, \\ N_1 L_1 &\text{ „ } M_2 N_2 \text{ in } C_4 \end{aligned}$$

schneiden, dann folgt aus dem, was oben von $L_1 L_2 M_1 M_2 N_1 N_2$ gesagt ist, dass die Dreiecke $A_4 L_1 L_2$, $B_4 M_1 M_2$, $C_4 N_1 N_2$ gleichschenklig sind, und dass die Winkel an den Grundlinien immer dieselben sein müssen, da sie als Peripheriewinkel auf denselben Bogen stehen, z. B.

$$\text{Wkl. } L_2 L_1 M_1 = L_2 M_2 M_1$$

23. $L_1 M_2$ geht durch G', also auch durch C'. Nun ist

$$G'C' = \frac{c(a^2-b^2)}{a^2+b^2+c^2} \quad G'L' = BN_2 = \frac{a^2 c}{a^2+b^2+c^2}$$

also

$$L_1 C' = \frac{b^2 c}{a^2+b^2+c^2} = AN_1$$

Da ferner $AN_1 \parallel LC_1$ ist, so dass $AN_1 L_1 C'$ ein Parallelogramm ist, da AC' mit AB den Winkel ϑ bildet, auch $L_1 N_1$ mit $N_1 B$; die gleichschenkligen Dreiecke $A_4 L_1 L_2$, $B_4 M_1 M_2$, $C_4 N_1 N_2$ haben also an der Grundlinie den Winkel ϑ.

Daraus folgt:

$$BL_1 = \frac{ac^2}{a^2+b^2+c^2}, \quad CL_2 = \frac{ab^2}{a^2+b^2+c^2}, \quad L_1L_2 = \frac{a^3}{a^2+b^2+c^2}.$$

$$BL_2 = \frac{a(a^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2}$$

$$BN_2 = \frac{a^2c}{a^2+b^2+c^2}, \quad AN_1 = \frac{b^2c}{a^2+b^2+c^2}, \quad N_1N_2 = \frac{c^3}{a^2+b^2+c^2}.$$

$$BN_1 = \frac{c(a^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2} \quad \text{etc.}$$

Es folgt daraus:

$$BL_1 : BN_2 = c : a$$

ebenso:

$$BN_1 : BL_2 = c : a$$

also sind BL_1N_2 und BN_1L_2 ähnlich unter sich und dem Dreieck ABC. Durch L_1N_2, N_1L_2 lässt sich also ein Kreis legen, für welchen L_1N_2 und L_2N_1 antiparallel sind, daher

$$(L_1B, L_1N_2) = \alpha, \quad (N_2B, N_2L_1) = \gamma$$

Da

$$\frac{BL_1}{BA} = \frac{ac}{a^2+b^2+c^2}$$

so ist also

$$\frac{L_1N_2}{BA} = \frac{ab}{a^2+b^2+c^2}$$

oder

$$L_1N_2 = \frac{abc}{a^2+b^2+c^2} = \frac{2r\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma} = r\operatorname{tg}\vartheta$$

Es ist also auch

$$M_1L_2 = N_1M_2 = r\operatorname{tg}\vartheta$$

Die Entfernungen der so bestimmten Punkte auf je 2 anstossenden Seiten sind gleich, wobei der Index 1 dem letzten Buchstaben nach der cyklischen Reihenfolge gehört.

Die Stücke auf den Seiten selbst verhalten sich wie die Kuben der Seiten. Es ist

$$L_1L_2 = \frac{a^3}{a^2+b^2+c^2} = 2r\cdot\frac{\sin^3\alpha}{\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma} = \frac{r\sin(\alpha-\vartheta)}{\cos\vartheta},$$

$$M_1M_2 = \frac{b^3}{a^2+b^2+c^2} = 2r\,\frac{\sin^3\beta}{\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma} = \frac{r\sin(\beta-\vartheta)}{\cos\vartheta},$$

$$N_1 N_2 = \frac{c^3}{a^2+b^2+c^2} = 2r \frac{\sin^3\gamma}{\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma} = \frac{r\sin(\gamma-\vartheta)}{\cos\vartheta}$$

22. $L_1 L_2 N_1 N_2$ liegen auf einem Kreise; da nun $L_1 M_2 \parallel AB$ und $L_1 M_2 = N_1 M_2$ ist, so liegen auch $L_1 N_2 N_1 M_2$ auf einem Kreise, der durch $L_1 N_2 N_1$ schon bestimmt ist. Derselbe Kreis muss auch durch $N_2 N_1 M_1 M_1$ gehen, so dass die 6 Punkte $L_1 L_2 M_1 M_2 N_1 N_2$ auf einem und demselben Kreise liegen, welcher von R. Tucker der triplicate-ratio-circle genannt wird (vielleicht mit Kreis der 3ten Potenz zu übersetzen). Er heisst jetzt der erste Kreis von Lemoine.

Daraus folgt noch sofort:

$$L_1 N_1 = M_2 N_2, \quad N_1 M_1 = N_2 L_2, \quad M_1 L_1 = L_2 M_2$$

dass also die Dreiecke $L_1 M_1 N_1$ und $L_2 M_2 N_2$ einander congruent sind. Es ist dabei

$$\text{Wkl. } N_1 M_1 L_1 = N_1 M_2 L_1 = M_2 N_1 A = \gamma$$

aus analogen Schlüssen folgt, dass die andern Winkel des Dreiecks $L_1 M_1 N_1$ β und α sind, so dass die Dreiecke dem Dreieck ABC ähnlich sind.

Es mögen sich ferner

$$\begin{aligned} L_1 M_1 &\text{ und } L_2 N_2 \text{ in } A_4, \\ M_1 N_1 &\text{ „ } L_2 M_2 \text{ in } B_4, \\ N_1 L_1 &\text{ „ } M_2 N_2 \text{ in } C_4 \end{aligned}$$

schneiden, dann folgt aus dem, was oben von $L_1 L_2 M_1 M_2 N_1 N_2$ gesagt ist, dass die Dreiecke $A_4 L_1 L_2$, $B_4 M_1 M_2$, $C_4 N_1 N_2$ gleichschenklig sind, und dass die Winkel an den Grundlinien immer dieselben sein müssen, da sie als Peripheriewinkel auf denselben Bogen stehen, z. B.

$$\text{Wkl. } L_2 L_1 M_1 = L_2 M_2 M_1$$

23. $L_1 M_2$ geht durch G', also auch durch C'. Nun ist

$$G'C' = \frac{c(a^2-b^2)}{a^2+b^2+c^2} \quad G'L' = BN_2 = \frac{a^2 c}{a^2+b^2+c^2}$$

also

$$L_1 C' = \frac{b^2 c}{a^2+b^2+c^2} = AN_1$$

Da ferner $AN_1 \parallel LC_1$ ist, so dass $AN_1 L_1 C'$ ein Parallelogramm ist, da AC' mit AB den Winkel ϑ bildet, auch $L_1 N_1$ mit $N_1 B$; die gleichschenkligen Dreiecke $A_4 L_1 L_2$, $B_4 M_1 M_2$, $C_4 N_1 N_2$ haben also an der Grundlinie den Winkel ϑ.

24. Fällt man das Lot $G'G_a'$ auf a, so ergiebt sich für die Länge $L_1 G_a'$ offenbar:

$$L_1 G_a' = G' L_1 \cos\beta = \frac{a^2 c \cos\beta}{a^2+b^2+c^2}$$

Ferner

$$CL_2 = \frac{ab^2}{a^2+b^2+c^2}$$

also

$$H_a L_2 = \frac{a}{2} - \frac{ab^2}{a^2+b^2+c^2} = \frac{a(a^2+c^2-b^2)}{2(a^2+b^2+c^2)} = \frac{a^2 c\cos\beta}{a^2+b^2+c^2} = L_1 G_a'$$

Es ist also der Mittelpunkt von $L_1 L_2$ auch der von $H_a G_a'$. Errichtet man im Mittelpunkt von $L_1 L_2$ das Lot, so geht dasselbe durch den Mittelpunkt des Kreises der 3ten Potenz, während das im Mittelpunkte von $H_a G_a'$ errichtete Lot durch den Mittelpunkt des Brocard'schen Kreises geht. Da diese Schlussfolge für alle Seiten gilt, so folgt, dass die beiden Kreise denselben Mittelpunkt haben.

Dieser Mittelpunkt sei Z, der Radius des Kreises der 3ten Potenz ist ZL_1. Es ist nun:

$$ZZ_a = \tfrac{1}{2}\{r\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\vartheta + r\cos\alpha\}$$
$$= \frac{r\cos(\alpha-\vartheta)}{2\cos\vartheta},$$
$$\frac{L_1 L_2}{2} = \frac{r\sin(\alpha-\vartheta)}{2\cos\vartheta}$$

also, wenn r_t der Radius des Kreises der 3ten Potenz ist,

$$r_t^2 = \frac{r^2\{\cos^2(\alpha-\vartheta)+\sin^2(\alpha-\vartheta)\}}{4\cos^2\vartheta} = \frac{r^2}{4\cos^2\vartheta}$$

oder

$$r_t = \frac{r}{2\cos\vartheta}$$

25. Betrachten wir noch die Dreiecke $L_1 M_1 N_1$ und $L_2 M_2 N_2$ näher: $L_2 M_2 N_2$ congr. $L_1 M_1 N_1$ ähnl. ABC. Die Seiten der ersten Dreiecke bilden mit den entsprechenden des andern Winkel $= \vartheta$. es ist ferner

$$\text{Wkl. } N_2 M_2\, G' = M_2 N_2 A = \vartheta$$

ebenso

$$L_2 N_2 G' = N_2 L_2 B = \vartheta$$

also G' der erste Brocard'sche Punkt des Dreiecks $M_2 N_2 L_2$. Da ferner Z der Mittelpunkt des dem Dreieck $M_2 N_2 L_2$ umschriebenen Kreises ist, so liegt Z auf dem Brocard'schen Kreise dieses Dreiecks, und dreht man ZG' um 2ϑ, so ist die dadurch bestimmte Lage von G' der 2te Brocard'sche Punkt, es ist nun

$$G'ZO' = 2\vartheta$$

also O' der 2te Brocard'sche Punkt dieses Dreiecks.

Im Dreieck $N_1 L_1 M_1$ sind ebenso O nnd G' die beiden Brocard'schen Pnnkte.

Es sei endlich noch bemerkt, dass $BO \parallel L_1 M_1$, $CO \parallel M_1 N_1$, $AO \parallel N_1 L_1$, so dass die Seiten des Dreiecks $L_1 M_1 N_1$ den Ecktransversalen dnrch O, dagegen die Seiten des Dreiecks $L_2 M_2 N_2$ den Ecktransversalen durch O' parallel sind.

26. Berechnnng von NH'.

Es treffe das Lot von N anf die Höhe AA_a dieselbe in X, dann ist

$$\overline{NH'}^2 = NX^2 + H'X^2 = NA^2 - AX^2 + H'X^2$$
$$= NA^2 - (AX - H'X)(AX + H'X) = NA^2 - AH'.(AX + H'X);$$

$$AX = AA_a - NN_a = 2r\sin\beta\sin\gamma + \frac{2r\cos(\beta+\vartheta)\cos(\gamma+\vartheta)}{1-4\sin^2\vartheta},$$

$$H'X = H'A_a - NN_a = 2r\cos\beta\cos\gamma + \frac{2r\cos(\beta+\vartheta)\cos(\gamma+\vartheta)}{1-4\sin^2\vartheta},$$

$$AH' = 2r\cos\alpha,$$

$$AN = -\frac{2r\cos(\alpha+\vartheta)}{\sqrt{1-4\sin^2\vartheta}}$$

Es ist also:

$$NH'^2 = \frac{4r^2\cos^2(\alpha+\vartheta)}{1-4\sin^2\vartheta} - 4r^2\cos\alpha\cos(\beta-\gamma) - \frac{8r^2\cos\alpha\cos(\beta+\vartheta)\cos(\gamma+\vartheta}{1-4\sin^2\vartheta}$$
$$= \frac{4r^2}{1-4\sin^2\vartheta}\{\cos^2(\alpha+\vartheta) - \cos\alpha\cos(\beta-\gamma)(1-4\sin^2\vartheta)$$
$$-2\cos\alpha\cos(\beta+\vartheta)\cos(\gamma+\vartheta)\}$$

$$\cos^2(\alpha+\vartheta) = \cos^2\alpha\cos^2\vartheta + \sin^2\alpha\sin^2\vartheta - 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\vartheta\cos\vartheta$$

$$2\cos\alpha\cos(\beta+\vartheta)\cos(\gamma+\vartheta) = 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos^2\vartheta - 2\cos\alpha\sin\alpha\sin\vartheta\cos\vartheta$$
$$+2\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin^2\vartheta$$

also

$$\overline{NH'}^2 = \frac{4r^2}{1-4\sin^2\vartheta}\{\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha\cos(\beta-\gamma)$$
$$+\sin^2\vartheta(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha + 4\cos\alpha\cos(\beta-\gamma)$$
$$+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - 2\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma)\}$$
$$= \frac{4r^2}{1-4\sin^2\vartheta}\{-4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + (1+8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)\sin^2\vartheta\}$$

$$= \frac{2r^2}{1-4\sin^2\vartheta}\{-8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+(1+8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)(1-\cos 2\vartheta)\}$$

$$= \frac{2r^2}{1-4\sin^2\vartheta}\{1-(1+8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)\cos 2\vartheta\}$$

$$= \frac{r^2}{\cos 3\vartheta}\{(1-8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)\cos\vartheta-(1+8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)\cos 3\vartheta\}$$

27. Es lässt sich nun aus dem Dreieck $NH'H$ der Winkel φ berechnen, den die Euler'sche Linie HH' mit der Linie HN bildet. Setzt man

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = g$$

so ist

$$\overline{HH'}^2 = r^2(1-8g)$$

also

$$\frac{2r^2}{1-4\sin^2\vartheta}\{1-(1+8g)\cos 2\vartheta\} = r^2(1-8g)+r^2-2r^2\sqrt{1-8g}\cdot\cos\varphi$$

Hieraus folgt nach einigen Umformungen:

$$\cos\varphi = \frac{1-6\sin^2\vartheta+4g}{(1-4\sin^2\vartheta)\sqrt{1-8g}}.$$

Ebenso leicht der Winkel ψ, den DN und DH' bilden.

Man findet aus Dreieck DHH'

$$\cos\psi = \frac{1-\cos 2\vartheta+2\cos 4\vartheta+4g}{2\cos\vartheta\sqrt{1-4\sin^2\vartheta^3}}.$$

28. Es war gefunden:

$$L_1N_2 = N_1M_2 = M_1L_2 = r\,\mathrm{tg}\,\vartheta$$

Diese Längen können angesehen werden als Diagonalen von Parallelogrammen $BN_2G'L_1$, N_1AM_2G', M_1CL_2G'. Zieht man also durch den gemeinschaftlichen Eckpunkt G' die Parallelen zu den Linien, so sind die Stücke dann innerhalb der betreffenden Dreieckswinkel β, α, γ doppelt so gross, also unter sich gleich, nämlich $= 2r\,\mathrm{tg}\,\vartheta$. Beschreibt man also mit $r\,\mathrm{tg}\,\vartheta$ als Radius den Kreis, so werden je 2 Seiten immer unter dem Durchmesser geschnitten. Nennen wir die Schnittpunkte entsprechend L_3, L_4 auf a, M_3, M_4 auf b, N_3, N_4 auf c, so ist also z. B. L_3N_4 ein Durchmesser, ebenso M_3L_4, N_3M_4. Daraus ergiebt sich, dass die Seiten des Dreiecks $L_3M_3N_3$, sowie die von $L_4M_4N_4$ senkrecht zu den Seiten von ABC stehen. Diese Dreiecke sind also zu ABC_1 ähnlich, und da sie demselben Kreise einbeschrieben sind, so sind sie einander congruent.

Da der Radius $r \operatorname{tg}\vartheta$ ist, so ist $\operatorname{tg}\vartheta$ das Verhältniss der Seiten dieses Dreiecks zu den Seiten des ursprünglichen Dreiecks.

Bem. Dies Resultat konnte direct aus den Eigenschaften des Grebe'schen Punktes G' abgeleitet werden, wenn man noch bemerkt, dass die resp. Durchmesser $M_3 N_4$, $N_3 L_4$, $L_3 M_4$ den Seiten des Höhenfusspunktdreiecks parallel sind.

29. Man lege fortlaufend an den Ecken eines Dreiecks Gerade an, welche mit einer anstossenden Seite den Winkel φ bilden; es soll untersucht werden, wie sich das neu entstandene Dreieck $A_1 B_1 C_1$ zum alten ABC verhält.

Es soll sein

$$(AB,\ A_1 B_1) = (BC,\ B_1 C_1) = (CA,\ C_1 A_1) = \varphi \quad \text{(Fig. 2).}$$

Zunächst ist leicht einzusehen, dass die Winkel des neuen Dreiecks denen des alten gleich sind, die Dreiecke sind also einander ähnlich. Es ist ferner

$$A_1 A = \frac{b \sin\varphi}{\sin\alpha}, \quad AB_1 = \frac{c \sin(\beta + \varphi)}{\sin\beta}$$

also

$$A_1 B_1 = \frac{b \sin\beta \sin\varphi + c \sin\alpha \sin(\beta+\varphi)}{\sin\alpha \sin\beta}$$

$$= \frac{2r\{\sin^2\beta \sin\varphi + \sin\alpha \sin\gamma \sin\beta \cos\varphi + \sin\alpha \sin\gamma \cos\beta \sin\varphi\}}{\sin\alpha \sin\beta}$$

$$= \frac{c}{\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}(\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \cos\varphi + (1 + \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma)\sin\varphi)$$

$$= c(\cos\varphi + \sin\varphi \cot\vartheta) = \frac{c \sin(\varphi+\vartheta)}{\sin\vartheta}$$

Analog

$$B_1 C_1 = \frac{a \sin(\varphi+\vartheta)}{\sin\vartheta}, \quad C_1 A_1 = \frac{b \sin(\varphi+\vartheta)}{\sin\vartheta}$$

Das Aehnlichkeitsverhältniss ist also $\dfrac{\sin(\varphi+\vartheta)}{\sin\vartheta}$.

Ist $\varphi = \vartheta$, so ist dies Verhältniss

$$\frac{\sin 2\vartheta}{\sin\vartheta} = 2\cos\vartheta$$

übereinstimmend mit dem Resultat in *B. N.* 24.

Setzt man ferner $\varphi = 90^0$, so ist $\cot\vartheta$ das Aehnlichkeitsverhältniss.

Ist $\varphi = -\vartheta$, so ist das neue Dreieck 0, die 3 Linien schneiden sich sich in einem Punkte, wie bekannt. Ist noch

$$\varphi = -\frac{\vartheta}{2}$$

so giebt dies:

$$\frac{\sin\frac{\vartheta}{2}}{\sin\vartheta} = \frac{1}{2\cos\frac{\vartheta}{2}}$$

Zeichnet man endlich 2 Dreiecke, von denen das eine das bestimmte $A_1 B_1 C_1$ ist, während die Seiten eines 2ten $A_2 B_2 C_2$ zu den Seiten des Dreiecks $A_1 B_1 C_1$ senkrecht stehen, so ist

$$A_1 B_1 C_1 = ABC \cdot \frac{\sin^2(\varphi+\vartheta)}{\sin^2\vartheta},$$

$$A_2 B_2 C_2 = ABC \cdot \frac{\cos^2(\varphi+\vartheta)}{\sin^2\vartheta}$$

also

$$A_1 B_1 C_1 + A_2 B_2 C_2 = \frac{ABC}{\sin^2\vartheta}$$

30. Man fälle von G' die Lote auf die Seiten, also $G'G_a'$, $G'G_b'$, $G'G_c'$, wodurch man das Dreieck $G_a'G_b'G_c'$ erhält. Das Dreieck zerfällt in die 3 Teile $G'G_b'G_c'$, $G'G_c'G_a'$, $G'G_a'G_b'$. Da

$$G_a'G' = r\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\vartheta$$

ist etc., so ist

$$G'G_b'G_c' = \frac{r^2}{2}\,\mathrm{tg}^2\vartheta\sin\beta\sin\gamma\sin\alpha$$

denn der Winkel an G' ergänzt α zu 2 Rechten; also

$$G'G_b'G_c' = G'G_c'G_a' = G'G_a'G_b' = \tfrac{1}{4}\triangle\,\mathrm{tg}^2\vartheta$$

und

$$G_a'G_b'G_c' = \tfrac{3}{4}\triangle\,\mathrm{tg}^2\vartheta$$

Da durch $G'G_a'$, $G'G_b'$, $G'G_c'$ das ganze Dreieck in 3 gleiche Teile geteilt wird, so ist G' der Schwerpunkt von $G_a'G_b'G_c'$.

Man hat also auch umgekehrt: Errichtet man in den Endpunkten der Schwerlinien eines Dreiecks die Lote zu denselben, so ist in dem neuen entstandenen Dreieck der Schwerpunkt des ersten Dreiecks der Grebe'sche Punkt des andern. Das Verhältniss der Flächeninhalte ist $\frac{3}{4}\,\mathrm{tg}^2\vartheta$. Auch folgt leicht, dass die Seiten des Dreiecks $G_a'G_b'G_c'$ den Schwerlinien des Dreiecks ABC proportional sind.

Fällt man vom Schwerpunkte G die Lote GG_a, GG_b, GG_c auf die Seiten, so erhält man ein Dreieck, dessen Inhalt

$$\triangle_g = \tfrac{1}{3}\triangle \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \,.\, \cot\vartheta$$

ist. Die Seiten desselben sind proportional den Producten aus Seite und zugehöriger Schwerlinie des ursprünglichen Dreiecks.

31. Zieht man ferner die Transversalen AG_α', BG_β', CG_γ' durch G', so bestimmen die Punkte $G_\alpha' G_\beta' G_\gamma'$ ein neues Dreieck, dessen Inhalt sich leicht bestimmen lässt.

Da G_α' die Seite a nach dem Verhältniss $c^2 : b^2$ teilt, so findet man leicht, indem man die Dreiecke $AG_\beta' G_\gamma'$, $BG_\gamma' G_\alpha'$, $CG_\alpha' G_\beta'$ vom ganzen Dreieck abzieht, für das gesuchte Dreieck

$$\Delta_{g_1} = \frac{\triangle\{(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2) - b^2c^2(b^2+c^2) - c^2a^2(c^2+a^2) - a^2b^2(c^2+b^2)\}}{(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2)}$$

$$= \frac{2\Delta \sin^2\alpha \sin^2\beta \sin^2\gamma}{(\sin^2\beta+\sin^2\gamma)(\sin^2\gamma+\sin^2\alpha)(\sin^2\alpha+\sin^2\beta)}$$

$$= \frac{2\Delta \sin^3\vartheta}{\sin(\alpha+\vartheta)\sin(\beta+\vartheta)\sin(\gamma+\vartheta)}$$

Denselben Inhalt gieht das Dreieck $D_\alpha D_\beta D_\gamma$, welches durch die Ecktransversalen nach dem Punkte D erhalten wird, wie daraus leicht folgt, dass

$$BG_\alpha' = D_\alpha C$$

etc. ist.

32. Construirt man über den Seiten eines Dreiecks (Fig. 2.) ABC die gleichseitigen Dreiecke BCA_1, CAB_1, ABC_1, so sind die Längen AA_1, BB_1, CC_1 einander gleich.

Man erhält:

$$\begin{aligned} AA_1^2 &= CA_1^2 + CA^2 - 2CA \,.\, CA_1 \cos(60^0+\gamma) \\ &= a^2+b^2-2ab\cos(60^0+\gamma) \\ &= a^2+b^2-ab\cos\gamma + ab\sin\gamma\sqrt{3} \end{aligned}$$

nun ist

$$a^2+b^2-ab\cos\gamma = \frac{a^2+b^2+c^2}{2},$$

$$ab\sin\gamma = 2\Delta$$

also

$$AA_1^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} + 2\Delta\sqrt{3} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2}(1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\vartheta)$$

Ebenso also

$$BB_1^2 = CC_1^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} \quad (1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\vartheta)$$

Construirt man die gleichseitigen Dreiecke BCA_2, CAB_2, ABC_2, welche mit dem Dreieck in demselben Flächenteile liegen, so findet man ebenso

$$\overline{AA_2}^2 = BB_2^2 = CC_2^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} \quad (1-\sqrt{3}\operatorname{tg}\vartheta)$$

also

$$AA_1 . AA_2 = BB_1 . BB_2 = CC_1 . CC_2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} \quad (1-3\operatorname{tg}^2\vartheta)$$

33. Diese Geraden AA_1, BB_1, CC_1 schneiden sich in einem Punkte P, was bekannt und leicht zu beweisen ist. Die Winkel am Punkte P sind alle einander gleich und betragen also 120°. Bekanntlich hat ferner Punkt P die Eigenschaft, dass $PA+PB+PC$ ein Minimum ist, wenn kein Winkel grösser als 120° ist.

Construirt man ferner durch A, B, C die Lote zu den Linien AP, BP, CP, so schliessen dieselben ein gleichseitiges Dreieck ein, welches zugleich das grösste ist, welches um ABC construirt werden kann.

Um dies zu beweisen, schicken wir folgenden Satz voran, der leicht zu beweisen ist. Von allen Secanten, welche man durch den Schnittpunkt zweier Kreise legen kann, giebt diejenige die grösste Sehnensumme, welche parallel der Centrale ist. Nun schneiden sich die Kreise durch ABC_1 und ACB_1 in A und P, also ist AP die Chordale jener Kreise, die Centrale ist also zu AP senkrecht, und die Secante durch A senkrecht zu AP giebt die grösste Summe der Sehnen, d. h. die grösste Seite eines gleichseitigen Dreiecks um ABC.

Wir setzen nun:

$$AA_1^2 = \frac{a^2+b^2+c^2)}{2}(1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\vartheta) = \lambda^2$$

dann ist

$$AP : b = \sin(AB_1P) : \sin 60^0$$

ferner folgt aus dem Dreieck ABB_1

$$\sin(AB_1P) : \sin(60^0+\alpha) = c : \lambda$$

also

$$AP = \frac{b.\sin(AB_1P)}{\sin 60^0} = \frac{b\,.\,c\sin(60^0+\alpha)}{\lambda\,.\sin 60^0} = \frac{abc\sin(60^0+\alpha)}{a\lambda\,.\sin 60^0}$$

$$= \frac{4r\triangle\sin(60^0+\alpha)}{2r.\lambda\,.\sin\alpha\sin 60^0} = \frac{2\Delta\sin(60^0+\alpha)}{\lambda\sin\alpha\sin 60^0}$$

Ebenso

$$BP = \frac{2\Delta \sin(60^0+\beta)}{\lambda \sin\beta \sin 60^0}$$

$$CP = \frac{2\Delta \sin(60^0+\gamma)}{\lambda \sin\gamma \sin 60^0}$$

Bezeichnet man nun das grösste umgeschriebene gleichseitige Dreieck mit $A_m B_m C_m$, so ist zunächst PB_m ein Durchmesser des Kreises um ACB_1 oder ACB_m. Derselbe ist also

$$\frac{b}{\sin 60^0}$$

Dann ist

$$\overline{AB_m}^2 = \frac{b^2}{\sin^2 60^0} - AP^2$$

wir können aber setzen

$$b^2 = AP^2 + CP^2 + AP.CP$$

also

$$\begin{aligned}\overline{AB_m}^2 &= \tfrac{1}{3}(AP^2+CP^2+AP.CP) - AP^2\\ &= \tfrac{1}{3}(AP^2+4AP.CP+4CP^2)\\ &= \tfrac{1}{3}(AP+2CP)^2\end{aligned}$$

also

$$AB_m = \sqrt{\tfrac{1}{3}}(AP+2CP)$$

ebenso

$$AC_m = \sqrt{\tfrac{1}{3}}(AP+2BP)$$

also

$$B_m C_m = 2\sqrt{\tfrac{1}{3}}(AP+BP+CP) = 2\sqrt{\tfrac{1}{3}}\lambda$$

wo $B_m C_m$ die Seite des umgeschriebenen gleichseitigen Dreiecks ist. Es verhält sich AA_1 zur Seite des gesuchten Dreiecks, wie Höhe und Seite im gleichseitigen Dreieck.

Der Inhalt des Dreiecks ist also

$$\begin{aligned}\frac{\lambda^2}{\sqrt{3}} &= \frac{a^2+b^2+c^2}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\vartheta)\\ &= 2\Delta\left(1+\frac{\cot\vartheta}{\sqrt{3}}\right) = 2\Delta(1+\cot\vartheta\cot 60^0)\\ &= \frac{2\Delta\cos(60^0-\vartheta)}{\sin\vartheta.\sin 60^0}\end{aligned}$$

Bemerkung. Da für $AP = x$, $BP = y$, $CP = z$ die Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned}y^2+z^2+yz &= a^2\\ z^2+x^2+zx &= b^2\\ x^2+y^2+xy &= c^2\end{aligned}$$

so sind diese Gleichungen hierdurch aufgelöst, da

$$\sin\alpha = \frac{a}{2r}, \quad \sin\beta = \frac{b}{2r}, \quad \sin\gamma = \frac{c}{2r}$$

gesetzt werden kann, r aber aus der Gleichung bestimmt wird

$$r = \frac{abc}{4\Delta}$$

34. Ist ein Dreieck zwischen 2 ähnlichen und ähnlich liegenden Dreiecken beschrieben, so dass es dem einen umgeschrieben, dem andern eingeschrieben ist, so ist es die mittlere Proportionale zwischen beiden. Ist daher ein Dreieck von bestimmter Gestalt das grösste, welches um ein anderes beschrieben werden kann, so ist das, welches jenem ähnlich und ähnlich gelegen und dem Dreieck eingeschrieben ist, das kleinste von jener Gestalt. Das kleinste gleichseitige Dreieck also, welches einem Dreieck eingeschrieben werden kann, muss Seiten haben, welche ebenfalls zu AA_1, BB_1, CC_1 senkrecht stehen. Da $\frac{2\Delta\cos(60^0-\vartheta)}{\sin\vartheta\sin 60^0}$ der Inhalt des grössten umgeschriebenen ist, so muss $\frac{\Delta.\sin\vartheta.\sin 60^0}{2\cos(60^0-\vartheta)}$ der Inhalt des kleinsten eingeschriebenen Dreiecks sein und die Seite desselben

$$\sqrt{\frac{\Delta\sin\vartheta}{\cos(60^0-\vartheta)}}$$

Bemerkung. Das kleinste gleichseitige Dreieck sei $A_0B_0C_0$. Dann müssen sich die Kreise um AB_0C_0, BC_0A_0, CA_0B_0 in einem Punkte P' schneiden. Da $A_0B_0C_0$ das kleinste Dreieck mit den Winkeln 60^0 ist, so ist ABC das grösste um $A_0B_0C_0$ mit den Winkeln α, β, γ, daher sind die Seiten den Centralen der genannten Kreise parallel, also sind die Seiten resp. senkrecht zu $P'A_0$, $P'B_0$, $P'C_0$. Verbindet man also P' mit A, B, C, so gehen diese Linien durch die betreffenden Mittelpunkte jener Kreise. Da nun die Höhen und die Durchmesser der umgeschriebenen Kreise an den Ecken eines Dreiecks Gegentransversalen sind, so folgt also, dass die hier bestimmten Punkte P und P' Gegenpunkte des Dreiecks ABC sind.

II.

Die Lissajous'schen Curven.

Von

Herrn Dr **H. Ekama**

in Amersfoort.

Lissajons [1]) hat schon, als er diese Cnrven beschrieh, etwas über die analytischen Eigenschaften pnblicirt, jedoch sehr unvollständig. Es scheint, dass nach ihm über diese Sache wenig oder nichts herausgegehen ist, bis 1884 an der Universität zn Göttingen eine Dissertation von A. Himstedt erschien, hetitelt „Ueber Lissajons'sche Curven". In dieser wird noch genannt eine Dissertation von Wilhelm Brann, hetitelt: „Die Singnlaritäten der Lissajons'schen Stimmgabelcurven." Nach Himstedt's Andentnng ist es mir nicht gelnngen, diese Dissertation in einer Bibliothek zn finden, nnd ich weiss nicht, wie Brann die Lissajons'schen Curven behandelt hat.

Himstedt hetrachtet gleich wie Lissajons nnr den Fall, wo dio heiden Schwingnngsrichtnngen senkrecht zn einander stehen; ich hahe versncht diese Cnrven so allgemein wie möglich zn hehandeln bei der Annahme, dass die Schwingnngsrichtnngen einen Winkel ω mit einander machen, so dass wir $\omega = 90^0$ oder $\omega = 0$ setzend die Lissajons'schen oder die Himstedt'schen Formeln hekommen.

Die Amplitnden der beiden Bewegungen seien a nnd b und nehmen wir an, dass in der Zeit, in welcher die eine Bewegung n Schwingungen, die andere m Schwingungen macht, indem diese Zeit so klein genommen wird, dass n und m ganze Zahlen sind, welche keinen gemeinschaftlichen Factor haben.

---

1) Ann. de Chimie et de Physique III ème Série LI. p. 47.

Die beiden Schwingungsrichtungen sollen die Coordinatenachsen sein, dann haben wir ein schiefwinkliges Coordinatensystem, bei welchem der Winkel zwischen den Achsen ω ist.

Den Augenblick, von welchem wir die Zeit rechnen, können wir willkürlich wählen; nehmen wir an, dass in diesem Augenblicke der Punkt sich auf der Y Achse befindet, so werden nach einiger Zeit t die Coordinaten des Punktes sein:

$$x_1 = a \sin 2\pi \frac{t}{T} \quad \text{und} \quad y_1 = b \sin 2\pi \left(\frac{t}{T'} + \frac{p}{\lambda'} \right) \tag{1}$$

In dieser Formel ist p der Weg, welchen der Punkt in der Richtung der Y Achse schon beim Anfang der Zeitrechnung zurückgelegt hat, also ist p Phasendifferenz der beiden Bewegungen. Weiter ist T die Schwingungszeit und λ die Wellenlänge der Bewegung der X Achse entlang und T' und λ' die entsprechenden Grössen der Y Achse entlang. Durch Elimination der t finden wir die Gleichung der Curve, doch erst werden wir die Formeln vereinfachen. Wir wissen, dass $nT = mT'$ und $n\lambda = m\lambda'$ ist.

Wir wissen, dass $nT = mT'$ und $n\lambda = m\lambda'$ ist, also

$$x_1 = a \sin 2\pi \frac{t}{T} \quad \text{und} \quad y_1 = b \sin 2\pi \frac{m}{n} \left(\frac{t}{T} + \frac{p}{\lambda} \right)$$

Sei

$$\pi \frac{t}{T} = n\Theta \quad \text{und} \quad 2\pi \frac{m}{n} \frac{p}{\lambda} = \psi$$

so wird

$$x_1 = a \sin 2n\Theta \quad \text{und} \quad y_1 = b \sin (2m\Theta + \psi) \tag{2}$$

Aus diesen Formeln muss Θ eliminirt werden; dies gibt:

$$\Theta = \frac{1}{2n} \arcsin \frac{x_1}{a}$$

also

$$y_1 = b \sin \left\{ \frac{m}{n} \arcsin \frac{x_1}{a} + \psi \right\} \tag{3}$$

Diese Formel ist die allgemeine Gleichung der Lissajous'schen Curven in dem oben gegebenen Coordinatensysteme. Vorläufig werden wir jedoch die Formeln (2) gebrauchen.

Die Curve wird durch den Coordinatenanfangspunkt gehen, für $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, also für $2n\Theta = k\pi$ und $2m\Theta + \psi = l\pi$.

Durch Elimination der Θ finden wir

$$\frac{m}{n} k\pi + \psi = l\pi$$

Es war

$$\psi = 2\pi \frac{m}{n} \frac{p}{\lambda}$$

also ist

$$p = \frac{nl}{2m} \lambda - \frac{k}{2} \lambda$$

k und l[1] sind ganze Zahlen; l kann alle Werte von m bis 1 haben und k alle Werte von n bis 1. Wenn l grösser als m ist, so ist die Phasendifferenz einige Wellenlängen und irgend ein Bruch solcher, so dass wir dieselbe Curve finden, als wenn die Phasendifferenz jenem Bruche gleich wäre. k würde auch n Werte haben können, allein aus der Formel geht hervor, dass wir nur verschiedene Phasendifferenzen für $k = 0$ und $k = 1$ finden werden. Also gibt es $2m$ Phasendifferenzen, bei welchen die Curve durch den Coordinatenanfangspunkt geht.

Der Zähler kann alle Zahlen von 1 bis $2m$ sein, also muss sein

$$p = \frac{A}{2m} \lambda$$

oder weil $\lambda = \frac{m}{n} \lambda'$,

$$p = \frac{B}{2n} \lambda'$$

worin B alle Werte von 1 bis $2n$ hat. Die Curve wird also immer bei einer Phasendifferenz gleich 0 oder gleich $\frac{1}{2}\lambda$ oder $\frac{1}{2}\lambda'$ durch den Coordinatenanfangspunkt gehen.

Aus den Formeln (2) folgt, dass x_1 nie grösser sein wird als a und nie kleiner als $-a$; ebenfalls dass y_1 nicht grösser als b und nicht kleiner als $-b$ sein wird. Die ganze Curve wird also in einem Parallelogramme, dessen Seiten $2a$ und $2b$ sind, und dessen Winkel ω ist, eingeschlossen sein. Wir werden jetzt untersuchen, wann die Curve durch die Ecken dieses Parallelogramms geht. Nennen wir die Ecke, wo $x_1 = a$ und $y_1 = b$ ist, P; wo $x_1 = -a$ und $y_1 = b$ ist, Q; wo $x_1 = -a$ und $y_1 = -b$ ist, R, und wo $x_1 = +a$ und $y_1 = -b$ ist, S.

Soll die Curve durch P gehen, so muss sein:

$$\frac{t}{T} = \frac{4k+1}{4} \quad \text{und} \quad \frac{mt}{nT} + \frac{mp}{n\lambda} = \frac{4l+1}{4}$$

k und l sind wieder ganze Zahlen.

---

1) Oefter werden k und l in dieser Weise gebraucht werden, jedoch besteht zwischen den verschiedenen $k's$ und $l's$ keine Beziehung.

$$\therefore \frac{mp}{n\lambda} = \frac{m}{n}\,\frac{4k+1}{4} - \frac{4l+1}{4}$$

oder

$$p = \left\{\frac{4k+1}{4} - \frac{n}{m}\,\frac{4l+1}{4}\right\}\lambda = \left\{\frac{m}{n}\,\frac{4k+1}{4} - \frac{4l+1}{4}\right\}\lambda'$$

n kann sein

$$= \begin{cases} 4r+1 \\ 4r+2 \\ 4r+3 \\ 4r \end{cases} \text{ und } m = \begin{cases} 4s+1 \\ 4s+2 \\ 4s+3 \\ 4s \end{cases}$$

r und s sind ganze positive Zahlen.

Diese verschiedenen Werte in obiger Gleichung substituirt geben die Phasendifferenzen, bei welchen die Curve durch P geht. In einer Tabelle zusammengesetzt:

	$m = 4s+1$.	$m = 4s+2$	$m = 4s+3$	$m = 4s$
$n = 4r+1$	0	$\frac{1}{2}\lambda'$	$\frac{1}{2}\lambda'$ oder $\frac{1}{2}\lambda$	$\frac{3}{4}\lambda$
$n = 4r+2$	$\frac{3}{4}\lambda$	fällt weg [1])	$\frac{3}{4}\lambda$	fällt weg
$n = 4r+3$	$\frac{1}{4}\lambda$ oder $\frac{1}{4}\lambda'$	$\frac{1}{4}\lambda'$	0	$\frac{3}{4}\lambda'$
$n = 4r$	$\frac{1}{4}\lambda$	fällt weg	$\frac{1}{4}\lambda$	fällt weg

In dieser Tabelle sind gleich wie in den folgenden nur die wichtigsten Phasendifferenzen aufgenommen.

Die Curve wird durch Q gehen für

$$\frac{t}{T} = \frac{4k+3}{4} \quad \text{und} \quad \frac{mt}{nT} + \frac{mp}{n\lambda} = \frac{4l+1}{4}$$

also

$$p = \left\{\frac{4k+3}{4} - \frac{n}{m}\,\frac{4l+1}{4}\right\}\lambda = \left\{\frac{m}{n}\,\frac{4k+3}{4} - \frac{4l+1}{4}\right\}\lambda'$$

Die Werte von n und m substituirt, gibt

	$m = 4s+1$	$m = 4s+2$	$m = 4s+3$	$m = 4s$
$n = 4r+1$	$\frac{1}{2}\lambda$ oder $\frac{1}{2}\lambda'$	$\frac{1}{2}\lambda'$	0	$\frac{3}{4}\lambda'$
$n = 4r+2$	$\frac{1}{4}\lambda$	fällt weg	$\frac{1}{4}\lambda$	fällt weg
$n = 4r+3$	0	$\frac{1}{4}\lambda'$	$\frac{1}{4}\lambda$ oder $\frac{1}{4}\lambda'$	$\frac{3}{4}\lambda'$
$n = 4r$	$\frac{3}{4}\lambda$	fällt weg	$\frac{3}{4}\lambda$	fällt weg

1) Weil n und m einen gemeinschaftlichen Factor haben.

Soll die Curve durch R gehen, so muss sein

$$\frac{t}{T} = \frac{4k+3}{4} \quad \text{und} \quad \frac{mt}{nT} + \frac{mp}{n\lambda} = \frac{4l+3}{4}$$

also

$$p = \left\{\frac{4k+3}{4} - \frac{n}{m}\,\frac{4l+3}{4}\right\}\lambda = \left\{\frac{m}{n}\,\frac{4k+3}{4} - \frac{4l+3}{4}\right\}\lambda'$$

Durch Substitution der Werte von n und m finden wir:

	$m = 4s+1$	$m = 4s+2$	$m = 4c+3$	$m = 4s$
$n = 4r+1$	0	$\frac{3}{4}\lambda'$	$\frac{1}{2}\lambda'$ oder $\frac{1}{2}\lambda$	$\frac{1}{4}\lambda'$
$n = 4r+2$	$\frac{1}{4}\lambda$	fällt weg	$\frac{1}{4}\lambda$	fällt weg
$n = 4r+3$	$\frac{1}{2}\lambda$ oder $\frac{1}{2}\lambda'$	$\frac{3}{4}\lambda'$	0	$\frac{1}{4}\lambda''$
$n = 4r$	$\frac{3}{4}\lambda$	fällt weg	$\frac{3}{4}\lambda$	fällt weg

Die Curve wird durch S gehen, wenn

$$\frac{t}{T} = \frac{4k+1}{4} \quad \text{und} \quad \frac{mt}{nT} + \frac{mp}{n\lambda} = \frac{4l+3}{4}$$

$$\therefore p = \left\{\frac{4k+1}{4} - \frac{n}{m}\,\frac{4l+3}{4}\right\}\lambda = \left\{\frac{m}{n}\,\frac{4k+1}{4} - \frac{4l+3}{4}\right\}\lambda$$

Durch Substitution bekommen wir:

	$m = 4s+1$	$m = 4s+2$	$m = 4s+3$	$m = 4s$
$n = 4r+1$	$\frac{1}{2}\lambda$ oder $\frac{1}{2}\lambda'$	$\frac{3}{4}\lambda'$	0	$\frac{1}{4}\lambda'$
$n = 4r+2$	$\frac{3}{4}\lambda$	fällt weg	$\frac{3}{4}\lambda'$	fällt weg
$n = 4r+3$	0	$\frac{3}{4}\lambda'$	$\frac{1}{2}\lambda$ oder $\frac{1}{2}\lambda'$	$\frac{1}{4}\lambda'$
$n = 4r$	$\frac{1}{4}\lambda$	fällt weg	$\frac{1}{4}\lambda$	fällt weg

Die Curve wird durch P und Q gehen für

$n = 4r+1$ und $m = 4s+2$
$n = 4r+3$ „ $m = 4s+2$ } bei $\frac{1}{4}\lambda'$ Phasendifferenz

$n = 4r+1$ „ $m = 4s$
$n = 4r+3$ „ $m = 4s$ } bei $\frac{3}{4}\lambda'$ Phasendifferenz.

Sie geht durch R und S, wenn die Phasendifferenz $\frac{1}{2}\lambda'$ grösser ist.

Im allgemeinen geht die Curve nur durch P und Q oder durch R und S, wenn n ungerade und m gerade ist.

Soll die Curve durch P und R gehen, so muss sein

$n = 4r+1$	und	$m = 4s+1$	die Phasendifferenz		$= 0$
$n = 4r+3$	„	$m = 4s+1$	„	„	$= \frac{1}{2}\lambda$ oder $\frac{1}{2}\lambda'$
$n = 4r+1$	„	$m = 4s+3$	„	„	$= \frac{1}{2}\lambda$ oder $\frac{1}{2}\lambda'$
$n = 4r+3$	„	$m = 4s+3$	„	„	$= 0$

Soll die Curve durch Q und S gehen, so müssen die Phasendifferenzen in derselben Folge sein: $\frac{1}{2}\lambda$ oder $\frac{1}{2}\lambda'$; 0; 0 und $\frac{1}{2}\lambda$ oder $\frac{1}{2}\lambda'$. Dass die Curve durch die gegenüberliegenden Ecken des Parallelogramms geht, ist nur möglich, wenn n und m beide ungerade sind.

Endlich wird die Curve durch P und S gehen für

$$\left.\begin{array}{lll} n = 4r+2 & \text{und} & m = 4s+1 \\ n = 4r & „ & m = 4s+1 \end{array}\right\} \text{Phasendifferenz} = \tfrac{1}{2}\lambda$$

$$\left.\begin{array}{lll} n = 4r+2 & „ & m = 4s+3 \\ n = 4r & „ & m = 4s+3 \end{array}\right\} \text{Phasendifferenz} = \tfrac{1}{2}\lambda$$

Die Curve wird durch Q und R gehen, wenn die Phasendifferenz $\frac{1}{2}\lambda$ grösser ist. Dieses ist nur möglich für n gerade und m ungerade.

Um die Schnittpunkte der Curve mit der Y_1 Achse zu finden, muss $y_1 = 0$ sein, also

$$2n\Theta = k\pi$$

worin k alle ganze Zahlen von 1 bis $2n$ sein kann, wir finden also $2n$ Schnittpunkte mit der Y_1 Achse. Die Werte der y_1 für diese sind

$$y_1 = b \sin\left(\frac{m}{n} k\pi + \psi\right)$$

Bei den Schnittpunkten mit der X Achse muss $y_1 = 0$ sein, also

$$2m\Theta + \psi = l\pi$$

worin l alle ganzen Zahlen von 1 bis $2m$ sein kann, also $2m$ Schnittpunkte mit der X_1 Achse:

$$\Theta = \frac{l\pi}{2m} - \frac{\psi}{2m}$$

$$\therefore x_1 = a \sin \frac{n}{m}\{l\pi - \psi\}$$

Oft fallen einige dieser Schnittpunkte zusammen. Geht die Curve durch 2 Ecken des Parallelogramms, so ist die Zahl der Schnittpunkte mit der X_1 Achse m und mit der Y_1 Achse n, von diesen können auch wieder einige zusammen fallen.

Nun werden wir bestimmen, wenn x_1 den Wert $+a$ hat; dazu muss

$$2n\Theta = \frac{4k+1}{4}\pi$$

sein, worin k alle Werte von 1 bis n haben kann, also berührt die Curve diese Seite des Parallelogramms n mal. Für diese Punkte ist:

$$y_1 = b\sin\left\{\frac{m}{n}\,\frac{4k+1}{4}\pi+\psi\right\}$$

x_1 wird gleich $-a$ für

$$2n\Theta = \frac{4k+3}{4}\pi$$

und so ist

$$y_1 = b\sin\left\{\frac{m}{n}\,\frac{4k+3}{4}\pi+\psi\right\}$$

Soll $y_1 = b$ sein, so muss

$$2m\Theta+\psi = \frac{4l+1}{4}\pi$$

sein.

$$\Theta = \frac{4l+1}{8m}\pi-\frac{\psi}{2m}$$

$$\therefore x_1 = a\sin\frac{n}{m}\left\{\frac{4l+1}{4}\pi-\psi\right\}$$

für $y_1 = -b$ ist

$$2m\Theta+\psi = \frac{4l+3}{4}\pi$$

und also

$$x_1 = a\sin\frac{n}{m}\left\{\frac{4l+3}{4}\pi-\psi\right\}$$

l kann alle Werte von 1 bis m haben, also berührt die Curve jede der Seiten des Parallelogramms, welche gleich $2a$ sind, m mal.

Bei verschiedenen Phasendifferenzen werden wir jedoch dieselbe Curve finden. Wir müssen zwei Fälle unterscheiden, das heisst, die Richtung, in welcher die Curve durchlaufen wird, bleibt dieselbe, oder die Curve ändert ihre Form zwar nicht, wird aber in einer Richtung entgegengesetzt jener im ersten Falle durchlaufen.

Wir haben gefunden:

$$x_1 = a\sin 2\pi\frac{t}{T} \quad \text{und} \quad y_1 = b\sin 2\pi\left(\frac{t}{T'}+\frac{p}{x'}\right)$$

Sei $p = \frac{\lambda'}{c} = \frac{\lambda}{d}$

Nach einigen ganzen Schwingungszeiten T wird x_1 wieder dasselbe sein, also genügt x_1 der Gleichung

$$x_1 = a \sin 2\pi \frac{t + f\,T}{T}$$

in welcher f eine ganze Zahl ist.

So ist in einem Zeitpunkte $t + fT$

$$y_1 = b \sin 2\pi \left(\frac{t + f\,T}{T'} + \frac{1/c\,\lambda'}{\lambda'} \right)$$

oder

$$y_1 = b \sin 2\pi \left(\frac{t}{T'} + \frac{f\lambda}{\lambda'} + 1/c \frac{\lambda'}{\lambda'} \right)$$

$$= b \sin 2\pi \left(\frac{t}{T'} + \frac{\left(\frac{m}{n} f + 1/c \right) \lambda'}{\lambda'} \right)$$

Also ist die allgemeine Formel für die Phasendifferenzen, bei welchen die Curve dieselbe ist, und in derselben Richtung durchlaufen wird, $\left(1/c + \frac{m}{n} f\right)\lambda'$, in welcher $n \gtreqless f \gtreqless 1$ ist, dieses ist in Wellenlängen der anderen Bewegung ausgedrückt $\left(1/d + \frac{n}{m} g\right) \lambda$, in welcher g eine ganze Zahl von 1 bis m ist.

Ist die ursprüngliche Phasendifferenz $= 0$, so wird diese Formel $\frac{n}{m} g\lambda$, was übereinstimmt mit der vorher gefundenen Bedingung, dass die Curve durch den Coordinatenanfangspunkt gehen soll, wenn in dieser $k = 0$ ist.

Wird die Curve in entgegengesetzter Richtung durchlaufen, so hat man:

$$x_1 = a \sin 2\pi \frac{t}{T} = a \sin 2\pi \frac{\frac{2f+1}{2} T - t}{T}$$

und

$$y_1 = b \sin 2\pi \left(\frac{t}{T'} + \frac{p}{\lambda'} \right) = b \sin 2\pi \left(\frac{\frac{2g+1}{2} T' - t}{T'} - \frac{p}{\lambda'} \right)$$

Substituiren wir in y_1 für t den Wert $\frac{2f+1}{2} T - t$; so hat man

$$y_1 = b \sin 2\pi \left\{ \frac{\frac{2g+1}{2} T' - \frac{2f+1}{2} T + t}{T'} - \frac{1/c\,\lambda'}{\lambda'} \right\}$$

oder

$$y_1 = b \sin 2\pi \left\{ \frac{t}{T'} + \frac{\left(\frac{2g+1}{2} - \frac{2f+1}{2} \frac{m}{n} - 1/c\right) \lambda'}{\lambda'} \right\}$$

und also ist die erforderte Phasendifferenz gleich

$$\frac{n(2g+1) - (2f+1)m - \frac{2n}{c}}{2n} \lambda'$$

in welcher g und f wieder ganze Zahlen sind.

In Wellenlängen der anderen Bewegung ausgedrückt findet man die Phasendifferenz gleich

$$\frac{m(2f+1) - (2g+1)n - \frac{2m}{d}}{2m} \lambda$$

Diese Formel wird für $1/d = 0$

$$\frac{m(2f+1) - n(2g+1)}{2m} \lambda$$

oder

$$\left\{ f - \frac{n + 2gn - m}{2m} \right\} \lambda$$

und weil f keinen Einfluss hat,

$$\left\{ \tfrac{1}{2} - \frac{2g+1}{2} \frac{n}{m} \right\} \lambda \quad \text{oder} \quad \left\{ \frac{2g+1}{2} \frac{n}{m} - \tfrac{1}{2} \right\} \lambda$$

g kann m Werte haben, also finden wir hier auch m Phasendifferenzen; diese kommen überein mit den früher gefundenen, wenn $k = 1$ ist.

Die Formel (3) gibt die Curve in einem schiefwinkligen Coordinatensysteme, wir werden sie jetzt auf ein rechtwinkeliges, von welchem die X Achse mit jener des ursprünglichen Systems zusammen fällt, und also die Y Achse auf dieser senkrecht steht, übertragen.

Nun ist

$$x = x_1 + y_1 \cos\omega \quad \text{und} \quad y = y_1 \sin\omega$$

$$\therefore x = x_1 + y \operatorname{cotg} \omega$$

aber

$$x_1 = a \sin 2n\Theta \quad \text{und} \quad y_1 = b \sin(2m\Theta + \psi)$$

$$\therefore \quad y = b \sin\omega \sin(2m\Theta + \psi)$$

und also

$$\Theta = \frac{1}{2m}\left(\arcsin\frac{y}{b\sin\omega} - \psi\right)$$

$$x = a\sin\frac{n}{m}\left\{\arcsin\frac{y}{b\sin\omega} - \psi\right\} + y\operatorname{cotg}\omega \qquad (4)$$

Diese ist die allgemeine Formel der Lissajous'schen Curven in einem rechtwinkligen Coordinatensysteme. Nennen wir den Winkel, welchen die Tangente in einem Punkte der Curve mit der XAchse macht, τ, so ist:

(5)

$$\operatorname{cotg}\tau = \frac{dx}{dy} = \frac{na}{m}\cos\frac{n}{m}\left(\arcsin\frac{y}{b\sin\omega} - \psi\right)\frac{1}{\sqrt{(b^2\sin^2\omega - y^2)}} + \operatorname{cotg}\omega$$

Wir werden diese Formel gebrauchen, um die Richtung der Tangente für den Coordinatenanfangspunkt, wenn die Curve durch diesen Punkt geht, zu bestimmen. Dann muss, wie wir gefunden haben, $p = 0$ oder $= \frac{1}{2}\lambda$ oder $\frac{1}{2}\lambda'$ sein, also $\psi = 0$ oder $= -\frac{m}{n}\pi$. Diese sind die wichtigsten Phasendifferenzen, die übrigen hierzu geforderten Phasendifferenzen kann man nach den oben gegebenen Formeln finden. In dem Coordinatenanfangspunkt ist $x = 0$ und $y = 0$. Substituiren wir dieses in der Formel (5), so finden wir τ, allein auf diese Weise können wir nicht über das Zeichen der 2ten Seite urteilen, dafür bringen wir die Gleichung in die Form:

$$\operatorname{cotg}\tau - \operatorname{cotg}\omega = \frac{na}{mb}\frac{\cos\frac{n}{m}\left(\arcsin\frac{y}{b\sin\omega} - \psi\right)}{\cos\arcsin\frac{y}{b\sin\omega}}$$

Ist $y = 0$, so kann $\arcsin\frac{y}{b\sin\omega} = 0$ oder $= m\pi$ sein; also für $\psi = 0$ finden wir im ersten Falle

$$\operatorname{cotg}\tau - \operatorname{cotg}\omega = \frac{na}{mb\sin\omega}$$

im zweiten Falle

$$\operatorname{cotg}\tau' - \operatorname{cotg}\omega = \frac{na}{mb\sin\omega}\frac{\cos n\pi}{\cos m\pi}$$

Ist n oder m gerade und das andere ungerade, so wird die letzte Formel

$$\operatorname{cotg}\tau' - \operatorname{cotg}\omega = -\frac{na}{mb\sin\omega}$$

die beiden Tangenten machen einen Winkel.

Sind n und m beide ungerade, so wird diese Formel:

$$\operatorname{cotg}\tau' - \operatorname{cotg}\omega = \frac{na}{mb\sin\omega}$$

die beiden Tangenten fallen zusammen.

Ist $\psi = -\frac{m}{n}\pi$, so ist im ersten Falle

$$\operatorname{cotg}\tau - \operatorname{cotg}\omega = -\frac{na}{mb\sin\omega}$$

im zweiten Falle

$$\operatorname{cotg}\tau' - \operatorname{cotg}\omega = \frac{na}{mb\sin\omega}\,\frac{\cos(n+1)\pi}{\cos m\pi}$$

Ist n gerade und m ungerade oder umgekehrt, so wird die letzte Gleichung

$$\operatorname{cotg}\tau' - \operatorname{cotg}\omega = \frac{na}{mb\sin\omega}$$

Diese Tangenten machen einen Winkel, aber sie fallen mit den zuerst gefundenen zusammen.

Sind n und m beide ungerade, so ist:

$$\operatorname{cotg}\tau' - \operatorname{cotg}\omega = -\frac{na}{mb\sin\omega}$$

die beiden Tangenten fallen wieder zusammen, allein sie machen einen Winkel mit denjenigen, welche wir für $\psi = 0$ fanden.

Bestimmen wir den Winkel Δ, welchen die Tangenten mit einander machen.

$$\operatorname{tg}\Delta = \operatorname{tg}(\tau - \tau') = \frac{\frac{na}{mb\sin\omega} - \operatorname{cotg}\omega + \frac{na}{mb\sin\omega} + \operatorname{cotg}\omega}{\frac{n^2a^2}{m^2b^2\sin^2\omega} - \operatorname{cotg}^2\omega - 1}$$

$$= \sin\omega\,\frac{\frac{2mb}{na}}{1 - \frac{m^2b^2}{n^2a^2}}$$

$$\therefore \quad \operatorname{tg}\Delta = \sin\omega\,\operatorname{tg}\left\{2\arctg\frac{mb}{na}\right\}$$

$2\arctg\frac{mb}{na}$ ist der Winkel, welchen die Tangenten machen, wenn $\omega = 90^0$ ist. Verschiedene Teile der Curve werden einander schneiden; auf folgende Weise können wir diese Doppelpunkte finden.

In einem Doppelpunkte muss $x_1 = a\sin 2n\Theta = a\sin 2n\Theta'$ und $y_1 = b\sin(2m\Theta+\psi) = b\sin(2m\Theta'+\psi)$.

Dem genügen:

$$2n\Theta = 2n\Theta' + 2q\pi \qquad \text{und} \qquad 2m\Theta+\psi = 2m\Theta'+\psi+2q\pi$$
$$2n\Theta = (2p-1)\pi - 2n\Theta' \qquad 2m\Theta+\psi = (2p-1)\pi - 2m\Theta' - \psi$$

oder:

$$\Theta - \Theta' = \frac{q}{n}\pi \ldots . (\alpha) \qquad \Theta - \Theta' = \frac{q}{m}\pi \ldots . (\gamma)$$
$$\Theta + \Theta' = \frac{2p-1}{2n}\pi \ldots (\beta) \qquad \Theta + \Theta' = \frac{2p-1}{2m}\pi - \frac{\psi}{m} (\delta)$$

Aus (α) und (δ) findet man aus (β) und (δ)

$$\left.\begin{aligned}\Theta &= \frac{2p-1}{4m}\pi - \frac{\psi}{2m} + \frac{q}{2n}\pi \\ \Theta' &= \frac{2p-1}{4m}\pi - \frac{\psi}{2m} - \frac{q}{2n}\pi\end{aligned}\right\} \text{I} \qquad \left.\begin{aligned}\Theta &= \frac{2p-1}{4n}\pi + \frac{q}{2m}\pi \\ \Theta' &= \frac{2p-1}{4n}\pi - \frac{q}{2m}\pi\end{aligned}\right\} \text{II}$$

Himstedt[1]) hat die Zahl der Doppelpunkte der Lissajous'schen Curven bestimmt und er fand, dass diese Zahl im allgemeinen $2mn-(m+n)$ ist, aber in dem speciellen Falle, dass die Curve durch die Ecken des Parallelogramms geht, ist die Zahl nur $\frac{1}{2}(m-1)(n-1)$.

Die Formel (5) können wir auch schreiben

$$\operatorname{cotg}\tau - \operatorname{cotg}\omega = \frac{na}{mb\sin\omega}\frac{\cos 2n\Theta}{\cos(2m\Theta+\psi)}$$

Setzen wir in diese Formel die Werte, welche Θ und Θ' in einem Doppelpunkte haben, so finden wir für I:

$$\operatorname{cotg}\tau_d - \operatorname{cotg}\omega = \frac{na}{mb\sin\omega}\frac{\cos\left\{\left(\frac{2p-1}{2}\pi-\psi\right)\frac{n}{m}+q\pi\right\}}{\cos\left\{\frac{2p-1}{2}\pi - \psi + \frac{m}{n}q\pi+\psi\right\}}$$
$$= -\frac{na}{mb\sin\omega}\frac{\cos q\pi\cos\frac{n}{m}\left(\frac{2p-1}{2}\pi-\psi\right)}{\sin\frac{2p-1}{2}\pi\sin\frac{m}{n}q\pi}$$

1) Diss. pag. 19.

$$\operatorname{cotg}\tau_d' - \operatorname{cotg}\omega = \frac{na}{mb\sin\omega}\,\frac{\cos\left\{\frac{n}{m}\left(\frac{2p-1}{2}\pi-\psi\right)-q\pi\right\}}{\cos\left\{\frac{2p-1}{2}\pi-\psi-\frac{m}{n}q+\psi\right\}}$$

$$= \frac{na}{mb\sin\omega}\,\frac{\cos q\pi\cos\frac{n}{m}\left(\frac{2p-1}{2}\pi-\psi\right)}{\sin\frac{2p-1}{2}\pi\sin\frac{m}{n}q\pi}$$

für II:

$$\operatorname{cotg}\tau_d - \operatorname{cotg}\omega = \frac{na}{mb\sin\omega}\,\frac{\cos\left\{\frac{2p-1}{2}\pi+\frac{n}{m}q\pi\right\}}{\cos\left\{\frac{2p-1}{2}\frac{m}{n}\pi+q\pi+\psi\right\}}$$

$$= -\frac{na}{mb\sin\omega}\,\frac{\sin\frac{2p-1}{2}\pi\sin\frac{n}{m}q\pi}{\cos\left(\frac{2p-1}{2}\frac{m}{n}\pi+\psi\right)\cos q\pi}$$

$$\operatorname{cotg}\tau_d' - \operatorname{cotg}\omega = \frac{na}{mb\sin\omega}\,\frac{\cos\left\{\frac{2p-1}{2}\pi-\frac{n}{m}q\pi\right\}}{\cos\left\{\frac{2p-1}{2}\frac{m}{n}\pi-q\pi+\psi\right\}}$$

$$= \frac{na}{mb\sin\omega}\,\frac{\sin\frac{2p-1}{2}\sin\frac{n}{m}q\pi}{\cos\left(\frac{m}{n}\frac{2p-1}{2}\pi+\psi\right)\cos q\pi}$$

Also ist immer

$$\operatorname{cotg}\tau_d + \operatorname{cotg}\tau_d' = 2\operatorname{cotg}\omega \qquad (x)$$

Wenn man in einem Doppelpunkte die beiden Tangenten zieht, so ist die Summe der Cotangenten der Winkel, welche sie mit einer der Achsen machen, gleich zweimal Cotangens des Coordinatenwinkels.

Ist $\omega = 90^0$, so wird diese Formel

$$\operatorname{tg}\tau_d + \operatorname{tg}\tau_d' = 0$$

welche mit der von Himstedt gefundenen Formel übereinstimmt. Weiter folgt hieraus, dass die Linie, welche den Doppelpunkt verbindet mit der Mitte der Achsen-Strecke, die zwischen den beiden Tangenten liegt, der anderen Coordinatenachse parallel ist.

Sei A der Doppelpunkt, in welchem AC und AB die Tangenten seien. Nehmen wir $CD = BD$ und sei Wkl. $ADB = \xi$, so ist, weil Wkl. $CAB = \tau_d' - \tau_d$ ist, in $\triangle$ ADB

$$\tfrac{1}{2}CB : AB = \sin(\tau_d' - \xi) : \sin\xi$$

oder

$$CB : AB = 2(\sin\tau_d' \operatorname{cotg}\xi - \cos\tau_d') : 1$$

In $\triangle ABC$ ist

$$CB : AB = \sin(\tau_d' - \tau_d) : \sin\tau_d$$

$$= \sin\tau_d' \operatorname{cotg}\tau_d \cdot \cos\tau_d' : 1$$

$$\therefore \quad 2\sin\tau_d' \operatorname{cotg}\xi - 2\cos\tau_d' = \sin\tau_d' \operatorname{cotg}\tau_d - \cos\tau_d'$$

$$2\operatorname{cotg}\xi = \operatorname{cotg}\tau_d + \operatorname{cotg}\tau_d'$$

also nach (x)

$$\xi = \omega$$

was zu beweisen war. Auf dieselbe Weise wie vorher für den Winkel, den die beiden Tangenten durch den Coordinatenanfangspunkt gezogen mit einander machen, kann man jetzt im allgemeinen für jeden Doppelpunkt beweisen, dass der Tangens des Winkels, welchen die beiden Tangenten in diesem Punkte an die beiden Teile der Curve gezogen mit einander machen, dem Tangens des Winkels zwischen den Tangenten, wenn das Coordinatensystem rechtwinklig war, mit dem Sinus des Coordinatenwinkels multiplicirt, gleich ist.

Um die Wendepunkte zu bestimmen, müssen wir (5) nochmals differentiiren, so finden wir:

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{na}{m} \times$$

$$\frac{-\frac{n}{m}\sqrt{b^2\sin^2\omega - y^2}\sin\frac{n}{m}\left(\arcsin\frac{y}{b\sin\omega} - \psi\right) + y\cos\frac{n}{m}\left(\arcsin\frac{y}{b\sin\omega} - \psi\right)}{\sqrt{b^2\sin^2\omega - y^2}}$$

Für einen Wendepunkt muss $\frac{d^2x}{dy^2} = 0$ sein, also

$$n\operatorname{tg}\frac{n}{m}\left(\arcsin\frac{y}{b\sin\omega} - \psi\right) = \frac{my}{\sqrt{b^2\sin^2\omega - y^2}} \tag{6}$$

oder

$$n\operatorname{tg}\frac{n}{m}\left(\arcsin\frac{y_1}{b} - \psi\right) = \frac{my_1}{\sqrt{b^2 - y_1^2}}$$

Aendert sich der Wert des ω, so wird der Wendepunkt einen Kreis mit dem Radius y_1 beschreiben. (Fig. 2 und 3.)

Führen wir in Gl. (6) die Θ wieder ein, so wird sie:

$$n\operatorname{tg} 2n\Theta = m\operatorname{tg}(2m\Theta + \psi) \tag{7}$$

Durch Bestimmung von Θ aus dieser Gleichung finden wir die Zeitpunkte, in welchen der Punkt durch einen Wendepunkt geht. Diese Zeiten sind unabhängig von ω.

Dieser Gleichung werden unendlich viele Worte der Θ genügen, unter welchen jedoch nur eine bestimmte Zahl verschiedene vorkommen, die Zahl der verschiedenen reellen Werte der Θ muss man bestimmen, um die Zahl der Wendepunkte zu wissen. Wenn wir die Formel (7) in Potenzen des Sinus der Θ entwickeln und die irrationalen Functionen durch Quadrirung fortschaffen, so bekommen wir eine algebraische Gleichung höherer Ordnung in Bezug auf $\sin\Theta$. Die Zahl reeller Wurzeln zwischen $+1$ und -1 giebt die Zahl der Wendepunkte. Auf diese Weise werden wir es jedoch schwer finden, und durch die Quadrirung führen wir Werte für Θ ein, welche nicht der Formel (7) genügen.

Die Curve hat an jeder Seite der Y_1 Achse n mal ihre grösste Entfernung und an jeder Seite der X_1 Achse m mal. Geht die Curve von einem Punkte, wo sie ihre grösste Entfernung von der Y_1 Achse hat, nach einem solchen Punkte in Bezug auf die X_1 Achse oder umgekehrt, so hat die Curve keinen Wendepunkt; dies ist zwar der Fall, wenn der Teil der Curve zwei Punkte, welche die grösste Entfernung von derselben Achse haben, verbindet. Nun sei n grösser als m, so wird die Curve $2(n-m)$ Teile, welche Punkte mit der grössten Entfernung von der Y_1 Achse verbinden, haben; demzufolge hat die Curve $2(n-m)$ Wendepunkte. Die Formel (7) hat dann auch $2(n-m)$ reelle Wurzeln für $\sin\Theta$. Geht die Curve durch zwei Ecken des Parallelogrammes, so fallen die Wendepunkte, mit Ausnahme derjenigen, welche gerade in den Ecken liegen, je zwei und zwei zusammen, und verschwinden also $\frac{2(n-m)-2}{2}$ Punkte, dann hat die Curve in diesem speciellen Falle nur $n-m+1$ Wendepunkte.

Aus (4) und (5) folgt durch Dividirung:

$$\frac{x-y\cot g\,\omega}{\cot g\,\tau-\cot g\,\omega}=\frac{m}{n}\operatorname{tg}\frac{n}{m}\left(\arcsin\frac{y}{b\sin\omega}-\psi\right)\sqrt{b^2\sin^2\omega-y^2}$$

und wenn wir (6) gebrauchen:

$$\frac{x-y\cot g\,\omega}{\cot g\,\tau-\cot g\,\omega}=\frac{m^2}{n^2}y \quad\text{oder}\quad \frac{x/y-\cot g\,\omega}{\cot g\,\tau-\cot g\,\omega}=\frac{m^2}{n^2}$$

Bringen wir die Curve auf Polarcoordinaten, so ist

$$x=r\cos\varphi \quad\text{und}\quad y=r\sin\varphi$$

und

$$\frac{\operatorname{cotg}\varphi - \operatorname{cotg}\omega}{\operatorname{cotg}\tau - \operatorname{cotg}\omega} = \frac{m^2}{n^2}$$

oder

$$\frac{\sin(\omega-\varphi)}{\sin\varphi} = \frac{m^2}{n^2}\,\frac{\sin(\omega-\tau)}{\sin\tau} \tag{8}$$

Dieso Formel lehrt uns die Beziehung, welche in einem Wendepunkte zwischen dem Winkel, welchen die Tangente mit der X Achse macht, und der Anomalie besteht.

Geht die Curve durch den Coordinatenanfangspunkt, so ist dieser Punkt auch ein Wendepunkt, jedoch dieser Punkt genügt nicht dor Formel (8); dor Grund dafür wird später gegeben.

Wir werden jetzt die Geschwindigkeit und die Beschleunigung in jedem Punkte der Curve bestimmen. In dem schiefwinkligen Coordinatensystomo war

$$x_1 = a\sin 2n\Theta \quad \text{und} \quad y_1 = b\sin(2m\Theta+\psi)$$

wo

$$\Theta = \frac{\pi}{n}\,\frac{t}{T}$$

ist, also

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\pi}{nT}$$

$$v_{x_1} = \frac{dx_1}{d\Theta}\,\frac{d\Theta}{dt} = \frac{2\pi a}{T}\cos 2n\Theta$$

und

$$v_{y_1} = \frac{dy_1}{d\Theta}\,\frac{d\Theta}{dt} = \frac{2m\,b\pi}{nT}\cos(2m\Theta+\psi)$$

die Geschwindigkeit ist

$$V = \sqrt{\{v_{x_1}{}^2 + v_{y_1}{}^2 + 2v_{x_1}v_{y_1}\cos\omega\}}$$

Sei die Richtung der Geschwindigkeit in Bezug anf die X Achse P, so ist:

$$\frac{v_{x_1}}{v_{y_1}} = \frac{\sin(\omega-\gamma)}{\sin\gamma} = \frac{na\cos 2n\Theta}{mb\cos(2m\Theta+\psi)} = \frac{\sin(\omega-\tau)}{\sin\omega}$$

Die Componenten der Beschleunigung sind:

$$p_{x_1} = \frac{dv_{x_1}}{d\Theta}\,\frac{d\Theta}{dt} = -\frac{4\pi^2 a}{T^2}\sin 2n\Theta = -\frac{4\pi^2}{T^2}x_1$$

und

$$p_{y_1} = \frac{dv_{y_1}}{d\Theta}\,\frac{d\Theta}{dt} = -\frac{4\pi^2\,b\,m^2}{n^2\,T^2}\sin(2m\Theta+\psi) = -\frac{4\pi^2}{T^2}y_1$$

und also die Beschleunigung:

$$P = 4\pi^2\sqrt{\left\{\frac{x_1^2}{T^4}+\frac{y_1^2}{T'^4}+2\,\frac{x_1}{T^2}\,\frac{y_1}{T'^2}\cos\omega\right\}}$$

Sei die Richtnng der Beschlennignng znr X Achse δ, so ist:

$$\frac{p_{x_1}}{p_{y_1}} = \frac{\sin(\omega-\delta)}{\sin\delta} = \frac{n^2 a\sin 2n\Theta}{m^2 b\sin(2m\Theta+\psi)} = \frac{n^2 x_1}{m^2 y_1}$$
$$= \frac{n^2}{m^2}\,\frac{\sin(\omega-\varphi)}{\sin\varphi}$$

Diese Formel gibt die Beziehung zwischen der Anomalie nnd der Richtung der Beschlennignng.

Sollen die Richtungen der Geschwindigkeit nnd der Beschlennignng zusammen fallen, also in einem Wendepunkte, so muss sein

$$\frac{na\cos 2n\Theta}{mb\cos(2m\,\Theta+\psi)} = \frac{n^2 a\sin 2n\Theta}{m^2 b\sin(2m\Theta+\psi)}$$

oder

$$m\,\mathrm{tg}\,(2m\Theta+\psi) = n\,\mathrm{tg}\,2n\Theta$$

Diese Formel ist der Formel (7) ähnlich.

Ist die Phasendifferenz so gewählt, dass die Cnrve dnrch den Coordinatenanfangspnnkt geht, so ist in diesem Pnnkte p_{x_1} nnd $p_{y_1} = 0$, folglich ist die Beschleunigung in diesem Punkte anch 0. In allen übrigen Pnnkten ist die Beschleunigung grösser als 0. Die Geschwindigkeit ist in den Ecken des Parallelogramms 0.

In einem Doppelpunkte ist:

$$\frac{\sin(\omega-\delta)}{\sin\delta} = \frac{n^2 x_1}{m^2 y_1} \quad \text{nnd} \quad \frac{\sin(\omega-\delta')}{\sin\delta'} = \frac{n^2 x_1'}{m^2 y_1'}$$

aber

$$x_1 = x_1' \quad \text{nnd} \quad y_1 = y_1' \quad \text{also anch} \quad \delta = \delta'$$

was uns lehrt, dass in einem Doppelpunkte die Beschlennigungen in den beiden Teilen dieselbe Richtnng haben.

Jetzt werden wir den geometrischen Ort der Wendepnnkte aller Curven bestimmen, welche bei bestimmten n und m vorkommon.

Die Curve, welche diesen geometrischen Ort gibt, werdo ich die Cnrve der Wendepnnkte nennen.

Aus (7) folgt durch Snbstitntion der Werte (2)

$$my_1\sqrt{a^2-x_1^2} = n\,x_1\sqrt{b^2-y_1^2}$$

oder

$$(n^2-m^2)x_1^2y_1^2 = n^2x_1^2b^2 - m^2y_1^2a^2 \qquad (9)$$

Diese Formel enthält nicht die ψ, also ist diese Gleichnng jene

der gesuchten Curve in dem schiefwinkligen Coordinatensysteme. Die Curve ist vom 4ten Grade und symmetrisch zu den Achsen. Sie geht durch den Coordinatenanfangspunkt und durch die Ecken des Parallelogrammes. Fig. 2 und 3.

Bringen wir die Curve auf Polarcoordinaten, so ist

$$x_1 = \frac{r\sin(\omega-\varphi')}{\sin\omega} \quad \text{und} \quad y_1 = \frac{r\sin\varphi'}{\sin\omega}$$

$$r^2 = \frac{\sin^2\omega}{n^2-m^2}\{n^2b^2\operatorname{cosec}^2\varphi' - m^2a^2\operatorname{cosec}^2(\omega-\varphi')\}$$

Soll r reell sein, so muss sein:

$$n^2b^2\operatorname{cosec}^2\varphi' > m^2a^2\operatorname{cosec}^2(\omega-\varphi')$$

oder

$$nb\sin(\omega-\varphi') > ma\sin\varphi'$$

$$\therefore \operatorname{tg}\varphi' < \frac{nb\sin\omega}{nb\cos\omega+ma}$$

Die Anomalie ist bei dieser Curve unstetig.

Für

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{nb\sin\omega}{nb\cos\omega+ma}$$

ist $r = 0$, also geht die Curve durch den Coordinatenanfangspunkt.

Sei der Winkel, welchen eine Tangente dieser Curve mit der X Achse macht, τ_1, so ist

$$\operatorname{tg}\tau_1 = \frac{\frac{dr}{d\varphi'}\operatorname{tg}\varphi'+r}{\frac{dr}{d\varphi'}-r\operatorname{tg}\varphi'} = \frac{r\frac{dr}{d\varphi'}\operatorname{tg}\varphi'+r^2}{r\frac{dr}{d\varphi'}-r^2\operatorname{tg}\varphi'}$$

$$r\frac{dr}{d\varphi'} = -\frac{\sin^2\omega}{n^2-m^2}\{n^2b^2\cos\varphi'\operatorname{cosec}^3\varphi'+m^2a^2\cos(\omega-\varphi')\operatorname{cosec}^3(\omega-\varphi')\}$$

Durch Substitution dieses Wertes und des Wertes von r^2 in die Formel für $\operatorname{tg}\tau_1$ findet man

$$\operatorname{tg}\tau_1 = \frac{m^2a^2\sin^2\varphi\ \{\operatorname{cotg}(\omega-\varphi')\operatorname{tg}\varphi'+1\}}{n^2b^2\sin^2(\omega-\varphi')\{\operatorname{cotg}\varphi'+\operatorname{tg}\varphi'\}+m^2a^2\sin^2\varphi'\{\operatorname{cotg}(\omega-\varphi')-\operatorname{tg}\varphi'\}}$$

$$\therefore \operatorname{cotg}\tau_1 - \operatorname{cotg}\omega = \frac{n^2b^2}{m^2a^2}\frac{\sin^3(\omega-\varphi')}{\sin^3\varphi'\sin\omega} \qquad (10)$$

Nach (8) ist

$$\frac{\sin(\omega-\varphi)}{\sin\varphi}=\frac{m^2}{n^2}\,\frac{\sin(\omega-\tau)}{\sin\tau}$$

also weil in einem Wendepunkte $\varphi=\varphi'$ ist

$$\frac{\sin(\omega-\tau_1)}{\sin\tau_1}=\frac{m^4\,b^2}{n^4\,a^2}\,\frac{\sin^2(\omega-\tau)}{\sin^2\tau} \tag{11}$$

Diese Formel gibt uns die Beziehung zwischen den Winkeln, welche die Tangenten in einem Wendepunkte an die Curve und an die Curve der Wendepunkte gezogen, machen.

Formel (8) gilt nicht im Coordinatenanfangspunkt; hier ist

$$\operatorname{cotg}\varphi=\frac{x}{y}=\frac{x_1+y_1\cos\omega}{y_1\sin\omega}=\frac{x_1}{y_1\sin\omega}+\operatorname{cotg}\omega$$

$$\operatorname{cotg}\varphi-\operatorname{cotg}\omega=\frac{x_1}{y_1\sin\omega}=\frac{a\sin 2n\Theta}{b\sin\omega\,\sin 2m\Theta}$$

Für $\Theta=0$ wird die rechte Seite $=\frac{0}{0}$, durch Differentiation findet man

$$\frac{2n\,a\cos 2n\Theta}{2m\,b\sin\omega\cos 2m\Theta}$$

also für $\Theta=0$ ist

$$\frac{\sin(\omega-\varphi)}{\sin\varphi}=\frac{na}{mb}$$

Nach (5) ist für $\Theta=0$

$$\frac{\sin(\omega-\tau)}{\sin\tau}=\frac{n\,a}{mb}$$

$\therefore$ im Coordinatenanfangspunkt ist $\varphi=\tau$.

Bei der Curve der Wendepunkte haben wir für $r=0$ gefunden

$$\frac{\sin(\omega-\varphi')}{\sin\varphi'}=\frac{m\,a}{n\,b}$$

und nach (10) ist

$$\frac{\sin(\omega-\tau_1)}{\sin\tau_1}=\frac{ma}{nb}$$

also

$$\tau_1=\varphi'$$

Weiter folgt aus diesen Formeln

$$\frac{\sin(\omega-\tau_1)}{\sin\tau_1} = \frac{m^4 b^2}{n^4 a^2}\,\frac{\sin^2(\omega-\tau)}{\sin^2\tau}$$

Formel (11) gilt also in der Tat im Coordinatenanfangspunkt.

Für $x_1 = a$ und $y_1 = b$ oder $y = b\sin\omega$ ist

$$a : b = \sin(\omega-\varphi') : \sin\varphi'$$

also

$$\frac{\sin(\omega-\tau_1)}{\sin\tau_1} = \frac{n^2 b^2}{m^2 a^2}\,\frac{a^3}{b^3} = \frac{n^2 a}{m^2 b}$$

Aus (5) folgt

$$\operatorname{cotg}\tau - \operatorname{cotg}\omega = {}^0/_0$$

Die Differentiation der rechten Seite gibt:

$$\frac{\dfrac{n}{m b\sin\omega}\sin\dfrac{n}{m}\left(bg\sin\dfrac{y}{b\sin\omega}-\psi\right)\dfrac{1}{\sqrt{b^2\sin^2\omega-y^2}}}{\dfrac{y}{\sqrt{b^2\sin^2\omega-y^2}}}$$

und dieses wird für $y = b\sin\omega$ gleich $\dfrac{n}{m b\sin\omega}$

also

$$\frac{\sin(\tau-\omega)}{\sin\tau} = \frac{n^2 a}{m^2 b}$$

folglich haben wir in der Ecke des Parallelogramms $\tau = \tau_1$: dass die Formel in der rechten Seite ${}^0/_0$ wird, ist nur möglich, wenn die Werte $x_1 = \pm a$ und $y_1 = \pm b$ der Formel (3) genügen.

Die Formel (9) gibt nur den Ort eines Wendepunktes, wenn $a > x_1 > -a$ und $b > y_1 > -b$ ist. Die Curve dehnt sich jedoch weiter aus. Sie wird eine Asymptote haben, wenn x_1 bei einem bestimmten Werte der y_1 oder umgekehrt, unendlich gross ist.

Sei n, wie wir angenommen haben, grösser als m.

Aus (9) folgt

$$x_1 = \frac{m y_1 a}{\sqrt{\{b^2 n^2 - (n^2-m^2)y_1^2\}}} = \frac{m y a}{\sqrt{\{b^2 n^2\sin^2\omega - (n^2-m^2)y^2\}}}$$

also ist $x_1 = \infty$ für

$$y = \pm\frac{bn}{\sqrt{n^2-m^2}}\sin\omega$$

Für eine Asymptote muss r unendlich gross werden bei einem bestimmten Werte von φ', dieses wird der Fall bei $\varphi' = 0$ (denn bei $\varphi' = \omega$ wird r imaginär), also ist:

$$\operatorname{cotg}\tau_1 - \operatorname{cotg}\omega = \infty \quad \text{und also} \quad \tau_1 = 0$$

Die Asymptoten sind der X Achse parallel und die Gleichung der Asymptoten wird also sein

$$y = \pm \frac{bn}{\sqrt{n^2 - m^2}} \sin\omega$$

In Fig. (3) sind die Linien OO' und PP' die Asymptoten; hier ist $n = 5$ und $m = 3$, also $y = \pm {}^5/_4\, b \sin\omega$.

Um den Krümmungsradius jedes Punktes der Curve zu finden, haben wir die Formel

$$\varrho = \frac{\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}^{3/2}}{\frac{dy}{\partial t}\,\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt}\,\frac{d^2y}{dt^2}} = \frac{\left\{\left(\frac{dx}{d\Theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\Theta}\right)^2\right\}^{3/2}}{\frac{dy}{d\Theta}\,\frac{d^2x}{d\Theta^2} - \frac{dx}{d\Theta}\,\frac{d^2y}{d\Theta^2}}$$

Nun ist:

$$y = b\sin\omega\sin(2m\Theta + \psi) \quad \text{und} \quad x = a\sin 2n\Theta + b\cos\omega\sin(2m\Theta + \psi)$$

$$\frac{dy}{d\Theta} = 2mb\sin\omega\cos(2n\Theta + \psi) = 2m\sqrt{b^2\sin^2\omega - y^2} = 2m\sin\omega\sqrt{b^2 - y^2}$$

$$\frac{d^2y}{d\Theta^2} = -4m^2 b\sin\omega\sin(2m\Theta + \psi) = -4m^2 y = -4m^2 y_1 \sin\omega$$

$$\frac{dx}{d\Theta} = 2na\cos 2n\Theta + 2mb\cos\omega\cos(2m\Theta + \psi)$$

$$= 2n\sqrt{a^2 - (x - y\operatorname{cotg}\omega)^2} + 2m\operatorname{cotg}\omega\sqrt{b^2\sin^2\omega - y^2}$$
$$= 2n\sqrt{a^2 - x_1^2} + 2m\cos\omega\sqrt{b^2 - y_1^2}$$

$$\frac{d^2x}{d\Theta^2} = -4n^2 a\sin 2n\Theta - 4mb\cos\omega\sin(2m\Theta + \psi)$$

$$= -4n^2(x - y\operatorname{cotg}\omega) - 4m^2 y\operatorname{cotg}\omega$$
$$= -4n^2 x_1 - 4m^2 y_1\operatorname{cotg}\omega$$

weil

$$x - y\operatorname{cotg}\omega = x_1$$

und

$$y_1\sin\omega = y$$

$$\therefore \varrho = \frac{1}{mn \sin \omega} \frac{\{n^2(a^2-x_1^2)+2mn\cos\omega\sqrt{(a^2-x_1^2)(b^2-y_1^2)}+m^2(b^2-y_1^2)\}^{3/2}}{my_1\sqrt{a^2-x_1^2}-nx_1\sqrt{b^2-y_1^2}}$$

Für $\omega = 90^0$ geht diese Formel über in

$$\varrho = \frac{1}{mn} \frac{\{n^2(a^2-x_1^2)+m^2(b^2-y_1^2)\}^{3/2}}{my_1\sqrt{a^2-x_1^2}-nx_1\sqrt{b^2-y_1^2}}$$

Für $\omega = 0$ sind alle Krümmungsradien unendlich gross. In den Wendepunkten muss ϱ unendlich gross sein; dieses ist auch der Fall, denn nach (5) ist dann

$$my_1\sqrt{a^2-x_1^2} = nx_1\sqrt{b^2-y_1^2}$$

Für Punkte in den Seiten des Parallelogramms ist $x_1 = \pm a$, also

$$\varrho = \frac{1}{mn\sin\omega} \frac{\{m^2(b^2-y_1^2)\}^{3/2}}{na\sqrt{b^2-y_1^2}} = \frac{m^2}{n^2\sin\omega} \frac{b^2-y_1^2}{a}$$

und für

$$y_1 = \pm b \quad \text{ist} \quad \varrho = \frac{n^2}{m^2\sin\omega} \frac{a^2-x_1^2}{b}$$

Wir haben gefunden: dass in einem Wendepunkte

$$\frac{n\sin 2n\Theta}{m\sin(2m\Theta+\psi)} = \frac{\cos 2n\Theta}{\cos(2m\Theta+\psi)}$$

ist, unabhängig vom Werte des ω.

Sehen wir was dieses bedeutet, wenn $\omega = 0$ ist. Der Punkt bewegt sich dann längs einer geraden Linie, und es kann dann nicht von einem Wendepunkte die Rede sein. Das Verhältniss der Geschwindigkeiten jeder der beiden Bewegungen ist in jedem Punkte:

$$\frac{v_{x_1}}{v_{y_1}} = \frac{na\cos 2n\Theta}{mb\cos(2m\Theta+\psi)}$$

und das Verhältniss der Beschleunigungen:

$$\frac{p_{x_1}}{p_{y_1}} = \frac{n^2a\sin 2n\Theta}{m^2b\sin(2m\Theta+\psi)}$$

Stellen wir in die erste Formel den Wert, den Θ haben muss für einen Punkt, der übereinstimmen wird mit einem Wendepunkte, so ist:

$$\frac{v_{x_1}}{v_{y_1}} = \frac{n^2a\sin 2n\Theta}{m^2b\sin(2m\Theta+\psi)} = \frac{p_{x_1}}{p_{y_1}}$$

Der Wendepunkt wird im Falle, dass $\omega = 0$ ist, ein Punkt, wo das Verhältniss der Geschwindigkeiten dem Verhältnisse der Be-

schleunigungen der beiden Bewegungen gleich ist. Wir werden auch im allgemeinen $2(n-m)$ solche Punkte finden. In Fig. 2 sind diese Punkte durch B_0 angegeben; die oscillirende Bewegung findet längs der X Achse statt.

Die Curve der Wendepunkte schneidet die Curve in mehreren Punkten und zwar in $4n$ Punkten, denn $2n$ Teile der Curve liegen zwischen den Seiten des Parallelogrammes, welche der Y_1 Achse parallel sind, und jeder Teil schneidet die Curve in 2 Punkten. $2(n+m)$ von diesen Punkten sind Wendepunkte, da bleiben also noch $2(n-m)$ Schnittpunkte übrig, und im speciellen Falle, dass die Curve durch zwei Ecken des Parallellogrammes geht, gibt es nur $n+m-1$ Schnittpunkte. Dass wir diese Punkte auch finden, hat seinen Grund darin, dass wir die Formel

$$my_1\sqrt{a^2-x_1^2} = nx_1\sqrt{b^2-y_1^2}$$

quadrirt haben. Zieht man aus der Formel (9) die Wurzel, so bekommt man nach Einführung der Θ:

$$m\,\mathrm{tg}\,(2m\Theta+\psi) = \pm\, n\,\mathrm{tg}\,2n\Theta$$

das positive Zeichen giebt die Wendepunkte, das negative die übrigen Schnittpunkte.

Für $\psi = 0$ genügt $\Theta = 0$ in beiden Beziehungen; die Curve geht dann durch den Coordinatenanfangspunkt, folglich genügt dieser Punkt der Bedingung eines Wendepunktes und der eines Schnittpunktes.

Wir finden für das negative Zeichen:

$$\frac{\cos m\Theta}{\cos(2m\Theta+\psi)} = -\frac{n\sin 2n\Theta}{m\sin(2m\Theta+\psi)}$$

Nach Multiplicirung mit $\frac{na}{mb}$, finden wir durch Substitution:

$$\frac{v_{x_1}}{v_{y_1}} = -\frac{p_{x_1}}{p_{y_1}}$$

In den Schnittpunkten sind also auch, wenn man das Zeichen nicht achtet, das Verhältniss der Geschwindigkeiten und das der Beschleunigungen einander gleich, jedoch hat eine dieser 4 Grössen das entgegengesetzte Zeichen der 3 anderen.

Nun ist

$$\frac{v_{x_1}}{v_{y_1}} = \frac{\sin(\omega-\gamma)}{\sin\gamma} \quad \text{und} \quad \frac{p_{x_1}}{p_{y_1}} = \frac{\sin(\omega-\delta)}{\sin\delta}$$

also

$$\frac{\sin(\omega-\gamma)}{\sin\gamma} = -\frac{\sin(\omega-\delta)}{\sin\delta}$$

dies giebt

$$\operatorname{cotg}\gamma + \operatorname{cotg}\delta = 2\operatorname{cotg}\omega$$

Diese Formel lehrt uns die Beziehung, welche in einem Schnittpunkte der beiden Curven, der kein Wendepunkt ist, zwischen den Richtungen der Geschwindigkeit und der Beschleunigung bestehen muss.

Für $\omega = 90^0$ wird

$$\gamma = 180^0 - \delta$$

Die Lissajous'schen Curven und die goniometrischen Functionen vielfacher Bogen.

Wir haben gefunden, dass die Coordinaten eines Punktes einer Lissajous'schen Curve sind:

$$x = a\sin 2n\Theta \quad \text{und} \quad y = b\sin(2m\Theta + \psi)$$

Setzen wir $2\Theta = \eta$, so wird

$$x = a\sin n\eta \quad \text{und} \quad y = b\sin(m\eta + \psi)$$

Aus diesen Gleichungen muss η eliminirt werden, um die Gleichung der Curve zu finden.

m und n sind ganze Zahlen, welche keinen gemeinschaftlichen Factor haben, so dass wir also folgende Fälle unterscheiden können:

I	n gerade	m ungerade
II	n ungerade	m ungerade
III	n ungerade	m gerade

Sei die Phasendifferenz gleich 0, so ist

$$x = a\sin n\eta \quad \text{und} \quad y = b\sin m\eta$$

Nun ist

$$\sin m(n\eta) = \sin n(m\eta) \qquad (1)$$

Ist es möglich $\sin m(n\eta)$ in eine Reihe von Potenzen von $\sin n\eta$ und $\sin n(m\eta)$ in eine Reihe von Potenzen von $\sin m\eta$ zu entwickeln, so haben wir die gewünschte Gleichung der Curve gefunden. Nun ist jedoch die Entwickelung des Sinus eines vielfachen Bogens in Potenzen des Sinus des einfachen Bogens nur möglich, wenn das Vielfach ungerade ist.[1])

1) Schlömilch. Alg. Analysis pag. 189.

Nur im IIten Falle wird die Entwickelung möglich sein, und wir bekommen:

$$\sum_{1}^{\frac{m+1}{2}} (-1)^{p-1} \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)\ldots\{m^2-(2p-3)^2\}}{1 \quad 2 \quad 3 \quad \ldots \quad 2p-1} \sin^{2p-1} n\eta$$

$$= \sum_{1}^{\frac{n+1}{2}} (-1)^{q-1} \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)\ldots\{n^2-(2q-3)^2\}}{1 \quad 2 \quad 3 \quad \ldots \quad 2q-1} \sin^{2q-1} m\eta$$

$$\sum_{1}^{\frac{m+1}{2}} (-1)^{p-1} \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)\ldots\{m^2-(2p-3)^2\}}{1 \quad 2 \quad 3 \quad \ldots \quad 2p-1} \frac{x^{2p-1}}{a^{2p-1}}$$

$$= \sum_{1}^{\frac{n+1}{2}} (-1)^{q-1} \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)\ldots\{n^2-(2q-3)^2\}}{1 \quad 2 \quad 3 \quad \ldots \quad 2q-1} \frac{y^{2q-1}}{b^{2q-1}} \qquad (2)$$

Die Curve ist für x vom $m$ten Grade und für y vom $n$ten Grade.

In den beiden andern Fällen ist eine der Seiten der Formel (1) unentwickelbar. Erhebt man die Formel (1) in's Quadrat, so bekommen wir:

$$\sin^2 m(n\eta) = \sin^2 n(m\eta)$$

Wir müssen nun untersuchen, welche die Reihe sei, welche wir bekommen, so wir die 2te Potenz eines Sinus eines vielfachen Bogens entwickeln in eine Reihe von Potenzen des Sinus des einfachen Bogens.

$$\sin n\xi = n \sin\xi \cos^{n-1}\xi - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \quad 2 \quad 3} \sin^3\xi \cos^{n-3}\xi$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5} \sin^5\xi \cos^{n-5}\xi$$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7} \sin^7\xi \cos^{n-7}\xi \text{ etc.}$$

also

$$\sin^2 n\xi = n^2 \sin^2\xi \cos^{2n-2}\xi - \frac{n^2(n-1)(n-2)}{1 \cdot 3} \sin^4\xi \cos^{2n-4}\xi$$

$$+ \frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2}{1 \quad 2^2 \quad 3^2} \sin^6\xi \cos^{2n-6}\xi$$

$$- \frac{n^2(n-1)(n-2)(n-3)n-4)n-5)(n-6)}{1 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7} \sin^8\xi \cos^{2n-8}\xi \ldots$$

$$+\frac{n^2(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\quad 3\quad 4\quad 5}\sin^6\xi\cos^{2n-6}\xi$$
$$-\frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2(n-3)(n-4)}{1\quad 2\quad 3^2\quad 4\quad 5}\sin^8\xi\cos^{2n-8}\xi\ \ldots$$

Setzen wir $1-\sin^2\xi$ für $\cos^2\xi$, so können wir die Potenzen nach dem Binomium Newton's entwickeln, und weil in der Formel nur ganze positive Potenzen vorkommen, werden wir endliche Reihen finden.

$$\sin^2 n\xi = n^2\sin^2\xi - \frac{n^2(n^2-1^2)}{1\,.\,3}\sin^4\xi + 2\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{1\quad 3^2\quad 5}\sin^6\xi$$
$$-\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n^2-3^2)}{1\quad 3^2\quad 5\quad 7}\sin^8\xi\ \ldots$$

$$\sin^2 n\xi = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{2}{1}n^2\sin^2\xi - \frac{4\,.\,3}{1\,.\,2}\frac{n^2(n^2-1^2)}{1\quad 3^2}\sin^4\xi\right.$$
$$+\frac{6\,.\,5\,.\,4}{1\,.\,2\,.\,3}\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{1\quad 3^2\quad 5^2}\sin^6\xi$$
$$\left.-\frac{8\,.\,7\,.\,6\,.\,5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n^2-3^2)}{1\quad 3^2\quad 5^2\quad 7^2}\sin^8\xi\ \ldots\right.$$

(3)

$$\therefore\ \sin^2 n\xi = \tfrac{1}{2}\sum_1^n(-1)^{p-1}C_p^{2p}\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots\{n^2-(p-1)^2\}}{1\quad 3^2\quad 5^2\quad \ldots\ (2p-1)^2}\sin^{2p}\xi$$

Sei $$\xi = \frac{\pi}{2} - u$$

$$\sin^2 n\left(\frac{\pi}{2}-u\right)$$
$$=\tfrac{1}{2}\sum_1^n(-1)^{p-1}C_p^{2p}\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots\{n^2-(p-1)^2\}}{1\quad 3^2\quad 5^2\quad \ldots\ (2p-1)^2}\sin^{2p}\left(\frac{\pi}{2}-u\right)$$

Ist n gerade, so ist:

$$\sin^2 nu = \tfrac{1}{2}\sum_1^n(-1)^{p-1}C_p^{2p}\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots\{n^2-(p-1)^2\}}{1\quad 3^2\quad 5^2\quad \ldots\quad (2p-1)^2}\cos^{2p}u$$

Für n ungerade ist

$$\cos^2 nu = \tfrac{1}{2}\sum_1^n(-1)^{p-1}C_p^{2p}\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots\{n^2-(p-1)^2\}}{1\quad 3^2\quad 5^2\quad \ldots\quad (2p-1)^2}\cos^{2p}u$$

oder

$$\sin^2 nu = 1-\tfrac{1}{2}\sum_1^n(-1)^{p-1}C_p^{2p}\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots\{n^2-(p-1)^2\}}{1\quad 3^2\quad 5^2\quad \ldots\quad (2p-1)^2}\cos^{2p}u$$

Wenden wir (3) auf die Gleichung

$$\sin^2 m(n\eta) = \sin^2 n(m\eta)$$

an, so bekommen wir:

$$\tfrac{1}{2}\sum_1^m (-)^{p-1} C_p^{2p} \frac{m^2(m^2-1^2)(m^2-2^2)\ldots\{m^2-(p-1)^2\}}{1 \quad 3^2 \quad 5^2 \quad \ldots \quad (2p-1)^2} \sin^{2p} n\eta$$

$$= \tfrac{1}{2}\sum_1^n (-1)^{q-1} C_q^{2q} \frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots\{n^2-(q-1)^2\}}{1 \quad 3^2 \quad 5^2 \quad \ldots \quad (2q-1)^2} \sin^{2q} m\eta$$

oder

$$\sum_1^m (-1)^{p-1} C_p^{2p} \frac{m^2(m^2-1^2)(m^2-2^2)\ldots\{m^2-(p-1)^2\}}{1 \quad 3^2 \quad 5^2 \quad \ldots \quad (2p-1)^2} \frac{x^{2p}}{a^{2p}}$$

$$= \sum_1^n (-1)^{q-1} C_q^{2q} \frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots\{n^2-(q-1)^2\}}{1 \quad 3^2 \quad 5^2 \quad \ldots \quad (2q-1)^2} \frac{y^{2q}}{b^{2q}} \qquad (6)$$

Die Curve ist also für x vom $2m$ten Grade und für y vom $2n$ten Grade. In der Formel kommen nur gerade Potenzen der y und der x vor, deswegen wird die Curve symmetrisch in Bezug auf beide Achsen sein.

Wir werden jetzt die speciellen Fälle untersuchen, dass $\psi = 90^0$, 180^0 oder 270^0 ist, was übereinstimmt mit einer Phasendifferenz gleich $\frac{1}{4}\lambda'$; $\frac{1}{2}\lambda'$ und $\frac{3}{4}\lambda'$.

Ist $\psi = 90^0$, so werden die Gleichungen, welche die Stelle des Punktes geben:

$$x = a\sin n\eta \quad \text{und} \quad y = b\sin(m\eta + \tfrac{1}{2}\pi) = b\cos m\eta$$

Gebrauchen wir das Axiom

$$\cos m(n\eta) = \cos n(m\eta)$$

Der Cosinus des vielfachen Bogens kann nur in einer Reihe von Potenzen des Sinus des einfachen Bogens entwickelt werden, wenn das Vielfach gerade ist.[1]) Er kann immer in einer Reihe von Potenzen des Cosinus des einfachen Bogens entwickelt werden.[2]) Die Gleichung der Curve wird im IIIten Falle, das ist wenn n ungerade und m gerade ist:

$$1 + \sum_1^{\frac{1}{2}m} (-1)^p \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)\ldots\{m^2-(2p-2)^2\}}{1 \quad 2 \quad 3 \quad \ldots \quad 2p} \sin^{2p} n\eta$$

---

1) Schlömilch. Alg. Analysis pag. 188.

2) „ „ „ „ 192.

$$= \tfrac{1}{2}\left\{(2\cos m\eta)^n - \frac{n}{1}(2\cos m\eta)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1\ 2}(2\cos m\eta)^{n-4}\right.$$

$$\left. - \frac{m(n-4)(n-5)}{1\ 2\ 3}(2\cos m\eta)^{n-6} \quad \text{u. s. w.}\right\}$$

oder

$$1 + \sum_1^{\frac{1}{2}m}(-1)^p \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)\ldots\{m^2-(2p-2)^2\}}{1\ 2\ 3\ \ldots\ 2p}\frac{x^{2p}}{a^{2p}}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left\{\frac{2^n y^n}{b^n} - \frac{n}{1}\frac{2^{n-2}y^{n-2}}{b^{n-2}} + \frac{n(n-3)}{1\ 2}\frac{2^{n-4}y^{n-4}}{b^{n-4}}\right.$$

$$\left. - \frac{n(n-4)(n-5)}{1\ 2\ 3}\frac{2^{n-6}y^{n-6}}{b^{n-6}}\cdots \quad \text{u. s. w.}\right\} \qquad (7)$$

Die Curve ist für x vom $m$ten Grade, für y vom $n$ten Grade. n dieser Formel kommen nur gerade Potenzen der x vor, also ist dio Curve symmetrisch znr Y Achse.

Im IIten Falle sind m nnd n nngerade, also ist $\cos n(m\eta)$ unentwickelhar in eine Reihe von Potenzen von $\sin n\eta$, wir müssen wieder gehranchen dio Formel:

$$\sin^2 m(n\eta) = \sin^2 n(m\eta)$$

Werdon diese Fnnctionen entwickelt nach den Formeln (3) nnd (5), so finden wir:

$$\tfrac{1}{2}\sum_1^m(-1)^{p-1}C_p^{2p}\frac{m^2(m^2-1^2)(m^2-2^2)\ldots\{m^2-(p-1)^2\}}{1\ 3^2\ 5^2\ \ldots\ (2p-1)^2}\sin^{2p}n\eta$$

$$= 1 - \tfrac{1}{2}\sum_1^n(-1)^{q-1}C_q^{2q}\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots\{n^2-(q-1)^2\}}{1\ 3^2\ 5^2\ \ldots\ (2q-1)^2}\cos^{2q}m\eta$$

oder

$$\tfrac{1}{2}\sum_1^m(-1)^{p-1}C_p^{2p}\frac{m^2(m^2-1^2)(m^2-2^2)\ldots\{m^2-(p-1)^2\}}{1\ 3^2\ 5^2\ \ldots\ (2p-1)^2}\frac{x^{2p}}{a^{2p}}$$

$$= 1 - \tfrac{1}{2}\sum_1^n(-1)^{q-1}C_q^{2q}\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots\{n^2-(q-1)^2\}}{1\ 3^2\ 5^2\ \ldots\ (2q-1)^2}\frac{y^{2q}}{b^{2q}}$$

Diese Curvo ist symmetrisch in Bezug anf beide Achsen nnd sie ist für x vom $2m$ten nnd für y vom $2n$ten Grade. Sie geht nicht durch den Coordinatenanfangspnnkt.

Ist nnn im Iten Falle n gerade nnd m nngerade, so finden wir bei der Entwickelung:

$$\tfrac{1}{2}\sum_{1}^{m}(-1)^{p-1}C_p^{2p}\frac{m^2(m^2-1^2)(m^2-2^2)\dots\{m^2-(p-1)^2\}}{1\quad 3^2\quad 5^2\quad\dots\quad(2p-1)^2}\sin^{2p}n\eta$$
$$=\tfrac{1}{2}\sum_{1}^{n}(-1)^{q-1}C_q^{2q}\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\dots\{n^2-(q-1)^2\}}{1\quad 3^2\quad 5^2\quad\dots\quad(2q-1)^2}\cos^{2q}m\eta$$

oder

$$\sum_{1}^{m}(-1)^{p-1}C_p^{2p}\frac{m^2(m^2-1^2)(m^2-2^2)\dots\{m^2-(p-1)^2\}}{1\quad 3^2\quad 5^2\quad\dots\quad(2p-1)^2}\frac{x^{2p}}{a^{2p}}$$
$$=\sum_{1}^{n}(-1)^{q-1}C_q^{2q}\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\dots\{n^2-(q-1)^2\}}{1\quad 3^2\quad 5^2\quad\dots\quad(2q-1)^2}\frac{y^{2q}}{b^{2q}}$$

Diese Gleichung ist der Formel (6) gleich; die Curve wird in diesem Falle dieselbe sein, als wenn die Phasendifferenz gleich 0 wäre.

Ist $\psi = 180^0$, so wird

$$x = a\sin n\eta \quad \text{und} \quad y = b\sin(m\eta + \pi) = -b\sin m\eta$$

Im ersten und dritten Falle finden wir dieselben Gleichungen für die Curven, als wenn die Phasendifferenz 0 wäre; im zweiten Falle wird die Gleichung (2)

$$\sum_{1}^{\frac{m+1}{2}}(-1)^{p-1}\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)\dots\{m^2-(2p-3)^2\}}{1\quad 2\quad 3\quad\dots\quad 2p-1}\frac{x^{2p-1}}{a^{2p-1}}$$
$$=\sum_{1}^{\frac{n+1}{2}}(-1)^{q-1}\frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)\dots\{n^2-(2q-3)^2\}}{1\quad 2\quad 3\quad\dots\quad 2q-1}\frac{(-y)^{2q-1}}{b^{2q-1}}$$

Die Potenzen, welche in der rechten Seite vorkommen, sind ungerade, also haben diese Glieder das entgegengestellte Zeichen wie in der Formel (2). Hieraus folgt, dass die Curven, welche bei denselben n und m entstehen, bei einer Phasendifferenz gleich 0 oder gleich $\frac{1}{2}\lambda'$ Spiegelbilder von einander sind.

Zum Schlusse sei die Phasendifferenz $\frac{3}{4}\lambda'$, so finden wir im ersten und zweiten Falle dieselben Curven, als wenn die Phasendifferenz $\frac{1}{4}\lambda'$ wäre. Im dritten Falle finden wir jedoch, weil

$$x = a\sin n\eta \quad \text{und} \quad y = b\sin(m\eta + {}^3/_2\pi) = -b\sin m\eta.$$

ist

$$1+\sum_{1}^{\frac{1}{2}m}(-1)^p\frac{m^2(m^2-1^2)(m^2-2^2)\dots\{m^2-(2p-2)^2\}}{1\quad 2\quad 3\quad\dots\quad 2p}\frac{x^{2p}}{a^{2p}}$$
$$=\tfrac{1}{2}\left\{\frac{2^n(-y)^n}{b^n}-\frac{n}{1}\frac{2^{n-2}(-y)^{n-2}}{b^{n-2}}+\frac{n(n-3)}{1\quad 2}\frac{2^{n-4}(-y)^{n-4}}{b^{n-4}}\right.$$
$$\left.-\frac{n(n-4)(n-5)}{1\quad 2\quad 3}\frac{2^{n-6}(-y)^{n-6}}{b^{n-6}}\dots\text{ u. s. w.}\right\}$$

Da n ungerade ist, so sind alle Potenzen, welche in der rechten Seite vorkommen, ungerade, also haben diese Glieder das entgegengesetzte Zeichen derselben Glieder in der Formel (7), also sind die Curven, welche im 3ten Falle entstehen, bei der Phasendifferenz $\frac{3}{4}\lambda'$ wie bei $\frac{1}{4}\lambda'$.

Im ersten Falle bekommen wir also bei jeder der genannten Phasendifferenz dieselben Curven.

Wir könnten jetzt noch untersuchen die Fälle, dass die Phasendifferenzen $\frac{1}{4}\lambda$, $\frac{1}{2}\lambda$ und $\frac{3}{4}\lambda$ waren, aber wir würden dasselbe finden, als wenn wir n und m mit einander wechselten. Fig. 4 zeigt die Richtigkeit des Abgeleiteten. Diese Betrachtungen gelten eben so gut für ein schiefwinkliges, wie für ein rechtwinkliges Coordinatensystem.

Schiedam, Juli 1886.

III.

Erweiterung zweier Sätze auf n Dimensionen.

Von

R. Hoppe.

§. 1. Bermann'scher Satz.

In Schlömilch's Zeitschrift f. Math. u. Phys. Bd. XXXI. S. 381 enthält ein Aufsatz überschrieben: „Ein Minimumproblem" Von O. Bermann — einen Satz über die Berührungsebene einer Fläche der nebst seinem Beweise nichts von seiner Einfachheit verliert, wenn man ihn sogleich auf beliebig viele Dimensionen erweitert. Er lautet alsdann:

„Das $n$dehnige $(n+1)$eck begrenzt von n $(n-1)$dehnigen n-ecken, deren eins eine feste krumme $(n-1)$dehnung berührt, während die übrigen in festen linearen $(n-1)$dehnungen liegen, ist bei variirendem Berührungspunkt ein Minimum, nur wenn der Berührungspunkt Schwerpunkt jenes berührenden $n$ecks ist."

Zum Beweise bedarf es zunächst eines passenden Ausdrucks für den Inhalt eines $n$dehnigen $(n+1)$ecks V. Sind die von einer Ecke ausgehenden n Kanten $r_1, r_2, \ldots r_n$ sämtlich normal zu einander, so ist offenbar

$$V = \frac{r_1 r_2 \ldots r_n}{n!}$$

Gibt man nun der Kante r_2 gegen die Kante r_1, dann der Kante r_3 gegen die Ebene $r_1 r_2$, dann der Kante r_4 gegen den Raum $r_1 r_2 r_3$ u. s. f. eine Neigung, so multiplicirt sich jedesmal bei unveränderter Basis die Höhe von V, mithin auch V selbst mit dem Sinus des Neigungswinkels. Da alle diese Winkel von der Lage des $(n+1)$ten

necks, welches den Ausgangspunkt der r nicht enthält, unabhängig sind, so kann man, gültig für beliebige Neigungen, schreiben:

$$V = C r_1 r_2 \ldots r_n \tag{1}$$

wo C gegen alle Veränderungen der r und der durch ihre Endpunkte bestimmten $(n-1)$dehnung constant ist.

Der Schnittpunkt der n festen linearen $(n-1)$dehnungen sei Anfang der orthogonalen Coordinaten x, x_1, x_2, ... x_{n-1}. Sind nun p, p_1, ... p_{n-1} die Richtungscosinus der Normale der krummen $(n-1)$-dehnung Ω im Punkte $(x, \ldots)$, ξ, ξ_1, ... ξ_{n-1} die Coordinaten eines Punkts der berührenden linearen $(n-1)$dehnung, und setzt man

$$M = \Sigma p x \tag{2}$$

so ist die Gleichung der Berührenden;

$$\Sigma p \xi = M \tag{3}$$

Sind ferner a_k, a_{k1}, a_{k2}, ... die Richtungscosinus der $k$ten Kante r_k, mithin $r_k a_k$, etc. die Coordinaten des Schnittpunkts mit der Berührenden, so ist nach Gl. (3)

$$r_k \Sigma p a_k = M \tag{4}$$

daher das Volum des $n$dehnigen $(n+1)$ecks nach Gl. (1)

$$V = \frac{C M^n}{\Pi_k \Sigma p a_k} \tag{5}$$

woraus:

$$\partial V = V \left\{ \frac{n \partial M}{M} - \Sigma_k \frac{\Sigma a_k \partial p}{\Sigma p a_k} \right\}$$

Da nun $\Sigma p \partial x = 0$ ist, so hat man nach Gl. (2)

$$\partial M = \Sigma x \partial p$$

Die Differentiale ∂p, etc., welche jetzt allein vorkommen, hangen bloss durch die Relation

$$\Sigma p \partial p = 0$$

von einander ab. Soll also V ein Minimum sein, so ist erste Bedingung:

$$\frac{nx}{M} - \Sigma_k \frac{a_k}{\Sigma p a_k} = \lambda p$$

$$\frac{nx_1}{M} - \Sigma_k \frac{a_{k1}}{\Sigma p a_{k1}} = \lambda p_1$$

. . . . . .

$$\frac{nx_{n-1}}{M} - \Sigma_k \frac{a_{kn-1}}{\Sigma p a_{kn-1}} = \lambda p_{n-1}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit p, p_1, ... p_{n-1}, so ergibt ihre Summe:

$$n - \Sigma 1 = \lambda \quad \text{oder} \quad \lambda = 0$$

und man hat:

$$x = \frac{M}{n} \Sigma_k \frac{a_k}{\Sigma p a_k}; \quad \text{etc.}$$

Die Coordinate der $k$ten Ecke der berührenden $n$dehnung ist nach Gl. (4)

$$\xi_k = r_k a_k = \frac{M a_k}{\Sigma p a_k}$$

folglich

$$\xi_k - x = \frac{M}{n} \left(\frac{n a_k}{\Sigma p a_k} - \Sigma_k \frac{a_k}{\Sigma p a_k} \right)$$

gültig für $k = 1, 2, \ldots n$ und für alle Coordinaten x. Die Werte befriedigen die Gleichungen:

$$\Sigma_k (\xi_k - x) = 0; \quad \text{etc.}$$

folglich ist der Berührungspunkt Schwerpunkt der Ecken des $n$ecks, mithin bekanntlich auch Schwerpunkt des $n$ecks selbst (vergl. T. V. S. 420).

Hiermit ist die Notwendigkeit der Bedingung bewiesen; ob sie ausreichend sei, bleibt auch im citirten Aufsatze für 3 Dimensionen unentschieden.

§. 2. Routh'scher Satz.

Im Quarterly Journal of pure and applied Mathematics, V. XXI. p. 281. sind zu Anfang eines Aufsatzes von E. J. Routh die Werte des Integrals $\int x^n \partial V$, wenn sich dasselbe über ein Dreieck, Viereck, Tetraeder und körperliches Fünfeck erstreckt, aufgestellt.

Die bemerkenswerte, vom Verfasser weiterhin fruchtbar gemachte Eigenschaft dieser Ausdrücke, dass sie nämlich ausser dem Factor V nur Coordinaten gewisser Punkte in der einen xRichtung enthalten, liess vermuten, dass jene 4 speciellen Figuren aus einer umfassenderen Classe von Figuren hergeleitet werden können. Betrachtet man zunächst das Dreieck und Tetraeder als Anfang der Reihe der $n$dehnigen $(n+1)$ecke, so lässt sich in der Tat das ebene Viereck und körperliche Fünfeck durch Projection des dreidehnigen Vierecks auf die Ebene, des vierdehnigen Fünfecks auf den Raum gewinnen, und so eine zweite Reihe von Figuren aus der ersten herleiten. Die Berechnung der entsprechenden Formel ergibt sich jedoch einfacher nach derjenigen Beziehung der zweiten Reihe zur ersten, in welche

sie an der citirten Stelle gesetzt wird, der gemäss das $n$dehnige $(n+2)$eck aus zwei $n$dehnigen $(n+1)$ecken mit einer gemeinsamen Seite besteht. Wir wollen daher zuerst die Formel für das $n$dehnige $(n+1)$eck herechnen, daraus durch Addition die Formel für das $n$dehnige $(n+2)$eck ableiten und schliesslich auf die erstgenannte Beziehung näher eingehen.

§. 3. Erweiterter Ronth'scher Satz für $n$dehnigos $(n+1)$eck.

Substituirt man für die Abscisse x des Elements eines $n$dehnigen $(n+1)$ecks V auf beliebiger Axe mit beliebigem Anfang (nach T. V. S. 419) folgende Function der Unabhängigen $u_1, u_2, .., u_n$

$$x = \sum_{k=1}^{k=n+1} (x_k - x_{k+1}) u_k u_{k+1} \ldots u_n \quad (x_{n+2} = 0)$$

wo x_k die Abscisse der $k$ten Ecke von V bezeichnet, und macht Anwendung auf n orthogonale Axen, so lautet die Functionsdeterminante

$$\Delta = n!\, V u_2 u_3^2 u_4^3 \ldots u_n^{n-1}$$

und das Element

$$\partial V = \Delta \partial u_1 \partial u_2 \ldots \partial u_n$$

erfüllt V, wenn alle u von 0 bis 1 variiren.

Sei nun z Abscisse von ∂V in beliebiger Richtung, in oder ausser der $n$dehnung, so dass

$$z = \sum_{k=1}^{k=n+1} (x_k - x_{k+1}) u_k u_{k+1} \ldots u_n \quad (x_{n+2} = 0)$$

und man setzt

$$z(\mu, \nu) = (x_\mu - x_\nu) u_{\nu-1} u_\nu \ldots u_n + \sum_{k=\nu}^{k=n+1} (x_k - x_{k+1}) u_k \ldots u_n$$

so wird

$$\int_0^1 z^\varkappa(\mu, \nu) \partial u_{\nu-1} = \int_0^1 z^\varkappa(\mu, \nu) \frac{\partial z(\mu, \nu)}{\partial u_{\nu-1}} \partial u_{\nu-1} \cdot \frac{1}{(x_\mu - x_\nu) u_\nu \ldots u_n}$$

$$= \frac{z^{\varkappa+1}(\mu, \nu+1) - z^{\varkappa+1}(\nu, \nu+1)}{(\varkappa+1)(x_\mu - x_\nu) u_\nu \ldots u_n}$$

daher insbesondere (für $\mu = 1$; $\nu = 2$, dann $\mu = 1, 2$; $\nu = 3$, etc.)

$$\int_0^1 z^p \partial u_1 = \frac{z^{p+1}(1,3) - z^{p+1}(2,3)}{(p+1)(z_1 - z_3)u_2 \dots u_n}$$

$$\int_0^1 u_2 \partial u_2 \int_0^1 z^p \partial u_1 = \frac{1}{(p+1)(p+2)} \left\{ \frac{z^{p+2}(1,4) - z^{p+2}(3,4)}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)} \right.$$
$$\left. + \frac{z^{p+2}(2,4) - z^{p+2}(3,4)}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)} \right\} \frac{1}{(u_3 \dots u_n)^2}$$
$$= \frac{1}{(p+1)(p+2)} \left\{ \frac{z^{p+2}(1,4)}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)} + \frac{z^{p+2}(2,4)}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)} \right.$$
$$\left. + \frac{z^{p+2}(3,4)}{(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)} \right\} \frac{1}{(u_3 \dots u_n)^2}$$

demnach, wie leicht zu ersehen, allgemein

$$\int_0^1 u_h^{h-1} \partial u_h \int_0^1 \dots \int_0^1 u_2 \partial u_2 \int_0^1 z^p \partial u_1 =$$
$$\frac{1}{(p+1) \dots (p+h)(u_{h+1} \dots u_n)^h}$$
$$\sum_{k=1}^{k=h+1} \frac{z^{p+h}(k, h+2)}{(z_k - z_1) \dots (z_k - z_{k-1})(z_k - z_{k+1}) \dots (z_k - z_h)}$$

woraus für $h = n$:

$$\int z^p \partial V = n!\, V \int_0^1 \dots \int_0^1 z^p u_2 u_3^2 \dots u_n^{n-1} \partial u_1 \dots \partial u_n =$$
$$\frac{n!\, V}{(p+1) \dots (p+n)} \times$$
$$\sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{z_k^{p+n}}{(z_k - z_1) \dots (z_k - z_{k-1})(z_k - z_{k+1}) \dots (z_k - z_n)} \qquad (6)$$

§. 4. Erweiterter Routh'scher Satz für $n$dehniges $(n+2)$eck.

Nehmen wir nun das $(n-1)$dehnige $n$eck

$$(2, 3, \dots n+1)$$

als gemeinsame Seite der zwei $n$dehnigen $(n+1)$ecke

$$V' \equiv (1, 2, 3, \dots n+1), \qquad V'' \equiv (2, 3, \dots n+2)$$

so stellt die Gesamtfigur $V = V' + V''$ ein $n$dehniges $(n+2)$eck dar, für welches

$$\int x^p \partial V = \int x^p \partial V' + \int x^p \partial V''$$

durch Addition zweier Werte der Function (6) erhalten wird nämlich

$$\int x^p \partial V = \frac{n!}{(p+1)\dots(p+n)} \left\{ \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{V' z_k^{p+n}}{(z_k - z_1)\dots(z_k - z_{n-1})} + \sum_{k=2}^{k=n+2} \frac{V'' z_k^{p+n}}{(z_k - z_2)\dots(z_k - z_{n+2})} \right\}$$

Die Summe der allgemeinen Terme beider Reihen ist, wenn N_k den Generalnenner bezeichnet,

$$= z_k^{p+n} \frac{V'(z_k - z_{n+2}) + V''(z_k - z_1)}{N_k}$$

$$= z_k^{p+n} \frac{V z_k - D}{N_k}$$

wo

$$N_k = (z_k - z_1)\dots(z_k - z_{k-1})(z_k - z_{k+1})\dots(z_k - z_{n+2}) \tag{7}$$

$$D = V' z_{n+2} + V'' z_1 \tag{8}$$

Dieser Wert bleibt auch für $k = 1$ und $k = n+2$ richtig, folglich ist

$$\int V^p \partial V = \frac{n!}{(p+1)\dots(p+n)} \sum_{k=1}^{k=n+2} z^{p+n} \frac{V z_k - D}{N_k} \tag{9}$$

Wird nun die gemeinsame Seite von V' und V'' von der Diagonale $(1, n+2)$ im Punkte (0) geschnitten, so verhält sich

$$z_1 - z_0 : z_0 - z_{n+2} = V' : V''$$

daher ist

$$z_1 = z_0 + \lambda V'; \quad z_{n+2} = z_0 - \lambda V''$$

also nach Gl. (8)

$$D = V z_0$$

und man hat:

$$\int x^p \partial V = \frac{n! V}{(p+1)\dots(p+n)} \sum_{k=1}^{k=n+2} z^{p+n} \frac{z_k - z_0}{N_k} \tag{10}$$

§. 5. Schlussbemerkung.

Die Projection eines $n$dehnigen $(n+1)$ecks auf eine lineare $(n-1)$dehnung ist entweder ein $n$eck oder $(n+1)$ock (letzteres mit seinen Diagonalgebilden, ersteres mit einem Punkte und dessen Verbindungsgebilden im Innern). Alle $k$dehnigen linearen Grenzgebilde

des $n$dehnigen $(n+1)$ecks sind nämlich $(k+1)$ecke, als solche mithin sämtlich convexe Figuren, die von einer Geraden nur in 2 Punkten geschnitten werden können. Der Umfang (d. i. Seitensumme) des $n$dehnigen $(n+1)$ecks V sei Ω. Jede Seite von V ist ein $(n-1)$-dehniges $n$eck, daher ihre Projection auf eine lineare $(n-1)$dehnung gleichfalls. Nur die noch übrige Ecke von V kann sich in verschiedener Lage projiciren. Entweder fällt ihre Projection in das Innere jenes $n$ecks oder nicht. Demnach sind nur die 2 Fälle zu unterscheiden: Fällt die Projection irgend einer Ecke von V in das Innere der Projection der Gegenseite, so ist die Projection von V und Ω ein $n$eck, fällt die Projection keiner Ecke in das Innere der Projection der Gegenseite, ein $(n+1)$eck.

Bezeichnet Ω' die Projection von Ω, so gibt im ersten Falle Gl. (6), im zweiten Gl. (10) den Wert von

$$\int x^p \partial \Omega'$$

wenn man die $n-1$ ersten Coordinatenaxen in die Projectionsbasis legt und $n-1$ statt n setzt.

Die Beziehung zwischen den verglichenen Projectionen ist folgende. Das $(n-1)$dehnige $n$eck hat eine Ecke weniger als Ω, daher fallen in Ω' alle Grenzgebilde weg, welche diese Ecke besitzen. Das $(n-1)$dehnige $(n+1)$eck hat eine Kante weniger als Ω, daher gehen in Ω' alle Grenzgebilde in Diagonalgebilde über, welche diese Kante besitzen.

Ein allgemeines Kriterium der 2 Fälle lässt sich schwerlich geben.

IV.

Ueber Triederschnitte und Minimaltetraeder.

Von

Dr. **Bermann**

in Liegnitz.

Vor längerer Zeit [1]) untersuchte ich in einer Programmarbeit die Oerter der Schwerpunkte solcher Dreiecke, in welchen ein Trieder (Dreikant) von einer Ebene geschnitten wird. Ich bezeichnete dieselben als „Triederschnitte". Dabei nahm ich an, dass die schneidenden Ebenen entweder durch einen festen Punkt oder eine feste Achse gehen oder Berührungsebenen gegebener Flächen seien oder endlich ein Tetraeder von gegebenem Volumen abschneiden; auch betrachtete ich den Fall, wo der Triederschnitt eine vorgeschriebene Gestalt hat. Im Folgenden beabsichtige ich, hierzu noch Einzelnes nachzutragen.

Die Kanten des Trieders seien die Achsen der x, y, z, und es bedeute α den Winkel (y, z), β (x, z), γ (x, y). ξ, η, ζ mögen die Coordinaten des Schwerpunkts eines Triederschnitts bezeichnen, t, u, v die Parameter der schneidenden Ebene auf den Achsen der x, y, z. Es ist dann $t = 3\xi$, $u = 3\eta$, $v = 3\zeta$.

I. Zur Ermittelung der bei gegebenem Ort des Schwerpunkts von den schneidenden Ebenen umhüllten Gebilde ist zwischen den Gleichungen dieser Ebene, des gegebenen Ortes und ihren ersten Differentialgleichungen ξ, η, ζ, $D_\xi\zeta$ und $D_\eta\zeta$ zu eliminiren. Es ist aber erstere Gleichung

---

1) Progr. 1874. des Gymn. zu Liegnitz.

$$\frac{x}{t}+\frac{y}{u}+\frac{z}{v}=1$$

oder

$$\frac{x}{\xi}+\frac{y}{\eta}+\frac{z}{\zeta}=3 \tag{1}$$

und hieraus

$$\begin{cases} D_\xi\zeta = -\dfrac{\zeta^2}{\xi^2}\cdot\dfrac{x}{z} \\ D_\eta\zeta = -\dfrac{\zeta^2}{\eta^2}\cdot\dfrac{y}{z} \end{cases} \tag{2}$$

Ist der Ort des Schwerpunktes ein auf die Kanten des Trieders als seine zugeordneten Durchmesser bezogenes Ellipsoid

$$\left(\frac{\xi}{a}\right)^2+\left(\frac{\eta}{b}\right)^2+\left(\frac{\zeta}{c}\right)^2=1 \tag{3}$$

so hat man

$$\begin{cases} D_\xi\zeta = -\dfrac{c^2}{a^2}\dfrac{\xi}{\zeta} \\ D_\eta\zeta = -\dfrac{c^2}{b^2}\dfrac{\eta}{\zeta} \end{cases} \tag{4}$$

Aus (2) und (4) folgt

$$\xi=\zeta\sqrt[3]{\frac{a^2x}{c^2z}},\quad \eta=\zeta\sqrt[3]{\frac{b^2y}{c^2z}}$$

und dann aus (3)

$$\zeta=\frac{c}{\sqrt{\sqrt[3]{\frac{c^2x^2}{a^2z^2}}+\sqrt[3]{\frac{c^2y^2}{b^2z^2}}+1}}$$

Die Substitution dieser Werte in (1) liefert dann nach einigen leichten Umformungen

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}}=3^{\frac{2}{3}} \tag{5}$$

als Gleichung der von den schneidenden Ebenen umhüllten Fläche [1]),

1) Die — um es so auszudrücken — umgekehrte Aufgabe, d. h. die Bedingung, dass die schneidenden Ebenen ein dem obigen gleiches Ellipsoid umhüllen sollen, führt zu der Fläche 6. Ordnung

$$\left(\frac{a}{3\zeta}\right)^2+\left(\frac{b}{3\eta}\right)^2+\left(\frac{c}{3\zeta}\right)^2=1$$

als Ort des Schwerpunkts. S. Progr. 74, S. 11.

Mit sechs Rückkehrpunkten erstreckt diese sich auf den Achsen bis $\pm 3a$, $3b$, $3c$ (vom Scheitel aus gerechnet); die Dreikantflächen und die denselben (innerhalb leicht zu berechnenden Grenzen) parallelen Ebenen schneidet sie in Ellipsen-Evoluten; nämlich die xy-Ebene in der Evolute der Ellipse, deren zugeordnete Durchmesser auf den Achsen der x und y bezhw. $\frac{3ab^2}{a^2-b^2}$, $\frac{3a^2b}{a^2-b^2}$ sind, die anderen Flächen in Evoluten von Ellipsen mit den zugeordneten Durchmessern:

$$\frac{3bc^2}{b^2-c^2}, \quad \frac{3b^2c}{b^2-c^2}; \quad \frac{3ac^2}{a^2-c^2}, \quad \frac{3a^2c}{a^2-c^2}$$

Hat man insbesondere ein rechtwinkliges Dreikant, um dessen Scheitel eine Kugelfläche vom Radius r gelegt ist, welche den Schwerpunktsort bilden soll, so reducirt sich Gl. (5) auf

$$x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{1}{3}} = (3r)^{\frac{1}{3}}$$

Es sei zweitens der Schwerpunkts-Ort die Ebene

$$\frac{\xi}{a}+\frac{\eta}{b}+\frac{\zeta}{c} = 1 \tag{6}$$

also

$$D_\xi\zeta = -\frac{c}{a}, \qquad D_\eta\zeta = -\frac{c}{b}$$

so hat man bei Zuziehung von (2)

$$\xi = \zeta\sqrt{\frac{ax}{cz}}, \quad \eta = \zeta\sqrt{\frac{by}{cz}}$$

Hieraus durch Substitution in (6):

$$\zeta = \left(\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}+\sqrt{\frac{z}{c}}\right)\sqrt{cz}$$

$$\eta = \left(\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}+\sqrt{\frac{z}{c}}\right)\sqrt{by}$$

$$\xi = \left(\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}+\sqrt{\frac{z}{c}}\right)\sqrt{ax}$$

und endlich aus Gl. (1):

$$\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}+\sqrt{\frac{z}{c}} = 3 \tag{7}$$

als Gleichung der von den schneidenden Ebenen umhüllten Fläche. — Sie ist 4. Ordnung, die Reciprocale des Schwerpunkts-Ortes der

durch den festen Punkt $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ gehenden Triederschnitte [1]) und schneidet die Triederflächen in Kegelschnitten.

Es sei drittens der Ort des Schwerpunktes die Gerade

$$\begin{aligned} \frac{\xi}{a}+\frac{\xi}{b}&=1 \\ \frac{\xi}{c}+\frac{\eta}{d}&=1 \end{aligned} \tag{8}$$

also

$$D_\xi\zeta=-\frac{a}{b}, \quad D_\eta\zeta=-\frac{c}{d}$$

so ergiht sich analog

$$\xi=\zeta\sqrt{\frac{bx}{az}}, \quad \eta=\zeta\sqrt{\frac{dy}{cz}}$$

und dann

$$\zeta=\tfrac{1}{3}\sqrt{z}\left(\sqrt{\frac{ax}{b}}+\sqrt{\frac{cy}{d}}+\sqrt{z}\right)$$

$$\eta=\tfrac{1}{3}\sqrt{\frac{dy}{c}}\left(\sqrt{\frac{ax}{b}}+\sqrt{\frac{cy}{d}}+\sqrt{z}\right)$$

$$\xi=\tfrac{1}{3}\sqrt{\frac{bx}{a}}\left(\sqrt{\frac{ax}{b}}+\sqrt{\frac{cy}{d}}+\sqrt{z}\right)$$

Durch Substitution in (8) ergibt sich endlich die Gleichung der Gratlinie, deren Schmiegungsebenen die Ebenen der Triederschnitte sind:

$$\begin{cases} (\sqrt{ax}+\sqrt{bz})\,(\sqrt{adx}+\sqrt{bcy}+\sqrt{bdz}) = 3ab\sqrt{d} \\ (\sqrt{cy}+\sqrt{dz})\,(\sqrt{adx}+\sqrt{bcy}+\sqrt{bdz}) = 3cd\sqrt{b} \end{cases} \tag{9}$$

Die Division der einen dieser Gleichungen in die andere führt zu

$$c\sqrt{ad}\sqrt{x}-a\sqrt{bc}\sqrt{y}=(a-c)\sqrt{bd}\sqrt{z} \tag{10}$$

der Gleichung eines Kegels zweiter Ordnung, der mit dem Trieder den Scheitel gemeinschaftlich hat und mithin auch seine drei Flächen geradlinig schneidet, jede der beiden Flächen vierter Ordnung aber, welche durch eine der Gl. (9) ausgedrückt werden, in der obigen Gratlinie.

---

1) Progr. 74. S. 2.

Durch Elimination je einer Variabeln zwischen den beiden Gleichungen (9), bezhw. Gleichung (10), gelangt man zu den Projectionsgleichungen der Gratlinie. So durch Elimination von z und dann von y zu:

$$a^4d^2x^2 - 2abcd(a^2+c^2)xy + b^2c^4y^2 - 6a^2(a-c)^2bd^2x - 6c^2(a-c)^2b^2dy + 9(a-c)^4b^2d^2 = 0$$

$$(a+c)^2a^2x^2 - abc(a+c)xz + b^2c^2z^2 - 6a^2b(a+c)x - 6ab^2cz + 9a^4b^2 = 0$$

Die Gratlinie ist mithin eine Raumcurve 4. Ordnung, die gemeinschaftliche Durchdringungscurve dreier den Triederkanten paralleler hyperbolischer Cylinder.

Die Fläche $\xi\eta\zeta = a^3$, deren Tangentialebenen vom Trieder volumengleiche Tetraeder abschneiden, besitzt (S. Progr. 74 S. 13) auch die Eigenschaft, dass die Berührungspunkte ihrer Tangentialebenen die Schwerpunkte der zugehörigen Triederschnitte sind. Bei dem vorstehenden Verfahren muss sich bei ihr also wieder dieselbe Fläche ergeben (als von den schneidenden Ebenen umhüllt).

In der Tat ist hier auch:

$$D_\xi\zeta = -\frac{\zeta}{\xi}, \quad D_\eta\zeta = -\frac{\zeta}{\eta}$$

also wegen (2):

$$\frac{\xi}{\zeta} = \frac{x}{z}, \quad \frac{\eta}{\zeta} = \frac{y}{z} \quad \text{und} \quad \xi = \frac{x}{z}\cdot\zeta, \quad \eta = \frac{y}{z}\cdot\zeta$$

Durch Substitution in $\xi\eta\zeta = a^3$:

$$\zeta = a\sqrt[3]{\frac{z^2}{xy}}$$

und dann:

$$\eta = a\sqrt[3]{\frac{y^2}{xz}}, \quad \xi = a\sqrt[3]{\frac{x^2}{yz}}$$

und dann aus (1):

$$x\sqrt[3]{\frac{yz}{x^2}} + y\sqrt[3]{\frac{xz}{y^2}} + z\sqrt[3]{\frac{xy}{z^2}} = 3a$$

oder:

$$\sqrt[3]{xyz} = a, \quad xyz = a^3$$

II. Sollen die Triederschnitte flächengleich werden, so hat man, wenn ihre in den Ebenen xy, yz, xz liegenden Seiten bzhw. s_1, s_2, s_3 sind:

$$\Delta = \tfrac{1}{4}\sqrt{4s_1^2s_2^2 - (s_1^2+s_2^2-s_3^2)^2}$$

und da wegen

$$t = 3\xi, \quad u = 3\eta, \quad v = 3\zeta$$

$$s_1^2 = 9(\xi^2 + \eta^2 - 2\xi\eta\cos\gamma)$$
$$s_2^2 = 9(\eta^2 + \zeta^2 - 2\eta\zeta\cos\alpha)$$
$$s_3^2 = 9(\xi^2 + \zeta^2 - 2\xi\zeta\cos\beta)$$

ist, so hat man, wenn

$$\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma \text{ mit } A$$
$$\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma \text{ mit } B$$
$$\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta \text{ mit } C$$

bezeichnet wird:

$$\Delta = {}^9/_2\sqrt{\eta^2\zeta^2\sin^2\alpha + \xi^2\zeta^2\sin^2\beta + \xi^2\eta^2\sin^2\gamma - 2\xi\eta\zeta(A\xi + B\eta + C\zeta)}$$

Der Ort der Schwerpunkte für die Triederschnitte vom Inhalt Δ ist daher:

$$(1)\quad y^2z^2\sin^2\alpha + x^2z^2\sin^2\beta + x^2y^2\sin^2\gamma - 2xyz(Ax + By + Cz) = \left(\frac{2\Delta}{9}\right)^2$$

und insbesondere für das rechtwinklige Trieder:

$$(1^a)\qquad y^2z^2 + x^2z^2 + x^2y^2 = \left(\frac{2\Delta}{9}\right)^2$$

Die vorstehenden Gleichungen lassen sich auch schreiben:

$$(xy\sin\gamma + yz\sin\alpha + xz\sin\beta)^2 - 4\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\left(x\sin\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\right.$$
$$\left. + y\sin\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2} + z\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\right)xyz = \left(\frac{2\Delta}{9}\right)^2$$

bzhw.

$$(xy + yz + xz)^2 - 2(x + y + z)xyz = \left(\frac{2\Delta}{9}\right)^2$$

Für $\Delta = 0$ geht diese Fläche über in eine der von unsern grossen Mathematikern Kummer und Weierstrass synthetisch erörterten (Monatsberichte der Kgl. Akad. d. W. 1863 p. 332 sqq.),[1]) Kegelschnittsschaaren enthaltenden Steiner'schen Flächen.

Da es an Modellen derselben nicht fehlt, so kann man sich auch von Fläche (1) eine Anschauung bilden, wenn man sich die tiefsten Stellen ihrer trichterförmigen Einsenkungen nicht zusammenstossend, sondern um eine leicht zu ermittelnde Strecke von einander ab-

1) Cfr. Schroeter ibid. p. 520 sqq. und Crelle (Borchardt) Jahrg. 64 p. 64 u. 66 sqq. — Auch ibid. Jahrg. 63 p. 315 von Cremona nebst Note von Cayley (Jahrg. 64 p. 72) und Salmon-Fiedler Analyt. Geom. d. Raume Th. 2, S. 356.

stehend denkt. Besonders einfach wird dies bei dem rechtwinkligen Trieder und der Fläche (1^a). Die innerhalb der letzteren befindlichen Strecken der Triederkanten sind die Achsen eines regulären Oktaeders. Legt man nun durch den Triederscheitel die vier den Oktaederflächen parallelen Ebenen $z \pm y \pm x = 0$, so schneiden sie die Fläche (1^a) in Kreisen. Man erhält nämlich für die Schnittcurven:

$$\begin{cases} x^2y^2 + (x \pm y)^2(x^2 + y^2) = (2/9\,\Delta)^2 \\ x^2z^2 + (x \pm z)^2(x^2 + z^2) = (2/9\,\Delta)^2 \end{cases}$$

oder nach beiderseitiger Radicirung:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \pm xy = 2/9\,\Delta \\ x^2 + z^2 \pm xz = 2/9\,\Delta \end{cases}$$

Eine successive erfolgende Drehung der Achsen in ihrer Ebene um $\pi/4$ lässt dieselben übergehen in

$$\begin{cases} x^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 = 4/27\,\Delta \\ x^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{3}}\right)^2 = 4/27\,\Delta \end{cases}$$

Die Flächen des Oktaeders sind aber gegen die des Trieders (hier gegen die xy-, bzhw. xz-Ebene) unter dem durch $\cos i = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ gegebenen Winkel i geneigt. Die vorstehenden Ellipsengleichungen sind also die Projectionsgleichungen von vier Kreisen mit dem Radius $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\Delta}{3}}$, und $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{\Delta}{3}}$ gibt hier den Abstand der tiefsten Stellen der Fläche an.[1])

III. Soll das Volumen des abgeschnittenen Tetraeders ein Minimum sein, so hat man, wenn zugleich die Bedingung $f(t, u, v) = 0$ besteht:

$$V = \tfrac{1}{6}\,tuv \sin\gamma \sin i \tag{1}$$

wo i oder Wkl. (z, xy) durch

$$\cos i = \sqrt{\frac{\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin\gamma}}$$

gegeben ist,

---

1) d. h. da die Fläche aus vier congruenten Teilen besteht, den Abstand e zweier einander gegenüberstehender Teile.

$$(2) \qquad \begin{cases} D_t V . D_v f - D_v V . D_t f = 0 \\ D_u V . D_v f - D_v V . D_u f = 0 \end{cases}$$

Gehen die Triederschnitte durch einen festen Punkt (x', y', z'), so ist

$$f \equiv \frac{x'}{t} + \frac{y'}{u} + \frac{z'}{v} - 1 = 0,$$

$$D_t V = \tfrac{1}{6} uv \sin\gamma \sin i,$$
$$D_u V = \tfrac{1}{6} tv \sin\gamma \sin i,$$
$$D_v V = \tfrac{1}{6} tu \sin\gamma \sin i;$$
$$D_t f = -\frac{x'}{t^2}, \quad D_u f = -\frac{y'}{u^2}, \quad D_v f = -\frac{z'}{v^2}$$

also nimmt Gl. (2) dann die Form an:

$$x'v - z't = 0$$
$$y'v - z'u = 0$$

oder

$$\frac{x'}{t} = \frac{y'}{u} = \frac{z'}{v}$$

und mithin:

$$f \equiv \frac{3x'}{t} - 1 = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{3y'}{u} - 1 = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{3z'}{v} - 1 = 0$$

d. h.

$$t = 3x' = \xi$$
$$u = 3y' = \eta$$
$$v = 3z' = \zeta$$

Es schneidet also derjenige Triederschnitt, dessen Schwerpunkt der gegebene feste Punkt ist, das Minimaltetraeder ab.

Gehen die Triederschnitte durch eine feste Gerade

$$\begin{cases} \frac{z}{m} + \frac{x}{n} = 1 \\ \frac{z}{p} + \frac{y}{q} = 1 \end{cases}$$

so ist die Gleichung einer Triederschnittebene:

$$\frac{z}{p} + \frac{y}{q} - 1 + \mu\left(\frac{z}{m} + \frac{x}{n} - 1\right) = 0$$

oder:

$$\frac{z}{\frac{mp(1+\mu)}{m+\mu p}} + \frac{y}{(1+\mu)q} + \frac{x}{(1+\mu)\frac{n}{\mu}} = 1$$

Mithin

$$V = \tfrac{1}{6}\frac{(1+\mu)^3 mnpq \sin\gamma \sin i}{\mu(m+\mu p)}$$

$$D_\mu V = \tfrac{1}{6}\frac{mnpq(1+\mu)^2}{m+\mu p}[p\mu^2 + 2(m-p)\mu - m]\sin\gamma\sin i$$

Wegen $D_\mu V = 0$ hat man zur Bestimmung des dem Minimum entsprechenden μ:

$$\mu^2 + 2\left(\frac{m}{p} - 1\right)\mu - \frac{m}{p} = 0$$

woraus:

$$\mu = 1 - \frac{m}{p} \pm \sqrt{\frac{m^2}{p^2} - \frac{m}{p} + 1}$$

da für $\mu = -1$ $V = 0$ wird, entsprechend einem durch den Triederscheitel gehenden Schnitte, und da, weil durch die gegebene Gerade eine Ebene gelegt werden kann, die einer der Triederkanten parallel läuft, so dass $V = \infty$ wird, ein Maximum ausgeschlossen ist.

Nach einigen Reductionen folgt hieraus:

$$t = \frac{n}{m}(2m - p \pm \sqrt{m^2 - mp + p^2})$$

$$u = \frac{q}{p}(2p - m \pm \sqrt{m^2 - mp + p^2})$$

$$v = m + p \mp \sqrt{m^2 - mp + p^2}$$

Läuft die feste Gerade einer Triederfläche, etwa der xz-Ebene, parallel, so wird p unendlich und es reducirt sich die Gleichung der schneidenden Ebene auf

$$\frac{z}{\frac{m}{\mu}(1+\mu)} + \frac{y}{q(1+\mu)} + \frac{x}{\frac{n}{\mu}(1+\mu)} = 1$$

V auf

$$\tfrac{1}{6}\frac{(1+\mu)^3}{\mu^2} mnq \sin\gamma \sin i$$

$D_\mu V$ auf

$$\tfrac{1}{6} mnq \sin\gamma \sin i \frac{(1+\mu)^2(\mu-2)}{\mu^3}$$

Es ist dann also $\mu = 2$, wie sich ja auch unmittelbar aus dem obigen

$$\mu = 1 - \frac{m}{p} + \sqrt{\frac{m^2}{p} - \frac{m}{p} + 1}$$

für $p = \infty$ ergibt. Es wird dann:

$$t = \tfrac{3}{4}n, \quad u = 3q, \quad v = \tfrac{3}{4}m$$

woraus ersichtlich ist, dass in diesem Falle der Schwerpunkt des Triederschnitts in die Drehungsachse (feste Gerade) fällt.

Sollen die Triederschnitte eine gegebene Fläche umhüllen, so ergibt sich die Bedingung für das Minimaltetraeder in folgender Weise:

Die Gleichung der Fläche sei $\varphi(x, y, z) = 0$; sind ξ, η, ζ die Coordinaten des Berührungspunktes und bedeuten p, q, r bzhw. $D_\xi\varphi(\xi, \eta, \zeta)$, $D_\eta\varphi$, $D_\zeta\varphi$, so ist:

$$p(x-\xi)+q(y-\eta)+r(z-\zeta)=0$$

die Gleichung der Tangentialebene. Ihre Parameter t, u, v sind also bzhw.

$$\frac{p\xi+q\eta+r\zeta}{p},\quad \frac{p\xi+q\eta+r\zeta}{q},\quad \frac{p\xi+q\eta+r\zeta}{r}$$

Es ist somit V oder $\frac{1}{6}tuv\sin\gamma\sin i$ hier

$$=\frac{1}{6}\frac{(p\xi+q\eta+r\zeta)^3}{pqr}\sin\gamma\sin i$$

Die obige Minimalbedingung (2) wird demnach für diesen Fall:

$$(2^a)\qquad \begin{cases} rD_\xi V-pD_\zeta V=0 \\ rD_\eta V-qD_\zeta V=0 \end{cases}$$

Setzt man:

$$p\xi+q\eta+r\zeta=S,\quad pqr=P$$

und differentiirt successive nach ξ, η, ζ, so erhält man:

$$\frac{6P^2}{S^3\sin\gamma\sin i}D_\xi V=3PD_\xi S-SD_\xi P$$

$$\frac{6P^2}{S^3\sin\gamma\sin i}D_\eta V=3PD_\eta S-SD_\eta P$$

$$\frac{6P^2}{S^3\sin\gamma\sin i}D_\zeta V=3PD_\zeta S-SD_\zeta P$$

Da aber

$$D_\xi S=p+\xi D_\xi p+\eta D_\xi q+\zeta D_\xi r$$

$$D_\eta S=q+\eta D_\eta q+\xi D_\eta p+\zeta D_\eta r$$

$$D_\zeta S=r+\zeta D_\zeta r+\xi D_\zeta p+\eta D_\zeta q$$

und

$$D_\xi P=qrD_\xi p+prD_\xi q+pqD_\xi r$$

$$D_\eta P=qrD_\eta p+prD_\eta q+pqD_\eta r$$

$$D_\zeta P=qrD_\zeta p+prD_\zeta q+pqD_\zeta r$$

ist, so erhält man nach Einsetzung dieser Werte:

$$\frac{6P^2}{S^2\sin\gamma\sin i} = 3p^2qr + qr(2p\xi - q\eta - r\zeta)D_\xi p + pr(2q\eta - p\xi - r\zeta)D_\xi q + pq(2r\zeta - p\xi - q\eta)D_\xi r$$

$$\frac{6P^2 D_\eta V}{S^2\sin\gamma\sin i} = 3pq^2r + qr(2p\xi - q\eta - r\zeta)D_\eta p + pr(2q\eta - p\xi - r\zeta)D_\eta q + pq(2r\zeta - p\xi - q\eta)D_\eta r$$

$$\frac{6P^2 D_\zeta V}{S^2\sin\gamma\sin i} = 3pqr^2 + qr(2p\xi - q\eta - r\zeta)D_\zeta p + pr(2q\eta - p\xi - r\zeta)D_\zeta q + pq(2r\zeta - p\xi - q\eta)D_\zeta r$$

Werden diese Werte in (2^a) substitnirt, so gehen die beiden dortigen Gleichungen schliesslich über in

$$(2^b)\quad \left\{\begin{aligned} &qr(2p\xi - q\eta - r\zeta)(rD_\xi p - pD_\zeta p) \\ &\quad + pr(2q\eta - p\xi - r\zeta)(rD_\xi q - pD_\zeta q) \\ &\quad + pq(2r\zeta - p\xi - q\eta)(rD_\xi r - pD_\zeta r) = 0 \\ &qr(2p\xi - q\eta - r\zeta)(rD_\eta p - qD_\zeta p) \\ &\quad + pr(2q\eta - p\xi - r\zeta)(rD_\eta q - qD_\zeta q) \\ &\quad + pq(2r\zeta - p\xi - q\eta)(rD_\eta r - qD_\eta r) = 0 \end{aligned}\right.$$

Unabhängig von den (partiellen) Differentialquotienten wird diesen Gleichungen durch

$$p\xi = q\eta = r\zeta$$

genügt, wodurch die obigen Werte der Parameter t, u, v in $3\xi, 3\eta, 3\zeta$ übergehen, und sich demnach als Ergebniss herausstellt, dass die Tangentialebene das Minimaltetraeder abschneidet, deren Berührungspunkt zugleich der Schwerpunkt des zugehörigen Triederschnittes ist.

Der Minimalwert von V wird $\frac{8}{3}\xi\eta\zeta\sin\gamma\sin i$.

Beispiele:

1) Für das Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

hat man:

$$\xi D_\xi\varphi = \frac{\xi^2}{a^2}, \quad \eta D_\eta\varphi = \frac{\eta^2}{b^2}, \quad \zeta D_\zeta\varphi = \frac{\zeta^2}{c^2}$$

so dass also

$$\frac{\xi^2}{a^2} = \frac{\eta^2}{b^2} = \frac{\zeta^2}{c^2} = \frac{1}{3}, \quad \xi = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad \eta = \frac{b}{\sqrt{3}}, \quad \zeta = \frac{c}{\sqrt{3}}$$

wird. Vol. des Minimaltetraeders $= \frac{1}{2}abc\sqrt{3}\sin\gamma\sin i$.

2) Für die obige Fläche

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}}=1$$

ist

$$\xi p=\tfrac{2}{3}\sqrt[3]{a\xi^2},\quad \eta q=\tfrac{2}{3}\sqrt[3]{b\eta^2},\quad \zeta r=\tfrac{2}{3}\sqrt[3]{c\zeta^2}$$

also:

$$a\xi^2=b\eta^2=c\zeta^2 \quad \text{oder} \quad \eta=\xi\sqrt{\frac{a}{b}},\quad \zeta=\xi\sqrt{\frac{a}{c}}$$

Dies in die Flächengleichung eingesetzt, ergibt:

$$\xi=\frac{1}{\sqrt{a\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}},\quad \eta=\frac{1}{\sqrt{b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}},\quad \zeta=\frac{1}{\sqrt{c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}}$$

Minimaltetraeder-Volumen v:

$$\frac{\frac{8}{3}\sin\gamma\sin i}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\sqrt{ab+bc+ac}} \quad \text{oder} \quad \frac{\frac{8}{3}abc\sin\gamma\sin i}{(ab+bc+ac)^{\frac{3}{2}}}$$

3) $ax^2+by+cz+d=0$ (Paraboloid)

$\xi p=2a\xi^2,\quad \eta q=b\eta,\quad \zeta r=c\zeta$

$2a\xi^2=b\eta=c\zeta$

$$\xi=\sqrt{\frac{d}{5a}},\quad \eta=\frac{2d}{5b},\quad \zeta=\frac{2d}{5c}$$

$$v=\frac{18}{25\sqrt{5}}\cdot\frac{d^2\sqrt{d}}{bc\sqrt{a}}\sin\gamma\sin i$$

4) $x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2=(\frac{3}{8}\Delta)^2$ (s. oben)

$\xi p=2\xi^2(\eta^2+\zeta^2)$

$\eta q=2\eta^2(\xi^2+\zeta^2)$

$\zeta r=2\zeta^2(\xi^2+\eta^2)$

$$\xi=\eta=\zeta=\tfrac{1}{3}\sqrt{\Delta}\cdot\sqrt[4]{\tfrac{1}{3}}$$

$$v=\tfrac{1}{9}\Delta\sqrt{\Delta}\cdot\sqrt[4]{\tfrac{1}{3}}$$

V.

Construction der den Brennpunkten eines Kegelschnitts entsprechenden Punkte im collinearen Systeme.

Von

L. Klug.

K. Pohlke bringt in seiner „darst. Geometrie“ (zweite Abth., Berlin 1876; § 114) ohne Beweis die Construction derjenigen Punkte in der Ebene eines Kreises, deren Central-Projectionen die Brennpunkte der Central-Projection des Kreises werden.

Im folgenden wollen wir den Beweis der Pohlke'schen Construction geben in dem allgemeinen Falle, wenn statt des Kreises ein Kegelschnitt angenommen wird, die Construction wenn das Projections-Centrum ins Unendliche rückt, endlich die umgekehrte Aufgabe lösen, nämlich: Projections-Centrum und Ebene so bestimmen, dass die Projection zweier beliebiger Punkte in der Ebene eines Kegelschnitts die Brennpunkte der Projection des Kegelschnitts werden.

„Schneidet die zu einer Tangente eines Kegelschnitts Parallele, die durch den Berührungspunkt P gezogene beliebige Gerade in B, den zur Geraden PB conjugirten Durchmesser in A, so liegt der Punkt B mit dem Pole der Geraden PA in einem Durchmesser des Kegelschnitts.“

Die Pole U, V der Geraden AB, BP liegen in dem durch P, resp. A gehenden Durchmesser, und das Dreieck ABP mit dem UVC, dessen Ecken die Pole der Seiten des ersteren sind, persp. liegt, so ist BC der zur Geraden AP conjugirte Durchmessor des Kegelschnitts.

Daraus folgt, wenn A in einen Brennpunkt des Kegelschnitts fällt, und man in Betracht zieht, dass der Pol einer Brennpunkt-Sehne auf dieser im Brennpunkte errichteten Senkrechten liegt: schneidet die durch den Brennpunkt A eines Kegelschnitts zu einer Tangente Parallele die vom Berührungspunkte P auf die Hauptaxe gefällte Senkrechte in B die Tangente des Punktes P in C, so liegen die Punkte B und C auf dem zur Geraden AP conjugirten Durchmesser.

Bezeichnet man den Schnittpunkt dieses Durchmessers und der Geraden AP mit D, den Schnittpunkt der durch B zur Hauptaxe parallelen und AP mit N, den Fusspunkt der von B auf AP gefällten Senkrechten mit E, so folgt aus den vorhandenen ähnlichen Dreiecken: $AD:DE = CD:BD$; $DP:AD = CD:BD$, welche Proportionen die Relation $\overline{DA}^2 = DP.DE$ geben. Ferner ist aus der Figur ersichtlich, dass der Punkt B, da er auf der zu einer Seite des CAP Dreieckes Parallelen sich befindet, immer ausserhalb des Dreieckes, daher E innerhalb der Strecke DP, und wegen des rechtwinkligen Dreieckes PBN auch innerhalb der Strecke PN liegt, weshalb auch E niemals auf die Strecke ND gelangen kann.

Mittelst der früheren Relation und dieser Bemerkung kann man die Brennpunkte eines Kegelschnitts, wenn die Lage der Axen und ein Par conjugirte Durchmesser bekannt sind, auf folgende Art construiren:

Durch einen beliebigen Punkt O zieht man Parallele zu den Axen und einem der Durchmesser und eine Senkrechte auf den anderen Durchmesser, und schneidet diese vier Geraden mit einer zu dem letzteren Durchmesser Parallelen g in N, P, D, E; liegt nun E auf der Strecke DP, so bestimmt man den Punkt A auf g derart, dass $\overline{DA}^2 = DP.DE$ und führt durch die Berührungspunkte der zu AO parallel gehenden Tangenten des Kegelschnitts Parallele zu g; die Letzteren treffen die mit ON parallele Hauptaxe in den Brennpunkten.

Die Construction geht bei der Parabel, da die Durchmesser parallel sind, in folgende über: durch O führt man eine Parallele und Senkrechte zur Axe und eine beliebige Gerade, schneidet dieselben mit einer auf der Letzteren Senkrechten in D, P, E; bestimmt den Punkt A derart auf ihr, dass $\overline{DA}^2 = DP.DE$, zieht die mit OA parallele Tangente; die durch den Berührungspunkt zu DP Parallele schneidet die Axe im Brennpunkte.

Wir wollen nun die hier gegebenen Constructionen zur Bestimmung der Brennpunkte des einem Kegelschnitt persp. collinearen Kegelschnitts benutzen.

Es sei k ein beliebiger Kegelschnitt, s, C die Collineations-Axe und das Centrum, q', r die Gegenaxen, k' die dem k entsprechende persp. collineare Figur, M der Pol von r bezüglich k. Sind R_1, R_2; R_3, R_4 zwei Par bezüglich k conjugirte Punkte auf r., von welchen das erste Par aus C unter einem rechten Winkel erscheint, so gehen die Geraden CR_1, CR_2 mit den Axen, CR_3, CR_4 mit einem Par conjugirter Durchmesser von k' parallel. Schneidet man die ersten drei Geraden und die auf der vierten in C errichtete Senkrechte mit einer zur vierten parallelen in N, P, D, E, bestimmt auf dieser den Punkt A derart, dass im Falle E auf der Strecke DP liegt, $\overline{DA}^2 = DP.DE$, im Falle aber E auf der Ssrecke DN liegt, $DA^2 = DN.DE$ wird, zieht vom Schnittpunkte der Geraden CA, r Tangenten zu k, so treffen die Verbindungslinien des Punktes R_4 mit den Berührungspunkten im ersten Falle R_1M, im zweiten aber R_2M in denjenigen Punkten, deren entsprechende die Brennpunkte von k' sind.

Fällt R_4 ins Unendliche, ist daher R_3M der zur Richtung der Geraden r conjugirte Durchmesser von k, so fälle man von C eine Senkrechte auf r; liegt der Fusspunkt E derselben zwischen R_3 und R_2, dann ziehe man von den aus der Relation $\overline{R_3A}^2 = R_3R_2.R_3E$ bestimmten Punkte A auf r Tangenten zu k; die Schnittpunkte der durch die Berührungspunkte parallel zu r gelegten Geraden mit MR_1 gehen die den Brennpunkten des k' entsprechende Punkte. — Dies ist die oben erwähnte Pohlke'sche Construction; welche aber im Falle, dass R_2 nach D gelangt, nicht anwendbar ist, daher die allgemeine Construction benutzt wird.

Berührt r den Kegelschnitt k im Punkte R, und sind die Schnittpunkte der durch C gehenden und der auf r, wie auch auf CR senkrecht stehenden Geraden mit r, R_1 resp. E, dann bestimmt man den Punkt A auf r aus der Relation $RE.RR_1 = \overline{RA}^2$, zieht von R_1 und A Tangenten zu k, und durch die Berührungspunkte Parallele zu CR resp. r, der Schnittpunkt derselben ist der dem Brennpunkte der Parabel entsprechende Punkt.

Obige Constructionen werden bei Bestimmung der Brennpunkte des einem Kegelschnitt affinen Kegelschnitts folgender Art angewendet.

Sind k, k' zwei affine Kegelschnitte in persp. Lage, M, M' ihre Mittelpunkte, s die Affinitätsaxe, MS_1, MS_2 die den Axen $M'S_1$, $M'S_2$ von k' entsprechenden conjugirten Durchmesser von k, D der Schnittpunkt des zu s conjugirten Durchmessers MD mit s, endlich E der Fusspunkt der aus M' auf s gefällten Senkrechten. Liegt E auf der Strecke DS_2, dann bestimme man A auf s aus der Relation

$DE.DS_2 = \overline{DA}^2$, ziehe mit AM parallele Tangenten zu k; die durch die Berührungspunkte zu s parallel gelegten Geraden schneiden MS_1 in den, den Brennpunkten von k' entsprechenden Punkten.

Bemerkung. 1. Liegt M, daher auch M' auf s, dann werden die Schnittpunkte von MS_1, MS_2, ME, MD mit einer beliebigen zu s Parallelen benutzt.

2. Geht s parallel zu den Axen von k, und ist zugleich die Projectionsrichtung senkrecht zu s, dann werden statt s und des dieser Geraden conjugirten Durchmessers von k' eine andere Gerade und der ihr conjugirte Durchmesser angewendet.

Wir wollen jetzt die umgekehrte Aufgabe lösen, nämlich: es sind gegeben ein Kegelschnitt k und zwei Punkte F, G seiner Ebene, man bestimme die Collineations-Axe und das Centrum, wie auch die Gegenaxen derart, dass die den F, G entsprechenden Punkte F', G' die Brennpunkte des dem Kegelschnitt k entsprechenden Kegelschnitts werden.

Diese Aufgabe kann nur dann gelöst werden, wenn F, G innerhalb k liegen, d. h. wenn die durch F oder G gehenden conjugirten Geraden eine ellipt. Involution bilden. Sind M. μ die von F, G harmonisch getrennten conjugirten Punkte, R der Pol von FG, dann entsprechen entweder die conjugirten Geraden $M\mu$, MR, oder $M\mu$, μR den Axen des gewünschten Kegelschnitts, weshalb auch der Aufgabe zwei Systeme von Kegelschnitten entsprechen. Das erste System enthält Ellipsen, das zweite Hyperbeln. Der der Geraden $\mu R \equiv r$ conjugirte Durchmesser schneide r in D, die Tangenten in einem der Endpunkte der durch F oder G zu r parallel geführten Sehne schneide r in A. Ist nun der Punkt E auf r so bestimmt, dass er auf der Strecke DR liegt und $DE = \overline{DA}^2 : DR$ ist, dann wird die in E auf r errichtete Senkrechte den über μR als Durchmesser beschriebenen Kreis im Collineations-Centrum treffen; die Collineations-Axe wird zu r parallel angenommen.

Diese Construction ist nicht anwendbar, wenn μ (oder M) ins Unendliche rückt, da in diesem Falle die Punkte D, R, E, A zusammenfallen. Man kann aber die Lage des Collineations-Centrums in diesem, wie auch im allgemeinen Falle bestimmen, wenn man in Betracht zieht, dass die sich im Brennpunkte schneidenden conjugirten Geraden aufeinander Senkrecht stehen, daher man die Schnittpunkte von zwei Par durch F gehenden conjugirten Geraden mit der Polare von M, d. h. der Geraden r ermittelt, durch die entsprechenden Schnittpunkte Kreise legt, deren Mittelpunkt in r liegt; die gemeinsamen Punkte dieser Kreise sind die Collineations-Mittelpunkte.

Fallen F und G zusammen in den innerhalb des Kegelschnitts gelegenen Punkt M, dann gelangt A, daher auch E nach D, und es werden alle conjugirten Punkte der Geraden r aus C unter einem rechten Winkel projicirt, und k' geht in einen Kreis über.

Im Falle, dass G auf k angenommen wird, geht k' in eine Parabel über, und die Construction ist leicht dem bei der Parabel gezeigten directen Verfahren nachzubilden; im Falle aber auch F auf k gelangt, ist die Gegenaxe r unbestimmt, indem dieselbe durch den Pol von FG beliebig gezogen werden kann; immerhin fällt aber C in diesen Pol, daher k' in eine Gerade übergeht.

Liegen F, G auf einem Durchmesser von k und vom Mittelpunkt M desselben gleich weit entfernt, dann wird für ein System der Kegelschnitte k' die Collineation zur Affinität, und die Lage der Affinitätsaxe s kann beliebig angenommen werden. Verbindet man den einen Endpunkt T der durch F zu s parallelen Sehne mit M, nennt die Schnittpunkte der zu TM, FG, s conjugirten Durchmesser mit s, resp. A, S_2, D, wie auch den Schnittpunkt von G mit derselben Geraden S_1, errichtet in dem durch die Relation $DE = \overline{DA}^2 D_2 S_2$ bestimmten Punkte E der Strecke DS_2 eine Senkrechte auf s, so schneidet dieselbe den über $S_1 S_2$ als Durchmesser beschriebenen Kreis im Mittelpunkte M' des zu k affinen Kegelschnitts.

Pressburg, im Febr. 1886.

VI.

Ueber mehrfach perspective Tetraeder.

Von

L. Klug.

---

1. „Wenn fünf Kanten eines Tetraeders von welchen „die ersten drei durch einen Eckpunkt gehen, fünf Kanten „eines andern Tetraeders, von welchen die ersten drei eben„falls durch einen Eckpunkt gehen, schneiden, ohne dass „die Tetraeder einen gemeinsamen Eckpunkt oder Fläche „haben, so schneidet auch die sechste Kante des einen „Tetraeders die sechste Kante des andern, und dieselben „liegen perspectiv."

Wir bezeichnen mit Agh den Schnittpunkt der $M_g M_h$, $N_g N_h$ Kanten der Tetraeder $M \equiv M_1 M_2 M_3 M_4$, $N \equiv N_1 N_2 N_3 N_4$ und setzen voraus, dass ausser $M_1 M_2$, $N_1 N_2$ die übrigen Kanten sich schneiden. Die Punkte $A_{13} A_{14} A_{34}$, A_{23}, $A_{24} A_{34}$ als die Schnittpunkte der in den Flächen $N_1 N_3 N_4$, $M_1 M_2 M_4$ und $N_2 N_3 N_4$, $M_2 M_3 M_4$ liegenden Kanten, welche Flächen weder durch einen gemeinsamen Eckpunkt gehen, noch in einer Ebene liegen, befinden sich je in einer Geraden. Weil sich diese Geraden im Punkte A_{34} schneiden, so haben auch die Geraden $A_{13} A_{23}$, $A_{14} A_{24}$ daher auch die Flächen $N_1 N_2 N_3$, $M_1 M_2 M_3$; $N_1 N_2 N_4$, $M_1 M_2 M_4$ einen gemeinsamen Punkt, welcher der Schnittpunkt der Kanten $N_1 N_2$, $M_1 M_2$ ist.

2. „Wenn drei Kanten eines Tetraeders drei Par „Gegenkanten eines anderen Tetraeders, und ausserdem zwei „Kanten des ersten zwei Kanten des anderen schneiden, so „schneidet auch die sechste Kante des ersten ein Par „Gegenkanten des zweiten Tetraeders und dieselben liegen „auf zweierlei Art perspectiv. Der einer perspectiven Lage

„entsprechende Cellinentiens-Mittelpunkt liegt in derjenigen „Cellincatiens-Ebene, welche der anderen perspectiven Lage „zugehört."

Veransgesetzt, dass $N_g N_h$ Kanten des N Tetraeders, ausser $N_1 N_2$, die Kanten $M_g M_h$ des M in Agh schneiden, und nech die Kanten $N_2 N_3$, $M_1 M_4$; $N_1 N_4$, $M_2 M_3$; $N_3 N_4$, $M_1 M_2$ in A'_{23}, resp. A'_{14}, A'_{34} gemeinsame Punkte hahen, se wird, da $N_1 N_3$, $N_1 N_4$, $N_2 N_3$, $N_2 N_4$, $N_3 N_4$ Kanten des einen, $M_1 M_3$, $M_1 M_4$, $M_2 M_3$, $M_2 M_4$, $M_3 M_4$ und $M_1 M_3$, $M_2 M_3$, $M_1 M_4$, $M_3 M_4$, $M_1 M_2$ Kanten des anderen schneiden: Kante $N_1 N_2$ sewel mit $M_1 M_2$, als $M_3 M_4$ einen Punkt A_{12}, resp. A'_{12} gemeinsam hahen. Die zwei Tetraeder liegen daher auf zweicrlei Art perspectiv, und es entsprechen den $N_1 N_2 N_3 N_4$ Eckpunkten des einen $M_1 M_2 M_3 M_4$ und $M_3 M_4 M_1 M_2$ Eckpunkte des anderen.

Bezeichnet mau mit O_1 den znr ersten persp. Lage gehörigen Cell.-Mittelpunkt, se schneiden die Geraden $O_1 A'_{34}$, $O_1 A'_{14}$, von welchen die erste mit den Kanten $M_1 M_2$, $N_3 N_4$, die zweite mit $M_2 M_3$, $N_1 N_4$ in A'_{34}, resp. A'_{14} gemeinsnme Punkte hat, die den genannten Kanten in der ersten persp. Lage entsprechenden $N_1 N_2$, $M_3 M_4$ resp. $N_2 N_3$, $M_1 M_4$ Kanten in den Punkten A'_{12} resp. A'_{23}, weraus ersichtlich, dass O_1 ein Diagenalpunkt des Vierseits $A_{13} A_{24} A'_{12} A'_{14} A'_{23} A'_{34}$ ist, welches in der znr zweiten persp. Lage gehörige Coll.-Ebene liegt.

Um das Tetraeder N bei gegebenem M zu construiren, nimmt man auf der Transversale ven zwei Gegenkanten z. B. $M_1 M_4$, $M_2 M_3$ des M zwei beliebige Punkte N_2, N_3 an, sucht die Schnittpunkte O_1, O_2, N_4, N_1 von $N_2 M_2$, $N_3 M_3$, resp. $N_2 M_4$, $N_3 M_1$; $O_1 M_4$, $O_2 M_2$; $O_1 M_1$, $O_2 M_3$, : $N_1 N_2 N_3 N_4$ ist das mit $M_1 M_2 M_3 M_4$ auf zweierlei Art bezüglich O_1, O_2 persp. liegende Tetraeder.

3. „Schneiden fünf Kanten eines Tetraeders fünf Par „Gegenkanten eines anderen, se schneidet auch die sechste „Kante des ersten ein Par Gegenkanten des anderen, und „die zwei Tetraeder liegen auf viererlei Art perspectiv."

Wir nehmen an, dass $N_g N_h$ Kante des N, mit Ausnahme von $N_1 N_2$ die Kanten $M_g M_h$, $M_i M_k$ des Tetraeders M in Agh, $A'gh$ schneidet. Wenn den Eckpunkten $N_1 N_2 N_3 N_4$ die Eckpunkte $M_1 M_2 M_3 M_4$ entsprechen, se wird $N_1 N_2$, da die übrigen fünf entsprechenden Kanten sich schneiden, mit $M_1 M_2$ einen gemeinsamen Punkt A_{12} haben, wenn aber denselben Eckpunkten $M_2 M_4 M_1 M_3$ entsprechen, se wird aus demselben Grunde $N_1 N_2$ auch $M_3 M_4$ in A'_{12} schneiden. Den Eckpunkten $N_1 N_2 N_3 N_4$ können aber auch die Eckpunkte $M_2 M_1 M_4 M_3$ und $M_4 M_3 M_2 M_1$ entsprechen (weil die hemelegen Kanten sich schneiden), daher die Tetraeder auf viererlei Art persp. sind. — Wir

bezeichnen die zu den genannten Lagen gehörigen Coll.-Mittelpunkte mit O_1, resp. O_3, O_2, O_4, und es gehen die zu O_1, resp. O_k gehörigen Coll.-Ebenen durch die Vierecke $A_{12}A_{13}A_{14}A_{23}A_{24}A_{34}$, resp. $A_{1k}A_{ik}$ $A'_{1i}A'_{1k}A'_{ki}A'_{ik}$.

Weil die Gerade $O_1A'_{1g}$ die Kanten M_hM_i, N_1N_g in A'_{1g}, und die, diesen Kanten in der ersten persp. Lage entsprechende N_hN_i, M_1M_g in A'_{ki} schneidet, ferner O_gA_{1k}, resp. OA'_{1g} Geraden M_1M_k, N_1N_h; M_hM_i, N_1N_g Kanten in A_{1k}, A'_{1g} und die, diesen Kanten in der $g$ten persp. Lage entsprechenden N_gN_i, M_gM_i; N_hN_i, M_gM_1 in A_{gi}, A'_{ki} schneidet; so sind die vier Coll.-Mittelpunkte die Diagonalpunkte der in den Coll.-Ebenen liegenden Vierecke. Daraus folgt, wegen der harm. Lage der Punkte $O_1A'_{1g}O_gA'_{hi}$, $O_gA_{gk}O_kA_{ik}$, dass zwei beliebige Kanten M_gM_h, M_iM_k; N_gN_h, N_iN_k von M oder N durch zwei Coll.-Mittelpunkte O_g, O_k wie auch O_iO_k und daher durch zwei Coll.-Ebenen $O_gO_hO_i$, $O_gO_hO_k$; $O_iO_kO_g$, $O_iO_kO_k$, endlich durch einen beliebigen Coll.-Mittelpunkt und seine Coll.-Ebene harm. getrennt sind.

Da die Projection der Punkte $N_1A_{1k}N_kA'_{1k}$ aus O_1 : $M_1A_{1k}M_kA'_{ik}$; dieser Punkte aus O_i : $N_iA_{ik}N_kA'_{ik}$; dieser Punkte aus O_1 : $M_iA_{ik}M_kA'_{1k}$; endlich die Projection dieser Punkte aus O_k : $N_kA_{1k}N_1A'_{1k}$ ist, so folgt, dass zwei Gegenkanten M, N Tetraeder, wie M_gM_h, M_iM_k und N_gN_h, N_iN_k durch zwei Par Eckpunkte N_g, N_k; N_i, N_k, resp. M_g, M_h; M_i, M_k der N und M Tetraeder, daher auch durch zwei Par Flächen $N_gN_kN_i$, $N_gN_hN_k$; $N_iN_kN_g$, $N_iN_kN_k$, resp. $M_gM_hM_i$, $M_gM_hM_k$, $M_iM_kM_g$, $M_iM_kM_h$ endlich durch einen Eckpunkt und die Gegenfläche von N, resp. M harm. getrennt sind.

Aus der harm Lage der Punkte $M_gA_{gh}M_hA'_{ik}$, $N_gA_{gh}N_hA'_{gk}$ und daraus, dass O_gO_k Gerade durch A_{gh}, A_{ik} oder A'_{gh}, A'_{ik} geht (je nachdem g, h, oder i, k gleich 1 ist) folgt, dass zwei Gegenkanten des $O_1O_2O_3O_4 \equiv O$ Tetraeders durch M_g, M_h; M_i, M_k wie auch N_g, N_h; N_i, N_k Punkte, daher durch $M_gM_kM_i$, $M_gM_kM_k$; $M_iM_kM_g$, $M_iM_kM_h$ und $N_gN_kN_i$, $N_gN_kN_k$; $N_iN_kN_g$, $N_iN_kN_k$ Ebenen, endlich durch einen Eckpunkt und Gegenfläche von M oder N harm. getrennt sind.

Aus der soeben gefundenen Lage der Eckpunkte, Kanten und Flächen der Tetraeder M, N, O und aus dem Umstande, dass wegen der persp. Lage die Verbindungs- oder Schnittlinie von zwei zu verschiedenen Tetraedern gehörigen Eckpunkten resp. Flächen durch einen Eckpunkt des dritten gehen, resp. in einer Fläche liegen, folgt: zwei zu verschiedenen Tetraedern gehörige Eckpunkte oder Flächen werden durch einen Eckpunkt und Gegenfläche des dritten Tetraeders harm., drei in einer Geraden liegende Eckpunkte der Tetraeder, durch die Gegenflächen involutorisch getrennt.

Das Resultat dieser Untersuchung lautet:

„Durch ein Tetraeder und einen ausserhalb seiner „Flächen liegenden Punkt ist ein anderes Tetraeder be„stimmt, von welchem der angenommene Punkt, und die von „ihm durch die Gegenkanten des Tetraeders harmonisch „getrennten Punkte die Eckpunkte sind. Dieses und das „angenommene Tetraeder sind auf viererlei Art persp.; die „Coll.-Mittelpunkte und Ebenen sind die Eckpunkte und „Flächen ein und desselben neuen Tetraeders. Zwei be„liebige Eckpunkte, Flächen, Gegenkanten, Eckpunkte und „Gegenflächen jedes der drei Tetraeder werden von den „Gegenkanten der anderen zwei harm. getrennt. Zwei zu „verschiedenen Tetraedern gehörige Eckpunkte oder Flächen „werden durch einen Eckpunkt und Gegenfläche des dritten „Tetraeders harm., drei in einer Geraden liegende Eckpunkte „durch die Gegenflächen invol. getrennt. Die 12 Eckpunkte „und Flächen der drei Tetraeder liegen resp. schneiden „sich zu dreien in je 16 Geraden; von den ersten 16 Gera„den gehen durch jeden Eckpunkt 4, welche ein Vierkant „bestimmen, dessen Diagonal-Dreikant drei Kanten eines „der Tetraeder sind, von den anderen 16 Geraden liegen „in jeder Tetraeder-Fläche 4 und bilden ein Vierseit, dessen „Diagonaldreieck die Kanten eines der Tetraeder sind. Die „Kanten der drei Tetraeder liegen in 12 Ebenen und gehen „durch 12 Punkte; dieselben sind die Flächen resp. Eck„punkte von drei neuen Tetraedern, welche dieselbe gegen„seitige Lage haben als die ersten drei Tetraeder. Aber „auch die gegenseitige Lage der zweimal drei Tetraeder „ist übereinstimmend, indem die Flächen oder Eckpunkte „jedes der drei neuen Tetraeder durch sechs Eckpunkte „der anderen gehen, resp. in sechs Flächen derselben liegen, „so wie die Flächen oder Eckpunkte der ersten drei Tetra„eder durch sechs Eckpunkte der neuen gehen, resp. in „sechs Flächen derselben liegen."

„Die ganze Figur enthält 24 Punkte, 24 Ebenen und 50 Gerade; „die Punkte liegen (Ebenen gehen) zu vieren in (durch) 18 Geraden „und zu dreien in (durch) 32 Geraden; durch jeden Punkt gehen (in „jeder Ebene liegen) von den 32 und 18 Geraden 4, resp. 3, von „den 24 Ebenen (Punkten) 7, welche ein Vierkant (Vierseit) mit dem „Diagonal-Drelkant (-Dreiseit) bestimmen."

Die Eckpunkte der im Satze erwähnten drei neuen Tetraeder sind: $A_{gh}A_{ik}A'_{gh}A'_{ik}$, ... und es sind je zwei bezüglich der Eckpunkte

und Gegenflächen des dritten Tetraeders, als Coll.-Mittelpunkt und Ebenen, auf viererlei Art persp. So z. B. sind bezüglich $A_{12}, A_{34}, A'_{12}, A'_{34}$ Coll.-Mittelpunkte $A_{13}A_{24}A'_{13}A'_{24}$ persp. mit $A_{13}A_{14}A'_{23}A'_{24}$, $A_{14}A_{23}A'_{14}A'_{23}$, $A'_{23}A'_{14}A_{23}A_{14}$, $A'_{14}A'_{23}A_{14}A_{23}$.

Aus der eigentümlichen Lage der M, N, O Tetraeder, dass zwei zu verschiedenen Tetraedern gehörige Eckpunkte durch einen Eckpunkt und Gegenfläche des dritten harm. getrennt sind, folgt:

„Die 8 Mittelpunkte der in ein Tetraeder einbeschrie-
„benen Kugeln sind die Eckpunkte von zwei Tetraedern,
„welche sowol zu einander als zu dem Original-Tetraeder
„auf viererlei Art persp. liegen."

5. Zwei Tetraeder haben in Rücksicht auf ihre gemeinsamen Ecken oder Flächen folgende Lage: sie haben a) 3 gemeins. Ecken und 3, 2, 1 gemeins. Flächen; b) 2 gemeins. Ecken und 3, 2, 1, 0 gemeins. Flächen; c) 1 gemeins. Ecke und 3, 2, 1, 0 gemeins. Flächen, endlich d) 0 gemeins. Ecke und 2, 1, 0 gemeins. Flächen.

Bezeichnet man die Eckpunkte der Tetraeder mit $M_1M_2M_3M_4$, $N_1N_2N_3N_4$ und fallen a) M_1, N_1; M_2, N_2; M_3, N_3 zusammen, dann wird $M_1M_2M_3M_4$ entweder mit $N_1N_2N_3N_4$, $N_4N_2N_3N_1$, $N_1N_4N_2N_3$, $N_1N_2N_4N_3$ oder blos mit den drei letzteren persp. liegen, je nachdem N_4 auf M_3M_4 liegt oder nicht. b) Fallen M_1, N_1; M_2, N_2 zusammen, und liegen ausserdem entweder N_3, N_4 auf M_2M_3 resp. M_2M_4 Kanten, oder schneiden sich M_2N_3, M_4N_4, M_1M_2 Geraden in einem Punkte, so ist $M_1M_2M_3M_4$ mit $N_1N_2N_3N_4$, $N_1N_2N_4N_3$, $N_2N_1N_3N_4$; wenn sich aber ausser den gemeins. Eckpunkten blos M_3M_4, N_3N_4 Kanten schneiden oder auf derselben Geraden liegen, dann ist M Tetraeder mit N nur in den zwei ersten Gruppirungen der Eckpunkte perspectiv. c) Fallen M_1, N_1 zusammen, so sind die Tetraeder selbst wenn 3, 2, 1 Eckpunkte von N auf die durch M_1 gehenden Kanten oder Flächen liegen, blos auf einerlei Art persp.; wenn aber $M_2M_3M_4$, $N_2N_3N_4$ Dreiecke in derselben Ebene liegend auf 0, 1, 2, 3, 4-erlei Art persp. sind[1]), dann liegen auch die Tetraeder auf ebenso vielerlei Art persp. d) Haben die Tetraeder keinen gemeins. Eckpunkt, fallen aber N_1N_2, M_1M_2 Kanten auf dieselbe Gerade, und gehen M_1M_2, M_2N_2, M_4N_4 Gerade durch einen Punkt (die Tetraeder haben zwei gemeins. Flächen), so ist $M_1M_2M_3M_4$ persp. mit $N_1N_2N_3N_4$, $N_2N_1N_3N_4$.

Aus diesem ist ersichtlich: „Zwei Tetraeder, welche eine „oder mehr gemeins. Ecken, Flächen, Kanten haben, können nicht „mehr als auf viererlei Art persp. liegen".

1) bei reellen Eckpunkten.

6. „Zwei Tetraeder, welche keine gemeins. Ecken, „Kanten, oder Flächen haben, können nicht dermassen auf „zweierlei Art persp. liegen, dass einem oder zwei Eckpunk- „ten des einen in beiden Lagen dieselben ein oder zwei „Eckpunkte des andern entsprechen.

Weil $M_hM_iM_k$, $N_hN_iN_k$ Dreiecke keine gemeinsamen Eckpunkte haben und auch nicht in einer Ebene liegen, so können sie nur auf einerlei Art, z. B. in der aufgeschriebenen Ordnung der entsprechenden Eckpunkte, persp. sein, woraus folgt: dass $M_gM_hM_iM_k$ Tetraeder mit $N_gN_hN_iN_k$ und mit einem durch eine andere Gruppirung der $N_hN_iN_k$ oder blos der N_iN_k Eckpunkte entstandenen Tetraeder, z. B. $N_gN_iN_k$ N_h, $N_gN_hN_kN_i$, etc. nicht persp. sein kann.

7. „Zwei Tetraeder können nicht dermassen zu ein- „ander persp. liegen, dass vier Eckpunkten des einen vier „Eckpunkte des anderen und noch eine derartige andere „Gruppe dieser letzteren Eckpunkte entsprechen sollen, in „welcher keiner von ihnen demselben Eckpunkt des ersteren „Tetraeders entspricht, als in der früheren Gruppe, aus- „genommen die drei Fälle, wo zwei und zugleich die an- „deren zwei Eckpunkte ihre Stelle in der Gruppe abwech- „selnd verändern.“

Damit $M_gM_hM_iM_k$, zu $N_gN_hN_iN_k$ und $N_hN_kN_gN_i$ persp. sei, ist notwendig, dass in beiden Lagen die entsprechenden Kanten sich schneiden; dies ist aber in dem Falle nur dann möglich, wenn ein Eckpunkt und seine Gegenfläche in der einen, und ein anderer Eckpunkt und seine Gegenfläche in der anderen persp. Lage mit seinem entsprechenden Eckpunkte und Gegenfläche zusammenfällt, z. B. M_g, M_h Eckpunkte mit N_g, N_k; $M_hM_iM_k$, $M_gM_iM_k$ Flächen mit $N_hN_iN_k$, $N_gN_hN_i$ zusammen fallen. Die Verbindungslinien der entsprechenden Eckpunkte der Tetraeder $M_gM_hM_iM_k$, $N_gN_hN_iN_k$ können aber bei dieser Lage nur dann durch einen Punkt gehen, wenn entweder N_h, N_k oder N_i, M_i zusammenfallen; während die Verbindungslinien der entsprechenden Eckpunkte der Tetraeder $M_gM_hM_iM_k$, $N_hN_kN_gN_i$ nur dann durch einen Punkt gehen, wenn N_h, N_i oder N_i, N_k zusammen fallen, und weil weder N_h in M_k und zugleich M_i, noch N_i in M_i und M_k fallen kann, so werden die Tetraeder in den angegebenen Lagen nicht persp. sein.

8. „Zwei Tetraeder mit reellen Eckpunkten können „höchstens auf viererlei Art persp. liegen.“

In 5. ist gezeigt worden, dass zwei Tetraeder mit teilweise zusammenfallenden Elementen nicht mehr als auf viererlei Art persp.

sein können; wir schliessen daher diesen Fall aus. Ist $M_gM_hM_iM_k$ Tetraeder mit $N_gN_hN_iN_k$ persp., dann kann es laut 6. nicht mit den 14, und laut 7. mit den 6 Tetraedern persp. sein, welche durch eine andere Gruppirung der entsprechenden Eckpunkte entstehen, es bleiben daher blos übrig diejenigen drei Tetraeder $N_gN_hN_iN_k$, N_iN_k N_gN_h, $N_kN_iN_hN_g$ deren persp. Lage in 4. betrachtet wurde.

9. „Wenn zwei Tetraeder keine gemeinsamen Elemente „haben, können sie nicht auf dreierlei Art persp. sein."

Hat nämlich M Tetraeder mit N keine gemeins. Elemente, und ist $M_gM_hM_iM_k$ zu $N_gN_hN_iN_k$ persp., so kann es noch zu $N_hN_gN_kN_i$, $N_iN_kN_gN_h$, $N_kN_iN_hN_g$ persp. sein. Wenn man aber voraussetzt, dass $M_gM_hM_iM_k$ zu $N_gN_hN_iN_k$, $N_hN_gN_kN_i$, $N_iN_kN_gN_h$ persp. ist, dann schneiden sich die Kanten: M_gM_k, N_gN_k; M_hM_i, N_hN_i; M_hM_k, N_gN_i; M_gM_i, N_hN_k; M_gM_h, N_iN_k; M_iM_k N_gN_h, daher $M_gM_hM_iM_k$ auch zu $N_kN_iN_hN_g$ persp. sein wird.

* * *

10. Drei parweise persp. Tetraeder bestimmen ausser den in 4. beschriebenen, noch andere Tetraeder.

Projicirt man nämlich aus N_g die $M_gM_hM_iM_k$ Eckpunkte des M Tetraeders auf den Gegenflächen nach $M_g^{(g)}M_h^{(g)}M_i^{(g)}M_k^{(g)}$, so bestimmen dieselben ein Tetraeder $M^{(N_g)}$, und da man aus jedem Eckpunkte des N Tetraeders projiciren kann, so gibt es vier solche $M^{(N_g)}$, $M^{(N_h)}$, ... Tetraeder.

Bezeichnet man die Schnittpunkte der M_gM_h, N_gN_h; M_iM_k, N_gN_k Kanten wie früher mit A_{gh}, A'_{gh}, so ist ersichtlich, dass $A_{gh}A'_{gh}A_{ik}$, $A_{gh}A_{ik}A'_{ik}$ die Diagonaldreiecke der Vierecke $M_g^{(g)}M_h^{(g)}M_g^{(k)}M_h^{(k)}$, resp. $M_g^{(i)}M_h^{(i)}M_g^{(k)}M_h^{(k)}$ sind und dass die Viereck-Seiten $M_g^{(g)}M_h^{(g)}$, $M_g^{(g)}M_g^{(k)}$, $M_g^{(g)}M_h^{(k)}$, $M_h^{(g)}M_g^{(k)}$, $M_g^{(i)}M_h^{(i)}$, $M_g^{(i)}M_g^{(k)}$, $M_g^{(i)}M_h^{(k)}$ durch die Punkte A'_{ik}, resp. A'_{gh}, A_{gh}, A_{gh}, A_{gh}, A_{ik}, A'_{ik} gehen.

Jedes der $M^{(N_g)}$, $M^{(N_h)}$, ... Tetraeder ist zu M und O persp., die Coll.-Mittelpunkte sind die Eckpunkte von N, die Coll.-Ebenen ihre Gegenflächen, da sich die entsprechenden Kanten nach dem Obigen in Punkten der Flächen des N Tetraeders schneiden.

Die 16 Eckpunkte der vier $M^{(N_g)}$... Tetraeder können aber auch als Eckpunkte von vier anderen dem M einbeschriebenen Tetraeder: $M^{(O_1)} \equiv M_g^{(g)}M_h^{(h)}M_i^{(i)}M_k^{(k)}$, $M^{(O_h)} \equiv M_1^{(h)}M_h^{(1)}M_i^{(k)}M_k^{(i)}$ und von vier

in den Flächen von M liegenden Vierecken: $M^{(M_g)} \equiv M_g^{(g)} M_g^{(h)} M_g^{(i)} M_g^{(k)}$ betrachtet werden; diese Tetraeder sind zu M, N bezüglich der Eckpunkte und Gegenflächen des O Tetraeders als Coll.-Mittelpunkt und Ebenen, die Vierecke zu O, N bezüglich der Eckpunkte von M persp., da die Eckpunkte der $M^{(O_i)}$, $M^{(O_k)}$ Tetraeder, die Projectionen von $M_1 M_h M_i M_k$ aus O_1, resp. O_h, die Eckpunkte der $M^{(M_g)}$, ... Vierecke die Projectionen von $N_g N_h N_i N_k$ aus M_g sind.

Je zwei der $M^{(N_g)}$, $M^{(N_h)}$, ..., und $M^{(O_g)}$, $M^{(O_h)}$, ... wie auch $M^{(M_g)}$, $M^{(M_h)}$ ... Tetraeder und Vierecke sind zu einander bezüglich den Eckpunkten und Gegenflächen der $A_{gh} A_{ik}$ $A'_{gh} A_{ik}$ Tetraeder als Coll.-Mittelpunkte und Ebenen auf zweierlei Art persp. So sind z. B. die Tetraeder $M^{(N_g)}$, $M^{(N_h)}$ bezüglich A_{gh}, A'_{gh}; $M^{(O_i)}$, $M^{(O_k)}$ bezüglich A'_{ik}, A'_{ik}; $M^{(O_k)}$, $M^{(O_i)}$ bezüglich A_{ik}, A_{ki}, die Vierecke $M^{(M_g)}$, $M^{(M_h)}$ bezüglich A_{gh}, A'_{ik} persp., und es entsprechen den Eckpunkten von $M_g^{(g)} M_h^{(g)} M_i^{(g)} M_k^{(g)}$, $M_1^{(1)} M_h^{(h)} M_i^{(i)} M_k^{(k)}$, $M_1^{(h)} M_h^{(1)} M_i^{(k)} M_k^{(i)}$, $M_g^{(g)} M_g^{(h)} M_g^{(i)} M_g^{(k)}$, resp. die Eckpunkte $M_h^{(h)} M_g^{(h)} M_i^{(h)} M_k^{(h)}$, $M_g^{(h)} M_k^{(h)} M_k^{(h)} M_i^{(k)}$, $M_1^{(h)} M_h^{(1)} M_k^{(i)} M_i^{(k)}$, $M_h^{(1)} M_1^{(h)} M_i^{(k)} M_k^{(i)}$; $M_k^{(h)} M_h^{(k)} M_i^{(1)} M_1^{(i)}$, $M_1^{(i)} M_i^{(1)} M_h^{(k)} M_k^{(h)}$; $M_h^{(h)} M_k^{(g)} M_h^{(i)} M_k^{(k)}$, $M_h^{(g)} M_h^{(h)} M_h^{(k)} M_h^{(i)}$, da die Verbindungslinien der entsprechenden Eckpunkte durch die angegebenen Coll.-Mittelpunkte gehen. Es ist aber auch leicht einzusehen, dass die Gegenflächen der Coll.-Mittelpunkte der $A_{gh} A_{ik} A'_{gh} A'_{ik}$ Tetraeder die Coll.-Ebenen sind, da sich z. B. bei den Tetraedern $M^{(N_g)}$, $M^{(N_h)}$ die Kanten $M_g^{(g)} M_h^{(g)}$, $M_h^{(h)} M_g^{(h)}$ $M_i^{(g)} M_k^{(g)}$, $M_i^{(h)} M_k^{(h)}$ in beiden persp. Lagen entsprechen, daher die beiden Coll.-Ebenen durch ihre Schnittpunkte A'_{ik}, A_{ik} und (laut 2.) auch abwechselnd durch die Coll.-Mittelpunkte gehen.

Jedes der $M^{(N_g)}$ ... Tetraeder ist zu jedem der $M^{(O_g)}$ ... persp.; die Coll.-Mittelpunkte und Ebenen sind die Eckpunkte und Gegenflächen von M. So sind die Tetraeder $M^{(N_g)}$, $M^{(O_g)}$ bei jedem Werte des g Indexes bezüglich M_1; $M^{(N_1)}$, $M^{(O_h)}$; $M^{(N_h)}$, $M^{(O_1)}$; $M^{(N_i)}$, $M^{(O_k)}$; $M^{(N_k)}$, $M^{(O_i)}$ bezüglich M_h persp., da $M_g^{(g)} M_g^{(h)}$, $M_i^{(g)} M_i^{(h)}$ als Verbindungsgeraden der entsprechenden Eckpunkte durch M_h gehen.

Die Vierecke $M^{(M_g)}$, ... sind auch persp. mit $M^{(N_g)}$, ... $M^{(O_g)}$ Tetraeder; die 32 zu diesen Lagen gehörigen Coll.-Mittelpunkte sind

die Eckpnnkte von 8 dem M nmschriebenen Tetraedern, welche dieselben 16 Flächen haben, und von welchen vier zu M, N, vier zn M, O persp. liegen.

Das Tetraeder $M^{(N_g)}$ und Viereck $M^{(M_g)}$ hat nämlich in $M_g^{(g)}$ einen gemeins. Eckpnnkt, nnd es schneiden sich die entsprechenden Selten der $M_h^{(g)} M_i^{(g)} M_k^{(g)}$, $M_g^{(h)} M_g^{(i)} M_g^{(k)}$ Dreiecke in $A_{hi} A_{hk} A_{ik}$ Punkten, daher das Tetraeder und Viereck persp. liegen. Die dnrch $M_k^{(g)} M_i^{(g)}$, $M_g^{(h)} M_g^{(i)}$ entsprechende Seiten gelegte Ebene enthält $A_{hi} A_{gh} A_{gi} M_k$ Punkte, dahor ist der zu $M^{(N_g)}$, $M^{(M_g)}$ gehörige Coll.-Mittelpnnkt der Schnittpnnkt von den Verbindnngsebenen der $A_{hi} A_{gh} A_{gi}$, $A_{hk} A_{gh} A_{gk}$, $A_{ik} A_{gi} A_{gk}$ Geraden mit M_k, resp. M_i, M_k Punkten, nnd da diese Geraden die Schnittlinien der $O_2 O_3 O_4$ Ebene mit den durch M_g gehenden Flächen des M Tetraeders sind: so werden die Eckpnnkte desjenigen Tetraeders, welches M nmschrieben ist, nnd dessen Flächen M in der $O_2 O_3 O_4$ Ebene schneiden, die zn den persp. Lagen der $M^{(N_g)}$, $M^{(M_g)}$; $M^{(N_h)}$, $M^{(M_h)}$; ... Tetraeder nnd Vierecke gehörige Coll.-Mittelpnnkte sein.

Ebenso kann bewiesen werden, dass die zn den persp. Lagen der $M^{(N_1)}$, $M^{(M_h)}$; $M^{(N_h)}$, $M^{(M_1)}$; $M^{(N_i)}$, $M^{(M_k)}$ nnd $M^{(O_g)}$, $M^{(M_g)}$ ...; $M^{(O_1)}$, $M^{(M_h)}$; $M^{(O_h)}$, $M^{(M_1)}$; $M^{(O_i)}$, $M^{(M_k)}$ gehörigen Coll.-Mittelpunkte die Eckpnnkte derjenigen dem M nmschriebenen Tetraeder sind, welche die Flächen von M in den Ebenen $O_1 O_i O_k$, resp. $N_2 N_3 N_4$, $N_1 N_i N_k$ schneiden.

Weil sich (laut 4.) die Flächen der M, N, O Tetraeder in 16 Geraden schneiden, so haben die 8 nmgeschriebenen Tetraeder dieselben Flächen, nnd weil vier von ihnen dio Flächen der M, N, die anderen die Flächen der M, O in einer Ebene liegenden Geraden schneiden, so sind vier der nmschriebenen Tetraeder mit M, N; vier mit M, O persp.

Wir haben daher folgenden Satz, dessen reciprok entsprechender leicht ausgesprochen werden kann.

„Wenn drei Tetraeder parweise persp. liegen, dann „giht es vier, zu dem ersten und zweiten, vier zn dem ersten „und dritten persp., dem ersten elnheschriebene Tetraeder, „und vier zu dem zweiten und dritten Tetraeder persp. „Vierecke, welche in den Flächen des ersten liegen; die 8 „Tetraeder nnd 4 Vierecke haben dieselben 16 Eckpnnkte. „Die ersten vier, sowie die zweiten vier Tetraeder nnd „die Vierecke sind parweise zu einander in Bezug auf die

„Kanten-Schnittpunkte der Urtetraeder als Coll.-Mittel-„punkte auf zweierlei Art persp. Zwei einbeschriebene Te-„traeder, welche nicht zu denselben zwei Urtetraedern „persp. liegen, sind zu einander bezüglich der Eckpunkte „des ersten Tetraeders persp.; jedes einbeschriebene Te-„traeder liegt auch persp. zu den Vierecken bezüglich der „Eckpunkte derjenigen Tetraeder, welche dem ersten um-„schrieben und zugleich dem ersten und zweiten, oder dem „ersten und dritten persp. ist.“

11. Wir wollen endlich die gegenseitige Lage, der in dem M N, O Tetraedern einbeschriebenen Tetraeder untersuchen.

Zu dem Ende bezeichnen wir wie oben die Projection der Eckpunkte $N_g N_h N_i N_k$ auf die Gegenflächen aus O_g, O_h, O_i, O_k mit $N_g^{(g)} N_h^{(g)} N_i^{(g)} N_k^{(g)}$, $N_g^{(h)} N_h^{(h)} N_i^{(h)} N_k^{(h)}$, ...; die Tetraeder, deren Eckpunkte die 16 Projectionen, und welche in N, M resp. N, O einbeschrieben sind, mit $N^{(O_g)} \equiv N_g^{(g)} N_h^{(g)} N_i^{(g)} N_k^{(g)}$, ...; $N^{(M_1)} \equiv N_1^{(1)} N_h^{(h)} N_i^{(i)} N_k^{(k)}$, $N^{(M_h)} \equiv N_1^{(h)} N_h^{(1)} N_i^{(k)} N_k^{(i)}$, und bemerken, dass $N_g^{(g)} N_h^{(g)}$, $N_g^{(g)} N_g^{(h)}$, $N_g^{(g)} N_h^{(h)}$, $N_g^{(h)} N_h^{(g)}$, $N_g^{(i)} N_g^{(k)}$, $N_g^{(i)} N_h^{(k)}$, $N_g^{(i)} N_h^{(i)}$ Gerade durch Agh, $A'ik$, $A'gh$, $A'gh$, Aik, Agh, $A'gh$ oder $A'gh$, Aik, Agh, Agh, $A'ik$, $A'gh$, Agh gehen, je nachdem g, h oder i, k gleich 1 ist.

Die Tetraeder $M^{(O_g)}$, $N^{(O_g)}$ sind bei jedem Werte des g Indexes auf viererlei Art persp. bezüglich der Eckpunkte und Gegenflächen des O Tetraeders, als Coll.-Mittelpunkte und Ebenen, und zwar derweise, dass den Eckpunkten $M_1^{(1)} M_h^{(h)} M_i^{(i)} M_k^{(k)}$ des $M^{(O_1)}$ die Eckpunkte $M_1^{(1)} M_h^{(1)} M_i^{(1)} M_k^{(1)}$, $N_h^{(1)} N_1^{(1)} N_i^{(1)} N_k^{(1)}$ von $N^{(O_1)}$ bezüglich O_1, resp. O_h, den Eckpunkten $M_1^{(h)} M_h^{(1)} M_i^{(k)} M_k^{(i)}$ des $M^{(O_h)}$, die Eckpunkte $N_1^{(h)} N_h^{(h)} N_i^{(h)} N_k^{(h)}$, $N_h^{(h)} N_1^{(h)} N_k^{(h)} N_i^{(h)}$, $N_i^{(h)} N_k^{(h)} N_1^{(h)} N_h^{(h)}$, $N_k^{(h)} N_i^{(h)} N_h^{(h)} N_1^{(h)}$ bezüglich O_1, O_h, O_i, O_k als Coll.-Mittelpunkte entsprechen.

Dies folgt für O_1 als Coll.-Mittelpunkt und $M_1^{(1)} M_h^{(h)} M_i^{(i)} M_k^{(k)}$, $N_1^{(1)} N_h^{(1)} N_i^{(1)} N_k^{(1)}$, wie auch für O_h als Coll.-Mittelpunkt und $M_1^{(h)} M_h^{(1)} M_i^{(k)} M_k^{(i)}$, $N_h^{(h)} N_1^{(h)} N_k^{(h)} N_i^{(h)}$ als entsprechende Eckpunkte unmittelbar, da die Geraden $M_g N_g$ bei jedem Werte von g durch O_1, die Geraden $M_h N_1$, $M_1 N_h$, $M_i N_k$, $M_k N_i$ durch O_h gehen. Dies in Betracht gezogen wird der Beweis für die übrigen Tetraeder-Combinationen auf folgende Art erhalten.

Die Diagonaldreiecke der Vierecke $M_1 M_h N_1 N_h$, $M_i M_k N_i N_k$

sind $O_1O_hA_{1h}$, $O_1O_hA_{ik}$, und es liegen die durch A_{1h}. A_{ik} gehenden Geradenpare $M_1^{(1)}M_h^{(h)}$, $N_1N_h^{(1)}$, resp. $M_i^{(i)}M_k^{(k)}$, $N_i^{(1)}N_k^{(1)}$ in den Ebenen der genannten Vierecke, weshalb auch diese Geradenpare, die von O_1 und ihrer Gegenfläche im O Tetraeder harm. getrennt sind, auch von O_1, O_h Punkte harm. getrennt sein werden, woraus man schliessen kann, da die Geraden $M_1^{(1)}N_1^{(1)}$, $M_h^{(h)}N_h^{(1)}$, ... durch O_1 gehen, dass $O_1O_hA_{1h}$, $O_1O_hA_{ik}$ auch die Diagonaldreiecke von $M_1^{(1)}M_h^{(h)}N_1^{(1)}N_h^{(1)}$, $M_i^{(i)}M_k^{(k)}N_i^{(1)}N_k^{(1)}$ sind, daher sich die Verbindungsgeraden der Punkte $M_1^{(1)}N_h^{(1)}$, $M_h^{(h)}N_1^{(1)}$, $M_i^{(i)}N_k^{(1)}$, $M_k^{(k)}N_i^{(1)}$ in O_1 schneiden wie auch das diese Punktpare von O_h durch $O_1O_iO_k$ Ebene harm. getrennt sind. Ferner sind die Diagonaldreiecke der Vierecke $M_1M_iN_hN_k$, $M_hM_kN_1N_i$; resp. $O_hO_kA'_{hk}$, $O_hO_kA'_{1i}$, und es liegen die durch A'_{hk}, A'_{1i} gehenden Geradenpare $M_1^{(h)}M_i^{(k)}$, $N_h^{(h)}N_{(k}$; $M_h^{(1)}M_k^{(i)}$, $N_1^{(h)}N_i^{(k)}$ in den Ebenen der genannten Vierecke, weshalb auch die Geradenpare, welche von O_h und ihrer Gegenfläche im O Tetraeder harm. getrennt sind, auch von O_i, O harm. getrennt sein werden, woraus wir schliessen können, da die Geraden $M_1^{(h)}N_h^{(h)}$, $N_i^{(k)}N_k^{(h)}$, $M_k^{(i)}N_i^{(h)}$, $M_{(1)}N_1^{(h)}$ durch O_h gehen, dass $O_hO_kA'_{hk}$, $O_hO_kA'_{1i}$ auch die Diagonaldreiecke von $M_1^{(h)}M_i^{(k)}N_h^{(h)}N_k^{(h)}$, $M_h^{(1)}M_k^{(i)}N_1^{(h)}N_i^{(h)}$ sind, und daher sich die Verbindungsgeraden der Punkte $M_1^{(h)}N_k^{(h)}$, $M_i^{(k)}N_h^{(h)}$, $M_k^{(i)}N_1^{(h)}$, $M_h^{(1)}N_i^{(h)}$ im Punkte O_h schneiden.

Eine andere Eigenschaft der einbeschriebenen Tetraeder besteht darin, dass jedes $M^{(N_g)}$ persp. ist zu jedem $N^{(M_g)}$ bezüglich der Eckpunkte und Gegenflächen des O Tetraeders als Coll.-Mittelpunkt und Ebene.

Das Tetraeder $M^{(N_1)} \equiv M_1^{(1)}M_h^{(1)}M_i^{(1)}M_k^{(1)}$ ist nämlich bezüglich O_1, O_h mit $N^{(M_1)} \equiv N_1^{(1)}N_h^{(h)}N_i^{(i)}N_k^{(k)}$, $N^{(M_h)} \equiv N_h^{(1)}N_1^{(h)}N_k^{(i)}N_i^{(k)}$; das Tetraeder $M^{(N_h)} \equiv M_1^{(h)}M_h^{(h)}M_i^{(h)}M_k^{(h)}$ aber bezüglich O_1, O_h, O_i mit $N^{(M_1)} \equiv N_1^{(h)}N_h^{(1)}N_i^{(k)}N_k^{(i)}$, $N^{(M_h)} \equiv N_h^{(h)}N_1^{(1)}N_k^{(k)}N_i^{(i)}$, $N^{(M_i)} \equiv N_i^{(h)}N_k^{(1)}N_1^{(k)}N_h^{(i)}$ persp., da die Verbindungsgeraden der hier aufgeschriebenen entsprechenden Eckpunkte, wie aus den 16 Tetrader-Combinationen $M^{(O_g)}$, $N^{(O_g)}$ ersichtlich, durch die angegebenen Coll.-Mittelpunkte gehen, und die entsprechenden Punkte von den Coll.-Mittelpunkten und der Gegenfläche dieses Eckpunktes im O Tetraeder harm. getrennt sind.

Das Resultat dieser Untersuchung kann wie folgt ausgesprochen werden:

„Wenn drei Tetraeder parweise auf viererlei Art „persp. liegen, dann sind a) je zwei zu dem ersten und „zweiten Tetraeder perspective, und zugleich dem ersten „resp. zweiten { einbeschriebene / umschriebene } Tetraeder zu einander „bezüglich der Eckpunkte und Gegenflächen des dritten „Tetraeders als Coll.-Mittelpunkte und Ebenen, auf viererlei „ Art persp.; b) jedes dem ersten {einbeschriebene / umschriebene} und „zu dem ersten und dritten perspective Tetraeder ist zu „jedem dem zweiten { einbeschriebenen / umschriebenen } und zum zweiten „und dritten perspectiven Tetraeder, bezüglich eines Eck-„punktes und Gegenfläche des dritten Tetraeders, als Coll.-Mittelpunkt und Ebene, perspectiv.“

VII.

Miscellen.

1.

Zur Theorie der harmonischen Reihe.

1. In meiner Inaugural-Dissertation über die „harmonische Reihe“ [1]) ist diese Reihe als solche definirt, bei der von je drei aufeinander folgenden Gliedern das mittlere das harmonische Mittel der beiden äussern ist. Es ergiebt sich so eine Folge von Brüchen mit constantem Zähler, deren Nenner eine arithmetische Reihe bilden. Als die „Differenz“ der letzteren kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit stets 1 angenommen werden; denn wird

$$(1) \qquad \frac{1}{z}+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z+2}+\cdots+\frac{1}{z+n}=S_n(z)$$

gesetzt, so ist die allgemeine harmonische Reihe

$$(2) \qquad \frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}+\cdots+\frac{1}{a+nb}=\frac{1}{b}\,S_n\left(\frac{a}{b}\right)$$

also auf jene sofort zurückzuführen. In grundsätzlich elementarer Abhandlung wurde nun der Satz gewonnen, dass mit n zwar auch $S_n(z)$ ins Unendliche wächst, aber nur wie der Logarithmus von n, so dass, wenn

$$(3) \qquad S_n(z)-\log(n+z)=C_n(z)$$

gesetzt wird, die Function $C_n(z)$ mit wachsendem n, beständig abnehmend, einem nur von z abhängigen Grenzwert $C(z)$ zustrebt. Derselbe ist wesentlich gleichbedeutend mit der Gauss'schen Function [2])

$$\Psi(z)=\lim_{n=\infty}\left[\log n-S_{n-1}(z+1)\right]$$

da offenbar

$$C(z)=-\Psi(z-1), \quad \Psi(z)=-C(z+1)$$

---

1) Halle 1886. Ein vermehrter Abdruck der Arbeit im „Archiv d. Math.“ steht bevor.

2) Disquisitiones generales circa seriem infinitam etc. Art. 30.

ist. Insbesondere hat man für $z = 1$ die Euler-Mascheroni'sche Constante

$$C(1) = c = \lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n\right) = 0{,}5772156649 \ldots$$

Von den allgemeinen Eigenschaften der Function, die schon Gauss aufgefunden hat, sind hier nur drei zu erwähnen, die im Folgenden Anwendung finden. Es ist nämlich

$$C(z) - C(1-z) = \pi \operatorname{cotg} \pi z, \tag{4}$$

$$\sum_{k=1}^{m} C\left(z + \frac{k}{m}\right) = mC(mz) + m \log m \tag{5}$$

und mit Hilfe dieser Sätze kann man $C(z)$ für beliebige rationale und echt gebrochene z durch die Formeln darstellen:

$$C\left(\frac{n}{m}\right) = c + \frac{\pi}{2} \operatorname{cotg} \frac{n\pi}{m} + \log m - 2 \sum_{k=1}^{\frac{m-1}{2}} \cos \frac{2k\pi n}{m} \log\left(2 \sin \frac{k\pi}{m}\right).$$

für ungerade m, (6)

$$C\left(\frac{n}{m}\right) = c + \frac{\pi}{2} \operatorname{cotg} \frac{n\pi}{m} + \log m - 2 \sum_{k=1}^{\frac{m-2}{2}} \cos \frac{2k\pi n}{m} \log\left(2 \sin \frac{k\pi}{m}\right) + (-1)^{n+1} \log 2,$$

für gerade m,

$$C\left(\frac{n}{m}\right) = c + \frac{\pi}{2} \operatorname{cotg} \frac{n\pi}{m} + \log(2m) - 2 \sum \cos \frac{kn\pi}{m/2} \log \operatorname{tg} \frac{k\pi}{m} \tag{6a}$$

(n ungerade, m gerade; $k = 1, 2, 3 \ldots \frac{m-4}{4}$ oder $\frac{m-2}{4}$)

Durch die Function C lassen sich leicht beliebige Ausschnitte der harmonischen Reihe ausdrücken; die alternirende Reihe $\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+2} - \frac{z}{z+3} \ldots$ lässt sich als Differenz zweier harmonischen Reihen mit positiven Gliedern durch zwei C-Functionen summiren, und die Wert-Aenderung, die dieselbe Reihe erfährt, wenn das Verhältniss der Anzahl der positiven Glieder zur Anzahl der negativen Glieder geändert wird, ist ebenfalls mit Hilfe von C leicht zu entwickeln. Bezüglich aller dieser, sowie anderer damit zusammenhangender Fragen sei auf die angeführte Arbeit verwiesen und nur bemerkt, dass eine elementare und zugleich strenge Behandlung

derselben hauptsächlich dadurch ermöglicht wird, dass zunächst mit endlichen Reihen und mit der noch von ihrem Index abhängigen Function C_n gerechnet wird, so dass bis zum Augenblick des Grenzüberganges für $n = \infty$ alles durchaus geschlossen im Endlichen vor sich geht.

Dasselbe Verfahren wollen wir bei der hier zu lösenden Aufgabe einschlagen.

2. Aus der harmonischen Reihe werde eine neue in der Weise gebildet, dass die Vorzeichen gruppenweise wechseln; die ersten p Glieder sollen positiv, die p nächsten negativ genommen werden u. s. f. Gesucht ist die Summe der neuen Reihe, im Falle ihrer Convergenz.

Schreiben wir der Kürze wegen $\frac{1}{z+k} = h_k$, so ist die Summe der ersten $2pn$ Glieder

$$\begin{aligned}\sigma_{2pn}(z) = {} & h_0 + h_1 + \ldots + h_{p-1} - h_p - h_{p+1} - \ldots - h_{2p-1} \\ & + h_{2p} + \ldots + h_{3p-1} - h_{3p} - \ldots - h_{4p-1} \\ & + \ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots \\ & + h_{(2n-2)p} + \ldots h_{(2n-1)p-1} - h_{(2n-1)p} - h_{2np-1}\end{aligned}$$

oder, wenn wir die Glieder nach Verticalreihen zusammenfassen,

$$\begin{aligned}\sigma_{2pn}(z) = {} & \sum_{k=0}^{p-1} \left\{ h_k + h_{k+2p} + \ldots + h_{k+(2n-2)p} \right\} \\ & - \sum_{k=0}^{p-1} \left\{ h_{k+p} + h_{k+3p} + \ldots + h_{k+(2n-1)p} \right\}\end{aligned}$$

Hier kann man nun die beiden Summen zu einer einzigen zusammenziehen und die negativen Glieder einzeln hinter die positiven einschalten, wodurch σ_{2pn} als Summe von alternirenden harmonischen Reihen dargestellt erscheint. Um aber die Summenformel für die letzteren nicht voraussetzen zu müssen, wollen wir lieber unmittelbar Formel (2) auf jede der beiden Summen anwenden und erhalten so:

$$\sigma_{2pn} = \frac{1}{2p} \sum_{k=0}^{p-1} \left\{ S_{n-1}\left(\frac{z+k}{2p}\right) - S_{n-1}\left(\frac{z+k+p}{2p}\right) \right\}$$

oder nach (3)

$$= \frac{1}{2p} \sum_{k=0}^{p-2} \left\{ C_{n-1}\left(\frac{z+k}{2p}\right) - C_{n-1}\left(\frac{z+k+p}{2p}\right) + \log \frac{n-1+\frac{z+k}{2p}}{n-1+\frac{z+k+p}{2p}} \right\}$$

Für $n = \infty$ verschwindet jeder der p Logarithmen, so dass sich ergiebt:

$$\text{(I)} \quad \sigma(z) = \frac{1}{2p} \sum_{k=0}^{p-1} \left\{ C\left(\frac{z+k}{2p}\right) - C\left(\frac{z+k}{2p}+\tfrac{1}{2}\right) \right\}$$

Schreiben wir dies noch

$$2p.\,\sigma(z) = \sum_{0}^{p-1} C\left(\frac{z+k}{2p}\right) - \sum_{p}^{2p-1} C\left(\frac{z+k}{2p}\right) = \sum_{0}^{2p-1} C - 2 \sum_{p}^{2p-1} C\left(\frac{z+k}{2p}\right)$$

so ist nach (5)

$$\sum_{2}^{2p} C\left(\frac{z-1}{2p} + \frac{k}{2p}\right) = 2p\,C(z) + 2p \log(2p)$$

also auch

$$\text{(II)} \quad \sigma(z) = C(z) + \log(2p) - \frac{1}{p} \sum_{k=p}^{2p-1} C\left(\frac{z+k}{2p}\right)$$

Für $p = 1$ geht σ in die einfach alternirende Reihe über. Wir erhalten für diesen Fall aus (I) und (II) die Formeln (29) und (30) der Differentation.

Beispiel. Es ist

$$1+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\frac{1}{13}+\frac{1}{16}-\frac{1}{19}-\frac{1}{22}++--\ldots = \frac{1}{3}\,\sigma\left(\frac{1}{3}\right)$$

Da hier $p = 2$ ist, haben wir aus (I)

$$\sigma\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4}\left\{ C\,\frac{1}{12} - C\,\frac{7}{12} + C\,\frac{1}{3} - C\,\frac{5}{6} \right\}$$

Nun ist aus (6) bzhw. (6a)

$$C\,\frac{1}{3} = c + \frac{3}{2}\log 3 + \frac{\pi}{6}\sqrt{3}$$

$$C\,\frac{1}{12} = c + 3\log 2 + \frac{3}{2}\log 3 - \sqrt{3}\log(2-\sqrt{3}) + \frac{\pi}{2}(2+\sqrt{3})$$

$$C\,\frac{5}{6} = c + \frac{3}{2}\log 3 + 2\log 2 - \frac{\pi}{2}\sqrt{3}$$

$$C\frac{7}{12} = c + 3\log 2 + \frac{3}{2}\log 3 + \sqrt{3}\log(2-\sqrt{3}) - \frac{\pi}{2}(2-\sqrt{3})$$

also

$$1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} - \frac{1}{16} \ldots = \frac{1}{6}\left\{\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \log 2 - \sqrt{3}\log(2-\sqrt{3})\right\}$$

3. Anwendung auf die „specielle" harmonische Reihe.

Für $s = 1$ vereinfacht sich Formel (I) erheblich, selbst wenn p ganz unbestimmt bleibt. Es ist

$$2p\,\sigma(1) = C\frac{1}{2p} + C\frac{2}{2p} + \ldots + C\frac{p-1}{2p} + C\frac{p}{2p} - C\frac{2p}{2p} - C\frac{2p-2}{2p} - \ldots - C\frac{p+1}{2p}$$

oder, nach (4), da die untereinander stehenden Functionen C Argumente besitzen, deren Summe 1 ist,

$$2p\,\sigma(1) = -c + C\frac{1}{2} + \pi\left(\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2p} + \operatorname{cotg}\frac{2\pi}{2p} + \ldots + \operatorname{cotg}\frac{(p-1)\pi}{2p}\right).$$

Hier ergänzen sich die Bogen je zweier symmetrisch zur Mitte stehenden Cotangenten zu $\frac{\pi}{2}$. Da nun allgemein

$$\operatorname{cotg} u + \operatorname{tg} u = \frac{2}{\sin 2u}$$

ist, so haben wir, wenn p ungerade, etwa gleich $2m+1$ ist,

$$\sum_1^{2m} \operatorname{cotg}\frac{k\pi}{4m+2} = 2\left\{\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2m+4}} + \frac{1}{\sin\frac{2\pi}{2m+1}} + \ldots + \frac{1}{\sin\frac{m\pi}{2m+1}}\right\}$$

und für $p = 2m$, in welchem Falle ein Mittelglied $\operatorname{cotg}\frac{m\pi}{4m} = 1$ vorhanden ist,

$$\sum_1^{2m-1} \operatorname{cotg}\frac{k\pi}{4m} = 2\left\{\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2m}} + \frac{1}{\sin\frac{2\pi}{2m}} + \ldots + \frac{2m}{\sin\frac{(m-1)\pi}{2m}}\right\} + 1$$

Wenn wir schliesslich noch beachten, dass

$$C\tfrac{1}{2} = c + 2\log 2$$

ist, wie sich unmittelbar aus (5) für $s = 0$, $m = 2$ ergiebt, so kommt also

$$\sigma(1) = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p}\right)-\left(\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+2}+\ldots+\frac{1}{2p}\right)+-\ldots$$

$$\text{(III)} \quad = \frac{2}{2\pi}+\frac{1}{p}\log 2+\frac{\pi}{p}\sum_{k=1}^{\frac{p}{2}-1}\frac{1}{\sin\frac{k\pi}{p}} \quad \text{für gerade } p$$

$$= \frac{1}{p}\log 2+\frac{\pi}{p}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{1}{\sin\frac{k\pi}{p}} \quad \text{für ungerade } p.$$

Beispiele: Hiernach ist: Für $p = 2$,

$$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\ldots = \frac{1}{2}\log 2+\frac{\pi}{4}$$

wie auch unmittelbar ersichtlich.

Für $p = 3$,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\ldots = \frac{1}{3}\log 2+\frac{\pi}{3\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{3}\log 2+\frac{2}{9}\pi\sqrt{3}$$

Für $p = 4$,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\ldots = \frac{1}{4}\log 2+\frac{\pi}{4}\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right)$$

4. Anwendung auf die Reihe der reciproken ungeraden Zahlen. Für $z = \frac{1}{2}$ ist

$$\frac{1}{2}\sigma\left(\frac{1}{2}\right) = \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2p-1}\right)-\left(\frac{1}{2p+1}+\ldots+\frac{1}{4p-1}\right)+-\ldots$$

Nach I. wird für diesen Fall

$$\begin{aligned} 2p\,\sigma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \quad & C\frac{1}{4p}+C\frac{3}{4p}+\ldots+C\frac{2p-1}{4p} \\ & -C\frac{4p-1}{4p}-C\frac{4p-3}{4p}-\ldots-C\frac{2p+1}{4p} \\ & -\pi\left(\operatorname{cotg}\frac{\pi}{4p}+\operatorname{cotg}\frac{3\pi}{4p}+\ldots+\operatorname{cotg}\frac{2p-1}{4p}\right). \end{aligned}$$

Dieselbe Umformung wie vorher ergiebt hier

$$\text{(IV)}\quad \sigma(\tfrac{1}{p}) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2p} + \dfrac{\pi}{p} \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \dfrac{1}{\sin\frac{(2k-1)\pi}{2p}}, & \text{wenn } p \text{ ungerade} \\ \dfrac{\pi}{p} \sum_{k=1}^{\frac{p}{2}} \dfrac{1}{\sin\frac{(2k-1)\pi}{2p}}, & \text{wenn } p \text{ gerade.} \end{cases}$$

Beispiele. Für $p = 2$ wird $\sigma(\frac{1}{2}) = \dfrac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{4}}$, also

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}\cdots = \frac{\pi}{4}\sqrt{2}$$

Für $p = 3$ ist $\sigma(\frac{1}{2}) = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3\sin\frac{\pi}{6}}$, so dass

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\cdots = \frac{\sigma}{12}\pi$$

Diese Reihe lässt sich auch ableiten, indem man

$$\frac{\pi}{4} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}\cdots$$

mit $\frac{2}{3}$ multiplicirt und das Ergebniss

$$\frac{\pi}{6} = \frac{2}{3} \quad -\frac{2}{9} \quad +\frac{2}{15}\cdots$$

so hinzufügt, dass man die gleichnamigen Brüche vereinigt.

Für $p = 4$ kommt $\sigma(\frac{1}{2}) = \dfrac{\pi}{4}\left(\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{8}} + \dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{8}}\right) = \pi\cos\dfrac{\pi}{8}$, somit

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\cdots\frac{1}{13}-\frac{1}{15}\cdots = \frac{\pi}{4}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

(Fortsetzung folgt.) Heinrich Simon.

2.

Ueber die Normalen der Kegelschnitte.

Zieht man von einem Punkte R, φ in der Ebene eines Kegelschnitts Normalen an denselben, so lässt sich vermittelst einer Gleichung 4. Grades für die Normale n folgende Relation für ihre Quadratsumme aufstellen:

$$n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_4^2 = 4R^2+2(a^2+b^2)-\frac{2R^2}{c^2}(a^2\cos\varphi^2-b^2\sin\varphi^2)$$

Hieraus folgt auch

$$\Sigma n^2-2(a^2+b^2) = 2x^2\frac{(a^2-2b^2)}{a^2-b^2}+2y^2\frac{(2a^2-b^2)}{a^2-b^2}$$

Ist demnach $\Sigma n^2 = \text{Const.}$, so erhält man einen Kegelschnitt als geometrischen Ort der Constanz der Quadratsumme der Normalen.

Derselbe geht in einen Kreis über, wenn eine gleichseitige Hyperbel zu Grunde gelegt wird, weil alsdann

$$n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_4^2 = 3R^2 \quad \text{ist.}$$

Die obige Gleichung gilt auch noch allgemein für die Asymptoten einer Hyperbel, nur ist dann

$$a = b = 0, \quad \frac{b}{a} = \operatorname{tg} E, \quad n_3^2+n_4^2 = 2R^2$$

zu setzen, und der geometrische Ort wird dann durch die Ellipse

$$\frac{x^2}{\cos E^2}+\frac{y^2}{\sin E^2} = \frac{n_1^2+n_2^2}{2\sin E^2\cos E^2}$$

characterisirt.

Die Diagonalen des ihr umbeschriebenen Rechtecks fallen demnach mit den Asymptoten zusammen. Fällt man also von einem Punkt einer Ellipse auf diese ihre Diagonalen Senkrechte, so ist die Summe ihrer Quadrate eine constante Grösse.

E. Oekinghaus.

VIII.

Ueber die Curven vierter Ordnung mit drei Inflexionsknoten.

Von

P. H. Schoute.

Vierter Abschnitt.

(Die Polaren der Curve $\overline{C}^4$.)

44. „Die erste Polare eines Punktes P in Bezug auf eine Curve $\overline{C}^4$ mit den Inflexionsknoten A, B, C ist eine durch diese Punkte gehende Curve dritter Ordnung C_p^3, welche in $\overline{C}^4$ die sechs Berührungspunkte ihrer durch P gehenden Tangenten einschneidet. Die erste Polare eines Punktes Q von $\overline{C}^4$ zerfällt in zwei Teile, die einander entsprechen in der quadratischen Transformation, welche $\overline{C}^4$ in ihren Wendeschnitt überführt, in die Tangente q' des Wendeschnittes im entsprechenden Punkte Q' und in den Kegelschnitt C_q^2 durch A, B, C, welche $\overline{C}^4$ in Q berührt."

Der erste Teil des Satzes ist ganz der Polarentheorie zu entnehmen.[1]) Und der zweite Teil ist eine unmittelbare Folge des Weyr'schen Satzes. Denn nach diesem Satze muss die erste Polare vom Punkte Q der $\overline{C}^4$ in Bezug auf $\overline{C}^4$ vier Punkte gemein haben mit der Tangente q' des Wendeschnittes im entsprechenden Punkte Q' und da sie nur von der dritten Ordnung ist diese Gerade ganz enthalten. Und da die erste Polare eines Punktes Q der Grundcurve

1) Man vergleiche Cremona's „Einleitung in eine geometrische Theorie des ebenen Curven", deutsch von M. Curtze.

diese Curve in Q berührt, so muss der ergänzende Kegelschnitt C_q^2, welcher nun durch A, B, C geht, die $\overline{C}^4$ in Q berühren und also in der bekannten Transformation der Tangente q' vom Wendeschnitte entsprechen. Es entsprechen dann die beiden Schnittpunkte der beiden Teile im allgemeinen einander, da q' nicht durch einen der vier sich selbst entsprechenden Punkte geht.

45. „In Bezug auf eine Curve $\overline{C}^4$ hat jede Gerade g sechs bewegliche Pole G. Diese Pole G sind die Eckpunkte eines vollkommenen Vierseits, des Vierseits der Tangenten q' am Wendeschnitte in den Punkten Q', welche den vier Schnittpunkten Q von g mit $\overline{C}^4$ entsprechen. Dieses Vierseit ist ebenfalls einem in ABC eingeschriebenen Kegelschnitte umschrieben.[2]) Und die Gegenecken des Vierseits entsprechen einander in der Transformation, welche $\overline{C}^4$ in ihren Wendeschnitt überführt."

Nach der Polarentheorie bilden die ersten Polaren von den Punkten einer Geraden g in Bezug auf $\overline{C}^4$ einen Büschel von Curven dritter Ordnung und schneiden diese durch A, B, C gehenden Curven also einander zu je zweien noch in sechs allen gemeinschaftlichen Punkten G, welche man die Pole von g in Bezug auf $\overline{C}^4$ nennt, da diese Punkte die Gerade g zur gemeinschaftlichen Polgeraden haben. Hieraus folgt, dass man die sechs Pole irgend einer Geraden g betrachten kann als die sechs Punkte, welche mit A, B, C die neun Schnittpunkte bilden von den ersten Polaren von irgend zwei beliebig auf g gewählten Punkten. Wählt man nun für diese zwei Punkte zwei der vier Schnittpunkte Q von g mit $\overline{C}^4$, so figurirt der Schnittpunkt von den Tangenten q' am Wendeschnitte in den entsprechenden zwei Punkten Q' unter den sechs Polen und da dieses für jede der sechs Combinationen von den vier Punkten Q auf g zu je zweien gilt, sind die sechs Pole die sechs Schnittpunkte der vier Tangenten q' des Wendeschnittes in den vier entsprechenden Punkten Q' dieser Curve.

Die vier Punkte Q' sind die Schnittpunkte vom Wendeschnitte K mit dem Kegelschnitte durch A, B, C, welcher in der die $\overline{C}^4$ in K überführenden Transformation der Geraden g entspricht. Also ist die Polarfigur dieses Kegelschnittes in Bezug auf K sowohl dem Dreiecke ABC als dem Vierseite der vier Geraden q' eingeschrieben; d. h. die vier Geraden q' umhüllen einen in ABC eingeschriebenen Kegelschnitt.

---

2) Diesen Teil des Satzes verdanke ich einer brieflichen Mitteilung von Prof. Küpper.

Deutet man die vier Schnittpunkte einer Geraden g mit $\bar{C}^4$ durch Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, die ihnen entsprechenden Punkte vom Wendeschnitte K durch Q_1', Q_2', Q_3', Q_4' und die Tangenten von K in diesen Punkten durch q_1', q_2', q_3', q_4' an, so kann man jedem der sechs Pole G, welche wir weiterhin zusammen als das Polsextupel G von g bezeichnen, die beiden Indices der sich in diesem Punkte schneidenden Geraden q' beilegen, wie es in Fig. 42 angegeben ist. Es sind dann offenbar die Paare $G_{1,2}$ und $G_{3,4}$, $G_{1,3}$ und $G_{2,4}$, $G_{1,4}$ und $G_{2,3}$, deren Indices einander ergänzen, die drei Paare von Gegenecken des von den vier Geraden q' gebildeten Vierseits. Und je zwei Gegenecken entsprechen einander in der Transformation, welche $\bar{C}^4$ in ihren Wendeschnitt umbildet. Betrachtet man nämlich das Polsextupel mit A, B, C als die Schnittpunkte der ersten Polaren von Q_1 und Q_2 in Bezug auf $\bar{C}^4$, wovon die erste aus q_1' und dem ihr entsprechenden Kegelschnitte C_1^2, die zweite aus q_2' und dem ihr entsprechenden Kegelschnitte C_2^2 besteht, so geben q_1' und q_2' den Schnittpunkten $G_{1,2}$, q_1' und C_2^2 die Schnittpunkte $G_{1,3}$ und $G_{1,4}$, q_2' und C_1^2 die Schnittpunkte $G_{2,3}$ und $G_{2,4}$ und müssen C_1^2 und C_2^2 ausser A, B, C also den sechsten Pol $G_{3,4}$ als Schnittpunkt haben; da nun die Kegelschnitte C_1^2 und C_2^2 den Geraden q_1' und q_2' entsprechen, so muss auch der freie Schnittpunkt $G_{3,4}$ von C_1^2 und C_2^2 dem Schnittpunkte $G_{1,2}$ von q_1' und q_2' entsprechen.

46. „Die acht Schnittpunkte von $\bar{C}^4$ mit ihrem Wendeschnitte K sind die Berührungspunkte von $\bar{C}^4$ mit ihren vier Doppeltangenten; die Pole von diesen Doppeltangenten in Bezug auf $\bar{C}^4$ sind die vier Punkte S, welche in der die C^4 in K überführenden Transformation sich selbst entsprechen. Bei den Curven $\bar{C}^4$ erster Gattung sind die vier Punkte S und also auch die vier Doppeltangenten sämtlich imaginär; bei den Curven $\bar{C}^4$ zweiter Gattung ist von den Punkten S und also auch von den Doppeltangenten ein Paar reell und ein Paar imaginär."

Ist g eine Tangente von $\bar{C}^4$ und sind Q_1 und Q_2 die in den Berührungspunkt Q zusammengetretenen Punkte von $\bar{C}^4$, so zeigt das Polsextupel G von g die in Fig. 43 vorgeführte Anordnung. Es fallen dann $G_{1,3}$ und $G_{2,3}$ in der Richtung von q_3' und $G_{1,4}$ und $G_{2,4}$ in der Richtung von q_4' mit einander zusammen. Und indem $G_{1,2}$ als Schnittpunkt der auf einander folgenden Tangenten q_1' und q_2' von K auf K liegt, ist $G_{3,4}$ nach dem vorhergehenden Artikel der dem Punkte $G_{1,2}$ von K entsprechende Punkt von $\bar{C}^4$, d. h. der Berührungspunkt Q von q mit $\bar{C}^4$. Umgekehrt, wenn einer der sechs

Pole G auf K liegt, so berührt die Gerade g im entsprechenden Punkte von $\bar{C}^4$ diese Curve; denn nach dem vorhergehenden Artikel ist die Gegenecke dann der entsprechende Punkt von $\bar{C}^4$ und die Polgerade eines Punktes von $\bar{C}^4$ ist nach der Polarentheorie die Tangente der Curve in diesem Punkte.

Ist weiter g eine Doppeltangente von $\bar{C}^4$, indem einerseits Q_1 und Q_2 und andererseits Q_3 und Q_4 zusammenfallen, so reducirt sich das Polsextupel G von g in der in Fig. 44 vorgestellten Weise. Es fallen dann die vier Punkte $G_{1,2}$, $G_{1,4}$, $G_{2,3}$, $G_{3,4}$ in einen Punkt zusammen, und dieser Punkt ist dann, da $G_{1,3}$ und $G_{2,4}$ ebenso wie $G_{1,4}$ und $G_{2,3}$ einander entsprechen, einer der vier sich selbst entsprechenden Punkte S; dabei sind die coincidirenden Tangenten q_1' und q_2' von K als die Verbindungslinien von $G_{1,3}$ mit $G_{1,4}$ und von $G_{2,3}$ mit $G_{2,4}$, die coincidirenden Tangenten q_3' und q_4' von K als die Verbindungslinien von $G_{1,3}$ und $G_{2,3}$ und von $G_{1,4}$ mit $G_{2,4}$ zu betrachten. Und die Punkte $G_{1,2}$ und $G_{3,4}$ befinden sich als Schnittpunkte von aufeinanderfolgenden Tangenten von K' auf K. Aber wenn $G_{1,2}$ und $G_{3,4}$ auf K liegen, so befinden sich nach dem vorhergehenden Artikel $G_{3,4}$ und $G_{1,2}$ auf $\bar{C}^4$ und ist $G_{3,4}$ der aus der Coincidenz von Q_1 und Q_2, $G_{1,2}$ der aus der Coincidenz von Q_3 und Q_4 hervorgegangene Berührungspunkt der Doppeltangente g. Also sind die Berührungspunkte von $\bar{C}^4$ mit einer Doppeltangente Schnittpunkte von $\bar{C}^4$ mit ihrem Wendeschnitte K. Und die Zahl der Doppeltangenten ist jener der Punkte S gleich, also vier; woraus dann noch folgt, dass $\bar{C}^4$ und K acht Punkte gemein haben.

Die im Satze aufgenommene Bemerkung in Bezug auf die Realität der Punkte S und der ihnen entsprechenden Doppeltangenten ergiebt sich unmittelbar aus der Betrachtung der Normalcurven. Bei der ersten Normalcurve erster Gattung (Fig. 22) liegen die einander entsprechenden Punkte P und P' allemal in zwei Scheitelwinkeln der vier von den Achsen CA und CB gebildeten Winkel, bei der zweiten Normalcurve 1. Gattung (Fig. 24) liegen sie an verschiedenen Seiten der imaginären Achse des Wendeschnittes; in beiden Fällen kann keine Coincidenz eintreten, sind also die vier Punkte S, die vier Doppeltangenten von $\bar{C}^4$ und die acht Schnittpunkte von $\bar{C}^4$ mit K sämtlich imaginär. Bei der Normalcurve zweiter Gattung giebt es zwei reelle Punkte S auf der imaginären Achse von K, da die Transformation in diesem Falle die um diese Gerade umgelegte Verwandtschaft der reciproken Radien ist; die Entfernung dieser Punkte von C ist der Potenz dieser Verwandtschaft gleich.

47. „Die Polsextupel G der verschiedenen Geraden g durch einen gegebenen Punkt P liegen auf der ersten Polare C_P^3 von P in

Bezug auf $\overline{C}^4$ und bilden auf ihr eine Involution sechster Ordnung, die zu dem Strahlbüschel der zugeordneten Geraden g durch P projectivisch ist.

Die erste Polare C_p^3 von P in Bezug auf $\overline{C}^4$ entspricht sich selbst in der Transformation, welche $\overline{C}^4$ in ihren Wendeschnitt K überführt."

Die Polsextupel G der Geraden g durch P müssen nach der Polarentheorie auf der ersten Polare C_p^3 von P in Bezug auf $\overline{C}^4$ liegen. Sie bilden auf C_p^3 eine mit dem Büschel der Strahlen g durch P projectivische Involution; denn, indem irgend eine Gerade g durch P ein einziger Polsextupel bestimmt, so bestimmt auch irgend ein Punkt G von C_p^3 mittelst seiner durch P gehenden Polgeraden g das ganze ihn aufnehmende Polsextupel.

Die Curve C_p^3 entspricht sich selbst in der Transformation, welche $\overline{C}^4$ in K überführt. Ist nämlich G irgend ein Punkt von C_p^3, so enthält diese Curve das ganze Polsextupel, welches G aufnimmt, und also auch die Gegenecke von G im vollkommenen Vierseite, welches das Polsextupel trägt, d. h. den dem Punkte G in der bekannten Transformation entsprechenden Punkt. Im einander Entsprechen der beiden Teile von der ersten Polare eines Punktes von $\overline{C}^4$ haben wir schon einen besonderen Fall dieser allgemeinen Wahrheit behandelt.

Nach im vorhergehenden Jahre publicirten Untersuchungen des Herrn Emil Weyr[3]) giebt es auf einer allgemeinen Curve dritter Ordnung C^3 nur zwei Arten von involutorischen eindeutigen Punktbeziehungen, die centralen und die nicht centralen. Die Punktepaare der ersten liegen auf Strahlen, welche C^3 zum dritten Male in einem festen Punkte treffen; jede nicht centrale Beziehung der verlangten Beschaffenheit ist immer eine der drei Systeme conjugirter Punkte von C^3, welche schon von Maclaurin[4]) aufgewiesen sind. Da nun die drei Verbindungslinien der drei Paare von Gegenecken eines Polsextupels nach den bekannten Eigenschaften des vollkommenen Vierseits nicht durch einen Punkt gehen, ist die involutorische eindeutige Beziehung der Gegenecken $G_{1,2}$ und $G_{3,4}$ auf C_p^3 die Verwandtschaft eines der drei Systeme correspondirender Punktepaare von C_p^3.

---

3) „Ein Beitrag zur Gruppentheorie auf den Curven vom Geschlechte Eins" (Sitzungsberichte der K. Akad. der Wissensch. zu Wien, Band LXXXIX. 2te Abteilung, Seite 436).

4) „Salmon-Fiedler's höhere ebene Curven", Art. 152.

Wirklich folgt aus bekannten Sätzen[5]), dass die drei Paare Gegenecken eines Polsextupels drei Paare conjugirter Punkte eines nämlichen Systemes sind, muss dann aber noch gezeigt werden, dass die verschiedenen Tripel von Paaren Gegenecken aller auf C_p^5 liegenden Polsextupel dem nämlichen Systeme angehören; was ich hier nach Anführung der Untersuchungen Weyr's wol unterdrücken mag.

Wenn eine Curve C_p^3 mit einem ihrer Systeme conjugirter Punkte $G_{1,2}$, $G_{3,4}$ vorliegt, so giebt es bekanntlich[6]) eine einzige Curve dritter Ordnung, welche C_p^5 zur Hesse'schen und Steiner'schen Curve und auf ihr das System conjugirter Punkte $G_{1,2}$, $G_{3,4}$ zum Systeme von conjugirten Polen hat. Es ist also die Enveloppe der Verbindungslinie der Punktepaare $G_{1,2}$, $G_{3,4}$, die Cayley'sche Curve dieser neuen Curve dritter Ordnung[7]), eine Curve dritter Classe und sechster Ordnung.

Kehren wir zu der Involution sechster Ordnung der Polsextupel G auf C_p^3 zurück, so bemerken wir, dass diese Involution sechs Verzweigungsgruppen von besonderer Beschaffenheit hat. Es können nämlich nur dann zwei Punkte G eines Polsextupels zusammenfallen, wenn die zugeordnete Gerade g durch P die C^4 berührt, und die Anzahl der von P an C^4 möglichen Tangenten ist sechs. Es sind weiter die sechs Verzweigungsgruppen von besonderer Beschaffenheit, da jede von ihnen nach Fig. 43 aus einem Paare von Doppelpunkten und einem Paare von Verzweigungspunkten besteht. Ueberdies lassen sich die sechs Verzweigungspaare leicht anweisen; denn jedes Paar von Verzweigungspunkten besteht aus einem der sechs von A, B, C verschiedenen Schnittpunkte von C^4 und C_p^3 und aus dem entsprechenden Schnittpunkte von K und C_p^3. Und da jede Tangente q' von K drei Punkte von einer Gruppe, nämlich vom Polsextupel der Geraden PQ, enthält, so muss K in der Involutionscurve der betrachteten Involution dreimal begriffen sein und diese Involution ausserdem nur noch die Enveloppe der Verbindungslinien von den Gegenecken der Polsextupel umfassen, welche eben als eine Curve dritter Classe sechster Ordnung erkannt ist.

Wenn man P durch einen Punkt Q von C^4 ersetzt, wobei die erste Polare aus der Tangente q' von K und dem dieser Geraden

---

5) Dieser Satz sagt aus, man erhält das ganze System, wozu irgend ein Paar conjugirte Punkte A_1, A_2 gehört, wenn man diese Punkte A_1, A_2 aus allen Punkten der Curve dritter Ordnung auf diese Curve projicirt, Salmon-Fiedler, a. a. O., Art. 152.

6) Cremona, a. a. O., Art. 143.

7) Cremona, a. a. O., Art. 135.

entsprechenden Kegelschnitte C_q^2 besteht, so teilt sich jedes Polsextupel in zwei Tripel, wovon das eine auf q', das andere auf C_q^2 liegt; denn der Punkt Q ist dann für jede durch ihn gehende Gerade einer der vier Schnittpunkte dieser Geraden mit C^4. Es bilden dann die Tripel auf q' eine kubische Involution auf q' und die Tripel auf C_q^2 eine kubische Involution auf C_q^2, da ein Punkt von q' und ebenso von C_q^2 seine Polgerade und also das in zwei Tripel zerfallende Polsextupel bestimmt. Jede dieser beiden kubischen Involutionen hat vier Verzweigungsgruppen, welche den durch Q gehenden $\bar{C}^4$ in einem von Q verschiedenen Punkte berührenden Tangenten entsprechen; denn die Tangente von $\bar{C}^4$ in Q liefert zwei Tripel, welche jedes für sich aus drei verschiedenen Punkten bestehen, wovon aber zwei, die Schnittpunkte von q' und C_q^2, in jedes von beiden eingehen. Also sind die vier Schnittpunkte von q' mit $\bar{C}^4$ die Verzweigungspunkte der Involution auf C_q^2. Offenbar ist K die Involutionscurve der Involution auf C_q^2 und entsprechen die beiden kubischen Involutionen einander in der Transformation, welche $\bar{C}^4$ in K überführt.

48. „Die Steiner'sche Curve des Netzes der ersten Polaren in Bezug auf $\bar{C}^4$ besteht aus der doppelt gezählten $\bar{C}^4$ und ihren vier Doppeltangenten."

Wenn irgend eine der ersten Polaren einen Doppelpunkt D hat, so sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem D mit einem der vier Punkte S zusammenfällt oder nicht. Hat die erste Polare erstens einen sich selbst entsprechenden Punkt S zum Doppelpunkte, so enthält sie das von diesem Punkte und den Berührungspunkten der diesem Punkte zugeordneten Doppeltangente von $\bar{C}^4$ gebildete Polsextupel und es liegt dann ihr Pol auf dieser Doppeltangente. Und wirklich hat die erste Polare irgend eines Punktes von einer bestimmten Doppeltangente einen Doppelpunkt im zugeordneten Punkte S. Denn die ersten Polaren von den Berührungspunkten D und D' dieser Doppeltangenten enthalten die vier Punkte, welche mit D und D' das Polsextupel der Doppeltangente bilden, und diese Punkte fallen nach Fig. 44 paarweise in den Richtungen der Tangenten DS und $D'S$ vom Wendeschnitte, welche durch S gehen, mit S zusammen. Aber wenn die ersten Polaren von D und D' einen Doppelpunkt haben in S, so hat umgekehrt der Polkegelschnitt von S nach einem bekannten Satze [8]) Doppelpunkte in D und D', ist dieser Kegelschnitt also die doppelt gezählte Doppeltangente und hat er deshalb einen Doppelpunkt in jedem Punkte der Doppeltangente. Und hieraus folgt

8) Cremona, a. a. O., Art. 78.

dann umgekehrt wieder, dass die erste Polare von irgend einem Punkte der Doppeltangente einen Doppelpunkt hat in S. Hat die erste Polare zweitens einen nicht sich selbst entsprechenden Doppelpunkt D, so hat sie als sich selbst entsprechende Curve notwendig einen zweiten Doppelpunkt im entsprechenden Punkte D' und zerfällt sie also in eine Gerade und einen Kegelschnitt, die entweder sich selbst oder einander entsprechen. Hierüber geht nun weiter das Polsextupel Aufschluss, welches D und also auch D' aufnimmt. Es können nämlich die vier Tangenten aus D und D' an K nicht alle verschieden sein, denn sonst würde jede dieser vier Geraden unsere das Polsextupel enthaltende zerfallende Polare in vier Punkte schneiden. Zur vollständigen Beseitigung des Widerspruches müssen entweder die Tangenten aus D an K zusammenfallen und ebenso die Tangenten aus D' an K, oder aber die Verbindungslinie von D und D' muss K berühren. Aber die erste Voraussetzung macht D und D' zu einander entsprechenden Punkten von K und der ihr entsprechenden $\bar{C}^4$, also zu Berührungspunkten einer Doppeltangente von $\bar{C}^4$; woraus dann folgen würde, dass die vier anderen Punkte des Polsextupels im zugeordneten Punkte S vereint sind, die betrachtete Polare in diesem Punkte S ebenfalls einen Doppelpunkt hat, und diese Curve also aus drei Geraden zusammengesetzt ist. Und dies ist unmöglich; denn die Doppeltangente geht nicht durch einen der drei Punkte A, B, C, da sie schon vier Punkte mit $\bar{C}^4$ gemein hat, und sie entspricht also weder sich selbst noch einem zerfallenden Kegelschnitte, bildet deshalb mit den beiden Geraden DS und $D'S$ keine sich selbst entsprechende Curve, keine erste Polare. Es restet also nur die zweite Voraussetzung, dass DD' den Wendeschnitt berührt, und diese liefert immer die schon früher gefundene erste Polare, deren Pol auf $\bar{C}^4$ liegt.

Es hat nach den gefundenen Resultaten die erste Polare eines Punktes einen einzigen Doppelpunkt — immer in einem der vier Punkte S — wenn der Pol auf einer der vier Doppeltangenten von $\bar{C}^4$ liegt, und zwei einander entsprechende Doppelpunkte, wenn der Pol ein Punkt von $\bar{C}^4$ ist. Also besteht der Ort der Pole, deren erste Polaren in Bezug auf $\bar{C}^4$ einen Doppelpunkt haben, d. h. die Steiner'sche Curve des Netzes der ersten Polaren in Bezug auf $\bar{C}^4$ aus der doppelt gezählten $\bar{C}^4$ und ihren vier Doppeltangenten. Die zwölf Doppelpunkte, welche nach einem allgemeinen Satze dem Büschel der ersten Polaren von den Punkten einer Gerade g zukommen, sind deshalb die vier Doppelpunktenpaare der vier zerfallenden ersten Polaren, welche den Schnittpunkten von g mit $\bar{C}^4$ ent-

sprechen, und die vier Punkte S, als Doppelpunkte der vier ersten Polaren, wovon die Schnittpunkte von g mit den Doppeltangenten von $\overline{C}^4$ die Pole sind.

49. „Die Hesse'sche Curve des Netzes der ersten Polaren in Bezug auf $\overline{C}^4$ ist eine hyperelliptische Curve sechster Ordnung mit sieben Doppelpunkten, die Punkte A, B, C und die vier Punkte S."

Zur Bestimmung der Ort der Doppelpunkte von den zerfallenden Polaren des Netzes zeigen wir erst die Doppelpunkte der ersten Polare irgend eines Punktes Q von $\overline{C}^4$ näher an. Ist q die Tangente von $\overline{C}^4$ in Q und nimmt man wieder an, dass von den vier Schnittpunkten Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 von q mit $\overline{C}^4$ die beiden ersten Q_1 und Q_2 in Q zusammengefallen sind, so gieht Fig. 43 das Polsextupel von q an; daboi fällt nach Artikel 45 der Punkt $G_{3,4}$ in Q und ist die Coincidenzlinie q' der Seiten q_1' und q_2' des Polvierseits der geradlinige Teil der ersten Polare von Q. Aber dann müssen auch die Schnittpunkte von q' mit q_3' und q_4' die Doppelpunkte dieser ersten Polare sein; denn dieso Curve muss das Polsextupel von q enthalten, also q_3' und q_4' in den Schnittpunkten mit q' berühren und deshalb aus q' und oinem durch die Schnittpunkte von q' mit q_3' und q_4' gehenden Kegelschnitte bestehen.

Die Ordnung des Ortes der Doppelpunkto der zerfallenden Polaren wird gefunden, indem wir suchen, wieviol Punkte dieser Ort mit irgend einer Tangente von K gemein hat. Diese Tangente kann oinmal, nämlich für den ihrem Berührungspunkte mit K entsprechenden Punkt von $\overline{C}^4$, als Gerade q' auftreten und enthält als solche zwei Doppelpunkte; sie kann weiter viermal, nämlich für jeden ihrer Schnittpunkte mit $\overline{C}^4$, als Gerade q_3' oder q_4' auftreten und enthält als solche vier Doppelpunkte. Also enthält irgend oine Tangente von K sechs Punkte des Ortes, und ist dieser sechster Ordnung.

Die gefundene Curve sechster Ordnung hat A, B, C zu Doppelpunkten, da jeder dieser Punkte Doppelpunkt ist von zwei ersten Polaren, von den ersten Polaren dieses zum einen oder zum anderen der beiden durch ihn gehenden Zweigen von $\overline{C}^4$ gerechneten Fundamentalpunktes. Ebenso hat die gefundene Hesse'sche Curve die vier Punkte S zu Doppelpunkten, denn da jedes dieser Punkte Doppelpunkt ist von zwei ersten Polaren, welche ihre Pole, die Berührungspunkte der entsprechenden Doppeltangente von $\overline{C}^4$, auf $\overline{C}^4$ haben, so geht die gesuchte Curve zweimal durch diesen Punkt.

Ein Netz von Curven C^3 mit sieben Basispunkten gieht zu einer involutorischen Verwandtschaft Anlass, denn alle Curven des Netzes,

welche durch irgend einen gegebenen Punkt P gehen, haben noch einen Punkt P' mit einander gemein, und diese Punkte entsprechen einander involutorisch. An einer anderen Stelle[9]) habe ich diese Verwandtschaft untersucht und unter anderm gefunden, dass sie zweiter Ordnung ist, wenn die sieben Basispunkte die vier Eckpunkte und die drei Diagonalpunkte eines vollkommenen Vierecks sind, d. h. wenn diese sieben Punkte die Lage der vier Punkte S und der drei Punkte A, B, C haben. Dabei ergab sich dann, dass die drei Diagonalpunkte die einfachen Fundamentalpunkte der quadratischen Transformation sind, und jeder dieser Punkte die Verbindungslinie der beiden anderen zur Fundamentalgeraden hat. Und man erkennt leicht, dass die vier Eckpunkte des vollständigen Vierecks die sich selbst entsprechenden Punkte dieser Transformation sind; denn die Curve C^3 des Netzes, welche aus drei durch einen dieser vier Punkte gehenden Geraden besteht, schneidet jede Curve des Netzes ausser den Basispunkten nur noch in diesem Punkte. Also ist die Verwandtschaft in dem besonderen Falle mit der Transformation, welche C^4 in ihren Wendeschnitt überführt, identisch, und sind zwei einander in der letzteren Transformation entsprechende Punkte P und P' mit A, B, C und den vier Punkten S immer die Basispunkte eines Büschels von Curven dritter Ordnung.

Weiter habe ich noch an einer anderen Stelle[10]) gezeigt, dass die Curven C^3 durch die Fundamentalpunkte und die vier Punkte S einer quadratischen Transformation in dieser Transformation sich selbst entsprechen. Und dies ist offenbar auch mit der Hesse'schen Curve sechster Ordnung der Fall, da sie der Ort ist von Paaren einander entsprechender Punkte. Sind nun D und D' irgend ein Paar dieser Punkte, so werden die anderen Paare von den Curven dritter Ordnung des Büschels, welcher die drei Punkte A, B, C, die vier Punkte S und D und D' zu Basispunkten hat, auf der Hesse'schen Curve eingeschnitten. Und diese Bemerkung führt weiter zu einer Erzeugung der Hesse'schen Curve mittelst projectivischer Curvenbüschel. Nimmt man nämlich auf dieser Curve zwei Paare einander entsprechende Punkte D_1, D_1' und D_2, D_2' und noch drei beliebig gewählte Punkte D_3, D_4, D_5 an, so kann die projectivische Verwandtschaft der beiden Büschel $C^3(A, B, C, 4S, D_1, D_1')$ und $C^3(A, B, C, 4S, D_2, D_2')$ dadurch bestimmt werden, dass die durch D_3, D_4, D_5 gehenden Curven der beiden Büschel einander entsprechen müssen.

---

9) „Sur la transformation conjuguée" (Association française pour l'avancement des sciences, compte rendu de la 8e Session. Montpellier, 1879, page 199).

10) „Deux cas particuliers de la transformation birationnelle" (Bulletin des sciences mathem. et astron., 2e Série, tome VI, 1882, page 152—169 et 174—189).

Dann aber erzeugen diese beiden Büschel eine Curve sechster Ordnung mit den sieben Doppelpunkten A, B, C, $4S$, welche durch D_1, D_1', D_2, D_2', D_3, D_4, D_5 geht und also mit der Hesse'schen Curve, wie leicht bewiesen wird, zusammenfällt.

Jede Curve C^3 der von den sieben Doppelpunkten von der Hesse'schen Curve bestimmten Netzes schneidet die Hesse'sche Curve in vier beweglichen Punkten, von welchen man zwei beliebig auf ihr wählen kann. Und alle Curven des Netzes, welche durch einen gegebenen Punkt D_1 von der Hesse'schen Curve gehen, schneiden sie noch in drei anderen Punkten, unter welchen immer der entsprechende Punkt D_1' begriffen ist. Dies kennzeichnet die Hesse'sche Curve als eine hyperelliptische[11]) Curve vom dritten Geschlechte[12]). Und hieraus folgt nun weiter, dass die Verbindungslinie der Punktenpaare D_1, D_1' eine rationale Curve umhüllen muss[13]); was uns im vorliegenden Falle schon bekannt war, da diese Verbindungslinien Tangenten von Wendeschnitte sind[14]).

Fünfter Abschnitt.

(Der Berührungskegelschnitt).

50. „Die erste Polare C_p^3 eines Punktes P in Bezug auf $\overline{C}^4$ wird in den Inflexionsknoten A, B, C von $\overline{C}^4$ von einem bestimmten Kegelschnitte D_p^2 berührt. Diesen Kegelschnitt schneidet die $\overline{C}^4$ ausser A, B, C noch in zwei Punkten P_p' und P_p''."

Ist K (Fig. 45) der Wendeschnitt von $\overline{C}^4$, dann sind bekanntlich die aus A an K möglichen Tangenten a' und a'' die Wende-

---

11) Man vergleiche die „Vorlesungen über Geometrie von A. Clebsch, bearbeitet und herausgegeben von Dr. F Lindemann, Seite 711 oder in der ursprünglichen Form die Verhandlung „Ueber algebraische Functionen" von Brill und Nöther (Mathematische Annalen, Band 7, Seite 286 und 287).

12) Das Geschlecht der Curve wird bestimmt von der Mächtigkeit der Schaar von adjungirten Curven dritter Ordnung; aber die Anzahl der Doppelpunkte führt zum nämlichen Resultate. denn man hat

$$\frac{5 \cdot 4}{2} - 7 = 3.$$

13) Die Verbindungslinie muss eine rationale Curve umhüllen, da jeder Wert des Parameters, welcher die Curve der Büschel dritter Ordnung bestimmt, eine Verbindungslinie liefert.

14) Ich übergebe hier am Ende dieses Abschnitts die dualistisch gegenüberstehenden Ergebnisse, da die dualistische Uebertragung der Polarentheorie solche schwerfällige Resultaten liefert.

tangenten von $\bar{C}^4$ im Doppelpunkte A. Nun ist nach der Polarentheorie die Tangente in A an der ersten Polare C_p^3 von P in Bezug auf $\bar{C}^4$ die Gerade durch A, welche P harmonisch trennt von a' und a''. Aber diese Gerade geht offenbar durch den Schnittpunkt A' der Polare p von P in Bezug auf K mit BC, da dieser Punkt A' der Pol von AP in Bezug auf K ist. Also liegen die Schnittpunkte A', B', C' der Tangenten in A, B, C an C_p^3 mit den Gegenseiten des Dreiecks ABC in einer Geraden, die Polare p von P in Bezug auf K; was bekanntlich beweiset, dass es einen Kegelschnitt D_p^2 giebt, welcher mit C_p^3 in den Punkten A, B, C die Tangenten AA'', BB'', CC'' gemein hat. Dieser Kegelschnitt hat ausser A, B, C noch zwei Punkte P_d' und P_d'' mit $\bar{C}^4$ gemein, da die ihr entsprechende Gerade K in zwei Punkten schneidet.[15])

51. „Die Berührungspunkte der sechs durch irgend einen Punkt P an $\bar{C}^4$ möglichen Tangenten liegen in einem Kegelschnitte T_p^2. Dieser Kegelschnitt schneidet die $\bar{C}^4$ in zwei neuen Punkten P_t' und P_t'', welche mit P_d^1 und P_d^2 auf einer Geraden liegen."

Liegen $nr - \frac{1}{2}(r-1)(r-2)$ von den n^2 Schnittpunkten zweier Curven C^n von der Ordnung n auf einer Curve C^r niederer Ordnung r, so enthält C^r noch $\frac{1}{2}(r-1)(r-2)$ dieser Schnittpunkte, und liegen die übrigen $n(n-r)$ Schnittpunkte der Curven C^n auf einer Curve C^{n-r} der Ordnung $n-r$. Der von Plucker[16]) herrührende Satz beweiset den Satz dieses Artikels[17]). Wenn man nämlich durch fünf der sechs Schnittpunkte von C_p^3 und $\bar{C}^4$, welche von A, B, C verschieden sind, einen Kegelschnitt T_p^2 legt, so bilden $\bar{C}^4$ und die aus den Kegelschnitten D_p^2 und T_p^2 bestehende Curve C_1^4 zwei Curven vierter Ordnung, welche elf auf C_p^3 liegende Punkte mit einander gemein haben, nämlich A, B, C, ihre Nachbarpunkte auf C_p^3 und die fünf Punkte mittelst welcher T_p^2 bestimmt worden ist. Also enthält C_p^3 noch einen Schnittpunkt von den beiden Curven vierter

15) Oder da $\bar{C}^4$ und D_p^2 einander überhaupt in acht Punkten schneiden und jeder der Punkte A, B, C zweimal als Schnittpunkt von $\bar{C}^4$ und D_p^2 zu zählen ist.

16) Cremona, a. a. O., 43, Lehrsatz 5.

17) Dieser Satz ist für die Lemniscate von Ralph A. Roberts publicirt worden in seiner Aufgabensammlung „A collection of examples and problems on conics and some of the Higher plane curves" (Example 345). Man vergleiche auch den analytischen Beweis dieses speciellen Falles, welcher durch centrale Projection verallgemeinert werden kann, in meiner „Notiz über die Lemniscate" (Sitzungsberichte u. s. w.), Band LXXXIX, 2te Abteilung, Seite 1252), welche schon viele der folgenden Resultate in anderer Behandlungsweise enthält.

Ordnung, und dieser Punkt ist dann, da die sechs Schnittpunkte von D_p^2 und C_p^3 schon alle in den elf angezeigten Punkten aufgenommen sind, der sechste Schnittpunkt von T_p^2 mit C_p^3. Also geht der durch fünf der sechs von A, B, C verschiedenen Schnittpunkte von C_p und $\overline{C}^4$ gebrachte Kegelschnitt T_p^2 auch durch den sechsten, und liegen die sechs von A, B, C verschiedenen Schnittpunkte von C_p^3 und $\overline{C}^4$, die Berührungspunkte der sechs von P an $\overline{C}^4$ möglichen Tangenten auf einem Kegelschnitte T_p^2. Und da die vier übrigen Schnittpunkte der beiden Curven vierter Ordnung auf einer Geraden liegen müssen, ist die Verbindungslinie der beiden neuen Schnittpunkte P_t' und P_t'' von T_p^2 und $\overline{C}^4$, welche nicht auf C_p^4 liegen, nicht verschieden von der Verbindungslinie der beiden neuen Schnittpunkte P_d' und P_d'' von D_p^2 und $\overline{C}^4$, welche dies ebenso wenig thun.

Der Kürze wegen nenne ich die Punkte P_d' und P_d'' die „Restdoppelpunkte", die Punkte P_t' und P_t'' die Restpunkte" und die Gerade dieser vier Punkte die „Restgerade" von P in Bezug auf $\overline{C}^4$

52. „Die Restgerade von P in Bezug auf $\overline{C}^4$ ist die Polgerade von P in Bezug auf $\overline{C}^4$."

Wir beweisen diesen Satz bei den Normalcurven und denken ihn nachher mittelst centraler Projection auf den allgemeinen einer Curve $\overline{C}^4$ ohne Mittelpunkt übertragen. Dabei behandeln wir nach einander die Normalcurven erster und zweiter Gattung.

Ist (Fig. 21 und Fig. 23) P der gegebene Punkt, so ist nach Artikel 50. der Kegelschnitt D_p^2 dadurch bestimmt, dass er durch A, B, C gehen und in Bezug auf das eingeschriebene Dreieck ABC die Polare p von P in Bezug auf den Wendeschnitt E, resp. H zur Pascal'schen Linie haben muss. Also ist D_p^2 die gleichseitige Hyperbel durch C, welche P_1 zum Mittelpunkt und P_1R_1 und P_1S_1 zu Asymptoten hat. Da in der bekannten Transformation den unendlich fernen Punkten dieser Hyperbel die Punkte R_1' und S_1' entsprechen, so entspricht dieser Hyperbel die Gerade p'. Es entsprechen also die Schnittpunkte von p' und E, resp. H den Punkten P_d' und P_d''. Da nun die vier Punkte P_d', P_d'', P_t', P_t'' die vier

In den „Notes and solutions to some of the problems" am Ende des englischen Werkchens macht Roberts die Bemerkung, dass der Weyr'sche Satz von Dr. Casey herrührt. Wenn dieser Mathematiker ihn schon in 1869 in den „Transactions of the irish academy, volume 24. publicirt hat, so wird dieser Satz also der Casey'sche Satz heissen müssen. Aber ich bin nicht in der Lage die Abhandlung des irischen Mathematikers zu ratpflegen.

Schnittpunkte von $\overline{C}^4$ mit einer Geraden sind, so entsprechen den Punkten P_t' und P_t'' die neuen Schnittpunkte von E, resp. H mit dem durch A, B, C und die Schnittpunkte von p' und E, resp. H geführten Kegelschnitte. Aber nach Artikel 31. sind diese neuen Schnittpunkte die Schnittpunkte von p mit E, resp. H und entsprechen also die Schnittpunkte von p mit E resp. H den Punkten P_t' und P_t'' von $\overline{C}^4$. Da nun nach Artikel 41. die Verbindungslinie der Punkte von $\overline{C}^4$, welche den Berührungspunkten vom Wendeschnitte mit seinen durch P gehenden Tangenten entsprechen, die Polgerade von P ist, ist der Satz für die Normalcurven erster Gattung bewiesen.

Bei der Normalcurve zweiter Gattung legen wir dem nämlichen Gedankengang folgend das Hauptgewicht auf die Anweisung der Hülfsmittel zur Umgehung der imaginären Kreispunkte. Es ist D_p^2 wieder der durch C gehende Kreis, welcher in Bezug auf das von den Kreispunkten und C gebildete eingeschriebene Dreieck die Polare p von P in Bezug auf den Wendeschnitt H zur Pascal'schen Linie hat. Wir beweisen sogleich, dass dieser Kreis das Spiegelbild von C in Bezug auf p zum Centrum hat. Ist nämlich in Fig. 46 (der Polarfigur von Fig. 34) ABC ein in K eingeschriebenes Dreieck und s die durch die Schnittpunkte D von a und d, E von b und e, F von c und f gehende Pascal'sche Linie, so werden c und s den Schnittpunkt C' von d und e harmonisch trennen von f. Und sind nun A und B die Kreispunkte, wobei c die unendlich ferne Gerade und K ein Kreis mit dem Centrum C' ist, so trennen s und die unendlich ferne Gerade den Punkt C des Kreises harmonisch vom Mittelpunkte C', ist also s, da sie den unendlich fernen Punkt der Kreistangente des Punktes C enthält, die Mittelsenkrechte von der Strecke CC'. Diesem Kreise entspricht nun in der bekannten Transformation die Gerade p'. Es entspricht nämlich diesem Kreise in jeder Transformation der reciproken Radien mit C als Centrum eine Gerade, welche zu p parallel ist, also in der $\overline{C}^4$ in ihren Wendeschnitt überführenden Transformation (Fig. 26), welche eine um die imaginäre Achse vom Wendeschnitte H umgelegte Transformation der reciproken Radien mit C als Centrum ist, eine zu p' parallele Gerade. Und dem auf der Entfernung $4\,CP_0$ von C liegende zweite Schnittpunkt von CP_0 mit dem Kreise entspricht der Punkt P_0' von p'; denn nach Artikel 27. hat man die Relation

$$4\,CP_0' \,.\, CP_0' = CF^2$$

Also entsprechen die Schnittpunkte von p' und H den Punkten P_d' und P_d'' von der Normalcurve zweiter Gattung. Und dann entsprechen weiter nach Artikel 31. die Schnittpunkte von p mit H den Punkten P_t' und P_t'' und findet man eben wie oben, dass die Verbindungslinie der vier Punkte P_d', P_d'', P_t', P_t'' die Polare von P in Bezug auf die Normalcurve $\bar{C}^4$ zweiter Gattung ist.

Nachdem der Satz nun mittelst centraler Projection auf eine Curve $\bar{C}^4$ ohne Mittelpunkt ausgedehnt ist, kann man noch bemerken, dass der Punkt P als $G_{1,2}$ zu kennzeichnen ist, wenn man P_t' und P_t'' als Q_1 und Q_2, P_d' und P_d'' als Q_3 und Q_4 betrachtet.

53. „Die Punktepaare, deren Restepunktenpaare einander zu den vier Schnittpunkten von $\bar{C}^4$ mit den Geraden ihrer Ebene ergänzen, entsprechen einander in der bekannten Transformation von $\bar{C}^4$ und K. Die sechs Punkte, deren Restpunktenpaare die zu je zweien genommenen Combinationen der vier Schnittpunkte von $\bar{C}^4$ mit einer Gerade g sind, bilden das Polsextupel von g in Bezug auf $\bar{C}^4$. Der Ort der Punkte, deren Restgerade durch einen gegebenen Punkt gehen, ist die erste Polare C_p^3 von P in Bezug auf $\bar{C}^4$."

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge des vorhergehenden.

54. „Der Wendeschnitt K ist der Ort der Punkte deren Restpunkte, die Curve $\bar{C}^4$ ist der Ort der Punkte, deren Doppelrestpunkte zusammenfallen."

Liegt P auf K, so fallen die Punkte, welche P_t' und P_t'' entsprechen, als die Berührungspunkte der aus P an K möglichen Tangenten zusammen, und tun dies also auch die Punkte P_t' und P_t''. Und bei den Punkten P_d' und P_d'' wird Zusammenfallen eintreten, wenn der P entsprechende Punkt P' auf K, also P auf $\bar{C}^4$ liegt; denn nach dem ersten Teile des vorhergehenden Satzes tauschen Restpunkte und Restdoppelpunkte ihre Rollen, wenn man P durch den ihm entsprechenden Punkt P' ersetzt, und bedingt das Zusammenfallen der Restpunkte von P' also jenes der Restdoppelpunkte von P. Dieses letzte Resultat ist auch hiermit in Einklang, dass der Berührungskegelschnitt eines Punktes Q von $\bar{C}^4$ aus der Tangente q' von K im entsprechenden Punkte Q' und aus der Tangente q von $\bar{C}^4$ in Q bestehen muss, die beiden anderen Schnittpunkte von q mit $\bar{C}^4$ also die Restpunkte von Q sind, und die Restdoppelpunkte von Q mit diesem Punkte zusammenfallen.[18])

---

18) Es wird dieses Zusammenfallen in Artikel 58 näher beleuchtet werden.

55. Wenn P irgend eine Gerade g durchläuft, so erzeugen seine Restpunkte auf $\bar{C}^4$ eine quadratische Involution, welche degenerirt wenn g eine Tangente von K ist."

Die Paare von Restpunkten der Punkte P einer Geraden g bilden auf $\bar{C}^4$ eine Involution, da jeder Punkt von $\bar{C}^4$ seinen Pol und durch diesen involutorisch den ihn zu einem Restpunktenpaare ergänzenden Punkt bestimmt; ist nämlich P_1' auf $\bar{C}^4$ gegeben, so ist der Pol P der Schnittpunkt von g mit der Tangente vom Wendeschnitte im Punkte, welcher dem gegebenen Punkte P_1' von $\bar{C}^4$ entspricht. Und man findet leicht einen diese Involution in $\bar{C}^4$ ausschneidenden Büschel. Denn nach Artikel 52 entsprechen den Restpunkten P_1' und P_1'' von P (F.g. 21 und 23) die Schnittpunkte vom Wendeschnitte E resp. H mit der Polgerade p von P in Bezug auf diesen Kegelschnitt, schneiden die durch den Pol G von g gehenden Polgeraden p der Punkte P von g im Wendeschnitte also die Involution der den Restpunktenpaaren entsprechende Punktepaare und der diesem Strahlenbüschel entsprechende Büschel von Kegelschnitten durch A, B, C und den dem Pole G von g entsprechenden Punkt G in $\bar{C}^4$ die quadratische Involution der Restpunktenpaare aus.

Ist g eine Tangente vom Wendeschnitt, so liegt G auf ihm, reducirt sich die Involution der entsprechenden Punkte, also auch jene der Paare Restpunkte, indem jedes Paar aus einem bestimmten Punkte von $\bar{C}^4$, welcher sich unmittelbar als der dem Berührungspunkte von G mit dem Wendeschnitte entsprechende Punkt ergiebt, und irgend einem anderen Punkte von $\bar{C}^4$ besteht.

56. „Die Polgerade des Punktes P in Bezug auf den Kegelschnitt D_p^2 durch A, B, C und die Restdoppelpunkte fällt mit der Polgerade von P in Bezug auf $\bar{C}^4$ zusammen."

Da die Polgerade von P in Bezug auf $\bar{C}^4$ den Kegelschnitt D_p^2 in den Restdoppelpunkten P_d' und P_d'' schneidet, hat man nur zu beweisen, dass PP_d' und PP_d'' diesen Kegelschnitt in P_d' und P_d'' berühren. Wir führen diesen Beweis mittelst der Transformation, welche $\bar{C}^4$ in ihren Wendeschnitt umbildet, indem wir zeigen, dass die Kegelschnitte, welche den Geraden PP_d' und PP_d'' entsprechen, von der dem Kegelschnitte D_p^2 entsprechenden Geraden berührt worden, und betrachten dabei nach einander wieder die Normalcurven $\bar{C}^4$ erster und zweiter Gattung.

Bei der Normalcurve $\bar{C}^4$ erster Gattung beschränken wir uns

auf den Fall einer Curve $\overline{C}^4$, deren Wendeschnitt ein Kreis ist, was nach Artikel 22 die Allgemeinheit des Beweises nicht beeinträchtigt. Ist in Fig. 47 der Kreis Kr dieser Wendeschnitt, sind die Durchmesser CA und CB die Symmetrieachsen von $\overline{C}^4$ und ist P der gegebene Punkt, so entsprechen nach Artikel 49 den Punkten P, P_d', P_d'' und dem Kegelschnitte D_p^2 die Punkte P', $P_{d'}'$, $P_{d'}''$ und die Gerade $P_{d'}'P_{d'}''$ der Figur. Also muss die Gerade $P_{d'}'P_{d'}''$ den Kegelschnitt $(A, B, C, P', P_{d'}')$ in $P_{d'}'$ und den Kegelschnitt $(A, B, C, P', P_{d'}'')$ in $P_{d'}''$ berühren. Und dies ist nach dem zweiten Teile des Satzes von Artikel 12 wirklich der Fall. Denn von diesen Kegelschnitten, welche beide gleichseitige Hyperbeln sind, ist der erste dem rechtwinkligen Dreieck $CP'P_{d'}'$, der zweite dem rechtwinkligen Dreieck $CP'P_{d'}''$ umschrieben, und $P_{d'}'P_{d'}''$ ist senkrecht zu der gemeinschaftlichen Hypotenuse dieser beiden Dreiecke.

Bei der Normalcurve C^4 zweiter Gattung haben nach Artikel 53. die den Punkten P, P_d', P_d'' entsprechenden Punkte P', $P'_{d'}$, $P''_{d'}$, die in Fig. 48. angegebene Lage in Bezug auf einander, und muss also nur gezeigt werden, dass die Kreise durch $P', C, P'_{d'}$, und durch $P'C.P'_{d'}$ die Gerade $P'_{d'}$, $P'_{d'}$ in $P'_{d'}$ und $P''_{d'}$ berühren. Ist nun Q der Schnittpunkt von $P'P_{d'}'$ mit cY und $c\bar{R}$ zu $P'_{d'}$, $P_{d'}'$ parallel, so ist, da $P'P_{d'}'$ den Wendeschnitt H in $P'_{d'}'$ berührt,

$$\angle QCP'_{d'} = \angle CQP'_{d'} = \angle P'CQ + \angle CP'Q$$

und da CP' und $C\bar{R}$ conjugirte Durchmesser der gleichseitigen Hyperbel H sind,

$$\angle QC\bar{R} = \angle P'CQ$$

also durch Substitution

$$\angle \bar{R}CP'_{d'} = \angle CP'Q \quad \text{oder} \quad \angle CP'_{d'} = \angle CP'Q$$

d. h. der Kreis durch $P', C, P'_{d'}$ berührt $P'_{d'}P''_{d'}$ in $P'_{d'}$. Und ebenso beweist man, dass der Kreis durch $P', C, P''_{d'}$ die Gerade $P'_{d'}P''_{d'}$ in $P''_{d'}$ berührt.

Da obenstehende Beweisführungen nicht mehr zulässig sind, wenn die Gerade $P'_{d'}P''_{d'}$ den Wendeschnitt nicht schneidet, d. h. wenn P' innerhalb des Wendeschnitts liegt, so geben wir noch einen allgemeinen von der Lage von P' in Bezug auf den Wendeschnitt unabhängigen Beweis, indem wir zeigen, dass die Kegelschnitte des Büschels mit den Basispunkten A, B, C, P' (Fig. 49) die Polare p' von P' in Bezug auf den Wendeschnitt K in einer Involution von in Bezug auf K in einander conjugirten Punktepaaren schneiden. Und dies ist unmittelbar hieraus zu entnehmen, dass jeder Kegel-

schnitt durch A, B, C, P' dem Poldreieck ABC von K umschrieben ist und er also die Polare p' von P' in Bezug auf K in zwei Punkten schneiden wird, welche mit P' ein Poldreieck von K bilden und also in Bezug auf K zu einander conjugirt sind. Also werden die beiden Kegelschnitte durch A, B, C, P', welche p' berühren, dies auf K thun, d. h. die Geraden durch P, welche D_p^2 berühren, berühren diesen Kegelschnitt auf C^4, in den Punkten P_d' und P_d''.

57. „Die Polgerade des Punktes P in Bezug auf den Kegelschnitt T_p^2 der Berührungspunkte von den aus P an C^4 möglichen Tangenten fällt mit der Polgeraden von P in Bezug auf C^4 zusammen, d. h. indem der Berührungskegelschnitt T_p^2 in C^4 die Berührungspunkte der aus P an C^4 möglichen Tangenten einschneidet, schneidet umgekehrt auch C^4 in T_p^2 die Berührungspunkte von den aus P an T_p^2 möglichen Tangenten ein und bildet also die Combination von C^4 mit T_p^2 eine zusammengesetzte Curve sechster Ordnung mit acht von A, B, C verschiedenen Doppelpunkten, deren jeder eine der beiden Doppelpunktstangenten durch P sendet."

Dieser Satz, welcher einer merkwürdigen Wechselbeziehung der Curven C^4 und T_p^2 in Bezug auf den Punkt P Ausdruck giebt, ist in Verbindung mit einem Paare von einfachen Sätzen der Polarentheorie eine Folge des vorhergehenden Satzes.

Der erste dieser Hülfssätze sagt aus, dass die Polgeraden eines Punktes P in Bezug auf die Curven eines Büschels einen Strahlenbüschel bilden[19]) und deshalb zusammenfallen, wenn die Polgeraden von P in Bezug auf zwei verschiedene Curven des Büschels dies tun. Und der zweite Hülfssatz behauptet, dass die drei Polgeraden von P in Bezug auf drei Curven, von welchen eine aus der Combination der beiden anderen besteht, in eine Gerade zusammenfallen werden, wenn zwei von ihnen es tun: welcher Satz unmittelbar aus der Definition der Polgeraden[20]) abzuleiten ist.

Nun gehören nach Artikel 52, wenn p die Polare von P in Bezug auf C^4 andeutet, die drei Curven vierter Ordnung C^4, $C_p^3 + p$, $D_p^2 + T_p^2$ einem Büschel an. Nach dem zweiten Hülfssatze hat

---

19) Cremona, a. a. O., Art. 81, Lehrsatz 7.

20) Mittelst der Definition

$$\Sigma \left(\frac{ma}{oa}\right)_1 = 0$$

Man vergleiche Cremona, a. a. O., Art. 11.

$C_p^3 + p$ die Gerade p zur Polgerade von P; es haben also die Curven $\overline{C}^4$ und $C_p^3 + p$ in Bezug auf P die nämliche Polgerade, und es ist deshalb nach dem ersten Hülfssatze p ebenfalls die Polgerade von P in Bezug auf $D_p^2 + T_p^2$. Aber da p nach Artikel 53. die Polgerade von P in Bezug auf D_p^2 ist, so ist p nach dem zweiten Hülfssatze ebenfalls die Polgerade von P in Bezug auf den Berührungskegelschnitt T_p^2.[21])

58. „Der Berührungskegelschnitt T_p^2 zerfällt in zwei Gerade, wenn P auf $\overline{C}^4$ oder auf dem Wendeschnitte K dieser Curve liegt; bei allen anderen Lagen von P ist T_p^2 nicht zusammengesetzt."

Ist der gegebene Punkt ein Punkt Q von C^4, so besteht T_q^2 nach dem Weyr'schen Satze aus der Tangente q von $\overline{C}^4$ in Q und der Tangente q' von K im entsprechenden Punkte Q'. Ist der gegebene Punkt ein Punkt Q' von K, so fallen seine Restpunkte nach Artikel 54. im entsprechenden Punkt Q von $\overline{C}^4$ zusammen; deshalb ist nach dem vorhergehenden Satze Q der gemeinschaftliche Berührungspunkt der zwei von Q' an $T_{q'}^2$ möglichen, hier mit $Q'Q$ zusammenfallenden Tangenten, und hat $T_{q'}^2$ in Q einen Doppelpunkt, so besteht $T_{q'}^2$ also aus zwei Geraden durch Q. Neben den durch irgend einen Punkt Q von $\overline{C}^4$ möglichen Tangenten an K, welche jede für sich $\overline{C}^4$ in vier Punkten mit durch einen Punkt von $\overline{C}^4$ gehenden Tangenten schneiden, kann man deshalb durch diesen Punkt noch zwei Gerade, die zusammenfallenden Teile von $T_{q'}^2$, so ziehen, dass jede von diesem $\overline{C}^4$ ausser Q noch in drei Punkten mit durch einen Punkt, den entsprechenden Punkt Q' von K, gehenden Tangenten schneidet.[22])

Bei allen anderen Lagen von P ist $T_{p'}^2$ ein nicht zerfallender Kegelschnitt. Denn, da die Berührungspunkte von den Tangenten aus P an T_p^2 auf der Polgeraden p von P in Bezug auf $\overline{C}^4$ liegen, so können diese Tangenten nur dann zusammenfallen, entweder wenn p durch P geht, d. h P auf $\overline{C}^4$ liegt, oder die Restpunkte von P zusammenfallen, d. h. P auf K liegt. Und nur wenn die Tangenten aus P an T_p^2 zusammenfallen, kann T_p^2 entarten.

Aus obenstehenden Betrachtungen folgt nun noch, dass die beiden Geraden, welche den Berührungskegelschnitt $T_{q'}^2$ eines Punktes

21) Einen analytischen Beweis dieses Satzes entnimmt man leicht aus meiner „Notiz über die Lemniscate (a. a. O.; Seite 1257).

22) Es ergänzt dieses Resultat den ersten Teil des Satzes von Art. 54.

Q' von K bilden, durch Q gehen und Q' harmonisch trennen von der Tangente q von $\bar{C}^4$ in Q. Später wird die Lage dieser beiden Geraden näher angewiesen werden.[23])

59. „Wenn der Kegelschnitt D_p^2 von P durch Q geht, so geht umgekehrt der Kegelschnitt D_q^2 von Q durch P, d. h. der Ort der Punkte Q, deren Kegelschnitte durch P gehen, ist der Kegelschnitt D_p^2 von P."

Wenn die Polgerade p' von P' in Bezug auf den Wendeschnitt K durch Q' geht, so geht umgekehrt die Polgerade q' von Q' in Bezug auf K durch P'[1]). Dieser bekannte Satz geht mittelst der bekannten Transformation in den Satz dieses Artikels über, da nach Artikel 53. den Polgeraden p' und q' von P' und Q' in Bezug auf K die Kegelschnitte D_p^2 und D_q^2 von P und Q entsprechen.

60. „Die vier Schnittpunkte von $\bar{C}^4$ mit einer Geraden sind von einander unabhängig."

Die Abhängigkeit zweier Gruppen von vier Punkten von einander kann bekanntlich nur darin bestehen, dass beide Gruppen das nämliche Doppelverhältniss zeigen. Dies aber trifft bei den Curven $\bar{C}^4$ nicht zu. Denn die Voraussetzung, dass irgend zwei in einem Punkte P von $\bar{C}^4$ einen unendlich kleinen Winkel mit einander bildende Gerade $\bar{C}^4$ nach gleichem Doppelverhältnisse schneiden, würde unmittelbar bedingen, dass jede Gerade durch P die $\bar{C}^4$ ausser P in drei Punkten mit durch einen Punkt gehenden Tangenten träfe. Was nach Artikel 58. nur bei zwei durch P gehenden Geraden der Fall sein kann.

Aus dem Satze dieses Artikels geht hervor, dass die Bedingung welche aussagt, dass eine $\bar{C}^4$ irgend eine Gerade in vier gegebenen Punkten schneidet, vier einfachen Bedingungen aequivalent ist. Nun ist ein Kegelschnitt K, von welchem ein Poldreieck ABC vorliegt, durch zwei seiner Punkte bestimmt; also kann man zur Bestimmung einer $\bar{C}^4$ mit gegebenen Inflexionsknoten auch zwei Punkte willkürlich annehmen. Da weiter Unbekanntheit mit der Lage von jedem der drei Inflexionsknoten der $\bar{C}^4$ die Zahl der willkürlich annehmbaren Punkte um zwei steigert, kann man zur Bestimmung einer $\bar{C}^4$ im allgemeinen acht Punkte willkürlich wählen. Also geht durch vier beliebig auf einer Gerade g angenommene Punkte eine vierfach unendliche Anzahl von Curven $\bar{C}^4$.

---

23) Man vergleiche Artikel 67.

61. „Wenn der Berührungskegelschnitt T_P^2 von P durch Q geht, so geht umgekehrt der Berührungskegelschnitt T_Q^2 von Q durch P, d. h. der Ort der Punkte Q, deren Berührungskegelschnitte durch P gehen, ist der Berührungskegelschnitt T_P^2 von P."

Betrachten wir nochmals die drei Curven $\overline{C}^4$, C_P^2+p, $D_P^2+T_P^2$ von Artikel 57., welche einem Büschel von Curven vierter Ordnung angehören und bezeichnen wir die Schnittpunktenquadrupel dieser Curven mit irgend einer Geraden g, welche den Punkt P enthält, woraus C_P^2, p, D_P^2, T_P^2 sich beziehen, durch $Q_1 Q_2 Q_3 Q_4$, $R_1 R_2 R_3$ und S, $D_1 D_2$ und $T_1 T_2$, so ist, wie sich zeigen lässt, das Quadrupel $D_1 D_2$ und $T_1 T_2$ in der von den beiden anderen Quadrupeln auf g bestimmten biquadratischen Involution dadurch gekennzeichnet, dass es sich in zwei von P und S harmonisch getrennte Paare $D_1 D_2$ und $T_1 T_2$ zerlegen lässt. Erstens kommt ihm nach den Artikeln 56. und 57. diese Eigenschaft zu. Zweitens beweisen wir wie folgt, dass es in der angegebenen Involution das einzige Quadrupel ist, welches diese Eigenschaft besitzt. Ist $U_1 U_2 U_3 U_4$ irgend ein Quadrupel der vorliegenden Involution, und trennen $V_1 V_2 V_3 V_4$ die Punkte dieses Quadrupels harmonisch von P und S, so bilden die verschiedenen Quadrupel $V_1 V_2 V_3 V_4$, welche den Quadrupeln $U_1 U_2 U_3 U_4$ entsprechen, offenbar eine neue Involution, welche mit der gegebenen projectivisch ist. Wenn nun die Involution $U_1 U_2 U_3 U_4$ zwei in zwei von P und S harmonisch getrennte Paare zerlegbare Quadrupel besässe, so würden die Involutionen $U_1 U_2 U_3 U_4$ und $V_1 V_2 V_3 V_4$ aus den nämlichen Gruppen bestehen, jede Gruppe der Involution $V_1 V_2 V_3 V_4$, also auch eine Gruppe der Involution $U_1 U_2 U_3 U_4$ sein. Und dies führt zum Irrschlusse, dass die Involution zwei durch S gehende Gruppen zulässt, die Gruppe $R_1 R_2 R_3$ und S, und die Gruppe der vier Punkte, welche diese Punkte harmonisch trennen von P und S. Deshalb kann die von den Quadrupeln $Q_1 Q_2 Q_3 Q_4$, $R_1 R_2 R_3$ und S bestimmte Involution keine zwei Gruppen besitzen, welche sich in zwei von P und S harmonisch getrennte Paare zerlegen lassen.

Betrachten wir nun weiter die vierfach unendliche Anzahl der durch $Q_1 Q_2 Q_3 Q_4$ gehenden Curven $\overline{C}^4$, so erhellt aus dem vorhergehenden, dass die in Bezug auf diese Curven genommenen zusammengesetzten Curven $D_P^2+T_P^2$ von P die Gerade g sämtlich in den Punktepaaren $D_1 D_2$ und $T_1 T_2$ schneiden. Aber dabei fragt es sich, ob immer das Paar $D_1 D_2$ auf dem Teile D_P^2 wie das Paar $T_1 T_2$ auf dem Teile T_P^2 liege. Und hierauf muss die Antwort entschieden verneinend lauten. Da nämlich die Paare $D_1 D_2$ und $T_1 T_2$ in Bezug auf die Quadrupel $Q_1 Q_2 Q_3 Q_4$, $R_1 R_2 R_3$ und S eine ganz gleiche Bedeutung haben, werden die Punkte $D_1 D_2$ resp. $T_1 T_2$ bei der einen Hälfte

der vierfach unendlichen Anzahl von Curven $\bar{C}^4$ durch $Q_1\,Q_2\,Q_3\,Q_4$ auf der entsprechenden Curve $D_p{}^2$, resp. $T_p{}^2$, bei der anderen Hälfte auf $T_p{}^2$, resp. $D_p{}^2$ zu finden sein. Nennt man nun zwei Curven $\bar{C}^4$ durch die Punkte $Q_1\,Q_2\,Q_3\,Q_4$ von g in Bezug auf den Punkt P von g gleichartig oder ungleichartig, jenachdem von den zwei Paaren von Kegelschnitten $D_p{}^2$ und $T_p{}^2$ die gleichnamigen oder die ungleichnamigen durch die nämlichen Punkte von q gehen, so teilt dieses Verhalten die Curven $\bar{C}^4$ durch

$$Q_1,\quad Q_2,\quad Q_3,\quad Q_4$$

so in zwei Gruppen, dass zwei dieser Curven in Bezug auf P gleichartig oder ungleichartig sind, jenachdem sie zur nämlichen Gruppe oder zu verschiedenen Gruppen gehören. Offenbar wird, was hier für den Punkt P der Geraden g gefunden ist, auch allgemein für irgend einen Punkt von g gelten. Dabei fragt es sich aber, ob die Teilung der Curven C_4 durch $Q_1\,Q_2\,Q_3\,Q_4$ in zwei Gruppen von der Lage des Punktes P auf g abhängt oder nicht; aber diese Frage wird im folgenden Artikel beantwortet werden.

Wenn ich mich jetzt zum Satze dieses Artikels wende, so setze ich voraus, dass der Berührungskegelschnitt $T_p{}^2$ von P in Bezug auf die gegebene Curve $\bar{C}^4$ durch Q geht und die Verbindungslinie g der Punkte P und Q die C^4 in den Punkten $Q_1\,Q_2\,Q_3\,Q_4$ schneidet. Nach den vorhergehenden Entwickelungen ist Q dann ein Punkt des Kegelschnittes $D_p{}^2$ von P in Bezug auf eine andere Curve $\bar{C}^4{}_1$ durch Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, welche mittelst eines Index es unterschiedene Curve man noch aus einer vierfach unendlichen Anzahl wählen kann. Aber dann geht nach Artikel 56. umgekehrt der Kegelschnitt $D_q{}^2$ von Q in Bezug auf $\bar{C}^4{}_1$ durch P. Und da die Curven $\bar{C}^4$ und $\bar{C}^4{}_1$ für irgend einen Punkt von g das nämliche Quadrupel $D_1\,D_2$ und $T_1\,T_2$ liefern, liegt P auf der aus den Kegelschnitten $D_q{}^2$ und $T_q{}^2$ von Q in Bezug auf $\bar{C}^4$ zusammengesetzten Curve vierter Ordnung, also entweder auf $D_q{}^2$ von Q in Bezug auf $\bar{C}^4$ oder auf $T_q{}^2$ von Q in Bezug auf $\bar{C}^4$. Aber auf $D_q{}^2$ von Q in Bezug auf $\bar{C}^4$ kann P nicht liegen, denn Q liegt nicht auf $D_p{}^2$ von P in Bezug auf $\bar{C}^4$. Also liegt P auf dem Berührungskegelschnitte $T_q{}^2$ von Q in Bezug auf $\bar{C}^4$ und ist der Satz dieses Artikels bewiesen.[24])

62. „Die Teilung der Curven $\bar{C}^4$ durch die vier Punkte $Q_1\,Q_2\,Q_3\,Q_4$ einer Geraden g in zwei Gruppen nach dem Verhalten

---

24) Für einen analytischen Beweis vergleiche man meine „Notiz über die Lemniscate" (a. a. O., Seite 1256).

der Schnittpunkte von g mit den in Bezug auf ihnen genommenen Kegelschnitten D_p^2 und T_p^2 von dem Punkte P von g ist von der Lage von P auf g unabhängig."

Zum Beweise dieses Satzes zeigen wir erst, dass die Punkte P von g sich in Bezug auf eine bestimmte Curve $\bar{C}^4$ durch $Q_1 Q_2 Q_3 Q_4$ in zwei Systemen ordnen. Nennen wir nämlich der Kürze wegen die Schnittpunkte von g mit der Curve D_p^2 irgend eines Punktes P in Bezug auf $\bar{C}^4$ die D-Punkte von P für $\bar{C}^4$ und stellen wir mittelst der Schreibweise

$$D_{-3},\ D_{-2},\ D_{-1},\ P,\ \ D_1,\ D_2,\ D_3\ \ldots$$

eine von P aus nach beiden Seiten hin unendlich fortlaufende Reihe von Punkten der Geraden g auf, von welchen jeder die ihn in der Reihe an beiden Seiten umschliessenden Punkte in Bezug auf $\bar{C}^4$ zu D-Punkten hat, so ist es klar, dass die Fortsetzung der Reihe nach beiden Seiten immer neue Punkte von g erzeugen wird, bis sich die Reihe an jedem der beiden Enden mittelst einer der vier Punkte $Q_1 Q_2 Q_3 Q_4$ abschliesst. Denn, da alle Kegelschnitte D_p^2 von den Punkten P in Bezug auf $\bar{C}^4$ durch die Inflexionsknoten von $\bar{C}^4$ gehen, die Gerade g aber — da sie keinen Inflexionspunkt von $\bar{C}^4$ enthält — nicht ein Teil irgend eines zerfallenden Kegelschnittes D_p^2 sein kann, so hat kein Punkt P von g in Bezug auf $\bar{C}^4$ drei auf g liegende D-Punkte, was eintreten würde, wenn die Fortsetzung der Reihe in einer der beiden Richtungen auf irgend ein schon niedergeschriebenes Glied zurückführte, bevor man den Endpunkt Q erreicht hätte. Und die Reihe schliesst sich jederzeit in einem Punkte Q, da unter den beiden D-Punkten eines Punktes Q von $\bar{C}^4$ dieser Punkt selbst vorkommt. Aber dann muss es auch zwei solche Reihen von Punkten P auf g geben, da vier Endpunkte Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 vorliegen.

Nach dieser Vorbereitung ist es nicht schwierig mehr zu zeigen, dass irgend eine andere Curve $\bar{C}_1^4$ durch Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 sich in Bezug auf die Punkte einer nämlichen Reihe zu $\bar{C}^4$ auf gleiche Weise verhält. Sind nämlich erstens $\bar{C}^4$ und $\bar{C}_1^4$ in Bezug auf irgend einen Punkt D_n von einer der beiden Reihen gleichartig, so gehen die Kegelschnitte D_p^2 von D_n in Bezug auf $\bar{C}^4$ und $\bar{C}_1^4$ durch den folgenden Punkt der Reihe D_{n+1}; also gehen umgekehrt nach Artikel 59. die Kegelschnitte D_p^2 von D_{n+1} in Bezug auf $\bar{C}^4$ und $\bar{C}_1^4$ durch D_n und sind deshalb die Curven $\bar{C}^4$ und $\bar{C}_1^4$ in Bezug auf D_{n+1} auch gleichartig. Sind zweitens $\bar{C}^4$ und $\bar{C}_1^4$ in Bezug auf D_n un-

gleichartig, so geht der Kegelschnitt D_p^2 von D_n in Bezug auf $\overline{C}^4$ und der Kegelschnitt T_p^2 von D_n in Bezug auf $\overline{C}_1^4$ durch D_{n+1} und also umgekehrt nach Artikel 59. der Kegelschnitt D_p^2 von D_{n+1} in Bezug auf $\overline{C}^4$ und nach dem Artikel 61. der Kegelschnitt T_p^2 von D_{n+1} in Bezug auf $\overline{C}_1^4$ durch D_n; d. h. es sind die Curven $\overline{C}$ und $\overline{C}_1^4$ in Bezug auf D_{n+1} ebenfalls ungleichartig. Also lässt sich mittelst des bekannten Schlusses von n auf $n+1$ obenstehende Behauptung beweisen.

Aber in Bezug auf die gegebene Curve $\overline{C}^4$ lassen sich die Punkte P von g noch auf eine zweite Weise in zwei Systemen ordnen. Nennen wir nämlich die Schnittpunkte von g mit der Curve T_p^2 irgend eines Punktes P in Bezug auf $\overline{C}^4$ die T-Punkte von P für $\overline{C}^4$, so kann man ebenso mittelst der Schreibweise

$$\ldots T_{-3}, T_{-2}, T_{-1}, P, T_1, T_2, T_3 \ldots$$

eine von P aus nach beiden Seiten hin unendlich fortlaufende Reihe von Punkten aufstellen, von welchen jeder die ihn in der Reihe begrenzenden Punkte in Bezug auf $\overline{C}^4$ zu T-Punkten hat. Und auch hier liefert eine Fortsetzung der Reihe immer wieder neue Punkte, bis sich die Reihe in zwei der Punkte Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 abschliesst. Denn, da nur die Kegelschnitte $T_{Q'}^2$ von den Schnittpunkten Q' von g mit dem Wendeschnitte in Geraden zerfallen, und diese Geraden durch die entsprechenden Punkte Q von $\overline{C}^4$ gehen, so ist g kein Teil eines zerfallenden Kegelschnittes T^2 von einem Punkte P auf g, hat also kein Punkt von g in Bezug auf $\overline{C}^4$ mehr als zwei T-Punkte, und wird man deshalb bei Fortsetzung der Reihe bis zum Schlusse immer neue Punkte finden. Und bei Fortsetzung der Reihe nach irgend einer Seite wird man einen Schlusspunkt erreicht haben, wenn der Kegelschnitt T_p^2 die Gerade g berührt. Aber dann ist der Berührungspunkt nach Artikel 57. immer einer der vier Punkte Q, weshalb es auf g in Bezug auf $\overline{C}^4$ wieder zwei Reihen von Punkten T geben muss, da vier Punkte Q vorliegen. Und ebenso wie oben zeigt man auch hier, dass irgend eine andere Curve $\overline{C}^4$ durch Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 sich in Bezug auf die Punkte einer nämlichen Reihe zu $\overline{C}^4$ auf gleiche Weise verhält.

Ist die Einteilung der Curven $\overline{C}^4$ durch Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 in mit $\overline{C}^4$ gleichartige und mit C^4 ungleichartige für alle Punkte von irgend einer Reihe die nämliche, so ist jetzt nur noch zu entscheiden, ob sie mit der Reihe sich ändert oder nicht. Dazu beweisen

wir einfach, dass die Voraussetzung, die Ersetzung von der einen Reihe von D-Punkten durch die andere ändere die Einteilung, unhaltbar ist.

Sind D_{n-1}, D_n, D_{n+1} drei auf einander folgende Glieder einer der beiden Reihen und also D_{n-1} und D_{n+1} die D-Punkte von D_n in Bezug auf die mit $\bar{C}^4$ gleichartigen Curven $\bar{C}^4$ und die T-Punkte von D_n in Bezug auf die mit $\bar{C}^4$ ungleichartigen Curven $\bar{C}_1^4$, so erteilen wir D_n eine unendlich kleine Bewegung auf g, wobei natürlich die Punkte D_{n-1} und D_{n+1} sich auch über unendlich kleine Strecken von g bewegen. Es fragt sich nun, ob diese drei neuen Punkte, die als D'_{n-1}, D_n', D'_{n+1} zu bezeichnen sind, in Bezug auf die mit $\bar{C}^4$ gleichartigen Curven wieder einer der beiden D-Reihen angehören werden. Und auf diese Frage muss die Antwort im allgemeinen bejahend lauten. Denn, wenn D_n seine Lage auf g unendlich wenig ändert, so werden die Kegelschnitte D^2 von D_n in Bezug auf die mit $\bar{C}^4$ gleichartigen Curven $\bar{C}_1^4$ und die Kegelschnitte T^2 von D_n in Bezug auf die mit $\bar{C}^4$ ungleichartigen Curven $\bar{C}_1^4$ ihre Lage ebenfalls unendlich wenig ändern, müssen also die D-Punkte von D_n' in Bezug auf die mit $\bar{C}^4$ gleichartigen Curven $\bar{C}_1^4$ und die T-Punkte von D_n' in Bezug auf die mit $\bar{C}^4$ ungleichartigen Curven $\bar{C}_1^4$ in unmittelbarer Nähe von D_{n-1} und D_{n+1} zu finden sein, und wird man also genötigt die Punkte D'_{n-1}, D_n', D'_{n+1} für die mit $\bar{C}^4$ gleichartigen Curven unter eine Reihe D-Punkte zu bringen, wenn nicht zufälliger Weise die T-Punkte von D_n' in Bezug auf die erste Gruppe von Curven $\bar{C}^4$ und die D-Punkte von D_n' in Bezug auf die zweite Gruppe von Curven $\bar{C}_1^4$ ebenfalls D_{n-1} und D_{n+1} unendlich nahe liegen. Aber es tritt dieses im allgemeinen nicht ein. Fiele nämlich in Bezug auf irgend eine der Curven $\bar{C}_1^4$ einer der D-Punkte von einem nicht mit einem der vier Punkte Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 zusammen getretenen Punkte D_n von g mit einem der T-Punkte von diesem Punkte D_n zusammen, so würde aus der in den Artikeln 56. und 57. angezeigten harmonischen Lage von den D-Punkten und den T-Punkten mit D_n und dem Schnittpunkte S von g mit der Polgeraden von D_n in Bezug auf $\bar{C}_1^4$ folgen, dass der andere D-Punkt von D_n mit dem anderen T-Punkte von D_n zusammenfallen müsste, und hieraus wieder, dass die ganze D-Reihe des Punktes D_n mit der T-Reihe von D_n identisch wäre. Und dies ist nicht der Fall; denn ist Q_1 einer der Endpunkte, so fällt der von Q_1 verschiedene D-Punkt von Q_1 im allgemeinen nicht mit dem von Q_1 verschiedenen T-Punkt von Q_1 zusammen. Aber selbst, wenn dies so wäre, so würde für jeden Punkt der Reihe der Unterschied zwischen D-Punkten und T-Punkten aufgehoben, aber keine Beschwerde gegen die Aufnahme von D'_{n-1}, D_n', D'_{n+1}

in eine Reihe von D-Punkten herbeigeführt sein. Nur wenn D_n mit einem der vier Punkte Q zusammenfällt, fällt einer der D-Punkte von D_n mit einem der T-Punkte von D_n in D_n zusammen, ohne dass der zweite D-Punkt mit dem zweiten T-Punkte zusammenfallen muss.

Ist nun bewiesen, dass zwei unmittelbar an einander grenzende Punkte D_n und D_n' von g der nämlichen Reihe angehören, so führt eine wiederholte Anwendung dieses Satzes zum Schluss, dass alle Punkte von g der nämlichen Reihe angehören. Und dieses ist offenbar nicht der Fall. Wir müssen daher annehmen, dass zwei einander unendlich nahe liegende Punkte D_n und D_n' verschiedenen Reihen angehören können, obgleich sie sich in Bezug auf die Einteilung der Curven C^4 auf gleiche Weise verhalten. Woraus dann endlich folgt, dass die Einteilung der Curven $\overline{C}_1^4$ ganz unabhängig ist von der Lage des Ausgangspunktes P auf g.

63. „Die Geradenpaare, welche die zerfallenden Berührungskegelschnitte $T_{Q'}^2$ der Punkte Q' vom Wendeschnitte K bilden, umhüllen eine Curve vierter Classe, welche in zwei Kegelschnitte zerfallen muss."

Durch irgend einen Punkt P gehen vier Gerade, welche zerfallenden Berührungskegelschnitten von Punkten Q' von K angehören, denn der Berührungskegelschnitt T_P^2 von P schneidet K in vier Punkten Q', deren Berührungskegelschnitte nach Artikel 61. durch P gehen; also ist die gesuchte Enveloppe von der vierten Classe. Aber diese Enveloppe berührt jede Doppeltangente q von $\overline{C}^4$ in ihren Berührungspunkten Q_1 und Q_2 mit $\overline{C}^4$. Da nämlich Q_1 nach Artikel 43. auf K liegt, so sind q und die Tangente q_1' an K in $Q_1' = Q_2$ Tangenten der Enveloppe und nun wird die auf q folgende Tangente der Enveloppe, da sie als Teil des Berührungsschnittes vom an Q_1 grenzenden Punkte von K durch den an Q_2 grenzenden Punkt von $\overline{C}^4$ geht und mit q einen unendlich kleinen Winkel bildet, die Tangente q beim Grenzübergange in Q_2 schneiden, d. h. die Gerade q berührt die Enveloppe in Q_2. Und da man mittelst Verwechslung von Q_1 und Q_2 ebenso beweist, dass q die gesuchte Enveloppe in Q_1 berührt, so ist jede Doppeltangente q von $\overline{C}^4$ mit den Berührungspunkten Q_1 und Q_2 ebenfalls Doppeltangente der gesuchten Enveloppe in den Punkten Q_1 und Q_2. Aber eine Curve vierter Classe mit vier Doppeltangenten muss in zwei Kegelschnitte zerfallen.

64. „Die beiden Kegelschnitte, welche berührt werden von den Geradenpaaren, die die Berührungskegelschnitte der Punkte vom

Wendeschnittte K bilden, haben mit K das Dreieck ABC zum gemeinschaftlichen Poldreieck. Sie gehen durch die vier sich selbst entsprechenden Punkte S und bilden mit K drei Kegelschnitte, die zu einander in der besonderen Beziehung stehen, dass jeder von ihnen in Bezug auf irgend einen der beiden übrigen die Polfigur der dritten ist."

Jede der drei involutorisch perspectivischen Collineationen, welche einen Eckpunkt vom Doppelpunktsdreiecke ABC von $\overline{C}^4$ zum Centrum und die Gegenseite dieses Dreiecks zur Axe haben, führen $\overline{C}^4$ und ihren Wendeschnitt K in sich selbst über. Also muss jede dieser drei Collineationen die aus zwei Kegelschnitten bestehende Enveloppe vierter Classe ebenfalls in sich selbst überführen. Hierbei können dann diese Kegelschnitte, welche weiter als K_1 und K_2 bezeichnet werden sollen, entweder in einander oder in sich selbst übergehen. Aber man weist leicht das erste als unmöglich nach. Nicht, dass es unmöglich ist zwei Kegelschnitte, welche in Bezug auf einander eine hellebige Lage haben, mittelst involutorisch perspectivischer Collineation in einander umzubilden. Vielmehr ist diese Umbildung auf sechs verschiedene Weisen möglich, und tritt dabei irgend einer der sechs Eckpunkte T (Fig. 50) des von den gemeinsamen Tangenten gebildeten vollständigen Vierseites in Verbindung mit einer der sechs Seiten t des von den gemeinsamen Punkten gebildeten vollständigen Vierecks als Centrum und Axe auf. Allein es ist nicht möglich ein Dreieck zu finden, dessen Eckpunkte drei Punkte T, und dessen Seiten drei Geraden t sind. Denn bei der allgemeinen Lage der Kegelschnitte in Bezug auf einander ist die Verbindungslinie von zwei Punkten T entweder Seite des gemeinsamen Poldreiecks oder gemeinsame Tangente, und der Schnittpunkt von zwei Geraden t entweder Eckpunkt des gemeinsamen Poldreiecks oder gemeinsamer Punkt. Und wenn die Kegelschnitte einander doppelt berühren (Fig. 51) so gibt es wol ein Dreieck, dessen Eckpunkte Punkte T und dessen Seiten Gerade t sind; aber hier verlieren zwei der drei Collineationen ihren involutorischen Charakter und hat die aus den Kegelschnitten bestehende Enveloppe vierter Classe obendrein keine Lage, wobei die drei Seiten des Dreiecks auf gleiche Weise auftreten. Also werden die Kegelschnitte K_1 und K_2 in Bezug auf das Dreieck ABC eine solche Lage haben müssen, dass irgend eine der drei angewiesenen involutorisch perspectivischen Collineationen jeden der beiden Kegelschnitte in sich selbst überführt, d. h. ABC muss ein Poldreieck sein von K_1 und von K_2.

Sind $Q_1 = Q_2'$ und $Q_2 = Q_1'$ die ebenfalls auf K liegenden Berührungspunkte von $\overline{C}^4$ mit ihrer Doppeltangente q (Fig. 52.) und

q_2' und q_1' die Tangenten von K in diesen Punkten, so ist der Schnittpunkt dieser Tangenten nach Artikel 46. ein sich selbst entsprechender Punkt S der bekannten quadratischen Transformation zwischen $\bar{C}^4$ und K. Wir beweisen nun, dass jede der beiden Kegelschnitte K_1 und K_2 durch diesen Punkt S geht, dass der eine dieser Kegelschnitte in S die Gerade q_1', der andere in S die Gerade q_2' berührt. Da nämlich der Berührungskegelschnitt von Q_2 aus q und q_2' besteht und also durch S geht, so geht umgekehrt der Berührungskegelschnitt von S durch Q_2 und wird SQ_2, da er in Q_2 die $\bar{C}^4$ nicht berührt, nach Artikel 54. in Q_2 den Berührungskegelschnitt von S berühren müssen. Aber, wenn der Berührungskegelschnitt von S den auch auf K liegenden unmittelbar an Q_2 grenzenden Punkt von q_1' enthält, so geht umgekehrt der in zwei Geraden zerfallende Berührungskegelschnitt des unmittelbar an Q_2 grenzenden Punktes von K durch S. Also ist S der Schnittpunkt von zwei Tangenten der Enveloppe vierter Classe, welche, da sie zu den Berührungskegelschnitten von zwei an einander grenzenden Punkten von K gehören, einander folgen, d. h. es wird die Enveloppe von q_2' in S berührt. Und nun beweist man mittelst Umtausch von Q_1 und Q_2 u. s. w., dass die Enveloppe ebenfalls von q_1' in S berührt wird. Also muss die Enveloppe in S einen Doppelpunkt mit den Doppelpunktstangenten q_1' und q_2' haben und jede der beiden Kegelschnitte K_1 und K_2 durch die vier Punkte S gehen. Selbstverständlich berührt dann der eine dieser Kegelschnitte q in Q_1 und q_1' in S, der andere q in Q_2 und q_2' in S; sodass, wenn K_1 der erste, und K_2 der zweite dieser Kegelschnitte ist, sie in Bezug auf K und das Dreieck $Q_1 Q_2 S$ die in Fig. 53. angegebenen Lagenverhältnisse zeigen.

Der Beweis des letzteren Teiles unseres Satzes kann nun unmittelbar der Figur 53. entnommen werden, wenn man noch bedenkt, dass die Curve $\bar{C}^4$ vier Doppeltangenten besitzt. Es leuchtet dann sofort ein, dass die Polfigur von K_1 in Bezug auf K mit K_2 zusammenfällt; denn die vier Punkte Q_1 und die vier Punkte S haben in Bezug auf K die vier Geraden q_2' und die vier Geraden q zu Polaren und diese acht Geraden werden von K_2 berührt. Und ebenso beweist man, dass K die Polfigur von K_1 in Bezug auf K_2 und von K_2 in Bezug auf K_1 ist.

65. „Die Kegelschnitte K_1 und K_2 sind imaginär bei den Curven $\bar{C}^4$ erster Gattung und reell bei den Curven $\bar{C}^4$ zweiter Gattung.

Bei den Curven $\bar{C}^4$ erster Gattung sind die vier Punkte S und die vier Doppeltangenten, also auch die acht Berührungspunkte Q sämt-

lich imaginär. Betrachten wir nun die erste Normalcurve erster Gattung, was wie wir wissen der Allgemeinheit nicht schadet, und setzen wir K_1 reell voraus, so sind die Schnittpunkte von K_1 und K als Berührungspunkte Q von Doppeltangenten q an C^4 imaginär, und liegt K_1 deshalb entweder ganz innerhalb oder ganz ausserhalb des elliptischen Wendeschnittes K. Aber dann ist K_2 als Polfigur von K_1 in Bezug auf K auch reell und umgekehrt entweder ganz ausserhalb oder ganz innerhalb K gelegen. Und da K_1 und K_2 mit K das Dreieck ABC zum Poldreieck haben, so sind K_1 und K_2 zu K concentrische und ähnlich liegende Ellipsen; denn von ihnen ist der innerhalb K liegende Kegelschnitt selbstverständlich eine Ellipse und weil die Tangenten aus dem Centrum C an diesen imaginär sind, hat der andere imaginäre unendlich ferne Punkte, und ist dieser ausserhalb K liegende Kegelschnitt also auch eine Ellipse. Aber nun kann unmöglich K die Polfigur von K_1 in Bezug auf K_2 und von K_2 in Bezug auf K_2 sein. Denn die Polfigur von K in Bezug auf den innerhalb K liegenden Kegelschnitt — sei es K_1 — liegt wieder innerhalb von K_1, und die Polfigur von K in Bezug auf den ausserhalb K liegenden Kegelschnitt — die nun K_2 heissen muss — liegt wieder ausserhalb von K_2. Also führt die Voraussetzung dass K_1 reell sei zu Irrsclüssen und muss deshalb K_1 und dann auch K_2 imaginär sein [25]). Und dann sind auch die in zwei Gerade zerfallenden Berührungskegelschnitte der Punkte des Wendeschnittes bei einer C^4 erster Gattung sämtlich imaginär, und kann man also aus keinem Punkte von K an eine Curve erster Gattung eine reelle Tangente anlegen.

Bei der Normalcurve zweiter Gattung sind die drei Curven K, K_1, K_2, da sie das von den beiden Kreispunkten und dem Punkte C gebildete Dreieck zum Poldreieck haben, gleichseitige Hyperbeln mit C als gemeinschaftlichem Mittelpunkte. Nennen wir sie H, H_1, H_2 und setzen wir nach der in Artikel 10. angegebenen Bezeichnungsweise $H_1 = H(\alpha, m)$, so ist nach Artikel 13. auch

$$H_2 = H\left(-\alpha, \frac{1}{m}\right)$$

da H_2 die Polfigur von H_1 in Bezug auf H ist. Aber es ist auch H_2 die Polfigur von H in Bezug auf H_1, also

$$H_2 = H(2\alpha, m^2)$$

---

25) Sind w_1 und w_2 die imaginären Kubikwurzeln der Einheit und a und b die Achsen von K, so findet man für die Achsen von K_1 und K_2 analytisch $w_1^2 a$ und $w_1 b$; $w_2 a$ und $w_2 b$, wenn K der Wendeschnitt der Normalcurve C^4 erster Gattung ist.

woraus man findet, dass α entweder 60^0 oder 120^0 ist, und m entweder den Wert eins hat oder eine der imaginären Kubikwurzeln der Einheit ist. Also ist die einzige reelle Lösung — und die Curven H_1 und H_2 müssen reell sein, da zwei der vier Punkte S und vier der acht Berührungspunkte Q von Doppeltangenten q der C^4 es sind — die, welche schon in Artikel 13. angewiesen ist, wobei die H_1 und H_2 mittelst Drehung von H über 60^0 um C abgeleitet werden. Von der Lage dieser drei gleichseitigen Hyperbeln in Bezug auf die Normalcurve C^4 zweiter Gattung giebt Fig. 54. eine Vorstellung. Sie zeigt an, dass die in Geraden zerfallenden Berührungskegelschnitte der Punkte von dem Wendeschnitte bei den Curven C^4 zweiter Gattung sämtlich reell sind.

66. „Die beiden Geraden durch den Punkt Q von der Normalcurve C^4 zweiter Gattung, welche den Berührungskegelschnitt des entsprechenden Punktes Q' des Wendeschnittes bilden, schneiden die Verbindungslinie von Q mit dem Centrum C unter Winkeln von 30^0."

Aus dem vorhergehenden Artikel folgt einerseits, dass die beiden Geraden durch irgend einen Punkt Q der Lemniskate, welche den Berührungskegelschnitt des entsprechenden Punktes Q' von H (Fig. 54.) bilden, durch Q gehende Tangenten von der Combination H_1+H_2 sind. Andererseits ergab sich die Lemniskate in Artikel 14. als der Ort des Schnittpunktes von den entsprechenden Tangenten von H_1 und H_2, wobei unter einander entsprechenden Tangenten von H_1 und H_2 die Tangenten zu verstehen sind, welche sich bei Drehung von H aus einer nämlichen Tangente von H entwickelt haben; dabei sahen wir dann, dass diese einander entsprechenden Tangenten einen Winkel von 60^0 mit einander bilden, welcher von den Mittelpunktsleitstrahl ihres Scheitels gehälftet wird. Unter den vier aus Q an H_1+H_2 möglichen Tangenten giebt es also zwei, welche die Verbindungslinie CQ von Q mit dem Centrum C beiderseits unter Winkeln von 30^0 schneiden; aber damit ist noch nicht bewiesen, dass gerade diese zwei Tangenten aus Q den Berührungskegelschnitt von Q' bilden. Nun muss aber der Berührungskegelschnitt des Scheitels P von H die Achse CP zur Symmetrieachse haben und also aus einer Tangente von H_1 und einer Tangente von H_2 bestehen; weshalb der Berührungskegelschnitt von irgend einem Punkte Q' von H aus einer Tangente von H_1 und einer Tangente von H_2 bestehen muss. Aber nun besteht der Berührungskegelschnitt von D_1 bekanntlich aus d_1 und s_1, von welchen Geraden d_1 als Tangente von H_1 und s_1 als Tangente von H_2 zu betrachten ist. Und da diese

Tangenten einander unter einen Winkel von 60^0 schneiden, so reichen Continuitätsgründe zur Vollendigung des Beweises aus.

67. „Die kubische Involution auf AB, welche die Punkte A und B zu dreifachen Elementen hat, steht mit den zerfallenden Berührungskegelschnitten der Punkte des Wendeschnittes K von der Curve $\bar{C}^4$ mit den Inflexionsknoten A, B, C in enger Verbindung. Ist Q' irgend ein Punkt von K, Q der entsprechende Punkt von $\bar{C}^4$ und wird Q durch CA und CB harmonisch getrennt von $\bar{Q}$, so werden die Verbindungslinien von Q mit den beiden Punkten, welche $\bar{Q}$ zu einem Tripel der auf AB angedeuteten kubischen Involution ergänzen, zusammen den Berührungskegelschnitt von Q' bilden."

Wenn A und B die imaginären Kreispunkte sind, die $\bar{C}^4$ also eine Lemniskate ist, sagt der Satz aus, dass die Senkrechte auf CQ mit den beiden durch Q gehenden geradlinigen Bestandteilen des Berührungskegelschnittes von Q' bei Bewegung von Q auf der unendlich fernen Geraden eine kubische Involution bilden, welche die imaginären Kreispunkte zu dreifachen Elementen hat. Also ist der Satz für diesen besonderen Fall nur eine andere Ausdrucksweise des Satzes des vorhergehenden Artikels, da die kubische Involution welche mittelst Drehung eines regelmässigen Sechsecks von den Mittelpunktsdiagonalen auf der unendlich fernen Geraden gebildet wird, merklich die imaginären Kreispunkte zu dreifachen Elementen hat[26]). Und nun wird der Satz für den Fall einer allgemeinen Curve $\bar{C}^4$ mittelst centraler Projection aus diesem besonderen Falle abgeleitet[27]).

68. „Die Berührungspunkte der Tangenten aus irgend einem Punkte P von AB an $\bar{C}^4$ liegen paarweise auf drei Geraden p durch C. Bei Bewegung von P über AB bilden die Strahlentripel p durch C eine kubische Strahleninvolution mit den dreifachen Strahlen CA und CB, welche mit der Punktreihe P auf AB projectivisch ist."

Der erste Teil des Satzes ist eine Folge des Satzes von Artikel 19. Projiciren wir nämlich die Seite AB des Dreiecks ABC der Inflexionsknoten von $\bar{C}^4$ ins Unendliche, so wird die Projection von C Mittelpunkt der Projection von $\bar{C}^4$, und nun liegen die Be-

---

26) Man vergleiche „Grundzüge einer Theorie der kubischen Involutionen" von Dr. Emil Weyr.

27) Ich überlasse es geneigten Lesern hierbei mittelst geometrischer Betrachtungen die imaginäre Uebertragung des Satzes von der Curve zweiter Gattung auf die Curve erster Gattung zu umgehen.

rührungspunkte der aus einem bestimmten Punkte der unendlich fernen Geraden an diese Mittelpunktscurve $\bar{C}^4$ möglichen Tangenten auf drei ihrer Durchmesser. Weiter bilden die den verschiedenen Punkten P von AB zukommenden Strahlentripel p durch C eine kubische Involution, welche zu der Punktreihe P projectivisch ist, da irgend ein Strahl p den ihm entsprechenden Punkt P und mittelst dieses die ihn zu einem Tripel ergänzenden Strahlen bestimmt. Und endlich hat die gefundene kubische Involution die Strahlen CA und CB zu dreifachen Strahlen, denn die sechs Berührungspunkte der Tangenten aus A resp. B an C fallen alle mit A resp. B zusammen.

69. „Die Tangente QR der Lemniskate in Q (Fig. 55.) bildet mit dem Leitstrahle CQ und der zu CQ in Bezug auf die Doppelpunktstangenten antiparallelen Geraden CR ein gleichschenkeliges Dreieck CQR mit der Basis CQ."

Wenn wir die Lemniskate ableiten aus dem um seine imaginäre Achse umgeschlagenen Wendeschnitte H, so haben wir es nach Artikel 22. mit der Verwandtschaft der reciproken Radien zu thun. Sind also Q und Q' einander in dieser Verwandtschaft entsprechende Punkte von der Lemniskate und von H, so bilden die Tangenten q und q' in Q und Q' an diesen einander entsprechenden Curven mit CQ nach verschiedenen Seiten gleiche Winkel[28]). Und da CQ' und q' antiparallel zu einander sind in Bezug auf die Asymptoten von H, so folgt hieraus der Satz.

Wenn man den Winkel QCD durch φ andeutet, so findet man für den Winkel RQD den Wert $90^0 + 3\varphi$. Hieraus kann man auch den Satz des vorhergehenden Artikels ableiten[29]).

Der Satz dieses Artikels liefert eine äusserst einfache Construction der Tangente von der Lemniskate in Q, wenn ausser diesem Punkte nur das Centrum und die Achsenrichtungen gegeben sind.[30])

70. „Der Krümmungskreis der Hyperbel H in Q' (Fig. 58.) geht mittelst der angewendeten Transformation der reciproken Radien in den Krümmungskreis der Lemniskate in Q über."

---

28) Reye, a. a. O. I. Abteilung. Seite 171.

29) „Die Lemniscate in rationaler Behandlung" von Dr. Emil Weyr, Artikel 21.

30) Steiner (gesammelte Werke, 2ter Teil, Seite 23.). Eine andere giebt Cantor in Zeitschrift für Mathematik und Physik, Teil 12, Seite 428, 1867.

Dieser Satz folgt unmittelbar aus den Gesetzen der Transformation der reciproken Radien und der Definition des Krümmungskreises. Wir verwenden ihn zur Bestimmung des Krümmungscentrums von der Lemniskate in Q, wenn von dieser Curve das Centrum, die Achsenrichtungen und der Punkt Q gegeben sind, und man ihre Tangente q in Q construirt hat.

Schneidet die in Q' senkrecht auf CQ gestellte Gerade q_1' die Asymptoten CX und CY von H in Q_x' und Q_y' und ist S' so bestimmt, dass

$$Q_x'S' = Q'Q_y'$$

so geht der Krümmungskreis von H in Q' durch S' und also der Krümmungskreis der Lemniskate in Q durch den entsprechenden Punkt S auf CS'. Und aus der Relation

$$CQ \,.\, CQ' = CS \,.\, CS'$$

folgt die Aehnlichkeit der Dreiecke CQS und CSQ''; deshalb findet man den Punkt S, wenn man aus Q eine Senkrechte fällt auf CS' und den Krümmungskreis der Lemniskate in Q, wenn man den Kreis beschreibt, welcher durch Q und S geht und in Q die Gerade q berührt.

Der Punkt S ist der bewegliche Schnittpunkt des Krümmungskreises mit der Lemniskate; durch ihn gehen drei Krümmungskreise, da die Senkrechte in S auf CS die Lemniskate ausser S noch in drei Punkten schneidet.

71. „Eine Curve $\overline{C}^4$ ist bestimmt durch ihre Inflexionsknoten A, B, C und zwei Punkte Q. Aus diesen Bestimmungsstücken kann man die Curve Punkt für Punkt und in jedem dieser Punkte die Tangente und den Krümmungskreis linear construiren."

Wenn man eine Curve $\overline{C}^4$, wovon man die Inflexionspunkte A, B, C und zwei einfache Punkte Q kennt, einer involutorisch quadratischen Transformation mit den Fundamentalpunkten A, B, C unterwirft, so erhält man einen Kegelschnitt, welcher ABC zum Poldreieck hat und wovon man zwei Punkte Q' kennt. Da nun jeder Punkt Q' in Verbindung mit dem Poldreiecke ABC noch drei Punkte dieses Kegelschnittes kennen lässt, nämlich die drei Punkte, welche mit diesem Punkte Q' die Eckpunkte eines vollständigen Vierecks mit den drei Diagonalpunkten A, B, C bilden, so giebt es nur einen Kegelschnitt durch die beiden Punkte Q', welche ABC zum Poldreieck hat, und deshalb auch nur eine Curve $\overline{C}^4$ mit den Inflexionsknoten A, B, C durch die beiden Punkte Q.

Sind Q_1 und Q_2 die gegebenen Punkte, welche die Curve $\bar{C}^4$ mit den Inflexionsknoten A, B, C bestimmen, sind Q_1' und Q_2' die den Punkten Q_1 und Q_2 entsprechenden Punkte in irgend einer quadratischen Transformation mit den Fundamentalpunkten A, B, C — zum Beispiel in der hyperbolisch gleichseitigen Transformation — und ist K' der im allgemeinen vom Wendeschnitte K von $\bar{C}^4$ verschiedene Kegelschnitt durch Q_1' und Q_2', welche ABC zum Poldreieck hat, so entspricht der gegebenen Curve $\bar{C}^4$ in der angewendeten Transformation der Kegelschnitt K'. Wird nun weiter K' in Q_1' von der Geraden l_1' berührt, und ist K_1 der dieser Geraden entsprechende Kegelschnitt, so wird K_1 in Q_1 die Curve $\bar{C}^4$ berühren, weshalb die Tangente l_1 von K_1 in Q_1 zu gleicher Zeit die Tangente von der Curve $\bar{C}^4$ in Q_1 ist. Zur Construction dieser letzteren Tangente l_1 hat man also erstens mittelst des Pascal'schen Satzes von K' die Tangente l_1' in Q_1', sodann mittelst der angenommenen Transformation den der Geraden l_1' entsprechenden Kegelschnitt K_1 zu suchen — und von dieser Curve hat man ausser A, B, C und Q_1 noch einen Punkt zu kennen — endlich wieder mittelst des Pascal'schen Satzes von dieser Curve K_1 die Tangente l_1 in Q_1 zu bestimmen.[3])

Zur Construction des Krümmungscentrums von $\bar{C}^4$ in Q_1 kann man unmittelbar gelangen mittelst der bekannten Construction eines Kegelschnittes, welcher durch zwei gegebene Punkte geht und einen gegebenen Kegelschnitt in einem gegebenen Punkte osculirt. Mittelst dieser Construction kann man nämlich erst einen Kegelschnitt K' bestimmen, welcher durch A und B geht und den der Curve $\bar{C}^4$ entsprechenden Kegelschnitt K_0' in Q_1' osculirt, nachher den Kegelschnitt K_0, welcher dem Kegelschnitte K_0' entspricht und also $\bar{C}^4$ in Q_1 osculirt, und endlich die gleichseitige Hyperbel H von gegebenen Asymptotenrichtungen, welche $\bar{C}^4$ in Q_1 osculirt. Und von dieser Curve ist der Krümmungshalbmesser von Q_1 nach Artikel 6. leicht zu finden. Zur Illustration dieser Bestimmungsweise des Krümmungscentrums führe ich die ganze Construction in Fig. 56. für den einfachen Fall der Normalcurve erster Gattung durch.

Ist die gegebene Normalcurve erster Gattung mittelst des Centrums C, der Achsenrichtungen CA und CB, des Punktes Q_1 und der Tangente q_1 in diesem Punkte bestimmt, und bedient man sich der Transformation, welche einen um C geschlagenen Kreis von beliebigem Radius CD überführt in die Curve $\bar{C}^4$ mit den Inflexions-

3) Diese Construction verdanke ich meinem Landgenossen A. N. Godefroy, Architekt in Amsterdam.

knoten A, B, C, wovon dieser Kreis der Wendeschnitt ist, so wird nach Artikel 22. der Punkt Q_1' mittelst der Polgeraden EF von Q_1 gefunden als der vierte Eckpunkt des auf den Segmenten CR und CS beschriebenen Rechtecks. Weiter ist der auf EF liegende Pol G von q_1 das Centrum der gleichseitigen Hyperbel durch die unendlich fernen Punkte A und B, welche in Q_1' den der gegebenen Curve $\bar{C}^4$ entsprechenden Kegelschnitt K' berührt; deshalb ist die in Bezug auf $Q_1'R$ und $Q_1'S$ zu $Q_1'G$ antiparallel durch Q_1' geführte Gerade q_1' die Tangente in Q_1' an diesen Kegelschnitt K'. Und da dieser Kegelschnitt K' offenbar mit $\bar{C}^4$ concentrisch ist, so kann man ihn mittelst der Punkte Q_1', Q_2', Q_3', Q_4' und der Tangente q_1' in Q_1' bestimmt denken.

Wenn es nun gilt die gleichseitige Hyperbel H_0' zu construiren, welche durch A und B geht und K' in Q_1' osculirt, so betrachten wir K' und H_0' als zu einander perspectivisch collineare Kegelschnitte mit dem Osculationspunkte Q_1' als Collineationscentrum, wobei dann die Punkte Q_3' und Q_4' von K' den Punkten A und B von H_0' entsprechen. Die Verbindungslinie von Q_1' mit dem Schnittpunkte von $Q_3'Q_4'$ und AB, d. h. die zu $Q_3'Q_4'$ durch Q_1' geführte Parallele g tritt dabei dann als Collineationsachse auf. Und da in dieser perspectivischen Collineation den Geraden $Q_3'Q_2'$ und $Q_4'Q_2'$ offenbar G_4T und G_3T entsprechen, so entspricht T dem Punkte Q_2' von K', und ist H_0', also zu betrachten als der Kegelschnitt durch A, B, T und Q_3', welchen in Q_1' die Gerade q_1' berührt. Aber diese gleichseitige Hyperbel H_0' hat ihren Mittelpunkt auf GQ_1', da GQ_1' durch Q_1' antiparallel ist zu q_1' in Bezug auf die Asymptoten, und auf der zweiten Diagonale des Asymptotenrechtecks $Q_1'T$, also in U. Deshalb hat die gleichseitige Hyperbel H_0, welche der H_0' in der angewandten quadratischen Transformation entspricht, ihren Mittelpunkt in V, welcher Punkt mittelst der Polgeraden u von U leicht bestimmt wird. Steht also endlich Q_1W senkrecht auf VQ_1 und Q_1M senkrecht auf q, so ist der gegenüber V liegende Eckpunkt M des Parallelogrammes VM, wovon VQ_3 in Grösse und Lage eine Seite, Q_1M die andere Seitenrichtung und Q_1W die eine Diagonalenrichtung, ist der gesuchte Krümmungsmittelpunkt.

Diese Construction bildet das Gegenstück zu jener, welche in Artikel 70. für die Lemniskate gegeben ist.

Ich beendige diesen Aufsatz mit der Aufweisung von einigen Resultaten, welche jenen dieses Abschnitts dualistisch gegenüber stehen. Dabei vermeide ich diejenigen, welche sich auf Polaren beziehen.

72. „Die Tangenten von $\bar{K}^4$ in den sechs Schnittpunkten mit

irgend einer Geraden g berühren einen Kegelschnitt T_g^2, welche ausserdem mit K^4 noch zwei Tangenten g_t' und g_t'' gemein hat.

„Die Geradenpaare g, deren Resttangentenpaare g_t'' und g_t'' einander zu den vier durch einen Punkt gehenden Tangenten von K^4 ergänzen, entsprechen einander in der tangentiellen Transformation zwischen K^4 und ihrem Rückkehrschnitte K."

„Der Rückkehrschnitt ist die Enveloppe der Geraden g, deren Resttangenten zusammenfallen."

Wenn g sich um einen Punkt P dreht, so erzeugen ihre Resttangenten um K^4 eine quadratische Involution, welche zerfällt, wenn P ein Punkt von K^4 ist."

„Indem der Tangentenkegelschnitt T_g^2 von g um K^4 die Tangenten von K^4 in den Schnittpunkten mit g bestimmt, bestimmt umgekehrt K^4 um T_g^2 die Tangenten t_g' und t_g'' in den Schnittpunkten mit g; d. h. die Combination von K^4 mit T_g^2 bildet eine Curve sechster Classe mit acht von a, b, c verschiedenen Doppeltangenten von welchen jede einen ihrer Berührungspunkte auf g hat."

„Der Tangentenkegelschnitt zerfällt in zwei Punkte, wenn g entweder K^4 oder ihren Rückkehrschnitt K berührt; bei allen anderen Lagen von g ist T_g^2 nicht zusammengesetzt."

„Die vier Tangenten aus P an K^4 sind von einander unabhängig."

„Wenn T_g^2 die Gerade h berührt, so berührt umgekehrt T_h^2 die Gerade g."

„Der Ort der Punktenpaare, welche zerfallene Tangentenkegelschnitte von Punkten von K bilden, ist die Combination von zwei Kegelschnitten K_1 und K_2, welche mit K das Poldreiseit abc gemein haben, die vier sich selbst entsprechenden Geraden s berühren und zusammen mit K drei Kegelschnitte bilden, die zu einander in der besonderen Beziehung stehen, dass jede von ihnen in Bezug auf irgend einen der beiden übrigen die Polfigur der dritten ist."

„Die Kegelschnitte K_1 und K_2 sind imaginär bei den Curven K^4 erster Gattung und reell bei den Curven K^4 zweiter Gattung."

„Die beiden Punkte auf der Tangente g von der Normalcurve K^4 zweiter Gattung, welche den Tangentenkegelschnitt der entsprechenden Tangente g' vom Rückkehrschnitte bilden, werden mit

dem Centrum C verbunden durch Gerade, welche mit dem Mittelpunktsleitstrahle des Berührungspunktes von g den Winkel von 60^0 bilden."

„Die kubische Involution um C, welche die Strahlen CA und CB zu dreifachen Strahlen hat, steht mit den zerfallenden Tangentenkegelschnitten der Tangenten des Rückkehrschnittes in enger Verbindung. Ist g' irgend eine Tangente von K, g die entsprechende Tangente von $\bar{K}^4$ und wird $\bar{g}$ durch A und B harmonisch getrennt von g, so werden die Schnittpunkte von g mit den beiden Strahlen, welche $\bar{g}$ zu einem Tripel der Involution ergänzen, zusammen den Tangentenkegelschnitt von g' bilden."

Anhang

Beziehung auf die Curven vierter Ordnung mit zwei Inflexionsknoten.

73. „Eine Curve C^4 mit den zwei Inflexionsknoten A, B und dem einfachen Punkte C (Fig. 57.) wird mittelst einer bestimmten involutorischen quadratischen Transformation, welche A, B, C zu Fundamentalpunkten hat, in eine durch A und B gehende Curve C^3 übergeführt, für welche zwei der durch A gehenden Tangenten a_1 und a_2 die Curve auf BC, zwei der durch B gehenden Tangenten b_1 und b_2 die Curve auf CA berühren."

Es ist dieser Satz eine unmittelbare Folge der Gesetze der angewendeten Transformation, welche a_1 und a_2, b_1 und b_2 in einander überführt.

74. „Mittelst zweier quadratischen Strahleninvolutionen in halb perspectivischer Lage kann man eine Curve C^3 durch A und B erzeugen, welche auf der willkürlich durch B gelegten Geraden BC die willkürlich durch A gelegten Geraden a_1 und a_2, auf der willkürlich durch A gelegten Geraden AC die willkürlich durch B gelegten Geraden b_1 und b_2 berührt. Der dritte Schnittpunkt F von AB mit dieser Curve liegt mit dem Punkte D von BC, der B harmonisch trennt von a_1 und a_2, und dem Punkte E von CA, der A harmonisch trennt von b_1 und b_2, in einer Geraden."

Denken wir uns um A die quadratische Strahleninvolution, wovon a_1 und a_2 ein Paar bilden, und AC ein Doppelstrahl ist, ebenso um B die quadratische Strahleninvolution, wovon b_1 und b_2 ein Paar bilden, und BC ein Doppelstrahl ist, und bringen wir diese beiden Involutionen so mit einander in projectivische Verwandtschaft, dass der Doppelstrahl AC der ersten dem Paare b_1 und b_2 der zweiten, das Paar a_1 und a_2 der ersten dem Doppelstrahle BC der zweiten

und das die Verbindungslinie AB der Scheitel aufnehmende Paar der ersten, dem diese Verbindungslinie BA ebenso enthaltende Paare der zweiten entspricht, so erzeugen diese dann in sogenannter halb perspectivischen Lage verkehrenden Strahleninvolutionen eine Curve vierter Ordnung mit den zwei Punkten A und B als Doppelpunkten, welche aus der Geraden AB und der oben im Satze angewiesenen Curve C^3 besteht.

Sind p_1 und p_2 (Fig. 58.) die Strahlen irgend eines Paares der Involution um A und p_1' und p_2' die Strahlen des entsprechenden Paares der Involution um B, so ist P der dritte Diagonalpunkt des von den vier Geraden gebildeten vollständigen Vierseits. Dieser Punkt P beschreibt bei der Erzeugung von C^3 eine Gerade. Da nämlich zwei concentrische Strahleninvolutionen nur ein Strahlenpaar gemein haben, so enthält die Strahleninvolution um A nur ein Strahlenpaar das von einer willkürlich angenommenen Geraden AP durch A harmonisch von AB getrennt wird; also entspricht einer willkürlich angenommenen Geraden AP nur eine Gerade BP, und umgekehrt einer willkürlich angenommenen Geraden BP nur eine Gerade AP, woraus folgt, dass der Ort von P ein durch A und B gehender Kegelschnitt ist. Aber dieser Kegelschnitt enthält die Gerade AB, da die AB aufnehmenden Paare der Strahleninvolutionen um A und B einander entsprechen, und AP und BP in diesem Falle in AB hineinfallen. Also ist der Ort von P eine Gerade. Aber aus den harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierseits folgt, dass P in D (Fig. 57) liegt, wenn man für die Strahlenpaare p_1, p_2 und p_1', p_2', die Strahlen a_1, a_2 und den Doppelstrahl BC, dass P in E liegt, wenn man für sie den Doppelstrahl AC und die Strahlen b_1 und b_2 annimmt. Und andrerseits lehren Grenzbetrachtungen, dass P mit dem dritten Schnittpunkte F von AB und der erzeugten Curve zusammenfällt, wenn man die Strahlenpunkte p_1, p_2, und p_1', p_2' zu den die AB aufnehmenden Paaren specialisirt. Also liegen D, E, F auf der Geraden, welche der Ort der Punkte P ist.

75. „Die Berührungspunkte der sechs Tangenten, die aus irgend einem Punkte C an eine Curve C^4 mit zwei Inflexionsknoten A und B möglich sind, liegen auf einem Kegelschnitte."

Die erste Polare von C^4 für ihren Punkt C schneidet C^4 in zwölf Punkten; zwei von diesen liegen in A auf der Tangente dieser Polare in A neben einander, zwei andere liegen in B auf der Tangente dieser Polare in B neben einander und noch zwei andere liegen in C auf der gemeinschaftlichen Tangente von dieser Polare mit C^4 neben einander; die sechs übrigen sind die Berührungspunkte der von C ausgehenden Tangenten an C^4. Nun wird der Satz dieses Artikels — und zur Bewährung dieser Behauptung kann man die in Artikel 51. angeführten Gründe wiederholen — bewiesen sein,

sobald gezeigt ist, dass die erst aufgezählten sechs der zwölf Schnittpunkte auf einem Kegelschnitte liegen, dass es also einen durch A, B, C gehenden Kegelschnitt giebt, welcher in A, B und C die erste Polare von C^4 für C berührt.

Da die Tangente in A an der ersten Polaren von C^4 für C die Gerade ist, welche C harmonisch trennt von den Doppelpunktstangenten von C^4 in A, so entspricht dieser Tangente in der in Art. 73. angewendeten Transformation die Gerade AD. Ebenso entspricht der Tangente in B an der ersten Polare von C^4 für C die Gerade BE. Endlich entspricht der Tangente in C an C^4 die Gerade CF. Aber AD, BE, CF sind durch die Eckpunkte A, B, C des Dreiecks ABC gehende Gerade, welche die Gegenseiten dieses Dreiecks in den Punkten einer Geraden schneiden; nach Artikel 20. schneiden die Geraden, welche AD, BE, CF entsprechen, die Gegenseiten des Dreiecks also auch in drei Punkten einer Geraden, und dieses beweist, dass es einen Kegelschnitt giebt, welcher in A, B und C die erste Polare von C^4 für C berührt, und die sechs Berührungspunkte der von C an C^4 möglichen Tangenten deshalb auch Punkte sind eines Kegelschnittes.

76. „Die Curven C^4, welche mit einander die Inflexionsknoten A, B mit den Doppelpunktstangenten gemein haben, bilden einen Büschel, d. h. die Inflexionsknoten A, B, die Doppelpunktstangenten und ein einfacher Punkt bestimmen eine einzige Curve vierter Ordnung von der verlangten Beschaffenheit."

Alle Curven C^4, welche A und B zu Inflexionsdoppelpunkten haben, und in A (Fig. 59.) die Doppelpunktstangenten a_1, a_2, in B die Doppelpunktstangenten b_1, b_2 besitzen, haben in jedem der beiden Punkte A und B acht[1]), in A und B zusammen also sechszehn Punkte mit einander gemein. Und endlich geht durch irgend einen Punkt P der Ebene nur eine dieser Curven C^4. Wenn nämlich die Geraden a und b die Geradenpaare a_1, a_2 und b_1, b_2 harmonisch trennen von P, so werden zwei der Curven C^4, welche durch P

---

1) Es kann dies auf verschiedene Weisen gezeigt werden. Wenn zwei Curven in P einen Doppelpunkt gemein haben, und die Doppelpunktstangenten der einen Curve von jenen der anderen verschieden sind, so gilt P schon für vier gemeinschaftliche Punkte der beiden Curven; denn die zwei Aeste der einen Curve schneiden doch die zwei Aeste der anderen Curve. Und nun vermehrt sich die Anzahl der in P angehäuften gemeinsamen Punkte um zwei, wenn die Curven auch die Doppelpunktstangenten gemein haben, und nochmals um zwei, wenn diese Doppelpunktstangenten beide Inflexionstangenten sind.

gehen, in P berührt vom Kegelschnitte durch A, B, P, welche in A von a und in B von b berührt wird; also werden zwei der Curven C^4, welche durch P gehen, in dem nächst auf P folgenden Punkte — und da diese Schlussweise von Punkt zu Punkt fortzusetzen ist — ganz und gar coincidiren.[2])

77. „Mittelst zweier quadratischen Strahleninvolutionen kann man eine Curve C^4 erzeugen, welche die willkürlich gegebenen Punkte A und B zu Inflexionsdoppelpunkten, die willkürlich durch A geführten Geraden b_1 und b_2 zu Doppelpunktstangenten und den willkürlich gegebenen Punkt P zu einem einfachen Punkte hat."

Denken wir uns um A die quadratische Strahleninvolution, welche das Paar a_1, a_2 und den Doppelstrahl AB enthält, ebenso um B die quadratische Strahleninvolution, welche das Paar b_1, b_2 und den Doppelstrahl BA enthält, und bringen wir diese Involutionen so mit einander in perspectivische Verwandtschaft, dass der Doppelstrahl AB und das Paar b_1, b_2, das Paar a_1, a_2 und der Doppelstrahl BA, das die Gerade AP enthaltende Paar und das die Gerade BP enthaltende Paar einander entsprechen, so erzeugen diese beiden projectivischen Strahleninvolutionen offenbar die verlangte Curve C^4. Wirklich ist diese Erzeugungsweise nicht verschieden von jener, welche man erhält, wenn man auf die Erzeugungsweise der C^3 von Artikel 74. die in Artikel 73. angeführte quadratische Transformation anwendet.

78. „Jede Curve C^4 mit zwei Inflexionsknoten kann als eine Curve mit einem Mittelpunkte und zwei Symmetrieachsen projicirt werden."

---

2) Also ist die Differentialgleichung dieser Curvenfamilie in $\frac{dy}{dx}$ vom ersten Grade. Ist die Verbindungslinie der beiden Inflexionsknoten durch $x=0$ und sind die beiden Geraden, welche diese Verbindungslinie harmonisch trennen von einem der beiden Paare von Doppeltangenten, durch

$$x = 0 \quad \text{und} \quad y = 0$$

gegeben, so ist

$$x^2y^2 + z^2(ax^2 + by^2) + \mu z^4 = 0$$

worin μ einen willkürlichen Parameter vorstellt, die Gleichung der Curvenfamilie. Und projicirt man nun die Inflexionsknoten in senkrecht auf einander stehenden Richtungen in's Unendliche, so ist

$$x^2y^2 + ax^2 + by^2 + \mu = 0$$

die Gleichung der Projection. Also giebt Differentiation wirklich

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x(y^2+a)}{y(x^2+b)}.$$

Wir unterscheiden hierbei wieder zwei Fälle, und betrachten nach einander eine C^4 mit zwei reellen und eine C^4 mit zwei conjugirt-imaginären Inflexionsdoppelpunkten.

Sind die Inflexionsknoten A und B reell, so können die Paare von Doppelpunktstangenten jede für sich entweder reell oder conjugirt imginär sein[1]). Unabhängig hiervon ist aber der dritte Diagonalpunkt C (Fig. 60.) des von den Deppelpunktstangenten gebildeten Vierecks immer reell. Denn dieser Punkt C ist der Schnittpunkt der Geraden, welche AB harmonisch trennen von den Paaren a_1, a_2 und b_1, b_2, und diese beiden Geraden AC und BC sind reell, da sie eine reelle Gerade von zwei conjugirt imaginären Geraden harmonisch trennen [2]). Nun kann man die Curve central so projiciren, dass die Projectionen A' und B' von A und B in senkrecht anfeinander stehenden Richtungen in's Unendliche verschwinden, wobei dann die Projection C' von C Mittelpunkt und die Geraden $C'A'$ und C, B' Symmetrieachsen der Projection werden. Es wird dann nämlich die Projection von Fig. 60. die in Fig. 61. gegebene Form annehmen. Und hieraus folgt dann, dass die beiden quadratischen Strahleninvolutionen aus in Bezug auf $C'A'$ und $C'B'$ symmetrischen Strahlenpaaren bestehen, und die vier Schnittpunkte von zwei einander entsprechenden Paaren also die Eckpunkte sind eines Rechtecks mit den Seitenrichtungen $C'A'$ und $C'B'$ und dem Schnittpunkte C' der Diagonalen. Projiciren sich aber die beiden Strahleninvolutionen derweise, dann ist offenbar C' Mittelpunkt, und $C'A'$ und $C'B'$ sind Symmetrieachsen der Projection der Curve.

Der Grund dafür, dass jede Curve C^4 mit zwei reellen Inflexionsknoten A und B als eine um zwei senkrechte Achsen symmetrische Mittelpunktscurve C^4 projicirt werden kann, ist nach dem vorhergehenden hierin zu suchen, dass die von den einander entsprechenden Strahlenpaaren der Involutionen A und B gebildeten vollständigen Vierseite den Punkt C zum gemeinschaftlichen dritten Diagonalpunkt haben. Dies ist auch leicht aus Fig. 60. zu erkennen. Die beiden Diagonalen D_1D_2 und E_1E_2 des Vierecks $a_1b_1a_2b_2$

---

3) Dass die Paare von Tangenten conjugirt-imaginäre Geraden sind, falls sie überhaupt imaginär sind, ist der Analysis zu entnehmen. Der Punkt C ist der dritte Eckpunkt des in der vorhergehenden Note schon angewendeten Coordinatendreiecks.

4) Auch dieses Resultat ist der Analysis zu entlehnen.

werden nämlich jede für sich von den beiden Strahleninvolutionen in zwei Punktinvolutionen geschnitten, die identisch sind; denn die Involution auf D_1D_2 hat die Doppelpunkte C und D, jene auf E_1E_2 die Doppelpunkte C und E. Und da nun AC die Strahlenpaare der Involution um A, und BC die Strahlenpaare der Involution um B harmonisch trennt von AB, ist F der dritte Diagonalpunkt von jedem vollständigen Vierseite, dessen Seiten zwei einander entsprechende Strahlenpaare dieser Involution sind.

Wenn die Doppelpunkte A und B conjugirt-imaginär sind, so sind es auch die Doppelpunktstangenten. Da aber zwei conjugirt-imaginäre Gerade einen reellen Schnittpunkt haben, so können nicht a_1 und b_1 zu a_2 und b_2 conjugirt sein, sondern es muss einer Doppeltangente durch A, eine Doppeltangente durch B conjugirt sein. Aber dann sind von den vier Punkten D_1, D_2, E_1, E_2 (Fig. 60.) auch zwei nicht auf einer nämlichen Seite des Vierseits $a_1a_2b_1b_2$ liegende Punkte, z. B. die Punkte D_1D_2 reell, und die andern dann E_1, E_2 conjugirt-imaginär. Und hieraus folgt wieder, dass C als Punkt, welcher auf D_1D_2 die Punkte D_1 und D_2 harmonisch trennt von AB, reell ist. Da nun dieser reelle Punkt C der dritte Diagonalpunkt ist von allen vollständigen Vierseiten, deren Seiten zwei einander entsprechende Paare sind von den Involutionen um A und B, so besitzt die Curve C^4 mit den imaginären Inflexionsknoten A und B neben jedem reellen Punkte P auf CP einen zweiten reellen Punkt P', der von C und AB harmonisch von P getrennt wird. Und deshalb wird man die Curve C^4 central nur so zu projiciren haben, dass die Projectionen A' und B' mit den imaginären Kreispunkten der neuen Ebene zusammenfallen, um in der Projectionscurve eine Curve C zu erhalten, die in der Projection C' von C einen Mittelpunkt hat. Aber hiermit ist noch nicht nachgewiesen, dass die Projectionscurve Achsen hat. Ist C (Fig. 62.) der Mittelpunkt, und sind D_1 und D_2 die reellen Schnittpunkte der Doppelpunktstangenten dieser Projectionscurve, so erkennt man D_1D_2 und ihre Mittelsenkrechte CE unmittelbar als Symmetrieachsen von dieser Curve; da ein Umklappen der Figur um irgend eine dieser beiden Geraden eine neue Curve liefert, welche mit der vorhergehenden, ausser sechszehn Schnittpunkten in den imaginären Kreispunkten noch die acht Schnittpunkte mit den beiden Geraden gemein hat und also mit ihr zusammenfällt.

Wir nennen die Curven C^4 mit zwei reellen Inflexionsknoten wieder die Curven erster Gattung, die Curven C^4 mit zwei conjugirt-imaginären Inflexionsknoten die Curven zweiter Gattung dieser Species. Es sind dann von dieser Species die Mittelpunktscurven wieder

als Normalcurve erster und als Normalcurve zweiter Gattung zu bezeichnen.

79. „Es giebt drei verschiedene Arten von Normalcurven C^4 erster Gattung und nur eine Art von Normalcurven zweiter Gattung."

Die Normalcurven C^4 erster Gattung teilen sich in drei Arten, jenachdem die beiden reellen Inflexionsknoten Knotenpunkte, oder einer von beiden ein Knotenpunkt, und der andere ein conjugirter Punkt, oder aber beide conjugirte Punkte sind. Sind die Inflexionsknoten Knotenpunkte, so ist die Curve ihrer Gestalt nach nicht von der ersten Normalcurve C^4 erster Gattung (Fig. 22.) verschieden; nur geht sie nicht durch den Mittelpunkt C_1 den conjugirten Punkt von jener Curve. Die zweite Art von Normalcurven C^4 erster Gattung mit einem conjugirten Inflexionsknoten A und einem Inflexionsknoten B mit reellen Doppelpunktstangenten ist in Fig. 63. vorgeführt; es giebt die Figur von ihr zwei verschiedene Formen C_1 und C_2 an, die bei Parameteränderung durch die zweite Normalcurve C^4 hindurch in einander übergehen. Und die dritte Art von Normalcurven C^4 erster Gattung mit zwei Inflexionsknoten A und B, deren Doppelpunktstangenten sämtlich imaginär sind, giebt Fig. 64. an[5]).

Es giebt nur eine Art von Normalcurven C^4 zweiter Gattung, da bei imaginären Inflexionsknoten keine Unterschiede in den Doppelpunktstangenten obwalten können. Von ihr giebt Fig. 65. zwei verschiedene Formen C_1 und C_2 die bei Parameteränderung durch die Lemniskate hin in einander übergehen können. Diese Curve ist bekannt als das Oval von Cassini [6]).

---

5) Die Gleichung der Curve ist

$$x^2y^2 + ax^2 + by^2 = \mu$$

Sind a und b beide negativ, so hat man es mit der ersten, haben a und b verschiedene Zeichen, so hat man es mit der zweiten, sind a und b beide positiv, so hat man es mit der dritten Art der Normalcurven C^4 erster Gattung zu tun.

6) Die Gleichung der Curve ist

$$(x^2 + y^2)^2 + 2a^2(y^2 - x^2) + \mu a^4 = 0$$

Ist die Curve C^4 (Fig. 59.) bestimmt durch die Inflexionsknoten A, B, die Inflexionsdoppeltangenten a_1, a_2 und b_1, b_2 in diesen Punkten und den Punkt P, so hat der Kegelschnitt, welchen in A, B und P die erste Polare von P in Bezug auf C_4 berührt, den Punkt P' zum Pole von AB. An der Normalcurve C^4 zweiter Gattung angepasst, findet man aber, dass der Kreis, welcher diese Curve in den unendlich fernen Kreispunkten und in P berührt, seinen Mittelpunkt hat im Punkte P', welcher in der (Fig. 62.) um D_1D_2

umgelegten Transformation der reciproken Radien mit der Potenz CD_2 dem Punkte P entspricht. So findet man weiter, dass der Ort dieser Mittelpunkte für die bei den verschiedenen Punkten der Curve

$$(x^2+y^2)^2+2a_1(y^2-x^2)+\mu a^4=0$$

vorkommenden Kreise die Curve

$$(x^2+y^2)^2+\frac{2a^2}{\mu}(y^2-x^2)+\frac{ab}{\mu}=0$$

ist; für diese Curve liegen die Doppeltrennpunkte D_1 und D_2 in einer Entfernung $\frac{a}{\mu}\sqrt{\mu}$ von C u. s. w.

Aus der letzteren Betrachtung entnehmen wir, dass die Normale in irgend einem Punkte P von einer Ovale von Cassini den Punkt P' enthält, welcher P in der angedeuteten umgelegten Transformation von reciproken Radien entspricht. Dieses Resultat gilt auch für den besonderen Fall der Lemniskate.

In der letzten Bemerkung ist die einfachste Lösung der Aufgabe enthalten: in einem Punkt P von einer durch diesen Punkt P und die beiden Doppelbrennpunkte bestimmten Ovale von Cassini die Normale und die Tangente zu construiren. Ist nämlich D_1 einer der Doppelpunkte und C der Mittelpunkt, so bestimmt man den Punkt P' mittelst der beiden Relationen

$$\angle D_1CP'=\angle PCD_1 \quad \text{und} \quad CP.CP'=CD_1^2;$$

dann ist PP' die Normale in P an der Curve u. s. w. Bei der Lemniskate ist also die Einhüllende der Verbindungslinie des Lemniskatenpunktes Q mit dem Punkte von dem Wendeschnitte, welcher dem Q entsprechenden Punkte C diametral gegenüberliegt zu gleicher Zeit die Evolute der Lemniskate; sie ist eine Curve C'_6 sechter Ordnung und sechster Classe von der Gleichung

$$(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}=\tfrac{2}{3}a\sqrt{2}$$

(man vergleiche „die Lemniskate in rationaler Behandlung von Dr. Emil Weyr. Art. 20).

Es wird auch leicht geometrisch erkannt, dass die Evolute der Lemniskate von der sechsten Classe ist. Ist P ein gegebener Punkt und l irgend eine Gerade durch P, so wird der Kegelschnitt, welcher in der um die Brennpunktenachse umgelegte Transformation der reciproken Radien der Geraden l entspricht., l in zwei Punkten schneiden. Also ist der Ort der einander entsprechenden Punkte, deren Verbindungslinien durch P gehen, eine durch C und die imaginären Doppelpunkte der Lemniskate gehende Curve dritter Ordnung, welche ausser diesen Punkten noch sechs Punkte mit der Lemniskate gemein hat.

VIII.

Beitrag zur Lehre von der Bewegung eines festen Körpers in einer incompressibeln Flüssigkeit.

Von

Fr. Kötter.

Bekanntlich hat Dirichlet die Bewegung vollständig bestimmt welche ein irgend wie bewegter fester kugelförmiger Körper in einer ihn umgebenden incompressibeln reibungslosen Flüssigkeit hervorruft. Es ergiebt sich, dass man den Druck, welchen die Flüssigkeit auf den Körper ausübt, ansehen kann als die Resultante zweier Kräfte, nämlich des hydrostatischen Druckes und einer Kraft, deren Angriffspunkt der Mittelpunkt der Kugel ist, deren Grösse proportional, und deren Richtung entgegengesetzt der Beschleunigung dieses Punktes ist. Es folgt hieraus unmittelbar, dass, wenn äussere Kräfte nicht wirken, und die Masse der Kugel homogen ist, der Mittelpunkt der Kugel in gerader Linie mit constanter Geschwindigkeit fortschreitet.

Ein ähnliches scheinbar bisher nicht veröffentlichtes Gesetz gilt auch dann, wenn die Massenverteilung der Kugel nicht homogen ist. Aus dem über den Druck Gesagten kann man, ohne auf den hydrodynamischen Ausgangspunkt zurückzugehen, mit den Hilfsmitteln der gewöhnlichen Mechanik folgern, dass bei beliebiger Massenverteilung ein gewisser zwischen Schwerpunkt und Mittelpunkt gelegener Punkt, wenn äussere Kräfte nicht vorhanden sind, geradlinig mit constanter Geschwindigkeit sich bewegt. Dass wir beim Beweise dieses Gesetzes, welchem die folgenden Seiten gewidmet sind, auf den hydro-

dynamischen Ausgangspunkt zurückgreifen, hat erstens den Zweck, dasselbe für eine ganze Reihe von Körpern darzutun, und zweitens den Zweck, den innern Grund desselben klarer hervortreten zu lassen. Wir werden zeigen, dass das fragliche Theorem und etliche andere damit im Zusammenhang stehende dann gelten, wenn die Gestalt des Körpers zwei sich senkrecht schneidende Symmetrieachsen besitzt, in denen sich je zwei Paare Symmetrieebenen unter rechtem Winkel schneiden. Solche Körper sind z. B. der Würfel, das regelmässige Oktaeder, die Kugel, der Körper, dessen Oberfläche die Gleichung hat:

$$x^4+y^4+z^4+a^2(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)=A^2$$

u. s. w. Um uns künftig unnütze Weitläufigkeiten zu ersparen, werden wir derartige Körper beliebiger Massenverteilung dadurch bezeichnen, dass wir sagen, ihre Gestalt sei im hydrodynamischen Sinne regelmässig oder trage den hydrodynamischen Charakter der Kugel.

Für die modernen Methoden [1]) zur Bestimmung der Bewegungsgleichungen eines beliebigen Körpers in einer idealen Flüssigkeit ist der Umstand von besonderer Bedeutung, dass die lebendige Kraft der Flüssigkeit sich ebenso wie diejenige des Körpers darstellen lässt als homogene quadratische Function der Geschwindigkeitscomponenten $u\,v\,w$, welche der Anfangspunkt eines in dem Körper festen Coordinatensystems nach dessen Achsen besitzt, und der drei Rotationscomponenten $p\,q\,r$ des Körpers um diese Achsen. Besitzen nämlich, wie wir annehmen wollen, die auf die Flüssigkeit wirkenden Kräfte ein Potential, so sind bei passend gewähltem Anfangszustand die Componenten der Geschwindigkeit eines Flüssigkeitsteilchens, dessen Coordinaten in dem bezeichneten Coordinatensystem $x\,y\,z$ sind, die Ableitungen einer Function φ nach $x\,y\,z$. Als Function der Zeit t betrachtet, ist dieselbe eine lineare Function der sechs Grössen $u\,v\,w\;p\,q\,r$:

$$u\varphi_1+v\varphi_2+w\varphi_3+p\varphi_4+q\varphi_5+r\varphi_6$$

deren Coefficienten $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_6$ zwar von $x\,y\,z$, nicht aber von der Zeit t abhangen. Der Charakter der Functionen ist durch die geometrische Gestalt des Körpers bedingt, wird aber durchaus nicht durch dessen Massenverteilung beeinflusst. Die lebendige Kraft der Flüssigkeit, deren Dichtigkeit ϱ sein möge, erhalten wir durch das dreifache Integral

$$\frac{\varrho}{2}\int\int\int dx\,dy\,dz\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right)$$

1) Kirchhoff: Ueber die Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit. Borchardts Journal Bd. 71. 1869.

welches über den ganzen unendlichen Raum zu erstrecken ist mit Ausnahme desjenigen Teiles, welcher von dem festen Körper ausgefüllt wird; die Grenzen des Integrals sind also in jedem Augenblick dieselben. Daraus erhellt dann unmittelbar, dass die lebendige Kraft wirklich die angegebene Form hat. Bezeichnet man nun mit T die gesamte lebendige Kraft, d. h. also die Summe derjenigen des Körpers und derjenigen der Flüssigkeit, mit X, Y, Z die Componentensummen und mit $M_x M_y M_z$ die Drehungsmomente sämtlicher auf die Flüssigkeit wie auf den festen Körper wirkenden äusseren Kräfte, so erhält man das folgende, zuerst von Kirchhoff in voller Allgemeinheit entwickelte System von Differentialgleichungen für die Bewegung des gegebenen Körpers:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right) = q\frac{\partial T}{\partial w} - r\frac{\partial T}{\partial v} + X$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right) = r\frac{\partial T}{\partial u} - p\frac{\partial T}{\partial w} + Y$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial w}\right) = p\frac{\partial T}{\partial v} - q\frac{\partial T}{\partial u} + Z$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right) = v\frac{\partial T}{\partial w} - w\frac{\partial T}{\partial v} + q\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial q} + M_x$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right) = w\frac{\partial T}{\partial u} - u\frac{\partial T}{\partial w} + r\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial r} + M_y$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right) = u\frac{\partial T}{\partial v} - v\frac{\partial T}{\partial u} + p\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial p} + M_z$$

Dasselbe stimmt in seiner Form wesentlich mit demjenigen überein, welches die Bewegung eines Körpers im leeren Raume darstellt. Wie man nun bei dem letzterwähnten Problem die Bewegung auf ein im Raume festes Coordinatensystem beziehen kann, so lassen sich auch in dem hydrodynamischen Problem für die Componentensummen und Drehungsmomente in Bezug auf drei im Raume feste Achsen Ausdrücke in den Bewegungs- und Lageelementen des Körpers ableiten. Wir bezeichnen die neuen Coordinatenachsen als ξ, η, ζ Achse, mit Ξ, H, Z die Componentensummen nach diesen Achsen und mit $\alpha_i \beta_i \gamma_i$ die Richtungscosinus der Achsen der beiden Systeme zu einander in der Weise, wie sie durch das nachstehende Schema verdeutlicht wird:

	x	y	z
ξ	α_1	α_2	α_3
η	β_1	β_2	β_3
ζ	γ_1	γ_2	γ_3

Die drei Gleichungen, welche den translatorischen Gleichungen für den leeren Raum entsprechen, lauten dann:

$$\frac{d}{dt}\left(\alpha_1\frac{\partial T}{\partial u}+\alpha_2\frac{\partial T}{\partial v}+\alpha_3\frac{\partial T}{\partial w}\right)=\Xi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\beta_1\frac{\partial T}{\partial u}+\beta_2\frac{\partial T}{\partial v}+\beta_3\frac{\partial T}{\partial w}\right)=H$$

$$\frac{d}{dt}\left(\gamma_1\frac{\partial T}{\partial u}+\gamma_2\frac{\partial T}{\partial v}+\gamma_3\frac{\partial T}{\partial w}\right)=Z$$

Auch diese Gleichungen stimmen in ihrer Form mit den entsprechenden des zur Vergleichung herangezogenen einfacheren Problems wesentlich überein; gewöhnlich werden in diesem Falle die letztangeführten in etwas anderer Form angeführt, welche die einfache mechanische Bedeutung der Grössen besser hervortreten lässt, deren Differentialquotienten nach der Zeit auf der linken Seite stehen. Diese Grössen sind bekanntlich die mit der Masse des im leeren Raum bewegten Körpers multiplicirten Componenten der Geschwindigkeit seines Schwerpunktes. Deswegen liefern für die Bewegung im leeren Raum diese Gleichungen eine klarere Einsicht in das Wesen der fortschreitenden Bewegung als die erstgenannten Gleichungen. Anders bei der Bewegung in der Flüssigkeit; dort haben im allgemeinen die Grössen

$$\alpha_1\frac{\partial T}{\partial u}+\alpha_2\frac{\partial T}{\partial v}+\alpha_3\frac{\partial T}{\partial w}$$

u. s. w. nicht mehr eine so einfache Bedeutung, und daher bieten diese Gleichungen nicht mehr den Vorteil wie vorher. Zwar liefern sie in gewissen einfachen Fällen, z. B. wenn keine Kraft oder nur die Schwere wirkt, je ein Integral, dafür bringen sie aber auch schon frühzeitig die Richtung der Achsen selbst in die Gleichungen; deshalb empfiehlt es sich bei dem hydrodynamischen Problem, namentlich in dem Falle, dass keine äusseren Kräfte wirken, zunächst bei dem bewegten Coordinatensystem stehen zu bleiben, wie es die Forscher auf diesem Gebiete bisher getan haben. In dem speciellen Falle, welchen wir jetzt ins Auge gefasst haben, lassen sich für den leeren Raum sämtliche Integrale des Systems von 6 Differentialgleichungen für $u\,v\,w\,p\,q\,r$ finden. Bei dem hydrodynamischen Problem lassen sich, wenn die Form des festen Körpers völlig willkürlich bleibt, nur drei und zwar t nicht explicite enthaltende Integrale finden. Clebsch [1]) hat aber gezeigt, dass, wenn ein weiteres von t

1) Mathematische Annalen. Bd. 3. pag. 238—262. 1871.

freies Integral bekannt wäre, sich mit Hülfe von Jacobi's Theorem des letzten Multiplicators ein fünftes derartiges Integral und dann auch das sechste, t enthaltende Integral finden lasse. Die Frage, unter welchen Umständen das fehlende vierte Integral durch eine constant zu setzende homogene lineare oder quadratische Function geliefert wird, beantwortet der genannte Forscher dahin, dass diese Möglichkeit an gewisse Relationen zwischen den Coefficienten der Function T geknüpft ist. Die Erfüllung der für den ersten Fall nötigen Bedingungen hatte Kirchhoff[1]) schon vorher durch die vereinfachende Annahme erreicht, dass der Körper sowol in Gestalt wie in Massenverteilung den Charakter eines Rotationskörpers hat, d. h. zwei Paare von senkrecht auf einander stehenden Symmetrieebenen besitzt, deren Schnittlinien zusammenfallen. Das Integral, welches sich in diesem Falle ausser den drei erwähnten finden lässt, drückt aus, dass der Körper mit constanter Geschwindigkeit um seine Achse rotirt Den zweiten Fall, dessen Lösung in einem speciellen Fall Herr Weber[2]) auf Thetafunctionen zweier Variablen zurückgeführt hat, welche lineare Functionen der Zeit sind, lässt sich ansehen als die Bewegung gewisser Körper, deren Gestalt und Massenverteilung drei senkrecht auf einander stehende Symmetrieebenen besitzt.

Der Umstand, dass der Teil der lebendigen Kraft, welcher von dem festen Körper selbst herrührt, schon von vornherein eine gewisse einfache Form hat, lässt voraussetzen, dass schon die Annahme gewisser Symmetrien der Form hinreichen werde, den Ausdruck für die lebendige Kraft zu vereinfachen. Wir wollen die Richtigkeit dieser Voraussetzung an dem Beispiel der Körper dartun deren Gestalt den Charakter der Kugel hat. Zu dem Ende wählen wir das Coordinatensystem so, dass die y und die z Achse mit je einer der beiden Symmetrieachsen zusammenfallen. Auf den Teil der lebendigen Kraft, welcher von der Bewegung der Flüssigkeit herrührt, hat nur die Gestalt, nicht aber die Massenverteilung des festen Körpers Einfluss; es lassen sich also auf diesen Teil dieselben Ueberlegungen anwenden, welche Kirchhoff zur Vereinfachung des Ausdrucks der lebendigen Kraft des gesamten Systems bei Rotationskörpern gebraucht. Berücksichtigen wir zunächst, dass die Gestalt des Körpers in Bezug auf die z Achse den Character einer Rotationsfläche hat, so erhalten wir für den fraglichen Teil der lebendigen Kraft T den Ausdruck

---

1) Vergl. auch Köpcke: Mathematische Annalen. Bd. 12. pag. 387—402. 1877.

2) Mathematische Annalen. Bd. 14. pag. 173. 1879.

$$T_f = c_{11}(u^2+v^2)+c_{33}w^2+c_{44}(p^2+q^2)+c_{66}r^2+2c_{15}(uq-vp)$$

Da aber auch in Bezug auf die y Achse die Gestalt des festen Körpers den Charakter einer Rotationsfläche hat, so muss

$$c_{15}=0, \quad c_{11}=c_{33}, \quad c_{44}=c_{66}$$

sein. Wir können daher den Teil der lebendigen Kraft, welcher von der Flüssigkeit herrührt, schreiben:

$$\tfrac{1}{2}\{M'(u^2+v^2+w^2)+L(p^2+q^2+r^2)\}$$

Derselbe stimmt also genau überein mit der lebendigen Kraft eines homogenen kugelförmigen festen Körpers von der Masse M' und dem Trägheitsmoment L, welcher mit dem gegebenen Körper derart fest verbunden ist, dass der Mittelpunkt der Kugel mit dem geometrischen Mittelpunkt des Körpers zusammen fällt. Es brancht nicht besonders hervorgehoben zu werden, dass diese Eigenschaft selbstverständlich unabhängig von der Wahl des in dem gegebenen Körper festen Coordinatensystems ist. Wir können uns daher die gesamte lebendige Kraft vorstellen als die lebendige Kraft eines einzigen festen Körpers, dessen Masse besteht aus der Masse M des gegebenen Körpers und der Masse M', welche wir künftig als mitgeführte Masse bezeichnen wollen.

Der Schwerpunkt des ganzen Systems, von welchem wir jetzt sehr wol reden können, ist leicht aufzufinden; er teilt die Verbindungslinie des Schwerpunktes des gegebenen Körpers und des Schwerpunktes der mitgeführten Masse, d. h. des Mittelpunktes, nach dem Verhältniss der beiden Massen. Sind die Coordinaten des Massenmittelpunktes für den gegebenen Körper a, b, c, so hat also der Schwerpunkt des ganzen Systems die Coordinaten

$$\alpha=\frac{M}{M+M'}a, \quad \beta=\frac{M}{M+M'}b, \quad \gamma=\frac{M}{M+M'}c$$

In demselben Sinne ist man nach den bisherigen Entwicklungen berechtigt von Hauptträgheits-Achsen des ganzen Systems in Bezug auf seinen Schwerpunkt zu sprechen. Wählen wir nun diese Linien zu Coordinatenaxen, so nimmt die lebendige Kraft des ganzen Systems die Form an:

$$\tfrac{1}{2}\{M(u^2+v^2+w^2)+P_1p^2+Q_1q^2+R_1r^2\}$$

In unserm Falle bietet die Bezugnahme auf ein im Raume festes Coordinatensystem dieselben Vorteile wie bei der Bewegung im leeren Raum; denn die Ausdrücke

$$\frac{\partial T}{\partial u}\alpha_1 + \frac{\partial T}{\partial v}\alpha_2 + \frac{\partial T}{\partial w}\alpha_3, \quad \frac{\partial T}{\partial u}\beta_1 + \frac{\partial T}{\partial v}\beta_2 + \frac{\partial T}{\partial w}\beta_3,$$
$$\frac{\partial T}{\partial u}\gamma_1 + \frac{\partial T}{\partial v}\gamma_2 + \frac{\partial T}{\partial w}\gamma_3$$

nehmen hier die einfachere Form an:

$$(M+M_1)(u\alpha_1 + v\alpha_2 + w\alpha_3), \quad (M+M_1)(u\beta_1 + v\beta_2 + w\beta_3),$$
$$(M+M_1)(u\gamma_1 + v\gamma_2 + w\gamma_3)$$

Die zweiten Factoren dieser Ausdrücke sind die Componenten der Geschwindigkeit nach den Achsen des im Raume festen Coordinatensystems für den Anfangspunkt des beweglichen Systems und können also, wenn die Coordinaten des letzteren ξ, η, ζ sind, geschrieben werden $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$.

Für die fortschreitende Bewegung des Körpers haben wir also die folgenden Gleichungen

$$(M+M')\frac{d^2\xi}{dt^2} = \Xi, \quad (M+M')\frac{d^2\eta}{dt^2} = H, \quad (M+M')\frac{d^2\zeta}{dt^2} = Z$$

deren Inhalt sich folgendermaassen in Worten aussprechen lässt:

„Bei der Bewegung eines festen Körpers, dessen Gestalt den hydrodynamischen Charakter einer Kugel hat, in einer incompressibeln reibungslosen unendlichen Flüssigkeit beschreibt ein gewisser zwischen seinem Mittelpunkt und seinem Schwerpunkt gelegener Punkt dieselbe Bahn, welche der Schwerpunkt eines aus der eigenen und der mitgeführten Masse gebildeten Körpers unter Einfluss derselben äusseren Kräfte im leeren Raum beschreiben würde."

Wirken speciell gar keine äusseren Kräfte, so ist

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{d^2\zeta}{dt^2} = 0$$

Wir erhalten also folgende Erweiterung des in der Einleitung erwähnten Theorems von Dirichlet:

„Welches auch immer die Massenverteilung innerhalb eines Körpers von Kugelgestalt sein möge, stets lässt sich auf der Verbindungslinie von Schwerpunkt und Mittelpunkt ein Punkt finden, welcher mit constanter Geschwindigkeit in gerader Linie fortschreitet."

Ist der Körper und die ihn umgebende Flüssigkeit der Schwere unterworfen, so muss, damit die Flüssigkeit im Unendlichen ruhe,

durch eine dort aufgestellte Fläche ein gewisser Druck ausgeübt werden, welcher dem hydrostatischen Druck gleich ist. Dieser Druck würde im Stande sein, die durch die constante beschleunigende Kraft hervorgerufene Wirkung aufzuheben, wenn der ganze Raum mit Flüssigkeit erfüllt wäre; es ist also die Resultante sämtlicher auf den flüssigen Teil des Systems wirkenden Kräfte gleich dem Gewicht derjenigen Masse, welche den von dem festen Körper eingenommenen Raum auszufüllen im Stande wäre, oder gleich dem Gewicht der sogenannten verdrängten Masse, welche wir M'' nennen wollen. Ihr Angriffspunkt ist der Mittelpunkt des Körpers, ihre Richtung derjenigen der Schwere entgegengesetzt. Gehen wir der ζ Achse die Richtung der Schwere, so ist

$$\Xi = H = 0 \qquad Z = g(M - M'') = 0$$

und die Gleichungen der Bewegung lauten:

$$(M+M')\frac{d^2\xi}{dt^2} = 0 \qquad (M+M')\frac{d^2\eta}{dt^2}$$

$$(M+M')\frac{d^2\zeta}{dt^2} = g(M-M'')$$

„In einer schweren incompressibeln Flüssigkeit bewegt sich also ein Punkt eines schweren Körpers, dessen Gestalt den Charakter der Kugel hat, gerade so, wie sich der Schwerpunkt eines festen Körpers von der Masse $(M+M')$ im leeren Raum unter Einfluss der constanten beschleunigenden Kraft $g(M-M'')$ bewegen würde; d. h. in einer Parabel. M ist die eigene Masse des Körpers, M' die mitgeführte und M'' die verdrängte Masse der Flüssigkeit."

Die rotatorische Bewegung des Körpers erkennt man leichter unter Beibehaltung des im Körper festen Coordinatensystems. Dieselbe wird bei der speciellen Form, welche die lebendige Kraft in unserem Falle hat, gegeben durch die Gleichungen:

$$P_1\frac{dp}{dt} = (R_1 - Q_1)qr + M_x$$

$$Q_1\frac{dq}{dt} = (P_1 - R_1)rp + M_y$$

$$R_1\frac{dr}{dt} = (Q_1 - P_1)pq + M_z$$

Sind die Drehungsmomente der äusseren Kräfte bekannt, so ist das Problem der Rotation ebenfalls identisch mit einem derartigen Probleme für den leeren Raum. Wirken speciell gar keine äusseren

Kräfte, so rotirt der Körper in der Flüssigkeit um den Schwerpunkt des ganzen Systems in derselben Weise wie ein fester Körper im leeren Raum um seinen Schwerpunkt rotirt. Vereinigen wir das mit dem über die fortschreitende Bewegung Gesagten, so erhalten wir das Theorem:

„Wirken keine äusseren Kräfte, so bewegt sich auch ein nicht homogener fester Körper regelmässiger Gestalt in einer incompressiblen Flüssigkeit, wie sich ein gewisser durch Gestalt und Massenverteilung des gegebenen bedingter Körper im leeren Raum bewegen würde. Die Rolle des Schwerpunktes spielt dabei ein Punkt, welcher die Verbindungslinie von Schwerpunkt und Mittelpunkt nach dem Verhältniss der mitgeführten und der eigenen Masse teilt."

In Bezug auf die fortschreitende Bewegung eines festen schweren Körpers wird durch das Vorhandensein einer schweren Flüssigkeit keine andere Aenderung der Bewegung bewirkt, als dass die Constante der Beschleunigung verringert wird. Die Rotation des festen Körpers in einer schweren Flüssigkeit folgt jedoch nicht so einfachen Gesetzen, wie die Rotation im leeren Raum. Bekanntlich rotirt ein frei beweglicher Körper im leeren Raum um seinen Schwerpunkt gerade so, als ob gar keine äusseren Kräfte wirkten. Es beruht das darauf, dass die äusseren Kräfte — hier lediglich die Schwere der einzelnen Teile des festen Körpers — eine Resultante haben, welche durch den Schwerpunkt des festen Körpers geht, und also in Bezug auf keine durch diesen Punkt gehende Linie ein Drehungsmoment haben kann. Bei der Bewegung in einer Flüssigkeit wirken jedoch zwei Kräfte entgegengesetzter Richtung, deren Angriffspunkte verschieden sind, nämlich im Schwerpunkte des Körpers sein eigenes Gewicht, im geometrischen Mittelpunkt der hydrostatische Auftrieb, welcher gleich dem Gewichte der verdrängten Masse ist. In Bezug auf das zu Grunde gelegte Coordinatensystem möge der Schwerpunkt die Coordinaten

$$\frac{M'}{M+M'}a, \quad \frac{M'}{M+M'}b, \quad \frac{M'}{M+M'}c$$

haben; dann hat der Mittelpunkt die Coordinaten

$$-\frac{M}{M+M'}a, \quad -\frac{M}{M+M'}b, \quad -\frac{M}{M+M'}c$$

und die Drehungsmomente in Bezug auf die im Körper festen Achsen sind:

$$g\frac{M(M'+M'')}{M+M'}(c\gamma_2 - b\gamma_3)$$

$$g\,\frac{M(M'+M'')}{M+M'}(a\gamma_3-c\gamma_1)$$

$$g\,\frac{M(M'+M'')}{M+M'}(b\gamma_1-a\gamma_2).$$

Die Rotation des Körpers um den Coordinatenanfangspunkt gehorcht also dem durch folgende Gleichungen dargestellten Gesetz:

$$P_1\frac{dp}{dt}=(R_1-Q_1)qr+g\,\frac{M(M'+M'')}{M+M'}(c\gamma_2-b\gamma_3)$$

$$Q_1\frac{dq}{dt}=(P_1-R_1)rp+g\,\frac{M(M'+M'')}{M+M'}(a\gamma_3-c\gamma_1)$$

$$R_1\frac{dr}{dt}=(Q_1-P_1)pq+g\,\frac{M(M'+M'')}{M+M'}(b\gamma_1-a\gamma_2)$$

Durch Gleichungen von derselben Form ist aber die Rotation eines schweren Körpers im leeren Raum bestimmt, welchen man in einem von seinem Schwerpunkt verschiedenen Punkt befestigt hat. Wir haben demnach das Theorem:

„Der Schwerpunkt der mitgeführten und der eigenen Masse eines in einer schweren incompressiblen Flüssigkeit frei beweglichen schweren Körpers von regelmässiger Gestalt aber beliebiger Massenverteilung bewegt sich wie der Schwerpunkt eines festen Körpers im leeren Raum in einer Parabel. Während aber im leeren Raum die Rotation eines festen Körpers um seinen Schwerpunkt so beschaffen ist als ob gar keine äusseren Kräfte wirkten, rotirt der Körper in der schweren Flüssigkeit um den genannten Punkt in derselben Weise, wie im leeren Raume ein gewisser schwerer Körper, von welchem ein vom Schwerpunkt verschiedener Punkt befestigt ist.

Fassen wir das Gesagte noch einmal zusammen, so ergiebt sich, dass der Einfluss der Flüssigkeit auf die Bewegung eines festen Körpers regelmässiger Gestalt in ihr, abgesehen von der Modification der äusseren Kräfte nach dem Gesetz des Archimedes, aufgefasst werden kann als eine Vermehrung der Masse und der Trägheitsmomente, verbunden mit einer Verlegung des Schwerpunktes und des Systems der Hauptträgheitsachsen. Das gilt selbstverständlich auch dann noch, wenn der feste Körper durch irgend welche Vorrichtungen an der freien Bewegung gehindert ist, wenn er z. B. gezwungen ist, sich rotationslos in gerader Linie zu bewegen, oder wenn er sich lediglich um eine feste Achse drehen kann. In den beiden genannten Fällen ist sogar die Möglichkeit, den Einfluss der Flüssigkeit auf die Bewegung des Körpers in der genannten Weise zu beschreiben,

nicht an die Bedingung der regelmässigen Gestalt geknüpft, sondern gilt, wie Herr C. Neumann [1]) nachgewiesen, hat für beliebige Körper, sobald nur vorausgesetzt werden darf, dass der von der Flüssigkeit erfüllte Raum einfach zusammenhangend ist. Es mag dem Verfasser dieser Abhandlung zum Schluss die Bemerkung gestattet sein, dass dasselbe auch noch bei einem höheren Grade von Freiheit der Bewegung gilt, nämlich bei der Rotation um einen festen Punkt. Wenn keine äussere Kraft oder nur die Schwere wirkt, so ist das Problem der Rotation eines beliebigen Körpers im wesentlichen identisch mit dem entsprechenden Problem für den leeren Raum; das Vorhandensein der Flüssigkeit bewirkt einerseits eine Vermehrung der Trägheitsmomente und eine Drehung des Systems der Hauptträgheitsachsen für den Rotationsmittelpunkt, andererseits nach dem Gesetz des Archimedes eine Verminderung des Gewichtes und eine Verlegung des Schwerpunktes.

Berlin, 1887.

---

1) C. Neumann, Hydrodynamische Untersuchungen. Leipzig 1883. pag. 79 und 84.

X.

Principien der n dimensionalen Curventheorie.

Von

R. Hoppe.

§. 1. Anordnungen.

Die Lage eines Punkts variire mit n (vorbehaltlich erklärter Bestimmung) unabhängigen Grössen, die wir als Coordinaten bezogen auf n orthogonale Axen auffassen. Sind diese Coordinaten sämtlich Functionen eines Parameters, so erzeugt der Punkt eine Linie s.

Bei Normirung der Eigenschaften dieser Linie lassen wir uns von folgenden, in der Raumcurventheorie gemachten Erfahrungen leitet.

1) Fast alle allgemeinen Bestimmungen lassen sich mit Anwendung einer einzigen Coordinate, welche vermöge ihrer beliebigen Lage alle übrigen vertreten kann, zum Ausdruck bringen. In gegenwärtiger Darstellung sind auch die wenigen Ausnahmen vermieden. Wir werden jeden Punkt durch eine Coordinate, jede Richtung durch den Richtungscosinus bezüglich auf eine Axe bezeichnen; ΣN soll, wo keine Summationsgrenzen dabei stehen, und N Function von Grössen, die von der Lage jener Axe abhangen, ist, die Summe aller Analogen bezüglich auf alle n Axen, und

$$| N_1 N_2, \ldots N_n |$$

die Determinante des Systems bedeuten, dessen erste Horizontalreihe allein ausgeschrieben ist, während die übrigen als Analoga daraus hervorgehen.

2) Die Raumcurventheorie hat gezeigt, dass die allgemeinen Probleme sich sehr vereinfachen, wenn man das Bogenelement und

mit ihm alle Lineargrössen vorerst eliminirt. Die Elimination vollziehen wir, indem wir die Curve nicht als Ort eines variabeln Punktes, sondern als Einhüllende einer Tangentenschar auffassen und die Tangenten durch gleichgerichtete vom Anfangspunkt ausgehende Strahlen ersetzen. Da alsdann die actuellen Tangenten, Normalen u. s. w. nicht vorkommen, so werden wir (abgesehen von einer vorbereitenden Betrachtung) der Kürze wegen die gleichgerichteten Strahlen so nennen.

3) Gleichwie in der Raumcurventheorie wenden wir den Krümmungswinkel τ als Parameter an und bezeichnen die Differentialquotienten einer Function N nach τ durch

$$N', \quad N'', \quad \ldots \quad N^{(k)}$$

Die Grösse τ ist dann der vom Endpunkt der auf dem Tangentenstrahl abgetragenen Strecke $= 1$ erzeugte Bogen.

4) Es lässt sich leicht bemerken, dass alle Glieder einer Reihe schon durch Anfangs- und Endglied

$$N_p, \quad \ldots \quad N_q$$

kenntlich sind, wenn N_q zugleich als allgemeines Glied aufgefasst werden kann. Ist $q < p$, so hat die Reihe kein Glied, und ihre Summe ist null.

§. 2. Osculirende lineare Gebilde.

Ein Gebilde B osculirt in $m$ter Ordnung ein Gebilde A im gemeinsamen Punkte P, wenn ein Punkt auf A im einfach unendlich kleinen Abstand von P einen unendlich kleinen Abstand mehr als $m$ter Ordnung von B hat.

So osculirt in 1. Ordnung die Tangente, in 2. Ordnung die Schmiegungsebene, in 3. Ordnung der Schmiegungsraum (für 4 Dimensionen) die Curve, weil der Nachbarpunkt des Berührungspunkts auf der Curve bzhw. um eine Unendlichkleine 2., 3., 4. Ordnung von den genannten linearen Gebilden entfernt ist.

„Die osculirende lineare $m$dehnung E_m ist der Schnitt von $n-m$ $(n-1)$dehnungen einzeln ausgedrückt durch die Gleichungen:

$$| f \ldots f^{(\lambda-1)} \quad \xi - x \quad f^{(\lambda+1)} \ldots f^{(n-1)} | = 0 \qquad (1)$$

$$(\lambda = m, \quad \ldots \quad n-1) \qquad (2)$$

wo ξ den erzeugenden Punkt von E_m, x den gemeinsamen Punkt von E_m und der Curve s, und f den Richtungscosinus der Tangente an s im Punkte x bezeichnet".

Um dies zu beweisen, sei ξ_1 ein Punkt der Curve für den Bogen $s+\partial s$. Dann ist dessen normaler Abstand von der linearen $(n-1)$ dehnung (1)

$$h_\lambda = | f \dots f^{(\lambda-1)} \quad \xi_1 - x \quad f^{(\lambda+1)} \dots f^{(n-1)} | : M \qquad (3)$$

wo M die Quadratwurzel aus der Quadratsumme der Coefficienten der Analogen von $\xi_1 - x$ bedeutet. Entwickelt man ξ_1 nach dem taylorschen Satze, so erhält man:

$$\xi_1 - x = \frac{\partial x}{\partial s}\partial s + \dots \frac{\partial^\lambda x}{\partial s^\lambda}\frac{\partial s^\lambda}{\lambda!} + R\frac{\partial s^{\lambda+1}}{(\lambda+1)!}$$

wo R ein endlicher Mittelwert von $\frac{\partial^{\lambda+1}x}{\partial s^{\lambda+1}}$ bei Variation von s bis $s+\partial s$ ist. Da nun $\frac{\partial x}{\partial s} = f$, so wird $\xi_1 - x$ von der Form:

$$\xi_1 - x = \alpha f + \dots \alpha_{\lambda-1} f^{(\lambda-1)} + R\frac{\partial s^{\lambda+1}}{(\lambda+1)!}$$

Nach Einsetzung dieses Wertes in Gl. (3) heben sich die λ Reihenglieder als proportional den vorhergehenden Verticalreihen der Determinante, und es bleibt nur der Rest, nämlich:

$$h_\lambda = \frac{\partial s^{\lambda+1}}{(\lambda+1)!}\left| f \dots f^{(\lambda-1)} R f^{(\lambda+1)} \dots f^{(n-1)} \right| : M$$

Nun ist nach der Bestimmung (2) $\lambda+1 > m$, folglich sämtliche h_λ unendlich klein mehr als $m$ter Ordnung, folglich auch der Abstand von ξ_1 und E_m, soweit überhaupt die genannten $(n-1)$ dehnungen einen m dehnigen Schnitt haben.

Nachdem hiermit der analytische Ausdruk der Osculirenden festgestellt ist, verschieben wir E_m bei unveränderter Stellung so, dass der Punkt x in den Anfangspunkt rückt, und bezeichnen mit der osculirenden linearen m dehnung E_m die durch die Gleichungen

$$| f \dots f^{(\lambda-1)} \xi f^{(\lambda+1)} \dots f^{(n-1)} | = 0 \quad (\lambda = m, \dots n-1)$$

ausgedrückte.

Diese $n-m$ Gleichungen werden erfüllt durch die Werte

$$\xi = f, \quad \dots \quad f^{(m-1)}$$

sowie durch jeden linearen Complex derselben; umgekehrt ist E_m bestimmt durch die m Strahlen $f, \dots f^{(m-1)}$.

Liegt irgend ein Strahl in E_m, so hat sein Richtungscosinus die Form

$$\alpha f + \ldots \alpha_{m-1} f^{(m-1)}$$

wo $\alpha_1 \ldots \alpha_{m-2}$ Invarianten bezeichnen.

§. 3. Orthogonales begleitendes Axensystem.

Innerhalb E_m gibt es auf E_{m-1} im Anfangspunkt nur eine bestimmte Normale, deren Richtungscosinus f_m sei. Bestimmt ist sie dadurch, dass sie auf den $m-1$ Strahlen $f, \ldots f^{(m-2)}$ senkrecht steht. Die Bedingungen sind also einerseits:

$$\Sigma f f_m = 0; \quad \ldots \quad \Sigma f^{(m-2)} f_m = 0 \tag{4}$$

andrerseits, sofern sie in E_m liegen soll:

$$M_m f_m = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-1} A_{\lambda,m} f^{(\lambda)} \tag{5}$$

wo M_m sich durch die Bedingung

$$\Sigma f_m^2 = 1 \tag{6}$$

bestimmt, nachdem über den willkürlichen Factor der A verfügt ist.

Führt man den Wert (5) in die Gl. (4) ein und setzt

$$\varrho_{\varkappa,\lambda} = \Sigma f^{(\varkappa)} f^{(\lambda)} \tag{7}$$

so erhält man:

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-1} A_{\lambda,m} \varrho_{0,\lambda} = 0; \quad \ldots \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-1} A_{\lambda,m} \varrho_{m-2,\lambda} \tag{8}$$

Fügt man zu diesen $m-1$ Gleichungen als $m$te die Gl. (5), so gibt die Auflösung:

$$M_m f_m = \begin{vmatrix} \varrho_{0,0} & \ldots & \varrho_{0,m-2} & f \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \varrho_{m-1,0} & \ldots & \varrho_{m-1,m-2} & f^{(m-1)} \end{vmatrix} \tag{9}$$

Identificirt man diese Gleichung mit Gl. (5), so drückt sie die Werte von $A_{\lambda,m}$ in Unterdeterminanten aus. Von diesen Coefficienten haben die zwei letzten besondere Bedeutung. Sei deshalb

$$K_m = \begin{vmatrix} \varrho_{0,0} & \ldots & \varrho_{0,m-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \varrho_{m-1,0} & \ldots & \varrho_{m-1,m-1} \end{vmatrix} \tag{10}$$

$$H_m = \begin{vmatrix} \varrho_{0,0} & \cdots & \varrho_{0,m-3} & \varrho_{0,m-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \varrho_{m-2,0} & \cdots & \varrho_{m-2,m-3} & \varrho_{m-2,m-1} \end{vmatrix} \tag{11}$$

$$G_m = \begin{vmatrix} \varrho_{0,0} & \cdots & \varrho_{0,m-3} & \varrho_{0,m-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \varrho_{m-3,0} & \cdots & \varrho_{m-3,m-3} & \varrho_{m-3,m-1} \\ \varrho_{m-1,0} & \cdots & \varrho_{m-1,m-3} & \varrho_{m-1,m-1} \end{vmatrix} \tag{12}$$

Dann ist

$$A_{m-1,m} = K_{m-1}; \quad A_{m-3,m} = -H_m \tag{13}$$

Nach Gl. (6) hat man zur Bestimmung von M_m:

$$M_m^2 = \Sigma (M_m f_m)^2 = \sum_{x=0}^{x=m-1} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-1} A_{x,m} A_{\lambda,m} \varrho_{x,\lambda}$$

Die Gl. (8) und (9) geben:

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-1} A_{\lambda,m} \varrho_{x,\lambda} = \begin{cases} 0 & (x < m-1) \\ K_m & (x = m-1) \end{cases} \tag{14}$$

folglich ist

$$M_m^2 = A_{m-1,m} K_m = K_m K_{m-1} \tag{15}$$

Der Strahl f_m steht als Normale von E_{m-1} auf den Strahlen f, f_2, ... f_{m-1} senkrecht. Dies successive auf f_2, f_3, ... f_n angewandt ergibt, dass die n Strahlen $f \equiv f_1, f_2, \ldots f_n$ ein orthogonales System bilden. Wir nennen dasselbe gleichwie in der Raumcurventheorie das begleitende Axensystem, den Strahl f_m die $m$te begleitende Axe, so dass f_1 die Tangente, f_2 die Hauptnormale, f_3 die Binormale, f_4 die Trinormale u. s. w. darstellt.

§. 4. Differentialformel für die Richtungscosinus der begleitenden Axen.

Differentiirt man Gl. (5) nach τ, so hat das Resultat die Form:

$$f_m' = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m} B_\lambda f^{(\lambda)} \tag{16}$$

und der letzte Coefficient den Wert:

$$B_m = \frac{A_{m-1,m}}{M_m} = \frac{K_{m-1}}{M_m} \tag{17}$$

Nach Gl. (9) ist

$$M_m \Sigma f^{(m-1)} f_m = K_m \tag{18}$$

Differentiirt man die Gl. (4) nebst dieser, so kommt:

$$\Sigma f^{(x)} f_m' + \Sigma f^{(x+1)} f_m = \begin{cases} 0 & (x = 0, \ldots m-2) \\ \left(\frac{K_m}{M_m}\right)' & (x = m-1) \end{cases}$$

und zwar ist nach Gl. (4) (18)

$$\Sigma f^{(x+1)} f_m = \begin{cases} 0 & (x = 0, \ldots m-3) \\ \frac{K_m}{M_m} & (x = m-2) \end{cases} \qquad (19)$$

$$\text{und sei} \quad -\left(\frac{K_m}{M_m}\right)' - L \quad \text{für} \quad x = m-1$$

Dann hat man:

$$\Sigma f^{(x)} f_m' = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m} B_\lambda \varrho_{x,\lambda} = \begin{cases} 0 & (x = 0, \ldots m-3) \\ -\frac{K_m}{M_m} & (x = m-2) \\ L & (x = m-1) \end{cases}$$

Zu diesen m Gleichungen kommt als $(m+1)$te die Gl. (16); dann ist die Coefficientendeterminante nach Gl. (9)

$$= M_{m+1} f_{m+1}$$

und die Auflösung des Gleichungssystems lautet:

$$M_{m+1} f_{m+1} B_\lambda =$$

$$\begin{vmatrix} \varrho_{0,0} & \ldots & \varrho_{0,m-3} & \varrho_{0,m-2} & \varrho_{0,m-1} & f \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varrho_{\lambda-1,0} & \ldots & \varrho_{\lambda-1,m-3} & \varrho_{\lambda-1,m-2} & \varrho_{\lambda-1,m-1} & f^{(\lambda-1)} \\ 0 & \ldots & 0 & -\frac{K_m}{M_m} & L & f_m' \\ \varrho_{\lambda+1,0} & \ldots & \varrho_{\lambda+1,m-3} & \varrho_{\lambda+1,m-2} & \varrho_{\lambda+1,m-1} & f^{(\lambda+1)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varrho_{m,0} & \ldots & \varrho_{m,m-3} & \varrho_{m,m-2} & \varrho_{m,m-1} & f^{(m)} \end{vmatrix}$$

das ist für $\lambda = m$ nach Gl. (17):

$$\frac{K_{m-1} M_{m+1}}{M_m} f_{m+1} =$$

$$\begin{vmatrix} \varrho_{0,0} & \ldots & \varrho_{0,m-3} & \varrho_{0,m-2} & \varrho_{0,m-1} & f \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varrho_{m-1,0} & \ldots & \varrho_{m-1,m-3} & \varrho_{m-1,m-2} & \varrho_{m-1,m-1} & f^{(m-1)} \\ 0 & \ldots & 0 & -\frac{K_m}{M_m} & L & f_m' \end{vmatrix}$$

$$= K_m f_m' - L f_m - \frac{K_m}{M_m} N_m F_m \tag{20}$$

wo

$$N_m F_m = \begin{vmatrix} \varrho_{0,0} & \cdots & \varrho_{0,m-3} & \varrho_{0,m-1} & f \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varrho_{m-1,0} & \cdots & \varrho_{m-1,m-3} & \varrho_{m-1,m-1} & f^{(m-1)} \end{vmatrix} \tag{21}$$

gesetzt ist, und F_m durch die Gleichung

$$\Sigma F_m^2 = 1$$

als Richtungscosinus eines Strahles bestimmt werden soll.

Multiplicirt man Gl. (20) mit f_m, so gibt die Summe der Analogen:

$$0 = -L - \frac{K_m}{M_m} N_m \Sigma f_m F_m \tag{22}$$

und da nach Gl. (21) (11)

$$N_m \Sigma f_m F_m = \frac{H_m K_m}{M_m} \tag{23}$$

ist:

$$L = -H_m \left(\frac{K_m}{M_m}\right)^2 \tag{24}$$

Jetzt lautet Gl. (20):

$$f_m' = \frac{K_{m-1} M_{m+1}}{K_m M_m} f_{m+1} - \frac{H_m K_m}{M_m^2} f_m + \frac{N_m}{M_m} F_m \tag{25}$$

Vom Strahle F_m ist einerseits aus Gl. (21) zu ersehen, dass er auf den Strahlen f, ... $f^{(m-3)}$ und $f^{(m-1)}$, mithin auch auf denjenigen, deren Richtungscosinus lineare Complexe derselben sind, senkrecht steht. Solche Complexe sind aber nach Gl. (4) f_1, f_2, ... f_{m-2}.

Andrerseits zeigt Gl. (4), dass die Strahlen

$$f_{m+1}, \quad \cdots \quad f_n$$

auf allen Strahlen senkrecht stehen, deren Richtungscosinus lineare Complexe von

$$f, \quad f', \quad \cdots \quad f^{(m-1)}$$

sind. Mithin auch auf dem Strahle F_m.

Demnach steht F_m auf allen begleitenden Axen senkrecht ausser f_m und f_{m-1}. Folglich hat es die Form

$$F_m = \alpha f_m + \beta f_{m-1}$$

wo die Invarianten α, β die Gleichung

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1$$

erfüllen, und zwar erhält man einzeln:

$$\alpha = \Sigma f_m F_m; \quad \beta = \Sigma f_{m-1} F_m \tag{26}$$

Entwickelt man f_m und f_{m-1} nach Gl. (5), so kommt:

$$M_m N_m \alpha = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-1} A_{\lambda,m} N_m \Sigma f^{(\lambda)} F_m = - A_{m-2,m} K_m$$

$$M_{m-1} N_m \beta = \sum_{\lambda-0}^{\lambda=m-2} A_{\lambda,m-1} N_m \Sigma f^{(\lambda)} F_m = - A_{m-2,m-1} K_m$$

also nach Gl. (13):

$$\alpha = \frac{H_m K_m}{M_m N_m}; \quad \beta = - \frac{K_m K_{m-2}}{M_{m-1} N_m}$$

daher wird

$$N_m F_m = K_m \left(\frac{H_m}{M_m} f_m - \frac{K_{m-2}}{M_{m-1}} f_{m-1} \right) \tag{27}$$

und nach Gl. (25)

$$f_m' = \frac{K_{m-1} M_{m+1}}{K_m M_m} f_{m+1} - \frac{K_m K_{m-2}}{M_m M_{m-2}} f_{m-1}$$

oder nach Gl. (15)

$$f_m' = \frac{\sqrt{K_{m+1} K_{m-1}}}{K_m} f_{m+1} - \frac{\sqrt{K_m K_{m-2}}}{K_{m-1}} f_{m-1} \tag{28}$$

Sei, um nachträglich N_m zu berechnen,

$$N_m F_m = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-1} C_\lambda f^{(\lambda)} \tag{29}$$

dann ist C_λ als Coefficient von $f^{(\lambda)}$ in Gl. (21) bekannt, aus welchem man ersieht, dass

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-1} C_\lambda \varrho_{x,\lambda} = \begin{cases} 0 & (\lambda = 0, \ \ldots \ m-3, \ m-1) \\ - K_m & (\lambda = m-2) \end{cases} \tag{30}$$

ist. Daher wird

$$N_m^2 = \Sigma (N_m F_m)^2 = \sum_{x=0}^{x=m-1} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-1} C_x C_\lambda \varrho_{x,\lambda}$$

$$= - C_{m-2} K_m = G_m K_m \tag{31}$$

und nach Einsetzung der Werte von M_m, M_{m-1}, N_m in Gl. (27)

$$F_m = \frac{H_m f_m - \sqrt{K_m K_{m-2}} f_{m-1}}{\sqrt{G_m K_{m-1}}} \tag{32}$$

woraus beiläufig die Identität:

$$G_m K_{m-1} = H_m^2 + K_m K_{m-2} \tag{33}$$

Sei ferner zur Abkürzung

$$P_m = \frac{\sqrt{K_{m+1} K_{m-1}}}{K_m} \tag{34}$$

dann lautet Gl. (28):

$$f_m' = P_m f_{m+1} - P_{m-1} f_{m-1} \tag{35}$$

und zwar ist ist $P_0 = 0$. Multiplicirt man mit f_m und summirt von $m = 1$ an, so kommt:

$$\sum_{k=1}^{k=m} f_k f_k' = P_m f_m f_{m+1} \tag{36}$$

§. 5. Krümmungen.

In der Raumcurventheorie werden die Krümmungen durch die Contingenzwinkel der Tangente und Schmiegungsebene gemessen Will man diese osculirenden linearen Gebilde E_1, E_2 durch ihre Normalen ersetzen, so zeigt sich, dass die Normale der Tangente nur dann gleiche Winkel mit dieser erzeugt, wenn sie sich längs der Schmiegungsebene bewegt. Die Hauptnormale entspricht dieser Bedingung nicht: indem sie sofort aus der Schmiegungsebene heraustritt, bildet sie einen andern Contingenzwinkel, nämlich den, welcher die Totalkrümmung bestimmt. Für ebene Curven sind beide Winkel gleich, weil die osculirende Ebene fest ist. Ebenso erzeugt die Normale der Schmiegungsebene gleiche Winkel mit letzterer, wei der osculirende Raum fest ist.

Wenden wir dies auf Curven in der festen linearen n dehnung an, deren osculirende lineare Gebilde E_1, ... E_{n-1} variabel sind, so haben wir zwei Begriffe zu unterscheiden: Krümmungen schlechthin und Totalkrümmungen, welche wir nun folgendermassen definiren.

Deviation des Strahles f_m heisst der Winkel zwischen den Normalen auf der osculirenden linearen $(m-1)$ dehnung E_{m-1} und ihrer Consecutiven innerhalb E_m. Sie sei bezeichnet durch $\partial\tau_{m-1}$. Die Grössen

$$\frac{\partial\tau_m}{\partial s}, \quad \frac{\partial\tau_m}{\partial\tau} = \tau_m', \quad \tau_m$$

heissen die $m$te Krümmung, das $(m-1)$te Krümmungsverhältniss, der $m$te Krümmungswinkel.

Der Contingenzwinkel des Strahles f_m, d. h. der Winkel zwischen dem Strahle und seinem Consecutiven, sei bezeichnet durch $\partial\sigma_{m-1}$. Die Grössen

$$\frac{\partial \sigma_m}{\partial s}, \quad \frac{\partial \sigma_m}{\partial \tau} = \sigma_m', \quad \sigma_m$$

heissen die $m$te Totalkrümmung, das $(m-1)$te Totalkrümmungsverhältniss, der $m$te Totalkrümmungswinkel.

Es ist nun zuerst die Deviation von f_m als Winkel zwischen den zwei Strahlen

$$f_m \quad \text{und} \quad f_m + \varphi_m \partial\tau$$

zu berechnen. Sofern letzterer in E_m liegt, muss sein Richtungscosinus die Form (5) haben. Man kann daher setzen:

$$(M_m + \pi_m \partial\tau)(f_m + \varphi_m \partial\tau) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-1} (A_{\lambda,m} + \delta_\lambda \partial\tau) f^{(\lambda)} \tag{37}$$

Dann gibt die Quadratsumme der Analogen:

$$(M_m + \pi_m \partial\tau)^2 = M_m^2 + 2 M_m \pi_m \partial\tau =$$
$$\sum_{x=0}^{x=m-1} (A_{x,m} + \delta_x \partial\tau) \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-1} (A_{\lambda,m} + \delta\lambda \partial\tau) \varrho_{x,\lambda}$$
$$= \sum_{x=0}^{x=m-1} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-1} (A_{x,m} A_{\lambda,m} + 2\delta_x A_{\lambda,m} \partial\tau) \varrho_{x,\lambda}$$

woraus, da der Wert von M_m^2 bekannt ist:

$$M_m \pi_m = \delta_{m-1} K_m \tag{38}$$

Die zweite Bedingung ist, dass der Strahl $f_m + \varphi_m \partial\tau$ auf den Consecutiven der $m-1$ Strahlen

$$f^{(\mu)} \quad (\mu = 0, \ldots m-2)$$

d. i. auf den Strahlen

$$f^{(\mu)} + f^{(\mu+1)} \partial\tau \quad (\mu = 0, \ldots m-2)$$

senkrecht steht. Es muss also sein

$$0 = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-1} (A_{\lambda,m} + \delta_\lambda \partial\tau)(\varrho_{\lambda,\mu} + \varrho_{\lambda,\mu+1} \partial\tau)$$
$$= \partial\tau \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-1} (A_{\lambda,m} \varrho_{\lambda,\mu+1} + \delta_\lambda \varrho_{\lambda,\mu}) \quad (\mu = 0, \ldots m-2)$$

das ist

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-1} \delta_\lambda \varrho_{\lambda,\mu} = \begin{cases} 0 & (\mu = 0, \ldots m-3) \\ -K_m & (\mu = m-2) \end{cases}$$

Eine $m$te Gleichung erhält man aus (37) nach Subtraction des von $\partial\tau$ freien Teils, nämlich:

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-1} \delta_\lambda f^{(\lambda)} = \pi_m f_m + M_m \varphi_m$$

und nach Auflösung des Systems, dessen Coefficientendeterminante $= M_m f_m$ ist:

$$\delta_\lambda M_m f_m = \begin{vmatrix} \varrho_{0,0} & \dots & \varrho_{0,m-3} & \varrho_{0,m-2} & f \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varrho_{\lambda-1,0} & \dots & \varrho_{\lambda-1,m-3} & \varrho_{\lambda-1,m-2} & f^{(\lambda-1)} \\ 0 & \dots & 0 & -K_m & \pi_m f_m + M_m \varphi_m \\ \varrho_{\lambda+1,0} & \dots & \varrho_{\lambda+1,m-3} & \varrho_{\lambda+1,m-2} & f^{(\lambda+1)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varrho_{m-1,0} & \dots & \varrho_{m-1,m-3} & \varrho_{m-1,m-2} & f^{(m-1)} \end{vmatrix}$$

das ist für $\lambda = m-1$

$$\delta_{m-1} M_m f_m = K_{m-1}(\pi_m f_m + M_m \varphi_m) + K_m M_{m-1} f_{m-1}$$

Nach Gl. (30) aber ist

$$\delta_{m-1} M_m = \pi_m \frac{M_m^2}{K_m} = \pi_m K_{m-1}$$

folglich

$$K_{m-1} M_m \varphi_m + K_m M_{m-1} f_{m-1} = 0$$

woraus:

$$\varphi_m = -\frac{\sqrt{K_m K_{m-2}}}{K_{m-1}} f_{m-1} \tag{39}$$

Demnach ist die Deviation von f_m

$$\partial\tau_{m-1} = \sqrt{\Sigma(\varphi_m \partial\tau)^2} = \frac{\sqrt{K_m K_{m-2}}}{K_{m-1}} \partial\tau \tag{40}$$

und das $(m-1)$te Krümmungsverhältniss

$$\tau_m' = \frac{\sqrt{K_{m+1} K_{m-1}}}{K_m} \tag{41}$$

Führt man diesen Wert in die Differentialformel (28) ein, so lautet sie:

$$\partial f_m = f_{m+1} \partial\tau_m - f_{m-1} \partial\tau_{m-1} \tag{42}$$

und um Anfang und Ende der Reihe sichtbar zu machen:

$$\begin{aligned} \partial f_1 &= f_2 \partial\tau_1 \\ \partial f_2 &= f_3 \partial\tau_2 - f_1 \partial\tau_1 \\ &\vdots \\ \partial f_{n-1} &= f_n \partial\tau_{n-1} - f_{n-2} \partial\tau_{n-2} \\ \partial f_n &= -f_{n-1} \partial\tau_{n-1} \end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich nach der Formel

$$\partial\sigma_{m-1} = \sqrt{\Sigma\partial f_m{}^2}$$

die Totalkrümmungsverhältnisse:

$$\sigma'_{m-2}{}^2 = \tau_m{}'^2 + \tau'_{m-1}{}^2 \tag{43}$$

einzeln:

$$\begin{aligned}
\sigma_0{}'^2 &= \tau_1{}'^2 &&= 1\\
\sigma_1{}'^2 &= \tau_2{}'^2 + \tau_1{}'^2 &&\\
&\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots &&\\
\sigma'_{n-2}{}^2 &= \tau'_{n-1}{}^2 + \tau'_{n-2}{}^2 &&\\
\sigma'_{n-1}{}^2 &= \tau'_{n-1}{}^2 &&
\end{aligned}$$

und in inverser Entwickelung:

$$\tau'_m{}^2 = \sum_{k=0}^{k=m-1} (-1)^{m-k-1}\,\sigma'_k{}^2 \tag{44}$$

woraus zwischen allen Totalkrümmungen die Relation hervorgeht:

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} (-1)^k\,\sigma_k{}'^2 = 0 \tag{45}$$

Die Formel (42) stimmt mit der in der Theorie der dreifach gekrümmten Curven (Grun. Arch. LXV. p. 337 Gl. (9)) auf anderm Wege hergeleiteten überein. Dass sie für jede Dimensionszahl gilt, ist erst jetzt bewiesen.

§. 6. Reduction der Invarianten.

Die $n\,n$ Invarianten $\varrho_{x,\lambda}$ reduciren sich zunächst wegen $\varrho_{x,\lambda} = \varrho_{\lambda,x}$ auf $\frac{1}{2}n(n+1)$.

Ferner erhält man durch Differentiation der Gl. (7), wenn man der Kürze wegen

$$\varrho_{x,x} = \varrho_x$$

setzt:

$$\varrho_k{}^{(2h)} = (2h)_h\,\varrho_{k+h} + 2\sum_{\lambda=0}^{\lambda=h-1} (2h)_\lambda\,\varrho_{k+\lambda,k+2h-\lambda} \tag{46}$$

$$\varrho_k{}^{(2h+1)} = 2\sum_{\lambda=0}^{\lambda=h} (2h+1)_\lambda\,\varrho_{k+\lambda,k+2h+1-\lambda} \tag{47}$$

Diese 2 Relationen reichen hin das in das Quadrat geordnete System (10) auf die n Werte der positiven Diagonale und deren Differentialquotienten linear zurückzuführen. Die erstere Formel enthält nur ϱ von gerader, die letztere von ungerader Indexsumme. Die Auflösung des erstern Gleichungssystems lautet:

$$\varrho_{k,k+2h} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=h} (-1)^{h+\lambda} \frac{h}{h+\lambda} (h+\lambda)_{2\lambda}\, \varrho_{k+h-\lambda}^{(2\lambda)} \qquad (48)$$

Zum Beweise setzen wir für den Differentialquotienten den Wert (46) ein, dann kommt:

$$\begin{aligned}\varrho_{k,k+2h} &= \sum_{\lambda=0} (-1)^{h+\lambda} \frac{h}{h+\lambda} (h+\lambda)_{2\lambda} \{(2\lambda)_\lambda\, \varrho_{k+h} \\ &\quad + 2 \sum_{\mu=0}^{\mu=\lambda-1} (2\lambda)_\mu\, \varrho_{k+h-\lambda+\mu,\ k+h+\lambda-\mu}\} \\ &= (-1)^h \varrho_{k+h} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=h} (-h)_\lambda (h)_\lambda \\ &\quad + 2 \sum_{\mu=1}^{\mu=h} (-1)^{h-\mu} \frac{h}{h+\mu} \varrho_{k+h-\mu,k+h+\mu} \sum_{\lambda=\mu}^{\lambda=h} (-h-\mu)_{\lambda-\mu} (h+\mu)_{\lambda+\mu}\end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}1 &= (1+x)^{-h-\mu}(1+x)^{h+\mu} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \sum_{x=0}^{x=h+\mu} (-h-\mu)_\lambda (h+\mu)_x\, x^{x+\lambda} \\ &= \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \sum_{x=\lambda}^{x=h+\mu+\lambda} (-h-\mu)_\lambda (h+\mu)_{x-\lambda}\, x^x \\ &= \sum_{x=0}^{x=\infty} x^x \sum_{\lambda=0,\, x-h-\mu}^{\lambda=x} (-h-\mu)_\lambda (h+\mu)_{x-\lambda} \\ &= \sum_{x=0}^{x=\infty} x^x \sum_{\lambda=\mu,\, x-h}^{\lambda=x+\mu} (-h-\mu)_{\lambda-\mu} (h+\mu)_{h-x+\lambda}\end{aligned}$$

also der Coefficient von $x^{h-\mu}$

$$\sum_{\lambda=\mu}^{\lambda=h} (-h-\mu)_{\lambda-\mu} (h+\mu)_{\lambda+\mu} = \begin{cases} 0 & (\mu < h) \\ 1 & (\mu = h) \end{cases} \qquad (49)$$

insbesondere für $\mu = 0$

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=h} (-h)_\lambda (h)_\lambda = 0 \quad (h > 0)$$

Hiernach wird Gl. (48) identisch erfüllt.

Aus der Lösung von Gl. (46) ergibt sich leicht die von Gl. (47). Sei

$$\varrho_{k,k+2h+1} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=h} b_\lambda\, \varrho_{k+h-\lambda}^{(2\lambda+1)}$$

woraus durch Differentiation:

$$\varrho_{k+1,k+2h+1} + \varrho_{k,k+2h+2} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=h} b_\lambda\, \varrho_{k+h-\lambda}^{(2\lambda+2)}$$

Führt man znr Linken die Werte aus Gl. (48) ein, so ergibt sich:

$$b_\lambda = (-1)^{h+\lambda}\frac{1}{2}\frac{2h+1}{2\lambda+1}(h+\lambda)_{2\lambda}$$

Demnach ist

$$\varrho_{k,k+2h+1} = \tfrac{1}{2}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=h}(-1)^{h+\lambda}\frac{2h+1}{2\lambda+1}(h+\lambda)_{2\lambda}\,\varrho_{k+h-\lambda^{(2\lambda+1)}} \quad (50)$$

Ferner sind die folgenden Anfangswerte bekannt.

Tabelle für $\varrho_{x,\lambda}$

x	λ 0	1	2	3
0	1	0	−1	0
1	0	1	0	
2	−1	0		
3	0			

woraus:

$$K_1 = 1;\quad K_2 = 1 \quad (51)$$

Sind nun $\tau'_2, \tau'_3, \ldots \tau'_{m-1}$ gegeben, nnd man setzt

$$p_m = \tau_2'\,\tau'_3 \ldots \tau'_{m-1}$$

so wird nach Gl. (41)

$$p_m^2 = \frac{K_m}{K_{m-1}}$$

daher

$$K_m = (p_3\,p_4 \ldots p_m)^2$$

oder direct

$$K_m = (\tau'^{m-2}_2\,\tau'^{m-3}_3 \ldots \tau'_{m-1})^2 \quad (52)$$

Ferner lässt sich Gl. (10) schreiben:

$$K_m = K_{m-1}\,\varrho_{m-1} + Q_m \quad (53)$$

wo Q_m ans Elementen besteht, deren 2 Indices eine Snmme $<2m-2$ haben, die sich sämtllich nach Gl. (48) (50) auf

$$\varrho_0,\quad \varrho_1,\quad \ldots\quad \varrho_{m-2}$$

nnd deren Differentialqnotienten reduciren lassen. Sind also alle K bis K_n und alle Elemente der Diagonale bis ϱ_{m-2} bekannt, so ergibt sich ϱ_{m-1} durch Gl. (53). Die voransgesetzten ϱ aber erhält man snccessive durch die Gleichnngen

$$\begin{aligned} K_3 &= K_2\,\varrho_2 \\ K_4 &= K_3\,\varrho_3 + Q_4 \\ &\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ K_m &= K_{m-1}\,\varrho_{m-1} + Q_m \end{aligned}$$

Das Resultat lautet:

Durch die Krümmungsverhältnisse bis τ'_{m-1} sind alle Elemente der Determinante, welche K_m ausdrückt, bestimmt und lassen sich nach den Gl. (52) (53) (48) (50) daraus berechnen.

§. 7. Curven constanter Krümmungsverhältnisse und constanter Krümmungen.

Sind alle $n-2$ Krümmungsverhältnisse τ_2', ... τ'_{n-1} constant, so sind nach §. 7. auch alle ϱ, mithin alle Coefficienten A constant.

Sei nun die lineare $(n-1)$dehnung E_{n-1} fest, mithin die Curve nur $(n-2)$fach gekrümmt. Dann kann man deren Normale zu einer Coordinatenaxe nehmen, während die $n-1$ übrigen in E_{n-1} fallen. Diese Normale hat aber die Richtung des Strahles f_n; folglich sind alle Analogen von f_n bezüglich auf Axen innerhalb E_{n-1} null, und Gl. (9) ist nach Substitution von n für m homogen linear in

$$f, \quad \ldots \quad f^{(n-1)}$$

Hier ist indes n die beliebige Dimensionszahl, die der ganzen Rechnung zugrunde liegt. Man kann dafür auch $n+1$ schreiben. Dann geht die Annahme, dass E_{n-1} fest sei, in die ursprüngliche Voraussetzung einer festen linearen $n$dehnung E_n über, und die Specialisirung ist keine mehr. Wir haben gemäss Gl. (9), worin $m = n+1$ zu setzen ist:

$$\begin{vmatrix} \varrho_{0,0} & \ldots & \varrho_{0,n-1} & f \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \varrho_{n-1,0} & \ldots & \varrho_{n-1,n-1} & f^{(n-1)} \\ \varrho_{n,0} & \ldots & \varrho_{n,n-1} & f^{(n)} \end{vmatrix} = 0 \qquad (54)$$

und da nach Gl. (48) (50) für constante ϱ

$$\varrho_{k,k+2h} = (-1)^h \varrho_{k+h}; \quad \varrho_{k,k+2h+1} = 0 \qquad (55)$$

ist:

$$\begin{vmatrix} \varrho_0 & 0 & -\varrho_1 & 0 & \ldots & f \\ 0 & \varrho_1 & 0 & -\varrho_2 & \ldots & f' \\ -\varrho_1 & 0 & \varrho_2 & 0 & \ldots & f'' \\ 0 & -\varrho_2 & 0 & \varrho_3 & \ldots & f''' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & f^{(n)} \end{vmatrix} = 0 \qquad (56)$$

An dieser Gleichung bemerkt man, dass der Coefficient jedes $f^{(n-2k-1)}$ null ist. In jedem Terme der Entwickelung einer beliebigen Determinante $|\varrho_{\varkappa,\lambda}|$ ist nämlich die Summe der Indices $\Sigma\varkappa + \Sigma\lambda$ eine gerade Zahl. Tritt nun an die Stelle von $\varrho_{\varkappa,n}$ wie in

(54) $f^{(x)}$, so muss für ungerades $n-x$ auch mindestens ein Element jedes Terms der Unterdeterminante eine ungerade Indexsumme haben, d. i. nach Gl. (55) null sein, woraus das Gesagte folgt.

Hiernach wird Gl. (56) für gerade $n = 2\nu$:

$$\begin{vmatrix} \varrho_0 & 0 & -\varrho_1 & \dots & 0 & f \\ 0 & \varrho_1 & 0 & \dots & (-1)^{\nu+1}\varrho_\nu & 0 \\ -\varrho_1 & 0 & \varrho_2 & \dots & 0 & f'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ (-1)^\nu\varrho_\nu & 0 & (-1)^{\nu+1}\varrho_{\nu+1} & \dots & 0 & f^{(2\nu)} \end{vmatrix} = 0 \qquad (57)$$

für ungerade $n = 2\nu+1$:

$$\begin{vmatrix} \varrho_0 & 0 & -\varrho_1 & \dots & (-1)^{\nu+1}\varrho_\nu & 0 \\ 0 & \varrho_1 & 0 & \dots & 0 & f' \\ -\varrho_1 & 0 & \varrho_2 & \dots & (-1)^\nu\varrho_{\nu+1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & (-1)^\nu\varrho_{\nu+1} & 0 & \dots & 0 & f^{(2\nu+1)} \end{vmatrix} = 0 \qquad (58)$$

Die vollständigen Integrale beider Gleichungen sind von der Form

$$f = \Sigma C e^{A\tau}$$

wo die C ganze Functionen von τ oder constant, die A constant und durch bekannte Gleichungen bestimmt sind.

Da nun f die Grenzen ± 1 nicht überschreiten kann, so können die A nur rein imaginär oder null und ungleich, die C nur constant sein. Sei $A = \pm i\alpha$; dann sind die α für gerade $n = 2\nu$ die Wurzeln der Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \varrho_0 & 0 & -\varrho_1 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \varrho_1 & 0 & \dots & (-1)^{\nu+1}\varrho_\nu & 0 \\ -\varrho_1 & 0 & \varrho_2 & \dots & 0 & -\alpha^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ (-1)^\nu\varrho_\nu & 0 & (-1)^{\nu+1}\varrho_{\nu+1} & \dots & 0 & (-1)^\nu\alpha^{2\nu} \end{vmatrix} = 0 \qquad (59)$$

für ungerade $n = 2\nu+1$ die Wurzeln der Gleichung:

$$\alpha \begin{vmatrix} \varrho_0 & 0 & -\varrho_1 & \dots & (-1)^\nu\varrho_\nu & 0 \\ 0 & \varrho_1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\varrho_1 & 0 & \varrho_2 & \dots & (-1)^{\nu+1}\varrho_{\nu+1} & 0 \\ 0 & -\varrho_2 & 0 & \dots & 0 & -\alpha^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ (-1)^\nu\varrho_\nu & 0 & (-1)^{\nu+1}\varrho_{\nu+1} & \dots & 0 & (-1)^\nu\alpha^{2\nu} \\ 0 & (-1)^\nu\varrho_{\nu+1} & 0 & \dots & \varrho_{2\nu} & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (60)$$

Die Integrationsconstanten C müssen der Gleichung

$$\Sigma f^2 = 1$$

entsprechen. Doch genügt es ein specielles System von n Werten der C aufzustellen, da die allgemeine Lösung durch Coordinatentransformation daraus hervorgeht. In einfachster Form können wir setzen für $n = 2\nu$:

$$f = c_\lambda \cos(\alpha_\lambda \tau), \quad c_\lambda \sin(\alpha_\lambda \tau) \quad (\lambda = 1, \ldots \nu) \tag{61}$$

für $n = 2\nu + 1$:

$$f = c_0, \quad c_\lambda \cos(\alpha_\lambda \tau), \quad c_\lambda \sin(\alpha_\lambda \tau) \quad (\lambda = 1, \ldots \nu) \tag{62}$$

und die Bedingung

$$c_1^2 + \ldots c_\nu^2 = 1, \quad \text{resp.} \quad c_0^2 + \ldots c_\nu^2 = 1$$

durch beliebige Anordnung erfüllen.

Sollen nun sämtliche Krümmungen constant sein, so kommt bei unveränderter Bestimmung des begleitenden Axensystems nur noch die Gleichung hinzu:

$$s' = r = \text{const}$$

und man erhält die Coordinatenwerte bzhw. für gerade und ungerade n:

$$x = \frac{rc_\lambda}{\alpha_\lambda} \sin(\alpha_\lambda \tau), \quad -\frac{rc_\lambda}{\alpha_\lambda} \cos(\alpha_\lambda \tau) \tag{63}$$

$$x = rc_0 \tau, \quad \frac{rc_\lambda}{\alpha_\lambda} \sin(\alpha_\lambda \tau), \quad -\frac{rc_\lambda}{\alpha_\lambda} \cos(\alpha_\lambda \tau) \tag{64}$$
$$\lambda = 1 \quad \ldots \quad \nu$$

Eine Curve, deren erste m Krümmungen constant nicht null, deren übrige Krümmungen null sind, heisse Spirale $m$ter Ordnung.

Eine Spirale $m$ter Ordnung (für $m < n-1$) ist nur ein Specialfall einer Spirale $(n-1)$ter Ordnung, in den dieselbe übergeht, wenn man E_{m+1} fest annimmt, wobei $\tau'_{m+1}, \ldots \tau'_{n-1}$ verschwinden. Das Coordinatenaxensystem behält beliebige Stellung, doch lassen sich $m+1$ Axen in E_{m+1} legen und so die übrigen Coordinaten entbehrlich machen.

Eine Spirale jeder Ordnung ist, wie die Gleichung zeigt, sich selbst in allen Teilen congruent und lässt sich in sich selbst verschieben.

Eine Spirale $m$ter Ordnung, welche mit einer Curve s einen Punkt und in diesem alle begleitenden Axen und alle Krümmungen

bis zur $m$ten gemein hat, heisse $m$te Krümmungsspirale von s für jenen Punkt. Sie repräsentirt demnach die m ersten momentanen Krümmungen von s durch ihre constanten Krümmungen.

Die Aufgabe der Construction aller Krümmungsspiralen einer gegebenen Curve für jeden ihrer Punkte ist im Vorstehenden gelöst: man hat erst aus den Krümmungen der gegebenen Curve nach §. 6. die ϱ, aus diesen die α zu berechnen und diesen gemäss die Spirale zu bestimmen, endlich die Spirale in die erforderliche Lage zu bringen.

Die Bestimmung der α ergibt für die kleinsten Dimensionszahlen Folgendes.

Für $n = 2$ wird Gl. (63):

$$1 - \alpha^2 = 0$$

woraus als Spirale 1. Ordnung:

$$x = r\cos\tau, \qquad r\sin\tau$$

das ist ein Kreis.

Für $n = 3$ wird Gl. (64):

$$(\varrho_2 - 1)\,\alpha(\alpha^2 - \varrho_2) = 0$$

woraus als Spirale 2. Ordnung:

$$x = r\tau\cos\beta, \quad r\sin\beta\cos(\sqrt{\varrho_2}\,\tau), \quad r\sin\beta\sin(\sqrt{\varrho_2}\,\tau)$$

das ist eine Schraubenlinie.

Für $n = 4$ wird Gl. (63):

$$(\varrho_3 - \varrho_2^2)\{\varrho_2 - 1)\alpha^4 + (\varrho_2 - \varrho_3)\alpha^2 + \varrho_3 - \varrho_2^2\} = 0$$

Sind $\pm\alpha_1$, $\pm\alpha_2$ die Wurzeln, so wird die Spirale 3. Ordnung:

$$x = \frac{r}{\alpha_1}\cos\beta\sin(\alpha_1\tau), \quad -\frac{r}{\alpha_1}\cos\beta\cos(\alpha_1\tau)$$

$$\frac{r}{\alpha_2}\sin\beta\sin(\alpha_2\tau), \quad -\frac{r}{\alpha_2}\sin\beta\cos(\alpha_2\tau)$$

Jede dieser Spiralen lässt sich auch als Krümmungsspirale einer beliebig mehrfach gekrümmten Curve verwenden.

XI.

Zur Theorie der Schliessungsprobleme.

Von

Emil Oekinghaus.

Die aus der Verbindung der elliptischen Integrale und Functionen hervorgehenden Schliessungstheoreme gewinnen ein um so höheres Interesse, als jeder zur Erforschung dieser eigenartigen Gebilde eingeschlagene Weg neue Gesichtspunkte eröffnet.

Der hier gewählte Weg nimmt seinen Ausgangspunkt von der auf das Additionstheorem der elliptischen Integrale erster Art sich beziehenden Relation von Lagrange, da ihre die Amplituden dieser Integrale enthaltenden Ausdrücke Producte von Wurzelwerten bestimmter Gleichungen darstellen, welche jene Relation in eine Kegelschnitts- oder höhere Gleichung transformiren. Die Ausführung dieses Grundgedankens führt auf manche bemerkenswerte Beziehungen namentlich confocaler Ellipsen, sowie auch zu einer neuen Methode der geometrischen Addition der elliptischen Integrale, welche vielleicht einige Aufmerksamkeit verdient. Da die Integrale der Pendelbewegung sich zwanglos in der Untersuchung verwenden liessen, so haben wir sie in den Kreis der Schliessungstheoreme hier aufgenommen.

I.

Ein Punkt in der Ebene einer Ellipse, deren Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ist, sei durch die Polarcoordinaten $R(\alpha)$ bestimmt. Wir ziehen die beiden Tangenten an die Curve und bezeichnen die Coordinaten der Berührungspunkte xy vermittelst Einführung der excentrischen Winkel φ allgemein durch

$$x = r\sin\varphi, \quad y = b\cos\varphi$$

Da nun

$$-\operatorname{tg}\tau = \frac{b^2x}{a^2y} = \frac{y - R\sin\alpha}{x - R\cos\alpha}$$

ist, so erhält man durch Einsetzen obiger Substitutionen aus letzter Formel die Beziehung

1) $$a\sin\alpha\cos\varphi + b\cos\alpha\sin\varphi = \frac{ab}{R}$$

also die Gleichung

2) $$b^2(R^2\cos\alpha^2 - a^2)\operatorname{tg}\varphi^2 + abR^2\sin 2\alpha\operatorname{tg}\varphi + a^2(R^2\sin\alpha^2 - b^2) = 0$$

Da Ausdrücke wie $\sin\varphi_1\sin\varphi_2$, $\cos\varphi_1\cos\varphi_2$ später häufig zu berechnen sind, so bemerken wir hier, dass aus der Gleichung

$$a\operatorname{tg}\varphi^2 - b\operatorname{tg}\varphi + c = 0$$

die genannten Formen aus folgenden Relationen

$$\sin\varphi_1\sin\varphi_2 = \frac{c}{\sqrt{(a-c)^2 + b^2}}, \quad \cos\varphi_1\cos\varphi_2 = \frac{a}{\sqrt{(a-c)^2 + b^2}}$$

sich ergeben. Aus diesen oder auch den nachfolgenden Gleichungen

$$(a^2\sin\alpha^2 + b^2\cos\alpha^2)\sin\varphi^2 - 2\frac{ab^2}{R}\cos\alpha\,.\sin\varphi + \frac{a^2b^2}{R^2} - a^2\sin\alpha^2 = 0$$

$$(a^2\sin\alpha^2 + b^2\cos\alpha^2)\cos\varphi^2 - 2\frac{a^2b}{R}\sin\alpha\,.\cos\varphi + \frac{a^2b^2}{R^2} - b^2\cos\alpha^2 = 0$$

finden sich demnach leicht die Formeln

$$\sin\varphi_1\sin\varphi_2 = \frac{\frac{a^2b^2}{R^2} - a^2\sin\alpha^2}{a^2\sin\alpha^2 + b^2\cos\alpha^2}$$

$$\cos\varphi_1\cos\varphi_2 = \frac{\frac{a^2b^2}{R^2} - b^2\cos\alpha^2}{a^2\sin\alpha^2 + b^2\cos\alpha^2}$$

Das genannte Additionstheorem

$$\int\frac{d\varphi_1}{\Delta\varphi_1} \pm \int\frac{d\varphi_2}{\Delta\varphi_2} = \int\frac{d\sigma}{\Delta\sigma}$$

basirt nun auf der Formel von Lagrange oder Euler:

$$\cos\varphi_1\cos\varphi_2 \mp \sin\varphi_1\sin\varphi_2\Delta(\sigma) = \cos\sigma$$

und der Zweck unserer Untersuchungen gründet sich auf die Substitution der obigen Formen von $\sin\varphi\cos\varphi$ etc. in diese Relation. Daraus geht eine Polargleichung für $R(a)$ hervor, deren Curve die Eigenschaft besitzt, dass die von jedem ihrer Punkte an die Ellipse gezogenen Tangenten in ihren den Berührungspunkten entsprechenden excentrischen Winkeln der Fundamentalrelation genügen. Wir betrachten hierbei den Modulus k und die Amplitude σ als im allgemeinen constante Grössen.

Die Endgleichung ist nun

3) $a^2b^2-b^2R^2\cos\alpha^2+(a^2b^2-a^2R^2\sin\alpha^2)\Delta\sigma=(a^2R^2\sin\alpha^2+b^2R^2\cos\alpha^2)\cos\sigma$

und stellt in der hier gewählten Form eine Ellipse dar, auf welche Curve wir uns im Folgen beschränken werden. Für die Hyperbel wäre einfach das Vorzeichen von $\Delta\sigma$ umzukehren.

Ueber k^2 steht die Verfügung frei, demnach können wir

$$k^2 = \frac{c^2}{a^2}$$

setzen, welcher Wert geometrisches Interesse hat.

Die Ellipsengleichung

4) $$\frac{X^2}{a^2\dfrac{1+\Delta\sigma}{1+\cos\sigma}} + \frac{Y^2}{b^2\dfrac{1+\Delta\sigma}{\Delta\sigma+\cos\sigma}} = 1$$

welche wir abgekürzt

$$\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} = 1$$

schreiben, hat nun die Eigenschaft

$$A^2 - B^2 = c^2$$

woraus folgt, dass beide Ellipsen confocal sind. Da sich aus dieser Eigenschaft manches Bemerkenswerte entwickeln lässt, so wollen wir bei diesem Specialfall von confocalen Ellipsen etwas verweilen.

Wir können die Amplitude σ auf folgende Weise bestimmen:

Man setze in der Gleichung $Y = b$, das entsprechende X findet man leicht durch folgende Formel ausgedrückt:

5) $$X = a\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\sigma$$

Wegen

$$\frac{B^2}{b^2} = \frac{1+\Delta\sigma}{\Delta\sigma+\cos\sigma}$$

hat man auch

$$\frac{B^2-b^2}{B^2} = \frac{1-\cos\sigma}{1+\Delta\sigma}$$

und da

$$\frac{A^2}{a^2} = \frac{1+\Delta\sigma}{1+\cos\sigma}$$

so folgt durch Multiplication der letzten Formeln

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\sigma^2 = \frac{A^2}{a^2}\,\frac{B^2-b^2}{B^2}$$

d. i. wegen $A^2-B^2=c^2$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\sigma^2 = \frac{A^2}{a^2}\,\frac{A^2-a^2}{A^2-c^2}$$

$$\cos\sigma = \frac{2a^2A^2-a^2c^2-A^4}{A^4-a^2c^2}$$

$$\Delta\sigma = \frac{-2A^2c^2+A^4+a^2c^2}{A^4-a^2c^2}$$

Aus den Axen zweier confocalen Ellipsen bestimmt sich demnach in vorstehender Art die Amplitude σ, welche vermittelst 5) leicht construirt werden kann. Beschreibt man nämlich um die 1. Ellipse den einschliessenden Kreis vom Radius a, so ergibt sich aus dem Dreieck Oax sofort die halbe Amplitude.

Bemerkt man ferner, dass für die Lage des oben gewählten Punktes XY d. i. Xb eine Amplitude φ verschwindet, so wird die zweite zu σ, welche man findet, wenn von dem genannten Punkte die zweite Tangente gezogen wird.

Da jede Tangente an die 1. Ellipse die umschliessende confocale 2mal schneidet, so können von den neuen Durchschnittspunkten wiederholt Tangenten gezogen werden. Wir wollen annehmen, dass das entstehende Polygon sich nach ein- oder mehrfachen Umläufen schliesst. Die analytischen Bedingungen für den ersten Fall sind nun bekanntlich an folgende Relationen geknüpft:

Für ein n Eck hat man, wenn man beachtet, dass der $(n+1)$te Berührungspunkt mit dem ersten zusammenfällt

$$F_{(2)} - F_{(1)} = F_{(\sigma)}$$
$$F_{(3)} - F_{(2)} = F_{(\sigma)}$$

6)

6)

$$\begin{aligned} F_{(4)} - F_{(3)} &= F_{(\sigma)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ F_{(n)} - F_{(n-1)} &= F_{(\sigma)} \\ F_{(n+1)} - F_{n} &= F_{(\sigma)} \\ \hline F_{n+1} - F_{(1)} &= nF_{(\sigma)} \end{aligned}$$

und da

$$F_{(n+1)} - F_{(1)} = 4K$$

so resultirt

$$nF_{(\sigma)} = 4K$$

woraus

$$F_{(\sigma)} = \frac{4K}{n}$$

also

$$\operatorname{cn}\frac{4K}{n} = \frac{2a^2A^2 - a^2c^2 - A^4}{A^4 - a^2c^2} \quad \text{folgt}$$

Um einige Anwendungen zu geben, wollen wir $n = 3$ setzen, und haben demnach die Bedingungsgleichung zu suchen, unter welcher das Tangentendreieck der 1. Ellipse zum Sehnendreieck der 2. confocalen wird.

Zunächst ist

$$F_{(\sigma)} = \tfrac{4}{3}K, \quad \sigma = \operatorname{am}\tfrac{4}{3}K$$

Setzt man nun in der Definitionsgleichung

$$\operatorname{cn}u\operatorname{cn}v - \operatorname{sn}u\operatorname{sn}v\operatorname{dn}(u+v) = \operatorname{cn}(u+v)$$

$$u = v = \tfrac{4}{3}K$$

$$\tfrac{8}{3}K = 4K - \tfrac{4}{3}K$$

so erhält man

$$\operatorname{cn}\tfrac{8}{3}K^2 - \operatorname{sn}\tfrac{4}{3}K^2\operatorname{dn}\tfrac{4}{3}K = \operatorname{cn}\tfrac{4}{3}K$$

Man kann die Werte von $\operatorname{cn}\sigma$, $\Delta\sigma$ leicht berechnen, sie sind

$$\operatorname{cn}\tfrac{4}{3}K = \frac{2A^2a^2 - A^4 - a^2c^2}{A^4 - a^2c^2}$$

$$\operatorname{dn}\tfrac{4}{3}K = \frac{-2A^2c^2 + A^4 + a^2c^2}{A^4 - a^2c^2}$$

so dass durch diese Formeln die obige Gleichung übergeht in

$$A^8 - 4a^2A^6 + 6a^2c^2A^4 - 4a^2c^4A^2 + a^4c^4 = 0$$

und setzt man

$$\frac{A^2}{a^2} = z, \qquad \frac{c}{a} = k$$

so ergibt sich

$$z^4 - 4z^3 + 6k^2z^2 - 4k^2z^2z + k^4 = 0$$

Die Lösnng der Anfgabe, zn einer gegebenen Ellipse, deren Excentricität dnrch $k = \frac{c}{a}$ bestimmt ist, eine zweite confocale zu finden, von der Eigenscbaft, dass das dem ersten nmbeschriebene Tangentendreieck znm Sehnendreieck der zweiten wird, hängt von der Anflösnng einer biqnadratischen Gleichung ab, deren eine Wurzel $z = \frac{A^2}{a^2}$ die grosse Achse der gesnchten Ellipse bestimmt. Zur Auflösnng der obigen Gleicbnng hemerken wir, dass die quadratische Invariante gleich 0 ist. Der Wnrzelwert ist demnach leicht zn herechnen. Uebrigens kann noch eine andere Gleichung eingeführt werden, wenn man die obige als die Gleichnng der Wnrzelqnadrate der nenen ansieht. Für $x = \frac{A}{a}$ folgt nämlich, wie leicht nachzuweisen ist,

$$x^4 - 2x^3 + 2k^2x - k^2 = 0$$

Setzt man

$$x = y + \tfrac{1}{2}$$

so folgt

$$y^4 - \tfrac{3}{2}y^2 - (1 - 2k^2)y - \tfrac{3}{16} = 0$$

Nimmt man $k^2 = \frac{1}{2}$ an, so wird sehr einfach

$$\frac{A}{a} = \tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{3}{4} + \sqrt{\tfrac{3}{4}}}$$

Wir benntzen für den vorliegenden Fall das Additionstheorem der elliptischen Integrale der 2. Art, nm eine Relation abznleiten. Wir bahen der Reihe nach znnächst allgemein

8)
$$\begin{aligned}
E_{(2)} - E_{(1)} &= E_{(\sigma)} - k^2 \sin\sigma \sin\varphi_1 \sin\varphi_2,\\
E_{(3)} - E_{(2)} &= E_{(\sigma)} - k^2 \sin\sigma \sin\varphi_2 \sin\varphi_3,\\
E_{(4)} - E_{(3)} &= E_{(\sigma)} - k^2 \sin\sigma \sin\varphi_3 \sin\varphi_4,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
E_{(n)} - E_{(n-1)} &= E_{(\sigma)} - k^2 \sin\sigma \sin\varphi_{n-1} \sin\varphi_n\\
E_{(n+1)} - E_{(n)} &= E_{(\sigma)} - k^2 \sin\sigma \sin\varphi_n \sin\varphi_{n+1}
\end{aligned}$$

$$E_{(n+1)} - E_{(1)} = nE_{(\sigma)} - k^2 \sin\sigma \Sigma \sin\varphi_1 \sin\varphi_2$$

nnd da

$$E_{(n+1)} - E_{(1)} = 4E$$

worin E das vollständige Integral und demnach $4E$ der Umfang der Ellipse für $a = 1$ ist, so folgt

9) $$4E = nE_{(\sigma)} - k^2 \sin\sigma \Sigma \sin\varphi_1 \sin\varphi_2$$

Hieraus geht hervor, dass $\Sigma \sin\varphi_1 \sin\varphi_2$ eine constante Grösse ist.

Man hat also, da

$$\sin\varphi_{n+1} = \sin\varphi_1$$

10) $$\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_2 \sin\varphi_3 + \sin\varphi_3 \sin\varphi_4 \ldots$$
$$\ldots \sin\varphi_{n-1} \sin\varphi_n + \sin\varphi_n \sin\varphi_1 = C$$

Diese Relation zwischen den Amplituden der Integrale besteht für alle Tangenten- und Sehnenvielecke zweier confocalen Ellipsen.

Für das Dreieck ist die Constante C leicht zu ermitteln, nämlich

$$\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_2 \sin\varphi_3 + \sin\varphi_3 \sin\varphi_1 = -\sin\sigma^2$$

demnach ist

$$4E = 3E^{(\sigma)} + k^2 \sin\sigma^2$$

Man hat bei diesen Bestimmungen besonders auf die Vorzeichen der Functionen zu achten. Nimmt man $\sin\varphi_1$ negativ, so wird $\sin\varphi_2$ positiv, $\sin\varphi_3$ negativ.

Da $\sin\varphi = \frac{x}{a}$ ist, so kann die oben gefundene Formel auch durch

$$\Sigma x_1 x_2 = C$$

dargestellt werden.

Wie vorhin für das Dreieck, so gelten für das 4, 6, n Eck die allgemeinen Formeln

$$\operatorname{cn}\frac{4K}{n} = \frac{-A^4 + 2A^2a^2 - a^2c^2}{A^4 - a^2c^2},$$

11) $$\operatorname{dn}\frac{4K}{n} = \frac{A^2 - 2A^2c^2 + a^2c^2}{A^4 - a^2c^2},$$

$$F_{(\sigma)} = \frac{4K}{n}, \quad \sigma = \operatorname{am}\frac{4K}{n}$$

Für das Viereck werden diese Gleichungen sehr einfach.

Die Bedingungsgleichung ist

$$A^4 - 2A^2a^2 + a^2c^2$$

woraus

$$A^2 = a(a+b).$$

Construirt man demnach zu einer Ellipse, deren Halbachsen a und b sind, eine zweite confocale, so lässt sich für den Fall, dass die grosse Halbachse der zweiten durch $A = \sqrt{a(a+b)}$ bestimmt ist, der äussern Ellipse ein Parallelogramm einzeichnen, welches der innern umgezeichnet ist.

Da $E_{(\sigma)} = E$ ist, so folgt

$$\Sigma \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 = 0$$

Die Anwendung der Formeln auf das 8 Eck führt auf die Bestimmung von dn $\frac{K}{2}$, welcher Ausdruck bekanntlich gleich $\sqrt{z'}$ ist. Die Bedingungsgleichung führt demnach auf die Relation

$$\left(\frac{A}{a}\right)^4 (1-\sqrt{k'}) - 2k^2 \left(\frac{A}{a}\right)^2 + k^2(1+\sqrt{k'}) = 0$$

woraus

$$\left(\frac{A}{a}\right)^2 = (1+\sqrt{k'})\sqrt{1+k'}\,(\sqrt{1+k'} - \sqrt{k'})$$

Da $k = \frac{c}{a}$ ist, so folgt

$$k' = \frac{b}{a}$$

Die Relation 9) geht nun über in

$$4E = 8E_{(\sigma)} - k^2 \sin\sigma \Sigma \sin\varphi_1 \sin\varphi_2$$

Aus einer speciellen Lage des Achtecks folgt aber, dass

$$\Sigma \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 = 4\sin\sigma$$

weshalb

$$E = 2E_{(\sigma)} - k^2 \sin\sigma^2$$

Die analytischen Bedingungen für Tangenten- und Sehnensechsecke confocaler Ellipsen basiren auf den Formeln

$$\text{cn}\,\tfrac{2}{3}K = \frac{-A^4 + 2A^2a^2 - a^2c^2}{A^4 - a^2c^2},$$

12)

$$\text{dn}\,\tfrac{2}{3}K = \frac{A^4 - 2A^2c^2 + a^2c^2}{A^4 - a^2c^2}$$

Setzt man nun, um eine Relation zwischen den letzten Grössen zu finden, in der Formel 7)

$$u = v = \tfrac{2}{3}K, \quad \tfrac{4}{3}K = 2K - \tfrac{2}{3}K$$

so wird man erhalten

$$\operatorname{cn}\tfrac{2}{3}K^2 - \operatorname{sn}\tfrac{2}{3}K^2 \operatorname{dn}\tfrac{2}{3}K = -\operatorname{cn}\tfrac{2}{3}K$$

aus welcher nach einigen Entwickelungen

$$\operatorname{cn}\tfrac{2}{3}K - (1 - \operatorname{cn}\tfrac{2}{3}K)\operatorname{dn}\tfrac{2}{3}K = 0$$

hervorgeht.

Nach Substitution der Werte aus 12) erhält man also aus der letzten eine Bedingungsgleichung, die wir wie folgt schreiben

$$\left(\frac{A}{a}\right)^8 - \tfrac{4}{3}(1+k^2)\left(\frac{A}{v}\right)^6 + 2k^2\left(\frac{A}{a}\right)^4 - \frac{k^4}{3} = 0$$

Setzen wir

$$\left(\frac{A}{a}\right)^2 = z$$

so ist

$$z^4 - \tfrac{4}{3}(1+k^2)z^3 + 2k^2z^2 - \frac{k^4}{3} = 0$$

Wie beim Dreieck, so beruht auch beim Sechseck die Bestimmung der Axenverhältnisse auf der Auflösung einer biquadratischen Gleichung.

Für die Ellipsenbogen besteht nach 9) die Relation

$$4E = 6E_{(\sigma)} - k^2 \sin^2\sigma \Sigma \sin\varphi_1 \sin\varphi_2$$

Da aber, wie auch hier an einer speciellen Lage des Sechsecks deutlich wird, die Constante

$$C = 2\sin\sigma^2$$

ist, so hat man

$$2E = 3E_{(\sigma)} - k^2 \sin\sigma^3$$

II.

In dem bisher Entwickelten hatten wir die Annahme gemacht, dass der Modulus $k = \frac{c}{a}$ sei. Im Folgenden lassen wir diese Constante unbestimmt, so dass die allgemeine Ellipsengleichung

$$\frac{x^2}{a^2\,\frac{1+\Delta\sigma}{1+\cos\sigma}} + \frac{y^2}{b^2\,\frac{1+\Delta\sigma}{\Delta\sigma+\cos\sigma}} = 1$$

für alle Fälle gilt. Beide Curven haben gleiche Achsenrichtungen und gemeinsamen Mittelpunkt.

Demnach bestimmen sich die Achsen der 2. Ellipse aus

13) $$A^2 = a^2 \frac{1+\Delta\sigma}{1+\cos\sigma}, \quad B^2 = b^2 \frac{1+\Delta\sigma}{\Delta\sigma+\cos\sigma}$$

Auch hier suchen wir die Abscissen X zu bestimmen, deren Ordinate $= b$ ist. Man findet

$$X = a \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\sigma$$

Sind demnach 2 concentrische Ellipsen gleicher Achsenrichtungen gegeben, so ist damit auch die Amplitude σ der Relation

$$\int \frac{d\varphi_1}{\Delta\varphi_1} - \int \frac{d\varphi_2}{\Delta\varphi_2} = \int \frac{d\sigma}{\Delta\sigma}$$

bekannt. Eliminirt man in 13) $\Delta\sigma$, so kommt schliesslich

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\sigma^2 = \frac{A^2}{a^2} \frac{B^2 - b^2}{B^2}$$

woraus

$$\cos\sigma = \frac{a^2 B^2 - A^2(B^2 - b^2)}{a^2 B^2 + A^2(B^2 - b^2)}$$

Ferner folgt aus

$$\frac{A^2}{a^2} = \frac{1+\Delta\sigma}{1+\cos\sigma}$$

die Beziehung

$$2\frac{A^2}{a^2}\cos\tfrac{1}{2}\sigma^2 - 1 = \sqrt{1 - k^2 \sin\sigma^2}$$

woraus

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\sigma^2 = \frac{A^2(A^2 - a^2)}{a^2(A^2 - k^2 a^2)}$$

Aus der Verbindung beider Formeln für $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\sigma^2$ resultirt eine Relation für k^2, nämlich

$$k^2 = \frac{a^2 B^2 - b^2 A^2}{a^2(B^2 - b^2)}$$

Da also k und $\cos\sigma$ durch die Achsen beider Ellipsen bestimmbar sind, so gewinnt man auch für

$$\Delta\sigma = \sqrt{1 - k^2 \sin\sigma^2}$$

die Formel

$$\Delta\sigma = \frac{A^2(B^2 + b^2) - a^2 B^2}{A^2(B^2 - b^2) + a^2 B^2}$$

Die Schliessungsprobleme für 2 Ellipsen, welche bei gleichen Achsenrichtungen denselben Mittelpunkt haben, sind demnach an folgende Formeln geknüpft:

Für ein n Eck, welches der äussern Ellipse ein-, der innern umgezeichnet ist, gelten, von welchem Punkte der einen oder andern man auch beginnen möge, die Relationen

$$F_{(\sigma)} = \frac{4K}{n} \quad \text{für} \quad 1 \text{ Umlauf},$$

$$F_{(\sigma)} = 4\frac{Ku}{n} \quad \text{für} \quad u \text{ Umläufe}.$$

Im ersten Fall hat man also

$$\sigma = \operatorname{am}\frac{4K}{n}$$

$$\operatorname{cn}\frac{4K}{n} = \frac{a^2B^2 - A^2(B^2 - b^2)}{a^2B^2 + A^2(B^2 - b^2)},$$

14) $$\operatorname{dn}\frac{4K}{n} = \frac{A^2(B^2 + b^2) - a^2B^2}{A^2(B^2 - b^2) + a^2B^2},$$

$$k^2 = \frac{a^2B^2 - b^2A^2}{a^2(B^2 - b^2)}, \quad k'^2 = \frac{b^2}{a^2}\frac{A^2 - a^2}{B^2 - b^2}$$

und analog für den 2. Fall.

Bei der Anwendung auf 3, 4, n Ecke hat man also die Beziehungen zu suchen, welche für verschiedene Werte von $\frac{4K}{n}$ oder $\frac{4K}{n}u$ in Form von Gleichungen bestehen. Vermittelst Substitution obiger Ausdrücke in diese Beziehungen gehen neue hervor, welche das Abhängigkeitsverhältniss der Achsen beider Ellipsen definiren.

Indem man dann den Modulus k oder a und b beliebig annimmt, gewinnt man manche interessante Ergebnisse, deren einige wir hier mitteilen.

Ist z. B. $k = 0$, so folgt aus der letzten Formel

$$\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$$

Sobald also die Ellipsen ähnlich sind, gehen die elliptischen Functionen in Kreisfunctionen und damit

$$\operatorname{cn}\frac{4K}{\pi} \quad \text{in} \quad \cos\frac{2\pi u}{n}$$

über. Daher ist hierfür

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\sigma^2 = \frac{B^2 - b^2}{b^2}$$

oder

$$\cos\tfrac{1}{2}\sigma = \frac{b}{B} = \frac{a}{A} = \cos\frac{\pi u}{n}$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so schliesst sich bei ähnlichen in ihren Achsen gleichgerichteten concentrischen Ellipsen das Polygon wie auch der Anfangspnnkt gewählt werden möge.

Hierans geht hervor, dass die ohige für Kreispolygone gültige Formel sich anch anf Ellipsen der oben definirten Art ansdehnen lässt. Die excentrischen Winkel stehen dann in folgender Beziehnng zn einander.

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_3 - \varphi_2 = \varphi_4 - \varphi_3 \ldots = \sigma$$

worans für die Curven einfache constructive Bestimmnngen hervorgehen.

Für das Sechseck gilt nnn im allgemeinen Fall

$$F(\sigma) = \tfrac{1}{3}K$$

weshalh wir jetzt die Formel

$$\frac{1}{\mathrm{cn}\,\frac{1}{3}K} - \frac{1}{\mathrm{dn}\,\frac{1}{3}K} = 1$$

anznwenden hahen. Snhstitniren wir die in 14) herechneten Ansdrücke in die letzte Formel, so resnltirt die elegante Relation

$$\frac{1}{\frac{a^2}{A^2} + \frac{b^2}{B^2} - 1} + \frac{1}{\frac{a^2}{A^2} - \frac{b^2}{B^2} - 1} = \frac{1}{\frac{a^2}{A^2} - \frac{b^2}{B^2} + 1}$$

als Bedingnngsgleichnng für die Achsen zweier gleichliegenden concentrischen Ellipsen, wenn jedes Sehnensechseck der äussern znm Tangentensechseck der innern wird.

Aus der letzten Relation folgt nun

$$\frac{A^2}{a^2} = \frac{\sqrt{1 - \frac{b^2}{B^2}} + 2}{\left(3 + \frac{b^2}{B^2}\right)\sqrt{1 - \frac{b^2}{B^2}}}$$

vermittest welcher für hestimmte Werte der kleinen Halhachsen b und B, die entsprechenden für die grossen Halbachsen berechnet werden können. Falls also $\frac{A}{a}$ constant hleiht, kann a nach Belieben gewählt werden. Es gibt also nnendlich viele Ellipsen, welche den obigen Bedingungen genügen.

Sofern

$$\frac{a}{b} = \frac{A}{B}$$

ist, wird man für beide jetzt ähnliche Ellipsen die Formeln

$$A^2 = \tfrac{1}{3}a^2, \quad B^2 = \tfrac{1}{3}b^2$$

haben, welche für $a = b$ in bekannte Kreisrelationen übergehen.

Die Formeln für das Dreieck, also für $n = 3$ gehen aus der Substitution der Formeln 14) in 7) hervor. Die schliessliche Reduction der Gleichung führt auf

$$A^4(B^2 - b^2)^2 - 2a^2A^2B^2(B^2 + b^2) + a^4B^4 = 0$$

worin A, B und a, b die Halbachsen der beiden entsprechenden Ellipsen sind.

Aus dieser folgt die einfache Relation

$$\frac{a}{B} + \frac{b}{B} = 1$$

welche eine bemerkenswerte geometrische Construction zulässt.

Wie man sieht, stellt sie die Gleichung einer Geraden in rechtwinkeligen Coordinaten vor. Demnach hat man folgenden Satz:

Zieht man in einer festen Ellipse, deren Halbachsen A und B sind, eine die Scheitelpunkte XY verbindende Gerade, so existiren für alle auf dieser Geraden

$$\frac{a}{A} + \frac{b}{B} = 1$$

liegenden variabeln Punkte ab entsprechende Ellipsenschaaren, welchen die Eigenschaft zukommt, dass der festen Ellipse

$$\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} = 1$$

Dreiecke einbeschrieben werden können, welche den mit den Halbachsen ab variabeln Ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

umbeschrieben sind.

Die Amplitude des Integrals $\int \frac{d\sigma}{\Delta(\sigma)}$ wird jetzt durch

$$\cos\tfrac{1}{2}\sigma = \sqrt{\tfrac{1}{2}\frac{a}{A}}$$

ausgedrückt.

Für das Viereck wird, um wieder zu den allgemeinen Formeln zurückzukehren

$$\sigma = \operatorname{am} K = \frac{\pi}{2}$$

und

$$\frac{a^2}{A^2} + \frac{b^2}{B^2} = 1,$$

$$k^2 = -\frac{A^4}{a^4} + \frac{2A^2}{a^2}$$

woraus

$$\frac{A^2}{a^2} = 1 + k'$$

oder

$$\frac{a}{A} = \frac{1}{\sqrt{1+k'}}$$

Vermittelst eines die äussere Ellipse einschliessenden Kreises ist $\frac{a}{A}$ durch den excentrischen Winkel ψ, also durch

$$\frac{a}{A} = \sin\psi$$

bestimmt, und da

$$\frac{1}{\sqrt{1+k'}} = \operatorname{sn}\frac{K}{2}$$

ist, so folgt

$$\psi = \operatorname{am}\frac{K}{2}$$

Da $\sigma = 90^0$ ist, so sind die Radien nach den Berührungspunkten der tangirenden Sehnenvierecke einander conjugirt.

Für das Achteck ist die Bedingungsgleichung

$$\frac{b}{B}\sqrt{\frac{1-\frac{a^2}{A^2}}{1-\frac{b^2}{B^2}}} = \frac{a}{A}\left(\frac{\frac{a^2}{A^2}-\frac{b^2}{B^2}-1}{\frac{a^2}{A^2}-\frac{b^2}{B^2}+1}\right)^2$$

Setzt man

$$\frac{a^2}{A^2} = n, \qquad \frac{a^2}{A^2} - \frac{b^2}{B^2} + 1 = y$$

so ergibt die Entwickelung für y eine Gleichung 5. Grades.

Um die Verhältnisse für ein Zehneck darzustellen, erinnern wir an die bekannte Relation (Durège S. 185)

$$\operatorname{cn}\tfrac{2}{3}K = \operatorname{cn}\tfrac{1}{3}K \sqrt{\frac{\operatorname{dn}\tfrac{1}{3}K - \operatorname{cn}\tfrac{1}{3}K}{1+\operatorname{dn}\tfrac{1}{3}K}} + \operatorname{sn}\tfrac{1}{3}K \operatorname{dn}\tfrac{1}{3}K \sqrt{\frac{1+\operatorname{cn}\tfrac{1}{3}K}{1+\operatorname{dn}\tfrac{1}{3}K}}$$

Gemäss der Formeln 14) ist nun

$$\operatorname{cn}\tfrac{2}{3}K = \frac{a^2B^2 - A^2(B^2-b^2)}{a^2B^2 + A^2(B^2-b^2)}$$

$$\operatorname{dn}\tfrac{2}{3}K = \frac{A^2(B^2+b^2) - a^2B^2}{A^2(B^2-b^2) + a^2B^2}$$

Führt man diese Ausdrücke in obige Formel ein, so resultirt

$$\frac{1-\sqrt{1-\frac{a^2}{A^2}}}{\sqrt{1-\frac{b^2}{B^2}}} = \frac{2\frac{a^2}{A^2}\left(-\frac{a^2}{A^2}+\frac{b^2}{B^2}+1\right)}{\left(\frac{a^2}{A^2}+\frac{b^2}{B^2}-1\right)\left(\frac{a^2}{A^2}-\frac{b^2}{B^2}+1\right)}$$

welche Relation ebenfalls auf eine biquadratische Gleichung führt.

Wäre

$$\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$$

so würde folgen

$$16\frac{a^4}{A^4} - 20\frac{a^2}{A^2} + 5 = 0$$

wie es sein muss.

Die allgemeinen Formeln geben noch zu einer interessanten Betrachtung Veranlassung. Sie enthalten nämlich eine eigenthümliche Methode der geometrischen Construction des Additionstheorems der elliptischen Integrale erster Art, und zwar wird dieselbe durch Kreis und Ellipse vermittelt. Denn setzen wir in

$$\int\frac{d\varphi_2}{\Delta\varphi_2} = \int\frac{d\sigma}{\Delta\sigma} - \int\frac{d\varphi_1}{\Delta\varphi_1}$$

die Amplituden σ und φ_1 und den Modulus k als gegeben, φ_2 als gesucht voraus, so hat man zunächst in den aus 14) hervorgehenden Formeln, wenn $a = b$ gesetzt wird:

$$k'^2 = \frac{A^2-a^2}{B^2-a^2}, \quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\sigma^2 = \frac{A^2}{B^2}\,\frac{B^2-a^2}{a^2}$$

B^2 zu eliminiren. Für $\frac{A^2}{a^2} = y$ kommt dann

$$y^2 - y(1+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\sigma^2) + k^2\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\sigma^2 = 0$$

woraus demnach 2 Werte für $\frac{A^2}{B^2}$ hervorgehen, welche beide wir berücksichtigen werden. Für das obere Zeichen geht nach einigen Umformungen des Wurzelausdrucks die Beziehung

$$\frac{A}{a} = \frac{\sqrt{1+k\sin\sigma}+\sqrt{1-k\sin\sigma}}{2\cos\frac{1}{2}\sigma}$$

und für das untere die Excentricität

$$\frac{C}{B} = \frac{\sqrt{1+k\sin\sigma}-\sqrt{1-k\sin\sigma}}{2\cos\frac{1}{2}\sigma} = \varepsilon$$

hervor.

Der Radius a des Kreises kann willkürlich gewählt werden, die erste Formel lässt demnach A leicht finden, daher ist auch B nach einer der obigen Formeln bekannt. Wird nun die Ellipse mit den Halbachsen AB construirt, so kann für jede Amplitude φ_1 die der obigen Relation entsprechende Amplitude φ_2 bestimmt werden. Wir ziehen nämlich an den Kreispunkt K, welcher der Amplitude φ_1 entspricht, eine Tangente K_1E bis zur Ellipse, und von E aus eine zweite EK_2 an den Kreis, der Berührungspunkt ergibt im zugehörigen Winkel φ_2 die gesuchte Amplitude.

Die Construction ändert sich nicht wesentlich, wenn man die innere Ellipse unverändert, dagegen die äussere in einen Kreis übergehen lässt. Unter diesen Umständen wird also $A = B$, und die jetzt gültigen Relationen für das Additionstheorem sind

$$k^2 = \frac{c^2}{a^2}\frac{A^2}{A^2-b^2}$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\sigma^2 = \frac{A^2}{a^2}-\frac{b^2}{a^2}$$

Eliminirt man hierin $\frac{A^2}{a^2}$ und setzt

$$\frac{c^2}{a^2} = y$$

so resultirt schliesslich

$$y^2 - y(1+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\sigma^2)+k^2\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\sigma^2 = 0$$

woraus, wie vorhin

$$\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{1+k\sin\sigma}-\sqrt{1-k\sin\sigma}}{2\cos\frac{1}{2}\sigma} = \varepsilon$$

$$\frac{A}{a} = \frac{\sqrt{1+k\sin\sigma}-\sqrt{1-k\sin\sigma}}{2\cos\frac{1}{2}\sigma}$$

folgt.

Bei bestimmten a folgt aus der ersten Formel die Excentricität der gesuchten Ellipse, und aus der zweiten ergibt sich der Kreisradius. Die Amplituden der Integrale werden dann wie vorhin gefunden, wenn die excentrischen Winkel auf bekannte Art eingetragen worden sind.

Die beiden Ellipsen haben, wie man sieht, die gleiche Excentricität, so dass die entwickelten Constructionen in einer gewissen Dualität zu einander stehen.

Man kann endlich auch die Formeln in ihrer Allgemeinheit beibehalten, wodurch beide Curven Ellipsen bleiben. Legt man der ersten bestimmte Achsen a und b bei, so ergibt sich wie früher aus der allgemeinen Gleichung

$$y^2 - y(1 + \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\sigma^2) + k^2 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\sigma^2 = 0$$

der Wurzelwert

$$\frac{A}{a} = \frac{\sqrt{1 + k \sin \sigma} + \sqrt{1 - k \sin \sigma}}{2 \cos \tfrac{1}{2}\sigma}$$

oder auch

$$\frac{A^2}{a^2} = 1 + \frac{\sqrt{1 - k^2 \cos \sigma^2}}{2 \cos \tfrac{1}{2}\sigma^2}$$

und ferner ist

$$\frac{B^2}{b^2} = \frac{1 + \sqrt{1 - k^2 \sin \sigma^2}}{\cos \sigma + \sqrt{1 - k^2 \sin \sigma^2}}$$

wie auch aus der Ellipsengleichung ohne Rechnung hervorgeht.

Aus diesen Relationen finden sich die Achsen der umschliessenden Ellipse, wodurch die Construction der Amplituden in vorhin angegebenem Sinne durchgeführt werden kann.

Die zuerst angegebene Methode ist die einfachere, da die Amplituden sofort in den Kreis eingetragen werden können. Durch goniometrische Zusammenziehung der Formeln kann die Construction der Achsen A, B ebenfalls erleichtert werden. Die bekannte Jacobi'sche Construction des Additionstheoremes findet in dem Vorstehenden ihr Analogon auf Ellipsen und Hyperbeln, je nachdem man das eine oder andere Zeichen von $\pm \Delta(\sigma)$ berücksichtigt. Sollen die Kegelschnitte confocal sein, so ist im ersten Falle die Excentricität der Ellipse durch den Modulus $k = \frac{c}{a}$, $k' = \frac{b}{a}$ bedingt, und da alsdann $A^2 - B^2 = c^2$ sein muss, so wird die Construction von B leicht, wenn A gefunden ist.

III.

Die folgenden Untersuchungen gehen von der transformirten Gleichung

$$a\sin\alpha\cos\varphi + b\cos\alpha\sin\varphi = \frac{ab}{R}$$

welche wir Anfangs aufgestellt haben, aus, um

$$\sin\varphi = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\varphi^2}{2}}, \quad \cos\varphi = \frac{1-\operatorname{tg}\frac{\varphi^2}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\varphi^2}{2}}$$

darin zu substitniren.

Das Resultat ist die Gleichung

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi^2(b+R\sin\alpha) - 2\frac{Rb}{a}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi + b - R\sin\alpha = 0$$

Wir beziehen dieselbe auch jetzt wieder auf die Gleichung

$$\cos\frac{\varphi_1}{2} \mp \sin\frac{\varphi_1}{2}\sin\frac{\varphi^2}{2}\,\Delta\left(\frac{\sigma}{2}\right) = \cos\frac{\sigma}{2}$$

$$\int \frac{d\frac{\varphi_1}{2}}{\Delta\frac{\varphi_1}{2}} \pm \int \frac{d\frac{\varphi_2}{2}}{\Delta\frac{\varphi_2}{2}} = \int \frac{d\frac{1}{2}\sigma}{\Delta\frac{1}{2}\sigma}$$

indem wir die Entwickelungen aus I. benntzen.

Znnächst hat man

$$b+y+(b-y)\Delta\sigma = \frac{2}{a}\sqrt{a^2y^2+b^2x^2}\,\cos\tfrac{1}{2}\sigma$$

worans

$$x^2.\frac{4b^2}{a^2}\cos\tfrac{1}{2}\sigma^2 + y^2(4\cos\tfrac{1}{2}\sigma^2 - (1-\Delta\tfrac{1}{2}\sigma)^2) - 2bk^2\sin\tfrac{1}{2}\sigma^2.y = b^2\left(1+\Delta\frac{\sigma}{2}\right)^2$$

Demnach gilt auch im gegenwärtigon Falle, worin anstatt φ die halbe Amplitudo vorkommt, die Gleichung eines Kegelschnitts, welcher indesson mit der 1. Ellipse nicht mehr concentrisch ist. Indem man also von einem beliebigeu Punkte desselben 2 Tangenten an die umschlosseue Ellipse zieht, geben die hierdurch bekannten excentrischen Winkel φ_1 nnd φ_2 diejenigen Amplitnden $\frac{1}{2}\varphi_1$ nnd $\frac{1}{2}\varphi_2$ an, welche der obigen Additionsgleichung genügen, sofern folgende Bedingungen erfüllt sind.

Die Gleichung des genannten Kegelschnitts ist:

$$\frac{x^2}{\frac{a^2(1+\Delta\frac{1}{2}\sigma)}{4\cos\frac{1}{2}\sigma^2-(1-\Delta\frac{1}{2}\sigma)^2}} + \frac{\left(y-\frac{bk^2\sin\frac{\sigma^2}{2}}{4\cos\frac{\sigma^2}{2}-\left(1-\Delta\frac{\sigma}{2}\right)^2}\right)}{\frac{4b^2\left(1-\Delta\frac{\sigma}{2}\right)^2\cos\frac{\sigma^2}{2}}{\left(4\cos\frac{\sigma}{2}^2-\left(1-\Delta\frac{\varrho}{2}\right)^2\right)^2}} = 1$$

oder abgekürzt

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{(y-m)^2}{B^2}=1$$

Wir führen ein

$$C^2 = B^2 - A^2$$

demnach hat man

$$C^2 = (1+\Delta)^2\,\frac{4\,c^2\cos\frac{\sigma^2}{2}-a^2(1-\Delta)^2}{\left(4\cos\frac{\sigma^2}{2}-(1-\Delta)^2\right)^2}$$

$$\frac{A^2}{B^2}=\frac{a^2}{4b^2}\,\frac{4\cos\frac{1}{2}\sigma^2-(1-\Delta)^2}{\cos\frac{1}{2}\sigma^2}$$

woraus

$$\frac{(1-\Delta)^2}{\cos\frac{1}{2}\sigma^2}=\frac{4(a^2B^2-b^2A^2)}{a^2B^2}.$$

Da nun aus

$$A^2=\frac{a^2(1+\Delta)^2}{4\cos\frac{1}{2}\sigma^2-(1-\Delta)^2}$$

folgt

$$\frac{(1+\Delta)^2}{\cos\frac{1}{2}\sigma^2}=\frac{4b^2}{B^2}\cdot\frac{A^4}{a^4}$$

so resultirt aus den letzten Formeln

$$\left(\frac{1-\Delta}{1+\Delta}\right)^2=\frac{a^2}{b^2}\,\frac{(a^2B^2-b^2A^2)}{A^4}$$

$$\Delta=\frac{A^2b-a\sqrt{a^2B^2-b^2A^2}}{A^2b+a\sqrt{a^2B^2-b^2A^2}}$$

Daher ergibt sich aus

$$\cos\tfrac{1}{2}\sigma=\tfrac{1}{2}\,\frac{B}{b}\cdot\frac{a^2}{A^2}(1+\Delta$$

unter Einführung des Wertes von Δ

$$\cos\tfrac{1}{2}\sigma=\frac{a^2B}{A^2b+a\sqrt{a^2B^2-b^2A^2}}$$

Wird endlich noch

$$\frac{2bA^2}{Ba^2}\cos\tfrac{1}{2}\sigma - 1 = \Delta$$

quadrirt und $\cos\sigma$ der obigen Formel darin substituirt, so resultirt

$$k^2 = \frac{4ab\,A^2\sqrt{a^2B^2 - b^2A^2}}{(A^2b + a\sqrt{a^2B^2 - b^2A^2})^2 - a^4B^2}$$

oder auch

$$k^2 = \frac{4ab\sqrt{a^2B^2 - b^2A^2}}{A^2b^2 + 2ab\sqrt{a^2B^2 - b^2A^2} - a^2b^2}.$$

Bei Benutzung der bisherigen Formeln folgt für m endlich noch

$$m = \frac{\sqrt{a^2B^2 - b^2A^2}}{a},$$

wodurch alles gegeben ist.

Wir wollen die sich hier darbietende Gelegenheit benutzen, die obigen Integrale mit den aus der Pendelbewegung in Verbindung zu bringen. Demnach sind in dem Zeitintegral

$$t = m\int \frac{d\tfrac{1}{2}\varphi}{\sqrt{1 - \frac{2a}{h}\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2}}$$

die Constanten und Amplituden den obigen gleich zu setzen.

Wie bekannt, ist a der Kreisradius, oder die Pendellänge und h die vom tiefsten Punkte an genommene Geschwindigkeitshöhe $\frac{v^2}{2g}$, welche grösser, gleich und kleiner als $2a$ sein kann. Also folgt durch Gleichsetzen der beiden Moduli unter der Voraussetzung, dass $a = b$:

$$\frac{2a}{h} = \frac{4aC}{A^2 + 2aC - a^2}$$

woraus

$$h = \frac{B^2 - (C-a)^2}{2C}$$

Ferner ist

$$\cos\frac{\sigma}{2} = \frac{aB}{A^2 + aC}$$

Die Relation

$$\int \frac{d\tfrac{1}{2}\varphi_1}{\Delta\tfrac{1}{2}\varphi_1} + \int \frac{d\tfrac{1}{2}\varphi_2}{\Delta\tfrac{1}{2}\varphi_2} = \int \frac{d\tfrac{1}{2}\sigma}{\Delta\tfrac{1}{2}\sigma}$$

geht nun in

$$t_1 + t_2 = t$$

über, wonach die Tangenten von jedem Punkte der den Kreis umschliessenden oder schneidenden Ellipse auf dem Kreise Bogen gleicher Zeitdauer begrenzen.

Wählt man die Geschwindigkeitshöhe vom Kreismittelpunkt an, setzt demnach

$$H = h - a,$$

so wird die obige Bedindungsgleichung einfacher

$$H = \frac{A^2 - a^2}{2C}$$

welche H auf's einfachste constructiv bestimmt.

Wir fassen das Entwickelte, wie folgt, zusammen:

Man zeichne eine Ellipse

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

und zwar so, dass B grösser als A sei; um den oberu Brennpunkt C, welcher also in der B-Achse liegt, construire man einen kleinen Kreis vom Radius a.

In diesem Kreise lassen wir einen schweren Punkt oscilliren und bestimmen seine Geschwindigkeitshöhe nach der Formel

$$H = \frac{A^2 - a^2}{2C}$$

Auf der Ordinate des Brennpunktes lässt sich eine Strecke

$$FG = \sqrt{A^2 - a^2}$$

ohne weiteres auftragen, verbindet man nun G mit dem zweiten Brennpunkt F', und zieht die auf GF' senkrecht stehende GH bis zum Durchschnitt mit der verticalen B-Achse, so ist FH die Geschwindigkeitshöhe des schweren Punktes im Kreis, und die Ellipse hat die schon genannte Eigenschaft, dass die von jedem ihrer Punkte an den Kreis gezogenen beiden Tangenten Bogen des Kreises einschliessen, welche der schwere Punkt stets in derselben Zeit durchläuft.

In Bezug auf Oscillationen können wir anstatt der Geschwindigkeitshöhe auch den Winkel α einführen, der dem Kreispunkt entspricht, wo die Bewegung von der Ruhe aus beginnt. Diesen Winkel können wir mit σ durch die Gleichung $\alpha = \sigma$ in Beziehung bringen, Man bemerke, dass, wenn eine der obigen Tangenten horizontal also senkrecht zur B-Achse ist, die andere den Winkel σ bestimmt.

Man findet leicht

$$\sin\tfrac{1}{2}a^2 = \frac{B^2-(C-a)^2}{4aC}$$

oder

$$\frac{A^2}{a^2}+\frac{2C}{a}\cos a = 1$$

und ferner ist

$$\cos\frac{a}{2} = \frac{\frac{B}{a}}{\frac{A^2}{a^2}+\frac{C}{a}}$$

Die Elimination von a ergiht aus der entsprechenden Gleichung eine Wurzel

$$a = \frac{A^2}{C}$$

demnach ist

$$\cos\frac{a}{2} = \frac{B}{2C}$$

Bei diesem Fall der Bewegung schneidet die Ellipse den Kreis, und das Kriterium der Oscillationen hasirt auf der Ungleichung

$$a > B-C$$

während hei vollen Umläufen

$$a < B-C$$

ist. Der Kreis liegt dann ganz im Innern der Ellipse. Wenn aber

$$a = B-C$$

tst, so herühren sie sich von innen und die entsprechende Bewegung geht in die asymtotische über, wonach der schwere Punkt den obereu Kreispunkt erst nach unendlicher Zeit erreicht.

Um nun auch für die Parabel die entsprechenden Verhältnisse aufzustellen, erinnern wir daran, dass der Parameter p der Ellipse durch

$$p = \frac{A^2}{B}$$

ausgedrückt wird, daher geht die Formel

$$H = \frac{A^2-a^2}{2C}$$

in $H = q$ über.

Will man die directen Formeln benutzen, so ist zu setzen (siehe oben)

$$\frac{q}{a} = \frac{2 - k^2}{k^2}, \quad k^2 = \frac{2a}{h}$$

also ist

$$h = a + q \quad \text{oder} \quad H = q$$

woraus folgt, dass bei der Parabel die Geschwindigkeitshöhe stets den Scheitelpunkt der Parabel zur obern Grenze hat.

Wie bei der Ellipse, so schliessen auch bei der Parabel die von ihr an den Kreis gezogenen Tangenten Bogen gleicher Zeitdauer ein.

Es braucht wol kaum der Bemerkung, dass das Vorstehende auch auf die Hyperbel Anwendung findet. Setzt man die B-Achse vertical voraus, und zeichnet um den untern Brennpunkt den Kreis, so geht aus der Formel

$$h = \frac{(C+a)^2 - B^2}{2C}$$

die Bemerkung hervor, dass für

$$a \gtreqless C - B$$

wonach der Kreis den untern Zweig der Hyperbel entweder schneidet oder ihn berührt, oder nicht berührt, die Bewegungen entsprechend oscillatorisch, oder asymptotisch, oder circulär wird.

Nehmen wir an, dass der Kegelschnitt den Kreis ohne Berührung einschliesst, und ziehen von einem Punkte A des erstern eine Tangente APB an den letztern bis zum Durchschnitt B des Kegelschnitts, von B wiederum eine Tangente $BP'C$ an den Kreis, vom Schnittpunkt C von neuem eine dritte Tangente und so fort und bezeichnen die Berührungspunkte t mit $PP_1P_2 \ldots P_n$, so wird, wenn bei dieser Tangentenziehung die Punkte PP_1P_2 in bestimmten regelmässigen Zeitintervallen auf einander folgen, der hiermit gleichsinnig im Kreise sich bewegende schwere Punkt der Reihe nach mit diesen Berührungspunkten zusammenfallen. Letztere schreiten also mit dem schweren Punkte gleichförmig fort.

In bestimmten Fällen, die wir gleich noch in Kürze darlegen wollen, kann P_n mit P zusammenfallen, was nach einmaligem oder mehrmaligem Umlauf geschehen kann. Die Tangentenfolge schliesst sich demnach zu einem Polygon, dessen Existenz an bestimmte aus den Constanten der Kegelschnittsgleichung abzuleitende Bedingungen geknüpft ist.

Aus dieser Gleichung ersieht man, dass sie, wie schon gezeigt, alle Fälle, also Ellipse, Parabel und Hyperbel umfasst, da der Coefficient $4\cos\frac{1}{2}\sigma^2-(1-\Delta\frac{1}{2}\sigma)^2$ entweder kleiner, gleich oder grösser als Null sein kann. Eine grössere Einfachheit erzielt man in den Formeln, wenn $a=b$ oder $A=B$ angenommen wird. Da

$$\tfrac{1}{2}\sigma=\operatorname{am}\frac{2}{n}K$$

so ist für das Dreieck, also $n=3$, die Bedingung

$$A^4b^2-a^2(a^2B^2-b^2A^2)=2a^2bA^2B$$

zu erfüllen.

Soll das Polygon ein Viereck sein, so hat man die einfache Relation

$$\operatorname{dn}\frac{K}{2}=\sqrt{k'}$$

zu benutzen, und setzt man noch $a=b$, so ist

$$\operatorname{dn}\frac{K}{2}=\frac{A^2-aC}{A^2+aC}=\sqrt{k'}$$

$$k^2=\frac{4aC}{A^2+2aC-a^2}$$

Die Bedingung wird also

$$\left(\frac{A^2-aC}{A^2+aC}\right)^4+\frac{4aC}{A^2+2aC-a^2}=1$$

Die übrigen Fälle werden formell etwas complicirter.

Für die Hyperbel hat man $-A^2$ statt A^2 zu setzen und zu beachten, dass je nach der Lage des Vielecks der eine oder auch beide Aeste der Curve zur Verwendung kommen.

Wie man sieht, geht die Gleichung für

$$4\cos\tfrac{1}{2}\sigma^2=(1-\Delta\tfrac{1}{2}\sigma)^2$$

in die einer Parabel über:

$$\frac{4b^2}{a^2}\cos\tfrac{1}{2}\sigma^2.x^2=2bk^2\sin\tfrac{1}{2}\sigma^2.y+b^2(1+\Delta\tfrac{1}{2}\sigma)^2$$

Aus der Bedingungsgleichung folgt, dass die Amplitude σ vom Modulus k abhängt, denn es ergibt sich

$$\cos\tfrac{1}{2}\sigma=\frac{k^2}{4-k^2},\quad \sin\tfrac{1}{2}\sigma^2=\frac{8(2-k^2)}{(4-k^2)^2},\quad \Delta\tfrac{1}{2}\sigma=\frac{4-3k^2}{4-k^2}$$

Die Parabelgleichung wird also zur folgenden

$$x^2 = \frac{4a^2}{b} \cdot \frac{2-k^2}{k^2}\left(y + \frac{2-k^2}{k^2} \cdot b\right)$$

Bezeichnen wir den Parameter mit $p = 2q$, so ist, wenn

$$m = \frac{2-k^2}{k^2} b$$

$$q = \frac{a^2}{b} \cdot \frac{2-k^2}{k^2}$$

die Gleichung auch

$$x^2 = 4q(y+m)$$

wo

$$\frac{m}{q} = \frac{b^2}{a^2}$$

Für den Kreis ist sehr einfach

$$x^2 = 4q(y+q)$$

demnach fällt das Kreiscentrum in den Brennpunkt der Parabel.

Für das Dreieck erhält man nach der Formel

$$\frac{1}{\mathrm{cn}\frac{2}{3}K} - \frac{1}{\mathrm{dn}\frac{2}{3}K} = 1$$

$$\frac{1}{4-k^2} + \frac{1}{4-3k^2} = 1$$

woraus

$$k^2 = \frac{12-4\sqrt{2}}{7}$$

Die Anwendung der allgemeinen Formeln auf 4, 5 und n Ecke, welche der einen Curve ein-, der andern umgezeichnet sind, hat nach dem Vorstehenden keine Schwierigkeiten mehr, weshalb wir auf weitere Erörterungen dieser Verhältnisse nicht weiter hier eingehen. Dagegen bemerken wir im Anschluss an früheres noch folgendes:

Führt man in

$$a\,\mathrm{tg}\,\varphi^2 + b\,\mathrm{tg}\,\varphi + c = 0$$

die Relation

$$\mathrm{tg}\,2\varphi = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\varphi}{1-\mathrm{tg}\,\varphi^2}$$

ein, so folgt

$$((a+c)^2 - b^2)\,\mathrm{tg}\,2\varphi^2 + 2b(a-c)\,\mathrm{tg}\,2\varphi + 4ac = 0$$

Aehnlich wie im Vorigen die halbe Amplitude gewählt werden konnte, so steht jetzt die doppelte zur Verfügung, so dass die Fundamentalrelation nun in die folgende

$$((a+c)^2-b^2)+4ac\,\Delta\sigma=((a-c)^2+b^2)\cos\sigma$$

transformirt wird. Indem wir nun die Constanten der genannten Gleichung hier einführen und die Bedingungsgleichung für das Additionstheorem gehörig ordnen, resultirt eine Curve 4. Grades

$$\frac{x^4}{a^4}+\frac{2(\Delta\sigma-\cos\frac{1}{2}\sigma^2)}{\sin\frac{1}{2}\sigma^2}\,\frac{x^2y^2}{a^2b^2}+\frac{y^4}{b^4}-\frac{2(1+\Delta\sigma)}{\sin\frac{1}{2}\sigma^2}\,\frac{x^2}{a^2}-\frac{2(1+\Delta\sigma)}{\sin\frac{1}{2}\sigma^2}\,\frac{y^2}{b^2}+\frac{2(1+\Delta\sigma)}{\sin\frac{1}{2}\sigma^2}=0$$

welche die Eigenschaft besitzt, dass die von jedem ihrer Punkte an die Ellipse gezogenen Tangenten in ihren den Berührungspunkten entsprechenden concentrischen Winkeln $\varphi_1\,\varphi_2$ der Relation

$$\int\frac{d2\varphi_1}{\Delta(2\varphi_1)}+\int\frac{d2\varphi_2}{\Delta(2\varphi_2)}=\int\frac{d\sigma}{\Delta\sigma}$$

genügen.

IV.

Um noch einige analoge Verhältnisse zu discutiren, verlegen wir den Anfangspunkt der Coordinaten in einen Brennpunkt des Kegelschnitts, bezeichnen die Polarcoordinaten des Punktes, von welchem Tangenten zur Curve gezogen werden, mit $R(\alpha)$ und die bezüglichen Polarwinkel der Berührungspunkte mit Θ und Θ', dieselben bestimmen sich aus der folgenden Gleichung

$$\left(\frac{p}{R}+e\cos\alpha\right)^2-\sin\alpha^2\Big)\operatorname{tg}\Theta^2-\sin 2\alpha.\operatorname{tg}\Theta+\left(\frac{p}{R}+e\cos\alpha\right)^2-\cos\alpha^2=0$$

darin bedeuten p und e bezüglich Parameter und numerische Excentricität.

Wie früher verbinden wir die als Amplituden aufgefassten Wurzeln Θ mit der Relation

$$\int\frac{d\Theta}{\sqrt{1-k^2\sin\Theta^2}}\pm\int\frac{d\Theta_1}{\sqrt{1-k^2\sin\Theta^2}}=\int\frac{d\sigma}{\sqrt{1-k^2\sin\sigma^2}}$$

und führen in der damit verknüpften Fundamentalrelation

$$\cos\Theta\cos\Theta' \mp \sin\Theta\sin\Theta'\Delta(\sigma) = \cos\sigma$$

die aus der ersten Gleichung sich ergebenden Werte von $\cos\Theta\cos\Theta'$ etc. ein, man findet

$$\left(\frac{p}{R}+e\cos\alpha\right)^2 - \sin\alpha^2 - \left(\left(\frac{p}{R}+e\cos\alpha\right)^2 - \cos\alpha^2\right)\Delta\sigma = \cos\sigma$$

Wir setzen

$$R\cos\alpha = x, \quad R\sin\alpha = y$$

wodurch man erhält

$$x^2(e^2(1+\Delta\sigma)+\Delta\sigma+\cos\sigma)-y^2(1+\cos\sigma)+2pe(1+\Delta\sigma)x+p^2(1+\Delta\sigma) = 0$$

Für die Hyperbel besteht die Formel

$$x^2\left(\frac{\Delta\sigma-\cos\sigma}{1-\Delta\sigma}+e^2\right) - y^2\frac{1+\cos\sigma}{1-\Delta\sigma} + 2pex + p^2 = 0$$

für die Ellipse

$$x^2\left(\frac{\Delta\sigma+\cos\sigma}{1+\Delta\sigma}-e^2\right) + y^2\frac{1+\cos\sigma}{1+\Delta\sigma} - 2pex - p^2 = 0$$

Letzte Gleichung schreiben wir

$$\left(x - \frac{pe}{\frac{\Delta\sigma+\cos\sigma}{1+\Delta\sigma}-e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{\frac{1+\Delta\sigma}{1+\cos\sigma}\left(\frac{\Delta\sigma+\cos\sigma}{1+\Delta\sigma}-e^2\right)} = \frac{p^2}{\frac{1+\Delta\sigma}{\Delta\sigma+\cos\sigma}\left(\frac{\Delta\sigma+\cos\sigma}{1+\Delta\sigma}-e^2\right)^2}$$

die definitive Form der Gleichung

$$\frac{\left(x-\frac{pe}{\frac{\Delta\sigma+\cos\sigma}{1+\Delta\sigma}-e^2}\right)^2}{\frac{p^2(\Delta\sigma+\cos\sigma)}{(1+\Delta\sigma)\left(\frac{\Delta\sigma+\cos\sigma}{1+\Delta\sigma}-e^2\right)^2}} + \frac{y^2}{\frac{p^2(\Delta\sigma+\cos\sigma)}{(1+\cos\sigma)\left(\frac{\Delta\sigma+\cos\sigma}{1+\Delta\sigma}-e^2\right)}} = 1$$

Schreiben wir dieselbe

$$\frac{(x-m)^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2} = 1$$

so erhalten wir wie früher einen Kegelschnitt als geometrischen Ort der Schnittpunkte derjenigen Tangenten, deren Polarwinkel der Definitionsgleichung genügen.

Es ist nnn

$$A^2 = \frac{p^2(\Delta\sigma + \cos\sigma)}{(1+\Delta\sigma)\left(\frac{\Delta\sigma+\cos\sigma}{1+\Delta\sigma} - e^2\right)^2}$$

$$B^2 = \frac{p^2(\Delta\sigma + \cos\sigma)}{(1+\cos\sigma)\left(\frac{\Delta\sigma+\cos\sigma}{1+\Delta\sigma} - e^2\right)}$$

$$m = \frac{pe}{\frac{\Delta\sigma+\cos\sigma}{1+\Delta\sigma} - e^2}$$

Die Amplitnde lässt sich anf folgendem Wege ermittein. Nehmen wir $x = a + c$, so verschwindet für diese Abscisse eine Ampliitnde Θ, wodurch die andere zn σ wird. Entwickelt man y, so findet sich

$$y = a(1+e)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\sigma = (a+c)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\sigma$$

Damit ist die gesnchte Amplitnde σ leicht geometrisch bestimmbar.

Wir geben noch diejenigen analytischen Verhältnisse an, welche dnrch Combiniren der letzten Formeln hervorgehen. Um zunächst eine Verbindnng zwischen A nnd m abznleiten, führen wir

$$\frac{\Delta\sigma+\cos\sigma}{1+\Delta\sigma} - e^2 = \frac{pe}{m}$$

in A^2 ein, nnd erhalten zunächst

$$A^2 = \frac{p^2(\Delta\sigma+\cos\sigma)m^2}{(1+\Delta\sigma)p^2e^2}$$

nnd da

$$\frac{\Delta\sigma+\cos\sigma}{1+\Delta\sigma} - e^2 + \frac{pe}{m}$$

so wird

$$A^2 = m^2 + p\frac{m}{e}$$

die gesnchte einfache Relation. Vermittelst dieser kann bei gegebenen A die Abscisse m des Mittelpnnktes der zweiten Ellipse leicht bestimmt werden.

Führen wir in der Formel für $\frac{pe}{m}$ B^2 ein, so folgt znnächst

$$B^2 = p^2\frac{(\Delta\sigma+\cos\sigma)m}{(1+\cos\sigma)pe} \quad \text{oder} \quad \frac{B^2e}{pm} = \frac{\Delta\sigma+\cos\sigma}{1+\cos\sigma}$$

Aus

$$A^2 = \frac{(\Delta\sigma + \cos\sigma)m^2}{(1+\Delta\sigma)e^2}$$

folgt aber

$$\Delta\sigma\left(\frac{e^2A^2}{m^2} - 1\right) = \cos\sigma - \frac{e^2A^2}{m^2}$$

Die Elimination von $\Delta\sigma$ aus den letzten Formeln führt nun auf

$$\frac{B^2e}{pm}(1+\cos\sigma) = \cos\sigma + \frac{\cos\sigma - \frac{e^2A^2}{m^2}}{\frac{e^2A^2}{m^2} - 1}$$

woraus

$$B^2 = \frac{pme\,A}{m^2 - A^2e^2}\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\sigma^2$$

$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\sigma^2 = \frac{B^2}{A^2}\,\frac{m^2 - A^2e^2}{pme}$$

$$\cos\sigma = \frac{A^2pme + A^2B^2e^2 - m^2B^2}{A^2pme - A^2B^2e^2 + m^2B^2}$$

Substituiren wir diesen Wert von $\cos\sigma$ in

$$\cos\sigma - \frac{e^2A^2}{m^2} = \Delta\sigma\left(\frac{e^2A^2}{m^2} - 1\right)$$

so resultirt

$$\Delta\sigma = \frac{-A^2pme + A^2B^2e^2 + m^2B^2}{A^2pme - A^2B^2e^2 + m^2B^2}$$

und endlich ergibt sich hieraus der Modulus k, wenn wir in

$$\Delta\sigma = \sqrt{1 - k^2\sin\sigma^2}$$

$\sin\sigma$ durch $\cos\sigma$ nach einer der obigen Formel bestimmen, nämlich

$$k^2 = \frac{m}{p}\,\frac{B^2e - pm}{A^2e - m^2}$$

Damit ist auch der Modulus des Integrals durch die Achsen der Kegelschnitte und m bekannt, dasselbe gilt bezüglich der Functionen von σ. Ist dagegen σ und k als gegeben vorausgesetzt, so werden die gesuchten Achsen A und B durch die Formeln für A^2 und B^2 und die Entfernung des Mittelpunktes des zweiten vom Brennpunkt des ersten durch die Formel für m ermittelt.

Die Anwendung der entwickelten Formeln auf ein- und unbe-

schriebene Vielecke ist nun keinen Schwierigkeiten unterworfen, wenn man die Gleichungen in der folgenden Fassung aufstellt:

$$\operatorname{cn}\frac{4K}{n} = \frac{A^2pmc + A^2B^2e^2 - m^2B^2}{A^2pmc - A^2B^2e^2 + m^2B^2}$$

$$\operatorname{du}\frac{4K}{n} = \frac{-A^2pmc + A^2B^2e^2 + m^2B^2}{+A^2pmc - A^2B^2e^2 + m^2B^2}$$

$$k^2 = \frac{m}{p}\,\frac{B^2e - pm}{A^2e^2 - m^3}$$

$$A^2 = m^2 + \frac{pm}{e}$$

Für das Viereck hat man demnach

$$\operatorname{cn}\frac{4K}{n} = 0, \quad \text{d. i.}$$

$$A^2pmc + A^2B^2e^2 = m^2B^2$$

als Bedingungsgleichung zwischen den Achsenverhältnissen der beiden Ellipsen. Die Relationen werden einfacher, wenn Bedingungen eingeführt werden, z. B. dass

$$\frac{c}{a} = \frac{C}{A}$$

also die Excentricitäten gleich seien. Für $e \gtrless 1$ wird die 2. Curve zur Hyperbel, da B^2 und in Folge dessen m negativ wird.

Die einfachste Gestalt gewinnen die Relationen für $k = 0$.

Es wird nämlich

$$\frac{B^2}{b^2} = \frac{m}{c}$$

$$A^2 = m^2 + \frac{b^2}{c}m$$

also

$$A_e^2 = m^2 + B^2$$

woraus sich ergibt, dass m zur linearen Excentricität der zweiten Ellipse wird, zwei Brennpunkte fallen demnach aufeinander, und endlich ist

$$\operatorname{tg}\frac{\pi^2}{n} = \frac{b^2}{c}, \frac{m-c}{mc+b^2}$$

Liegt demnach eine Ellipse mit den Halbachsen a und b vor,

so construire man eine zweite so, dass 2 Brennpunkte aufeinander fallen. Bezeichnet man die Entfernung dieses Brennpunktes vom Mittelpunkte der 2. Ellipse mit m, so ergibt sich vermittelst der ersten der obigen Formeln die Halbachse B. Tangenten von einem Punkte der 2. Ellipse an die erste gezogen, bestimmen auf letzter 2 Polarwinkel Θ, deren Summe $\Theta + \Theta_1$ eine constante Grösse σ ist, welche durch die Formel

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\sigma^2 = \frac{b^2}{c} \frac{m-c}{mc+b^2}$$

gefunden wird.

Man kann übrigens über m willkürlich verfügen und etwa annehmen, dass

$$m = 2\sigma$$

sei. Dadurch erhält man

$$B^2 = 2b^2,$$

$$\cos\sigma = \frac{c^2}{a^2} = e^2$$

und die lineare Exentricität der 2. Ellipse ist der doppelten der ersten gleich.

Man kann ferner

$$m = a + c$$

setzen, woraus

$$\cos \tfrac{1}{2}\sigma^2 = \frac{c}{a}$$

folgen würde.

Fährt man in der Tangentenziehung fort und setzt voraus, dass das Polygon sich schliesst, so erhält man für den allgemeinern Fall, wonach also beide Curven einen Brennpunkt gemeinsam haben, die Formel

$$\operatorname{tg} \frac{\pi^2}{n} = \frac{b^2}{c} \frac{m-c}{mc+b^2}$$

Für das Dreieck, welches der 1. Ellipse um-, der 2. einbeschrieben ist, folgt aus der letzten Relation wegen $n = 3$

$$3 = \frac{b^2}{c} \frac{m-c}{mc+b^2}$$

für das Viereck

$$1 = \frac{b^2}{c} \frac{m-c}{mc+b^2}$$

für das Sechseck

$$\frac{1}{3} = \frac{b^2}{c} \frac{m-c}{mc+b^2}$$

u. s. w.

Wir schliessen mit diesen Entwickelungen vorläufig ab, da die Methode, deren wir uns in den vorliegenden Untersuchungen bedient haben, hinlänglich klar erscheint, um auf diesem Wege fortzufahren und neue Beziehungen aufzufinden. Auch das Gegebene ist noch einer weitern Durchbildung fähig, indem wir uns im Vorstehenden darauf beschränken, nur die allgemeinen Züge mit dem Hinweis auf ihre Erweiterung anzudeuten, deren Durchführung wir hiermit dem Leser anheimstellen.

Emmerich, im September 1884.

XII.

Miscellen.

1.

Berichtigende Notiz zum Aufsatz I.

Beirrt durch den Titel des Werks „van Swindens Elemente der Geometrie, aus dem Holländischen übersetzt und vermehrt von C. F. A. Jacobi, Professor an der Landesschule Pforta“ herausgegeben 1834, war ich der Meinung, dass der im genannten Werke pag. 339 eingeführte Winkel A', welches der Brocard'sche Winkel ist, von van Swinden herrührt. Herr Professor Uhlich in Grimma, welcher den Untersuchungen über diesen Gegenstand gefolgt ist und auch historische Studien darüber gemacht hat, die er z. B. in seiner Programmarbeit 1886. „Altes und Neues von den merkwürdigen Punkten des Dreiecks“ dargelegt hat, berichtet diesen Punkt.

Hiernach hat Crelle bereits 1816 diesen Winkel betrachtet, so dass demselben wol die Priorität gebührt. C. F. A. Jacobi hat die Untersuchungen darüber fortgeführt. Dass dieselben für anregend gehalten wurden, beweisen 3 Abhandlungen von Wiegand, Emsman, Hellwig, in denen manche der neuerdings angegebenen Sätze über diesen Gegenstand bereits enthalten sind.

Dass die Litteratur über diesen Gegenstand in Frankreich und England viel bedeutender ist als in Deutschland, liegt sicherlich mehr in äussern Verhältnissen, ist aber wol nicht zu läugnen. Es scheint der Grund dafür zu sein, dass den Verfassern solcher Artikel mehr Gelegenheit zur Verbreitung derselben geboten wird.

W. Fuhrmann.

2.

Bemerkung zum Aufsatz IV.

Mit Bezugnahme auf den Aufsatz: „Ueber Triederschnitte u. s. w." in Heft 1. Band 6. dieser Zeitschrift sei hier noch die einfache Beziehung erwähnt. welche zwischen dem Schwerpunkte des Triederschnittes und dem Mittelpunkte der Umkugel des durch den Triederschnitt hervorgerufenen Tetraeders stattfindet. Da dieser Mittelpunkt (x_0, y_0, z_0) der Scheitel eines Polartrieders ist, welcher die vom Triederscheitel ausgehenden Tetraederkanten halbirt, so erhält man nämlich

$$\frac{t}{2} - \frac{3\xi}{2} = x_0 + y_0 \cos\gamma + z^0 \cos\beta$$

$$\frac{u}{2} - \frac{3\eta}{2} = x_0 \cos\gamma + y_0 + z_0 \cos\alpha$$

$$\frac{v}{2} - \frac{3\zeta}{2} = x_0 \cos\beta + y_0 \cos\nu + z_0 \text{ *)}$$

und insbesondere für die rechtwinkligen Trieder

$$\xi = 2/3\, x_0, \quad \eta = 2/3\, y_0, \quad \zeta = 2/3\, z_0$$

Die Subsitution dieser Ausdrücke in die Gleichungen der Schwerpunktsörter liefert die Oerter für den Kugelmittelpunkt.

Es möge hier noch die Berichtigung zweier Versehen folgen. Auf der letzten Seite des obengenannten Aufsatzes muss im 2. Beispiel

$$\frac{2}{3a}\sqrt[3]{a\xi^2} \text{ statt } \frac{2}{3}\sqrt[3]{a\xi^2}$$

u. s. w. stehen, woraus

$$\frac{\xi}{a} = \frac{\eta}{b} = \frac{\zeta}{c}$$

und durch Substitution in die Flächengleichung:

---

*) Die Umkehrung ergibt:

$$x_0 = \frac{3}{2\sin^2\alpha \sin^2\beta \sin^2\gamma}(\xi \sin\beta - \eta \cos b \sin\gamma - \zeta \cos a \sin\alpha)$$

$$y_0 = \frac{3}{2\sin^2\alpha \sin^2\beta \sin\gamma}(-\xi \cos b \sin\beta + \eta \sin\gamma - \zeta \cos a \sin\alpha)$$

$$z_0 = \frac{3}{2\sin^2\alpha \sin^2\beta \sin\alpha}(-\xi \cos c \sin\beta - \eta \cos b \sin\gamma + \zeta \sin\alpha)$$

wo a, b, c die Flächenwinkel des Trieders bedeuten.

$$\xi = \left(\frac{1}{3}\right)^{3/2}.a, \quad \eta = \left(\frac{1}{3}\right)^{3/2}.b, \quad \zeta = \left(\frac{1}{3}\right)^{3/2}.c$$

so dass für v der weit einfachere Ausdruck $\frac{abc \sin\gamma \sin i}{k\sqrt{3}}$ sich ergibt. In der vorletzten Zeile muss es ferner $\sqrt[4]{4/3}$ st. $\sqrt[4]{2/3}$ und deshalb in der letzten $\sqrt[4]{12}$ st. $\sqrt[4]{2/3}$ heissen.

O. Bermann.

3.

Zur Theorie der harmonischen Reihe (Fortsetzung).

5. Der Gedanke, die Vorzeichen der Glieder einer Reihe gruppenweise umzukehren und die so entstehende Reihe zu summiren, ist nicht neu. Herr Unferdinger hat die wichtigsten Potenzreihen in dieser Weise mit Hülfe von Integrationen einzeln behandelt [1]) nach ihm hat Herr Mildner die Aufgabe allgemein, für beliebige Potenzreihen von bekannter Summe, gelöst [2]). Wo daher die Specialisirung von Potenzreihen für $x = 1$ harmonische Reihen erzeugt, müssen die oben gegebenen Ergebnisse mit denjenigen der genannten Arbeiten übereinstimmen. Dieser Fall tritt ein für die Reihen

$$-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots$$

und

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \cdots$$

oder

$$\tfrac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \cdots$$

die den Anwendungen in 3. und 4. entsprechen.

---

1) Die Summe der Logarithmus- und Arctang-Reihe (sowie der Reihen für $\sin x$, $\cos x$ und e^x) mit alternirenden Zeichengruppen. Sitzgsberichte d. Wiener Akad. 1867. Bd. 55. II. S. 75 und Bd. 56. II. S. 257.

2) Ueber Ableitung neuer unendlicher Reihen aus einer gegebenen durch Umstellung (soll wol heissen „Umkehrung“) der Vorzeichen nach einem bestimmten Gesetze. Ebendaselbst. 1882. Bd. 86 S. 999.

Die Formeln für $\sigma(1)$ und $\sigma(\frac{1}{2})$ finden sich übrigens nur bei Mildner, in zwar auch elementärer, aber von der hier gegebenen gänzlich verschiedener Herleitung, und zwar hat die erstere Formel, abweichend von unserer Gleichung (III.) die Gestalt:

$$\sigma(1) = \frac{1}{p}\log 2 + \frac{\pi}{p^2} \sum_{0}^{\frac{p-1}{2}} (p-2k-1)\operatorname{tg}\frac{p-2k-1}{2p}\pi \quad \text{für gerade } p,$$

$$= \frac{1}{p}\log 2 + \frac{2\pi}{p^2} \sum_{1}^{\frac{p-1}{2}} k.\operatorname{tg}\frac{k\pi}{p} \quad \text{für ungerade } p$$

Durch Vergleichung dieser Ausdrücke mit den unsrigen ergeben sich, nach einigen leichten Umformungen, die merkwürdigen Formeln:

$$\text{(V)} \quad \text{a)} \quad \sum_{1}^{n} (2k-1)\operatorname{tg}\frac{2k-1}{4n}\pi = n + 2n \sum_{1}^{n-1} \frac{1}{\sin\frac{k\pi}{2n}}$$

$$\text{b)} \quad \sum_{1}^{n-1} k \,.\, \operatorname{tg}\frac{k\pi}{2n-1} = \frac{2n-1}{2} \sum_{1}^{n-1} \frac{1}{\sin\frac{k\pi}{2n-1}}$$

Ein directer Beweis derselben scheint schwierig zu sein.

6. Man könnte versucht sein, die Aufgabe allgemeiner so zu fassen, dass die Anzahl der negativ genommenen Glieder von der positiven verschieden, etwa gleich q, gewählt wird. Man überzeugt sich aber leicht, dass in diesem Falle stets eine divergente Reihe entsteht. In der Tat wäre dann die Summe der ersten $(p+q)n$ Glieder

$$\begin{aligned}\sigma_{(p+q)n}(z) &= (h_0 + h_1 + \ldots + h_{p-1}) - (h_p + \ldots h_{p+q-1}) + - \ldots \\ &\quad + (h_{(n-1)(p+q)} + \ldots + h_{np+(n-1)q-1}) - (h_{np+(n-1)q} \\ &\qquad + \ldots + h_{n(p+q)-1} \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \{h_k + h_{k+(p+q)} + \ldots + h_{k+(n-1)(p+q)}\} - \sum_{k=p}^{p+q-1} \\ &\qquad \{\text{über dieselben Glieder}\} \\ &= -\sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{p+q} S_{n-1}\left(\frac{z+k}{p+q}\right) - \sum_{k=p}^{p+q-1} \frac{1}{p+q} S_{n-1}\left(\frac{z+k}{p+q}\right)\end{aligned}$$

also

$$(p+q)\,\frac{\sigma(z)}{(p+q)n} = \sum_{k=0}^{p-1} C_{n-1}\left(\frac{z+k}{p+q}\right) - \sum_{k=p}^{p+q-1} C_{n-1}\left(\frac{z+k}{p+q}\right)$$
$$+ \sum_{k=0}^{p-1} \log\left(n-1+\frac{z+k}{p+q}\right) - \sum_{k=0}^{q-1} \log\left(n-1+\frac{z+k+p}{p+q}\right)$$

Die beiden ersten Summen bleiben für $n = \infty$ endlich; die beiden letzten aber haben bzhw. p und q Glieder, deren jedes unendlich wird wie $\log n$; die Differenz wird daher immer unendlich, so oft p und q verschieden sind, verschwindet dagegen, wenn $p = q$, in welchem Falle die letzte Gleichung in Formel I. übergeht.

Heinrich Simon.

In vorstehendem Aufsatze bitten wir folgende Druckfehler zu berichtigen.

S. 105	Z. 11	v. unt.	statt	Abhandlung	setze	Behandlung
„ 106	„ 3	„	„	$c \lim_{n=\infty}$	„	$c = \lim_{n=\infty}$
	„ 15	„	Gl. (6) unter Σ statt $k-1$ setze $k=1$			
			zwischen Gl. (6) und (6a) fehlt die Zeile: deren zweite sich noch auf die Form bringen lässt:			
S. 107	Z. 10	v. unt.	statt	h^k	setze	h_k
	„ 2	„	„	σ_{2pn}	„	$\sigma_{2pn}z$
„ 108	„ 1	v. ob.	„	$p-2$	„	$p-1$
	„ 8	„	„	C	„	$C\left(\frac{z+k}{2p}\right)$
	„ 10	„	„	$\sum_{2}$	„	$\sum_{1}$
	„ 15	„	„	Differentiation	„	Dissertation
„ 109	„ 3	„	„	$\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right.$	„	$\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\pi$
	„ 9	„	„	$\frac{2p-2}{2p}$	„	$\frac{2p-1}{p}$
	„ 8	v. unt.	„	$2m+4$	„	$2m+1$
	„ 5	„	„	$\frac{2m}{}$	„	$\frac{1}{}$
„ 110	„ 2	v. ob.	„	$\frac{2}{2\pi}$	„	$\frac{2\pi}{p}$
„ „	2	v. unt.	„	$\frac{2p-1}{4p}$	„	$\frac{2p-1}{4p}\pi$
„ 111	„ 6	v. ob.	„	σ	„	5

4.

Zur Rectification der Hyperbel.

Dieselbe führt bekanntlich auf das Integral

$$s = \frac{b^2}{c}\int \frac{d\varphi}{\cos\varphi^2\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}\sin\varphi^2}}$$

Wie wir schon früher bemerkt, ist 2φ der Winkel zwischen dem einen Brennstrahl nnd der Verlängerung des anderu nach dem zweiten Endpunkt des Hyperbelbogens.

Ans der obigen Gleichuug folgt aber

$$\frac{s}{c} = k'^2 u + \Delta \operatorname{tg}\varphi - E(\varphi)$$

Wir benutzen hier eine in deu „Transformationeu" mitgeteilte Formel

$$E(\varphi) = (\Delta - k')\operatorname{tg}\varphi + \frac{E}{K}u - \frac{4\pi}{K}\left(\frac{q^2}{1-q^4}\sin\frac{\pi u}{K} - \frac{q^4}{1-q^8}\sin\frac{2\pi u}{K} + \ldots\right)$$

um damit den Ausdruck

$$\Delta \operatorname{tg}\varphi - E(\varphi)$$

darzustellen und in die betreffende Gleichung einzuführeu. Man erhält

$$\frac{s}{c} = k'^2 u - \frac{E}{K}u + k' \operatorname{tg} u + \frac{4\pi}{K}\left(\frac{q^2}{1-q^4}\sin\frac{\pi u}{K} - \ldots\right)$$

oder auch bei Beuutzung einer bekaunten Reihe für $k'\operatorname{tg}\varphi$, nämlich

$$k'\operatorname{tg}\varphi = \frac{\pi}{2K}\operatorname{tg}\frac{\pi u}{2K} - \frac{2\pi}{K}\left(\frac{q^2}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{K} - \frac{q^4}{1+q^4}\sin\frac{2\pi u}{K} + \ldots\right)$$

das folgende Resultat

$$\frac{s}{c} = \frac{2\pi}{K}\left(\tfrac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi u}{2K} + \frac{q^2}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{K} - \frac{q^4}{1-q^4}\sin\frac{2\pi u}{K} + \ldots\right) - \left(\frac{E}{K} - k'^2\right)u$$

wodurch der Hyperbelbogen aus dem Argument

$$u = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2} \sin \varphi^2}}$$

durch eine Reihe abgeleitet und berechnet werden kann.

E. Oekinghaus.

XIII.

Potential einer elliptischen Walze.

Von

Ulrich Bigler.

Fortsetzung von T. III. Nr. XIX.

Zweiter Teil.

IV. Potential einer elliptischen Scheibe von der Dichtigkeit 1, deren Punkte den Gleichungen

$$\frac{X^2}{A}+\frac{Y^2}{B}\leqq 1,\quad Z=0$$

genügen.

§ 12. Das Potential.

a) Ableitung desselben aus dem Potential der Ellipse, ausgedrückt durch ein Integral mit freiem Integrationsweg.

Wenn die Wurzeln der Gleichung

$$\overline{W}^2=1-\frac{x^2}{Aw+u}-\frac{y^2}{Bw+u}-\frac{z^2}{u}$$

mit wt, wt', wt'' bezeichnet werden, dann ist das Potential der Ellipse

$$\frac{X^2}{Aw}+\frac{Y^2}{Bw}=1$$

deren Dichtigkeit gleich dem Abstande des Mittelpunktes von der Tangente im betreffenden Punkte angenommen wird,

$$\text{Pot}=2w\sqrt{AB}\int_{wt}^{\infty}\frac{du}{\sqrt{(u-wt)(u-wt')(u-wt'')}}$$

Setzt man hier

$$u = wu', \quad \overline{W} = \frac{1}{\sqrt{w}} W_1$$

so ergeben sich

$$\text{Pot} = 2\sqrt{w}\sqrt{AB}\int_t^\infty \frac{du'}{\sqrt{(u'+t)(u'-t')(u'-t'')}}$$

$$W_1^2 = w - \frac{x^2}{A+u'} - \frac{y^2}{B+u'} - \frac{z^2}{u'}$$

nnd

$$u' = t,\ t',\ t''$$

sind die Wurzeln der Gleichung

$$W_1^2 = 0$$

daher ist die Gl.

$$W_1^2 = w\frac{(u'-t)(u'-t')(u'-t'')}{(A+u')(B+u')u'}$$

dentisch richtig. Schreibt man u statt u' nnd setzt dann

$$R^2 = (u-t)(u-t')(u-t''), \quad U^2 = (A+u)(B+u)u$$

so dass nnn

$$R = \frac{1}{\sqrt{w}} UW_1$$

wird, so ist

$$\text{Pot.} = 2\sqrt{w}\sqrt{AB}\int_t^\infty \frac{du}{R} = 2w\sqrt{AB}\int_t^\infty \frac{du}{UW_1}$$

wo t die grösste Wurzel der Gleichung

$$\Sigma \frac{x^2}{A+u} = w$$

hedentet.

Um die Masse des Ringes, welcher von den Ellipsen mit den Halbaxen ($\sqrt{Aw}$, $\sqrt{Bw}$) und ($\sqrt{A(w+dw)}$, $\sqrt{B(w+dw)}$) gehildet wird, zn erhalten, habo ich obige Formel für das Pot. noch mit $\frac{1}{2}\frac{dw}{w}$ zu multipliciren. Denn

$$\sqrt{A(w+dw)} = \sqrt{Aw}\left(1+\frac{1}{2}\frac{dw}{w}\right)$$

und

$$\sqrt{B(w+dw)} = \sqrt{Bw}\left(1+\frac{1}{2}\frac{dw}{w}\right)$$

also ist das frühere E gleich $\frac{1}{2}\frac{dw}{w}$ und somit

$$\text{Pot.} = \sqrt{AB} \int_t^{\infty} \frac{du}{U.W_1}\, dw = \tfrac{1}{2}\sqrt{AB} \int \frac{du}{U.W_1}\, dw$$

(Weg eine Schlinge ans dem Ostpnnkte nm t).

Weil anch dieses Ingetral im Horizonte verschwindet, so kann man die Schlinge in eine geschlossene Cnrve nm die Pole t' nnd t'' verwandeln nnd diesen Weg wollen wir nnn benntzen, um das Pot. der Scheibe zn erhalten. Es ist also

$$\text{Pot.} = \frac{i}{2}\sqrt{AB} \int \frac{du}{U.W_1}\, dw \quad \text{(Weg Fig. 17.)}$$

wo

$$\overline{W_1}^2 = \frac{(t-u)(u-t')(u-t'')}{U} = \Sigma \frac{x^2}{A+u} - w$$

ist, nnd $\overline{W_1}$ in der Realitätslinie zwischen t' nnd t positiv verstanden wird; somit das Potential der Scheibe

$$\text{Pot.} = \frac{i}{2}\sqrt{AB} \int_0^1 \left(\int \frac{du}{U.\overline{W_1}} \right) dw$$

Die Wnrzeln t, t', t'' der Gleichnng

$$W_1^2 = 0$$

sind Fnnctionen von w. Für ein sehr kleines $+w$ ist t pos. sehr gross, und während w von 0 bis 1 steigt, sinkt t fortwährend bis zn dem pos. Werte herab, den es für $w = 1$ annimmt. t' und t'' sinken zwar anch, treten aber nicht aus den Intervallen

$$-B < t' < 0, \quad -A < t'' < -B$$

herans. Wenn daher der in sich zurückkehrende Integrationsweg das zwischen $-A$ nnd 0 liegende Stück der Realitätslinie rückläufig nmschliesst, aber den niedrigsten Wert von t ansschliesst, so kann er während der Integration nach w festliegen. Weil u von w nnabhängig ist, so hat man nur $\frac{dw}{\overline{W_1}}$ von $w = 0$ bis $w = 1$ zn integriren. Nnn ist

$$\overline{W_1}^2 = -\left(w - \Sigma \frac{x^2}{A+u}\right)$$

also

$$2\overline{W_1} \frac{\partial \overline{W_1}}{\partial w} = -1$$

folglich

$$\frac{\partial \overline{W_1}}{\partial w} = -\frac{1}{2\overline{W_1}}$$

somit

$$\int_0^1 \frac{dw}{\overline{W_1}} = -2\int_0^1 \frac{\partial \overline{W_1}}{\partial w}\,dw = -2\left[\overline{W_1}\right]_0^1$$

und demnach

$$\text{Pot.} = -i\sqrt{AB}\int \frac{\overline{W_1}(\text{für } w=1)\,du}{U} + i\sqrt{AB}\int \frac{\overline{W_1}(\text{für } w=0)\,du}{U}$$

(Weg eine rückläufige Curve um $-A$ und 0 mit Ausschluss der kleinsten pos. Wurzel von $\overline{W_1}^2 = 0$)

Nun liegt aber die pos. Wurzel von $\overline{W_1}^2$ (für $w=0$) im pos. Unendlichen, und deshalb kann man im zweiten Integral den Weg so legen, dass nur sehr grosse Werte von u in Betracht kommen. Das zweite Integral ist also null. Wir erhalten somit als Potential der elliptischen Scheibe folgenden Ausdruck:

$$P = -i\sqrt{AB}\int \frac{\overline{W_1}}{U}\,du$$

(Weg eine geschlossene Curve um die Pole t'' und t')

Es ist nun

$$\overline{W_1}^2 \text{ (für } w=1) = \Sigma\frac{x^2}{A+u} - 1$$

$$= \frac{(t-u)(t'-u)(t''-u)}{(A+u)(B+u)u}$$

also

$$P = -i\sqrt{AB}\int \frac{\sqrt{(t-u)(u-t')(u-t'')}}{(A+u)(B+u)u}\,du \quad \text{(Weg wie oben)}$$

$$= 2\sqrt{AB}\int_t^\infty \frac{\sqrt{(u-t)(u-t')(u-t'')}}{(A+u)(B+u)u}\,du$$

$$= 2\sqrt{AB}\int_t^\infty \frac{W}{U}\,du$$

b) Ableitung des Potentials der Scheibe aus dem Potential der Ellipse, ausgedrückt durch ein Integral mit geradem Integrationsweg.

Wenn s, s', s'' die Wurzeln der Gleichung

$$W_1^2 = w - \frac{x^2}{A+u} - \frac{y^2}{B+u} - \frac{z^2}{u} = 0$$

sind, dann ist das Potential des von den Ellipsen ($\sqrt{Aw}$, $\sqrt{Bw}$) nnd ($\sqrt{A(w+dw)}$, $\sqrt{B(w+dw)}$) gebildeten Ringes gleich

$$\text{Pot.} = \sqrt{AB}\int_s^\infty \frac{du}{W_1 . U} dw$$

und somit das Potential der Scheibe

$$P = \sqrt{AB}\int_0^1 \left(\int_{s_1}^\infty \frac{du}{W_1 . U}\right) dw$$

und weil $w = f(s)$ ist, so erhält man anch

$$P = \sqrt{AB}\int_t^\infty \left(\int_s^\infty \frac{du}{W_1 . U}\right) \cdot \left(-\frac{\partial w}{\partial s}\right) ds$$

Man denke sich nnn ein rechtwinkliges Coordinatensystem (Fig. 18). Anf der Abscissenaxe werden die u nnd anf der Ordinatenaxe die s abgetragen und in dem Punkte (u, s) stelle die dritte Coordinate den Wert des Integranden dar. $du\,ds$ ist das Flächenelement. Die Integration nach u erstreckt sich über einen horizontalen Streifen, der in einem Pnnkte P der Halbirungslinie des rechten Winkels beginnt nnd sich bis in's Unendliche ansdehnt. Die Integration nach s snmmirt nnn alle diese Streifen vom Pnnkte A an, wo $s = t$ ist, bis in's Unendliche. Das Doppelintegral erstreckt sich demnach über alle Punkte der Ebene, welche zwischen der von A ansgehenden horizontalen Linie nnd der Halbirungslinie des rechten Winkels liegen. Kehren wir nun die Integration nm nnd integriren zuerst nach s, so länft s von t bis u; sie nmfasst also den Streifen ($P' - P''$) Fig. 18. Diese Streifen sind nnn noch zu summiren von $u = t$ bis $u = \infty$. Es ist demnach

$$\int_t^\infty \left(\int_s^\infty \frac{dv}{U . W_1}\right) \cdot \left(-\frac{\partial w}{\partial s}\right) ds = \int_t^\infty \left(\int_t^u \frac{\left(-\frac{\partial w}{\partial s}\right) ds}{W_1}\right) \cdot \frac{du}{U}$$

und somit

$$P = \sqrt{AB} \int_t^\infty \left(\int_t^u \frac{\left(-\frac{\partial w}{\partial s}\right) ds}{W_1} \right) \cdot \frac{du}{U}$$

Nun ist

$$W_1^2 = w - \Sigma \frac{x^2}{A+u}$$

also

$$2 W_1 \frac{\partial W_1}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial s}$$

folglich

$$\int_t^u -\frac{\partial w}{\partial s} \cdot \frac{ds}{W_1} = -2 \int_t^u \frac{\partial W_1}{\partial s} ds$$

und weil W_1 für $s = u$ verschwindet und für $s = t$ zu

$$W = \sqrt{1 - \Sigma \frac{x^2}{A+u}}$$

wird, so erhält man

$$P = 2 \sqrt{AB} \int_t^\infty \frac{W}{U} . du$$

c. Darstellung des Potentials der elliptischen Scheibe durch elliptische Integrale.

Es ist

$$P = \sqrt{AB} \int \frac{W^2}{U . W} . du$$

(Weg eine Schlinge aus dem Ostpunkte um den Pol t)

oder auch

$$P = \sqrt{AB} \int \left(1 - \Sigma \frac{x^2}{A+u}\right) \cdot \frac{du}{R}$$

$$= \sqrt{AB} \int \frac{du}{R} - \sqrt{AB}\, x^2 \int \frac{1}{A+u} \cdot \frac{du}{R} - \sqrt{AB}\, y^2 \int \frac{1}{B+u} \cdot \frac{du}{R}$$

$$- \sqrt{AB}\, z^2 \int \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{R}$$

$$= I + II + III + IV$$

Integral I ist gleich dem Potential der Ellipse, also

$$I = \frac{4\sqrt{AB}}{\sqrt{t - t''}} . K. \left(k^2 = \frac{t' - t''}{t - t''} \right)$$

Bei Integral *II* verwandlo man die Schlinge in oine geschlossene Curve um die Pole $-A$, t'' nnd t' nnd gebe derselben die Gestalt von Fig. 19.

Ein Teil der Curve zwischen den Polen $-A$ und t'' werdo auf die Realitätslinie verlegt, nnd weil sich nnn hier die beiden Wege aufheben, se verwandelt sich die anfänglich geschlossene Cnrve in einen rückläufigen Kreis nm den Pol $-A$ nnd in eine geschlossene Curve nm die heiden Pole t'' nnd t'. Also

$$\int \frac{1}{A+u}\cdot\frac{du}{R} \quad \text{(Weg eine geschlossene Curve um die Pole } -A, t'', t')$$

$$= -i\int \frac{1}{A+u}\cdot\frac{du}{\sqrt{(t-u)(t'-u)(t''-u)}}$$

(Weg ein rückläufiger Kreis um don Pol $-A$, Erkennnngsort östlich von $-A$)

$$+i\int \frac{1}{A+u}\cdot\frac{du}{\sqrt{(t-u)(u-t')(u-t'')}}$$

(Weg eine rückläufige Curve um dio Polo t'' nnd t', Erkennnungsstandort östlich von t')

$$= L+M$$

Der Wert des ersten Integrals ist nach einem Lehrsatze von Canchy gleich

$$L = -\frac{2\pi}{\sqrt{(A+t)(A+t')(A+t'')}}$$

Im zweiten Integral sind die heidon Pole t'' nnd t' zugänglich und man erhält

$$M = 2\int_{t''}^{t'} \frac{1}{A+u}\cdot\frac{du}{R}$$

Ich setze nnn

$$u = t'\sin^2\varphi + t''\cos^2\varphi$$

also

$$\frac{du}{R} = \frac{2\,d\varphi}{\sqrt{(t-t'')}\,\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

$$A+u = A+t''-(t''-t')\sin^2\varphi = (A+t'')\left(1-\frac{t''-t'}{A+t''}\sin^2\varphi\right)$$

und wenn noch

$$k^2 S^2 a = \frac{t''-t'}{A+t''},$$

also

$$S^2a = -\frac{t-t''}{A+t''}$$

nnd

$$Sa = i\frac{\sqrt{t-t''}}{\sqrt{A+t''}}, \quad Ca = \frac{\sqrt{(A+t)}}{\sqrt{(A+t'')}}, \quad Da = \frac{\sqrt{(A+t)}}{\sqrt{(A+t'')}}$$

gesetzt wird, wo also der Parameter a nördlich lateral ist, so erhält man

$$\frac{1}{A+u}\cdot\frac{du}{R} = \frac{2}{(A+t'')\sqrt{(t-t'')}}, \frac{du}{\sqrt{(1-k^2S^2aS^2u)}}$$

Nnn ist

$$1 = 1-k^2S^2aS^2u+k^2S^2aS^2u$$

also

$$\frac{1}{A+u}\cdot\frac{du}{R} = \frac{2}{(A+t'')\sqrt{(t-t'')}}\cdot\left(1+\frac{Sa}{Ca.Da}\cdot\frac{k^2Sa.Ca.Da.S^2u}{1-k^2S^2aS^2u}\right)du$$

und weil

$$\frac{Sa}{Ca.Da}\cdot\frac{1}{(A+t'')\sqrt{(t-t'')}} = \frac{i}{\sqrt{(A+t)(A+t')(A+t'')}}$$

so ist

$$M = \frac{4K}{(A+t'')\sqrt{(t-t'')}}+\frac{4i}{\sqrt{(A+t)(A+t')(A+t'')}}.\Pi(a,\ K)$$

nnd weil

$$\Pi(a,\ K) = KZ(a)$$

so ist auch

$$M = \frac{4K}{(A+t'')\sqrt{(t-t'')}}+\frac{4iKZ(a)}{\sqrt{(A+t)(A+t')(A+t'')}}$$

folglich

$$\int\frac{1}{A+u}\cdot\frac{du}{R}\ \text{(Weg eine Schlinge)} = -\frac{2\pi}{\sqrt{(A+t)(A+t')(A+t'')}}$$
$$+\frac{4K}{(A+t'')\sqrt{(t-t'')}}+\frac{4iKZa}{\sqrt{(A+t)(A+t')(A+t'')}},$$

nnd demnach

$$II = \frac{2\pi\sqrt{AB}x^2}{\sqrt{(A+t)(A+t')(A+t'')}}-\frac{4\sqrt{AB}x^2K}{(A+t'')\sqrt{(t-t'')}}$$
$$-\frac{4i\sqrt{AB}x^2KZa}{\sqrt{(A+t)(A+t')(A+t'')}}.$$

Um diese Formel zu vereinfachen, setze ich $a = L - x$, wo x nördlich lateral ist. Dann ist

$$Sx = S(L-a) = -\frac{1}{kSa} = \frac{i\sqrt{(A+t'')}}{\sqrt{(t'-t'')}},$$

$$Cx = C(L-x) = \frac{\sqrt{(A+t')}}{\sqrt{(t'-t'')}},$$

$$D(x) = D(L-a) = \frac{\sqrt{(A+t)}}{\sqrt{(t-t'')}}$$

ferner

$$Z(L-x) = -\frac{Cx.Dx}{Sx} - Zx - \frac{i\pi}{2K}$$

$$= \frac{i\sqrt{(A+t)(A+t')}}{\sqrt{(t-t'')(A+t'')}} - Zx - \frac{i\pi}{2K}$$

also

$$\frac{4iKZa}{\sqrt{(A+t)(A+t')(A+t'')}} = -\frac{4K}{(A+t'')\sqrt{(t-t'')}}$$

$$-\frac{4iKZx}{\sqrt{(A+t)(A+t')(A+t'')}} + \frac{2\pi}{\sqrt{(A+t)(A+t')(A+t'')}}$$

folglich, wenn für d. Arg. x wieder α gesetzt wird,

$$II = \frac{4i\sqrt{AB}x^2KZa}{\sqrt{(A+t)(A+t')(A+t'')}}$$

Weil nnn

$\int \frac{1}{A+u} \cdot \frac{du}{R}$ (Weg eine Schlinge aus dem Ostp. nm den Pol t)

$$= 2\int_t^{\infty} \frac{1}{A+u} \cdot \frac{du}{R}$$

ist, mnss der letzte Ausdruck unter II anch erhalten werden, wenn das geradlinige Integral in ellipt. Integrale übergeführt wird. Um dasselbe zu verwandeln, setze man

$$u = t + (t-t')\operatorname{tg}^2\varphi$$

also

$$u-t = (t-t')\operatorname{tg}^2\varphi, \quad u-t' = (t-t') \cdot \frac{1}{\cos^2\varphi},$$

$$u-t'' = \frac{t-t''}{\cos^2\varphi}(1-k^2\sin^2\varphi),$$

$$A+u = \frac{A+t}{\cos^2\varphi}\left(1-\frac{A+t'}{A+t}\sin^2\varphi\right), \quad du = 2(t-t')\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\cos^2\varphi}d\varphi$$

Setzt man ferner

$$\frac{A+t'}{A+t} = k^2 S^2 a$$

also

$$Sa = \frac{\sqrt{(t-t'')(A+t')}}{\sqrt{(t'-t'')(A+t)}}, \quad Ca = -\frac{i\sqrt{(t-t')(A+t')}}{\sqrt{(t'-t'')(A+t')}},$$

$$Da = \frac{\sqrt{(t-t')}}{\sqrt{(A+t)}},$$

dann ist

$$\frac{1}{A+u} \cdot \frac{du}{R} = \frac{2C^2 u\, du}{(A+t)\sqrt{(t-t'')}(1-k^2 S^2 a\, S^2 u)}$$

Aus der Gleichung

$$(A+t)(t'-t'')-(A+t')(t-t'')+(A+t'')(t-t') = \begin{bmatrix} A+t & t & 1 \\ A+t' & t' & 1 \\ A+t'' & t'' & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} t & t & 1 \\ t' & t' & 1 \\ t'' & t'' & 1 \end{bmatrix} = 0$$

folgt, dass

$$1 < Sa < \frac{1}{k}$$

also

$$a = K + x, \quad \text{wo} \quad 0 < x < L$$

Ferner ist

$$\frac{1}{A+u} \cdot \frac{du}{R} = \frac{2(1-S^2 u)\, du}{(A+t)\sqrt{(t-t'')}(1-k^2 S^2 a\, S^2 u)}$$

$$= \frac{1(1-k^2 S^2 a\, S^2 u + k^2 S^2 a\, S^2 u - S^2 u)}{(A+t)\sqrt{(t-t'')}(1-k^2 S^2 a\, S^2 u)} du$$

$$= \frac{2\, du}{(A+t)\sqrt{(t-t'')}} - \frac{2 D^2 a\, S^2 u\, du}{(A+t)\sqrt{(t-t'')}(1-k^2 S^2 a\, S^2 u)}$$

und weil

$$\frac{Da}{k^2 S a\, C a} \cdot \frac{1}{(A+t)\sqrt{(t-t'')}} = \frac{i}{\sqrt{(A+t)(A+t')(A+t'')}}$$

so folgt

$$2\int_t^\infty \frac{1}{A+u}\cdot\frac{du}{R} = \frac{4}{(A+t)\sqrt{(t-t'')}}\int_0^K du$$

$$-\frac{4}{\sqrt{(A+t)(A+t')(A+t'')}}\int_0^K \frac{k^2\,S\alpha\,C\alpha\,D\alpha\,S^2u\,du}{1-k^2S^2\alpha\,S^2u}$$

$$= \frac{4K}{(A+t)\sqrt{(t-t'')}} - \frac{4iKZ\alpha}{\sqrt{(A+t)(A+t')(A+t'')}}$$

also

$$II = -\frac{4\sqrt{AB}x^2K}{(A+t)\sqrt{(t-t'')}} + \frac{4i\sqrt{AB}x^2KZ\alpha}{\sqrt{(A+t)(A+t')(A+t'')}}$$

Weil

$$\alpha = K+x\,(0<x<L)$$

so ist

$$Sx = -S(K-\alpha) = -\frac{C\alpha}{D\alpha}$$

$$= \frac{i\sqrt{(t-t')(A+t'')}}{\sqrt{(t'-t'')(A+t)}}\cdot\frac{\sqrt{(A+t')}}{\sqrt{(t-t')}} = \frac{i\sqrt{(A+t'')}}{\sqrt{(t'-t'')}},$$

$$Cx = C(K-\alpha) = \frac{\sqrt{(A+t')}}{\sqrt{(t'-t'')}},$$

$$Dx = D(K-\alpha) = \frac{\sqrt{(A+t)}}{\sqrt{(t-t'')}}$$

also

$$Z\alpha = Z(K+x) = -\frac{k^2\,Sx\,.\,Cx}{Dx} + Zx$$

$$= -\frac{i\sqrt{(A+t')(A+t'')}}{\sqrt{(t-t'')(A+t)}} + Zx$$

somit

$$-\frac{4iKZ\alpha}{\sqrt{(A+t)(A+t')(A+t'')}} = -\frac{4K}{(A+t)\sqrt{(t-t'')}}$$

$$-\frac{4iKZx}{\sqrt{(A+t)(A+t')(A+t'')}}$$

folglich

$$2\int_t^\infty \frac{1}{A+u}\cdot\frac{du}{R} = -\frac{4iKZx}{\sqrt{(A+t)(A+t')(A+t'')}}$$

und schliesslich, wenn für x wieder α gesetzt wird,

$$II = \frac{4i\sqrt{AB}x^2KZ\alpha}{\sqrt{(A+t)(A+t')(A+t'')}}$$

wie auf Seite 233.

Um das Integral

$$\int \frac{1}{B+u}\cdot\frac{du}{R} \quad \text{(Weg eine Schlinge aus dem Ostp. um den Pol } t\text{)}$$

$$= 2\int_t^{\infty} \frac{1}{B+u}\cdot\frac{du}{R}$$

zu verwandeln, setze man wieder

$$u = t+(t-t')\operatorname{tg}^2\varphi$$

also

$$\frac{du}{R} = \frac{2\,d\varphi}{\sqrt{(t-t'')}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

$$B+u = \frac{B+t}{\cos^2\varphi}\left(1-\frac{B+t'}{B+t}\sin^2\varphi\right)$$

Ferner sei

$$\frac{B+t'}{B+t} = k^2S^2\beta$$

also

$$S\beta = \frac{\sqrt{(t-t'')(B+t')}}{\sqrt{(t'-t'')(B+t)}}, \quad C\beta = \frac{\sqrt{(-B-t'')(t-t')}}{\sqrt{(B+t)(t'-t'')}},$$

$$D\beta = \frac{\sqrt{(t-t')}}{\sqrt{(B+t)}}$$

wo

$$S\beta < 1, \quad \text{also} \quad 0 < \beta < K$$

Demnach ist

$$\frac{1}{B+u}\cdot\frac{du}{R} = \frac{2\,du}{(B+t)\sqrt{t-t''}} - \frac{2\,D^2\beta\,.\,S^2u\,du}{(B+t)\sqrt{(t-t'')}(1-k^2S^2\beta\,S^2u}$$

und weil

$$\frac{D\beta}{k^2S\beta\;C\beta}\cdot\frac{1}{(B+t)\sqrt{(t-t'')}} = \frac{1}{\sqrt{(-B-t'')(B+t')(B+t)}}$$

so ist

$$2\int_t^{\infty}\frac{1}{B+u}\cdot\frac{du}{R} = \frac{4K}{(B+t)\sqrt{(t-t'')}} - \frac{4KZ\beta}{\sqrt{(B+t)(B+t')(-B-t'')}}$$

folglich

$$III = -\frac{4\sqrt{AB}\,y^2K}{(B+t)\sqrt{(t-t'')}} + \frac{4\sqrt{AB}\,y^2\,KZ\beta}{\sqrt{(B+t)(B+t')\;(-B-t'')}}.$$

Bei Integral IV verwandle man die Schlinge durch Einschaltung

des Horizontes in eine geschlossene Curve um die Pole 0, t', t'' und gebe derselben die Gestalt von Fig. 20.

Zwischen t' und 0 ziehe man einen Teil der Curve auf die Realitätslinie zusammen und weil sich hier die beiden Wege aufheben, so verwandelt sich die anfängliche Curve in einen rückläufig geschlossenen Kreis um den Pol 0 und in eine geschlossene Curve um die Pole t' und t'', und weil diese letztere Pole zugänglich sind, so erhält man

$$\int \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{R} \quad \text{(Weg eine geschlossene Curve um die Pole 0, } t', t'')$$

$$- i \int \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{R_1} \quad \text{(Weg ein kleiner rückläufiger Kreis um den Pol 0)}$$

$$- 2 \int_{t''}^{t'} \frac{1}{(-u)} \cdot \cdot \frac{du}{R} = L' + M'$$

Nach einem Lehrsatze von Cauchy ist aber

$$L' = \frac{2\pi}{\sqrt{t\,t'\,t''}}$$

und wenn im Integrale M'

$$k^2 S^2\delta = \frac{t' - t''}{-t''},$$

also

$$S^2\delta = \frac{t - t''}{-t''}, \quad S\delta = \frac{\sqrt{(t - t'')}}{\sqrt{-t''}},$$

$$C\delta = -\frac{i\sqrt{t}}{\sqrt{-t''}}, \quad D\delta = \frac{\sqrt{-t'}}{\sqrt{-t''}}$$

folglich

$$\frac{S\delta}{C\delta\, D\delta} \cdot \frac{1}{t''\sqrt{(t - t'')}} = -\frac{i}{\sqrt{t\,t'\,t''}}$$

gesetzt wird, so erhält man

$$M' = \frac{4K}{t''\sqrt{(t - t'')}} - \frac{4iKZ\delta}{\sqrt{t\,t'\,t''}}$$

und somit ist

$$\int \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{R} \quad \text{(Weg eine Schlinge)}$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{t\,t'\,t''}} + \frac{4K}{t''\sqrt{(t - t'')}} - \frac{4iKZ\delta}{\sqrt{t\,t'\,t''}}$$

folglich

$$a)\quad IV = -\frac{2\pi\sqrt{AB}z^2}{\sqrt{t\,t'\,t''}} - \frac{4\sqrt{AB}z^2K}{t''\sqrt{t-t''}} + \frac{4i\sqrt{AB}\,z^2\,KZ\delta}{\sqrt{t\,t'\,t''}}.$$

Man kann nun auch die Schlinge des Integrals IV. auf die Uebergangslinie (t-Ostpunkt) zusammenziehen und erhält

$$\int_{\cdot}\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{R}\quad\text{(Weg eine Schlinge)}\quad = 2\int_{t}^{\infty}\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{R}$$

Mittelst der Substitution

$$u = t+(t-t'')\,\mathrm{tg}^2\varphi$$

findet man nun

$$2\int_{u}^{\infty}\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{R} = \frac{4K}{t\sqrt{(t-t'')}} + \frac{4iKZ\gamma}{\sqrt{(t\,t'\,t'')}}$$

wo

$$S\gamma = \frac{\sqrt{-t'}\,\sqrt{(t-t'')}}{\sqrt{t}\,\sqrt{(t'-t'')}}$$

$$C\gamma = \frac{\sqrt{-t''}\,\sqrt{(t-t'')}}{\sqrt{t}\,\sqrt{(t'-t'')}},$$

$$D\gamma = \frac{\sqrt{(t-t'')}}{\sqrt{t}}$$

und somit ist

$$b)\quad IV = -\frac{4\sqrt{AB}z^2K}{t\sqrt{t-t''}} - \frac{4i\sqrt{AB}z^2\,KZ\gamma}{\sqrt{t\,t'\,t''}}$$

Die Formel a) soll nun mit der Formel b) in Uebereinstimmung gebracht werden. Aus den Formeln geht hervor, dass

$$\delta = K+x$$

wo

$$0 < x < L$$

und γ nördlich lateral sind. Man setze deshalb in Formel (a)

$$\delta = K+x$$

und in Formel (b)

$$\gamma = L-x$$

wo x nördlich lateral ist. Weil nun

$$Sx = S(\delta - K) = -\frac{C\delta}{D\delta} = \frac{i\sqrt{t}}{\sqrt{-t'}},$$

$$Cx = C(\delta - K) = \frac{\sqrt{t-t''}}{\sqrt{-t'}}$$

$$Dx = D(\delta - K) = \frac{\sqrt{t-t'}}{\sqrt{t-t''}}\,\frac{\sqrt{-t''}}{\sqrt{-t'}}$$

also

$$Z\delta = Z(K+x) = -\frac{k^2 Sx\,Cx}{Dx} + Zx$$

so ist

$$-\frac{4iKZ\delta}{\sqrt{tt't''}} = -\frac{4K(t'-t'')}{t't''\sqrt{(t-t'')}} - \frac{4iKZx}{\sqrt{tt't''}}$$

Wird nun dieser letzte Wert in Formel a) eingesetzt, so erhält man

a') $$IV = -\frac{4\pi\sqrt{AB}z^2}{\sqrt{t\,t,\,t''}} - \frac{4\sqrt{AB}z^2K}{t'\sqrt{(t-t'')}} + \frac{4i\sqrt{AB}z^2KZx}{\sqrt{(tt't'')}}$$

Ferner ist

$$Sx = S(L-\gamma) = \frac{i\sqrt{t}}{\sqrt{-t'}}, \quad Cx = \frac{\sqrt{(t-t')}}{\sqrt{-t'}}, \quad Dx = \frac{\sqrt{-t''}}{\sqrt{-t'}}\cdot\frac{\sqrt{(t-t'')}}{\sqrt{(t-t')}}$$

also

$$Z\gamma = -\frac{Cx\,Dx}{Sx} - Zx - \frac{i\pi}{2K} = -\frac{(t-t')\sqrt{-t''}}{\sqrt{(t-t'')}\sqrt{tt'}} - Zx - \frac{i\pi}{2K}$$

somit

$$\frac{4iKZ\gamma}{\sqrt{tt't''}} = \frac{4K(t-t')}{tt'\sqrt{(t-t'')}} - \frac{4iKZx}{\sqrt{tt't''}} + \frac{2\pi}{\sqrt{t\,t'\,t''}}$$

und setzt man diesen Wert in Formel b) ein, so erhält man

b') $$IV = -\frac{2\pi\sqrt{AB}z^2}{\sqrt{tt't''}} - \frac{4\sqrt{AB}z^2K}{t'\sqrt{(t-t'')}} + \frac{4i\sqrt{AB}z^2KZx}{\sqrt{t\,t'\,t''}}$$

eine Formel, die nun mit a') übereinstimmt.

Das Potential der ellipt. Scheibe, in ellipt. Integralen ausgedrückt, ist also

$$P = \frac{4\sqrt{AB}\,K}{\sqrt{(t'-t'')}} - \frac{4\sqrt{AB}\,K}{\sqrt{(t-t'')}}\left(\frac{x^2}{A+t} + \frac{y^2}{B+t} + \frac{z^2}{t}\right)$$
$$+ \frac{4\,i\sqrt{AB}x^2KZ\alpha}{\sqrt{(A+t)(A+t')(A+t'')}}$$

$$+\frac{4\sqrt{AB}\,y^2KZ\beta}{\sqrt{(B+t)(B+t')(-B-t'')}}-\frac{4i\sqrt{AB}\,x^2KZ\gamma}{\sqrt{tt't''}}$$

oder, da

$$\frac{x^2}{A+t}+\frac{y^2}{B+t}+\frac{z^2}{t}=1,\quad x^2=\frac{(A+t)(A+t')(A+t_{''})}{A(A-B)},$$

$$y^2=\frac{(B+t)(B+t')(-B-t'')}{(A-B).B},\quad z^2=\frac{tt't''}{AB}$$

ist:

$$P=4K\left(\frac{\sqrt{B}\,xi\,Z\alpha}{\sqrt{A}\,\sqrt{-B}}+\frac{\sqrt{A}\,yZ\beta}{\sqrt{A-B}}+z(-iZ\gamma)\right)$$

Wegen des Factors $\sqrt{A-B}$) im Nenner gestattet diese Formel nicht unmittelbar den Uebergang zur Kreisscheibe. Um sie aber dafür einzurichten, setze ich

$$\alpha=K+\alpha'\quad \text{und}\quad \beta=K-\beta'$$

wo α' nördlich lateral und β' reell ist. Nun ist

$$Z\alpha=Z(K+\alpha')=-\frac{k^2S\alpha'C\alpha'}{D\alpha'}+Z\alpha'$$

und weil

$$S\alpha'=\frac{i\sqrt{(A+t'')}}{\sqrt{(t'-t'')}},\quad C\alpha'=\frac{\sqrt{(A+t')}}{\sqrt{(t'-t'')}},\quad D\alpha'=\frac{\sqrt{(A+t)}}{\sqrt{(t-t'')}}$$

so folgt

$$Z\alpha=-\frac{i\sqrt{(A+t')(A+t'')}}{\sqrt{(t-t'')\,(A+t)}}+Z\alpha'$$

Ebenso ist

$$Z\beta=Z(K-\beta')=\frac{k^2\,S\beta'\,C\beta'}{D\beta'}-Z\beta'$$

und weil

$$S\beta'=\frac{\sqrt{-B-t''}}{\sqrt{(t'-t'')}},\quad C\beta'=\frac{\sqrt{B+t'}}{\sqrt{(t'-t'')}},\quad D\beta'=\frac{\sqrt{B+t}}{\sqrt{(t-t'')}}$$

so erhält man

$$Z\beta=\frac{\sqrt{(B+t')\,(-B-t'')}}{\sqrt{(B+t)\,(t-t'')}}-Z\beta'$$

Ersetzt man in diesen Formeln $-t''$ durch $A-C\cos^2\Theta$, wo

$$C = A - B$$

ist, so erhält man

$$Z\alpha = -\frac{i\sqrt{C}\sqrt{(A+t')}\cos\Theta}{\sqrt{(A+t)(A+t-t\cos^2\Theta)}} + Z\alpha'$$

und

$$Z\beta = \frac{\sqrt{\varphi}\sqrt{B+t'}\sin\Theta}{\sqrt{(B+t)(A+t-C\cos^2\Theta)}} - Z\beta'$$

Ist nun

$$C = A - B$$

sehr klein, so liegen α und β nahe bei K, nnd α', β' sind sehr klein. In diesem Falle ist aber

$$Z\alpha' = \left(1-\frac{E}{K}\right)\alpha' = \left(1-\frac{E}{K}\right)\cdot\frac{i\sqrt{A+t''}}{\sqrt{(t'-t'')}} = i\sqrt{C}\left(1-\frac{E}{K}\right)\frac{\cos\Theta}{\sqrt{A+C}}$$

und

$$Z\beta' = \left(1-\frac{E}{K}\right)\beta' = \left(1-\frac{E}{K}\right)\cdot\frac{\sqrt{-B+t''}}{\sqrt{(t'-t'')}} = \sqrt{C}\left(1-\frac{E}{K}\right)\frac{\sin\Theta}{\sqrt{A+t'}}$$

somit

$$Z\alpha = -i\sqrt{C}\left(\frac{\sqrt{(A+t')}}{A+t}\cos\Theta - \left(1-\frac{E}{K}\right)\frac{\cos\Theta}{\sqrt{(A+t')}}\right.$$

$$= -\frac{i\sqrt{C}\cos\Theta}{(A+t)K\sqrt{(A+t')}}\left(K(A+t')-(K-E)(A+t)\right)$$

$$= -\frac{i\sqrt{C}\cos\Theta}{(A+t)\sqrt{(A+t')}\,K}\left((A+t)E-(t-t')K\right)$$

und

$$Z\beta = \frac{\sqrt{C}\sin\Theta}{(A+t)\sqrt{(A+t')}\,K}\left((A+t)E-(t-t')K\right)$$

Ferner ist

$$x^2 = \frac{(A+t)(A+t')\cos^2\Theta}{A}, \quad y^2 = \frac{(A+t)(A+t')}{A}\cdot\sin^2\Theta$$

$$z^2 = -\frac{tt'}{A}$$

also

$$\frac{\sqrt{A}\,x_i Z\alpha}{\sqrt{C}}\,\frac{\cos^2\Theta}{\sqrt{(A+t)}\,K}((A+t)E-(t-t')K)$$

und

$$\frac{\sqrt{A}\,y\,Z\beta}{\sqrt{C}}-\frac{\sin^2\Theta}{\sqrt{(A+t)}\,K}((A+t)E-(t-t')K)$$

folglich

$$\frac{\sqrt{A}\,x_i Z\alpha}{\sqrt{C}}+\frac{\sqrt{A}\,yZ\beta}{\sqrt{C}}=\frac{1}{\sqrt{A+t}\,K}((A+t)E-(t-t')K)$$

und somit das Potential der Kreisscheibe mit dem Radius r

$$P'=\frac{4}{\sqrt{r^2+t}}((r^2+t)E-(t-t')K)+\frac{4K\sqrt{-tt'}}{r}(-iZ\gamma)$$

d) Besondere Lagen des Bezugpunktes.

α) Der Bezugspunkt liege im Unendlichen.

Weil in diesem Falle t sehr gross ist, so kann man den Integrationsweg so legen, dass nur sehr grosse Werte von u in Betracht kommen. Man darf deshalb neben u die Wurzeln t' und t'' und neben t die Constanten A und B vernachlässigen. Weil nun auch

$$x^2+y^2+z^2=t=r^2$$

so ist das Potential

$$P=\sqrt{AB}\int\frac{\sqrt{(u-r^2)}\,du}{u^2}$$ (Weg eine Schlinge aus dem Ostp. um den Pol r^2).

Durch Einschaltung des Horizontes in die Schlinge kann man den Weg in einen kleinen rückläufigen Kreis um den Pol 0 verwandeln also

$$P=-i\sqrt{AB}\int\frac{\sqrt{(r^2-u)}}{u^2}\,du$$ Weg ein kl. rückläufiger Kreis um 0)

und nach Cauchy

$$P=\frac{\pi\sqrt{AB}}{r}=\frac{\text{Masse}}{\text{Entfernung}}$$

β) Der Bezugspunkt liege auf der Focalhyperbel.

$$(t'=t''=-B)$$

Aus der Integralformel für das Potential findet man

$$P = -i\sqrt{AB}\int \frac{\sqrt{(t-u)}}{(A+u)u}\,du$$ (Weg eine geschlossene Curve um die Pole $-A$ und 0).

Dieser Integrationsweg zerfällt nun in zwei Kreise, von welchen der eine den Pol $-A$ und der andere den Pol 0 rückläufig umgibt.

Es ist also

$$P = -i\sqrt{AB}\int \frac{\sqrt{(t-u)}}{(A+u)u}\,du$$ (Weg ein rückläufiger Kreis um den Pol 0)

$$+ i\sqrt{AB}\int \frac{\sqrt{(t+u)}}{(A+u)(-u)}\,du$$ (Weg ein rückläufiger Kreis um den Pol $-A$)

und nach Cauchy erhält man

$$P = \frac{2\pi\sqrt{AB}}{\sqrt{A+t'}+\sqrt{t}}$$

Für die Brennpunkte der Ellipse ist folglich

$$P = 2\pi\sqrt{B}$$

c) Der Bezugspunkt liege auf dem Rande der ellipt. Scheibe.

$$(t = t' = 0)$$

Es ist

$$P = 2\sqrt{AB}\int \frac{\sqrt{u-t''}}{(A+u)(B+u)}\,du$$

$$= \frac{2\sqrt{AB}}{A-B}\int_0^\infty \left(\frac{A+t''}{A+u}+\frac{-B-t''}{B+u}\right)\cdot\frac{du}{\sqrt{(u-t'')}}$$

Setzt man nun im ersten Terme

$$u = t''+(A+t'')\cot g^2\varphi$$

so wird

$$u-t'' = (A+t'')\cot g^2\varphi,\quad du = -(A+t'').2\cot g\,\varphi\,.\,\frac{1}{\sin^2\varphi}$$

also

$$\frac{du}{\sqrt{(u-t'')}} = -\frac{2\sqrt{(A+t'')}}{\sin^2\varphi}d\varphi,$$

$$\frac{A+t''}{A+u} = \sin^2\varphi$$

folglich

$$2\sqrt{AB}\int_0^{\infty}\frac{A+t''}{A+u}\cdot\frac{du}{\sqrt{(v-t'')}}=-4\sqrt{AB}\int\sqrt{(A+t'')}\,d\varphi$$

und setzt man

$$\operatorname{tg}\Theta=\frac{\sqrt{A+t''}}{\sqrt{-t''}}$$

so ist das Integral

$$4\sqrt{AB}\,\sqrt{(A+t'')}\,\Theta$$

Im zweiten Terme setze man

$$u=t''+(-B-t'')\operatorname{cotg}^2\chi$$

und zugleich

$$\operatorname{tang} v=\frac{\sqrt{-B-t''}}{\sqrt{-t''}}$$

und verstehe v pos.; dann ist

$$v=\log\frac{\sqrt{-t''}+\sqrt{-B-t''}}{\sqrt{B}},$$

$$\frac{du}{\sqrt{(u-t'')}}=-2\sqrt{-B-t''}\,\frac{d\chi}{\sin^2\chi}$$

$$\frac{-B-t''}{B+u}=\sin^2\chi$$

folglich

$$\int_0^{\infty}\frac{B+u}{-B-t''}\cdot\frac{du}{\sqrt{u-t''}}=2\sqrt{-B-t''}\,v$$

Also

$$P=\frac{4\sqrt{AB}}{A-B}\left(\sqrt{(A+t'')}\,.\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{A+t''}}{\sqrt{-t''}}\right)\right.$$
$$\left.+\sqrt{(-B-t'')}\log\left(\frac{\sqrt{-t''}+\sqrt{-B-t''}}{\sqrt{B}}\right)\right)$$

Für das Ende der grossen Axe ist

$$t''=-B$$

also

$$P=\frac{4\sqrt{AB}}{\sqrt{A-B}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{(A-B)}}{\sqrt{B}}$$

und für das Ende der kleinen Axe ist

$$t'' = -A$$

also

$$P = \frac{4\sqrt{AB}}{\sqrt{A-B}} \cdot \log\left(\frac{\sqrt{A}+\sqrt{A-B}}{\sqrt{A}}\right)$$

Auch diese Formel gestattet nicht unmittelbar den Uebergang zum Kreise. Wird aber $-t''$ durch $A - C\cos^2\Theta$ ersetzt, so erhält man

$$P = \frac{4\sqrt{AB}}{C}\left(\sqrt{C}.\cos\Theta.\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{C}\cos\Theta}{\sqrt{(A-C\cos^2\Theta)}}\right)\right.$$
$$\left. + \sqrt{C}\sin\Theta\log\left(\frac{\sqrt{A-C\cos^2\Theta}+\sqrt{C}\sin\Theta}{\sqrt{B}}\right)\right)$$

und weil man nun für ein kleines C den Bogen durch die Tangente und den Logarithmus durch den Zusatz zu 1 ersetzen kann, so folgt

$$P = 4\sqrt{A} = 4r$$

wenn r der Radius des Kreises ist.

§. 13. Die Kraftcomponenten der elliptischen Scheibe.

Die 1. Abgeleiteten sollen aus folgender Form des Potentials abgeleitet werden:

$$P = \sqrt{AB}\int \frac{W}{U}\,dn$$ (Weg eine rücklänfige Schlinge ans dem Ostp. um den Pol t).

Weil

$$\frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{1}{W}\cdot\frac{x}{A+u},\quad \frac{\partial W}{\partial y} = -\frac{1}{W}\cdot\frac{y}{B+u},\quad \frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{1}{W}\cdot\frac{z}{u}$$

so erhält man

$$\frac{\partial P}{\partial x} = X = -\sqrt{AB}\,x\int \frac{1}{A+u}\cdot\frac{du}{W.U}$$
$$= -2\sqrt{AB} = \int_t^\infty \frac{1}{A+u}\cdot\frac{du}{R},$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = Y = -\sqrt{AB}\,y\int \frac{1}{B+u}\cdot\frac{du}{W.U}$$
$$= -2\sqrt{AB}\,y\int_t^\infty \frac{1}{B+u}\cdot\frac{du}{R}$$

(Weg wie oben

$$\frac{\partial P}{\partial z} = Z = -\sqrt{AB}z \int_t^\infty \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{W.U}$$

$$= -2\sqrt{AB}z \int_t^\infty \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{R}$$

(Weg wie oben.)

Aus diesen Formeln folgt, dass

$$xX+yY+zZ = -2\sqrt{AB}\int_t^\infty \left(\frac{x^2}{A+u}+\frac{y^2}{B+u}+\frac{z^2}{u}\right) \cdot \frac{du}{R}$$

$$= -2\sqrt{AB}\int_t^\infty (1-W^2) \cdot \frac{du}{R}$$

$$= -2\sqrt{AB}\int_t^\infty \frac{du}{R} + 2\sqrt{AB}\int_t^\infty \frac{W^2}{R}du$$

und somit

$$P = T' + xX + yY + zZ$$

wenn T' das Pot. der Ellipse bedeutet.

Die Integrale für die Abgeleiteten zeigen ferner, dass die Kraftcomponenten X und Y nur für solche Lagen des Bezugpunktes unendlich werden können, für welche $t = t' = 0$ ist, also für Punkte der Randellipse, weil dann der Integrationsweg nicht mehr zwischen t und t' hindurch kann. Die Randellipse ist demnach für die Comp. X und Y eine Unstetigkeitscurve. Wir werden später sehen, dass Comp. Z für keine Punkte des Raumes unendlich wird, dass sie sich aber bei ihrem Durchgange durch die Ebene innerhalb der Ellipse sprungweise ändert. Aus früheren Formeln erhält man

$$X = 4K\left(\frac{\sqrt{B}i\,Z\alpha}{\sqrt{A-B}} - \frac{\sqrt{AB}x}{(A+t)\sqrt{(t-t'')}}\right),$$

$$Y = 4K\left(\frac{\sqrt{A}Z\beta}{\sqrt{(A-B)}} - \frac{\sqrt{AB}y}{(B+t)\sqrt{(t-t'')}}\right),$$

$$Z = 4K\left(-iZ\gamma - \frac{\sqrt{AB}z}{t\sqrt{(t-t'')}}\right)$$

Auch hier macht der Factor $\sqrt{A-B}$ im Nenner den unmittelbaren Uebergang zur Kreisscheibe unmöglich. Wir haben aber gefunden, dass für ein kleines $C = A-B$

$$\frac{\sqrt{B}\, i\, Z\alpha}{\sqrt{C}} = \frac{\sqrt{A}\cos\Theta}{(A+t)\sqrt{(A+t')}}((A+t)E-(t-t')K)$$

und

$$\frac{\sqrt{A}\, Z\beta}{\sqrt{C}} = \frac{\sqrt{A}\sin\Theta}{(A+t)\sqrt{(A+t')}K}((A+t)E-(t-t')K)$$

ist; folglich erhält man im Falle einer Kreisscheibe

$$X_1 = \frac{4\sqrt{A}\cos\Theta}{(A+t)\sqrt{(A+t')}}((A+t)E-(t-t')K) - \frac{4AKx}{(A+t)^{3/2}}$$

$$Y_1 = \frac{4\sqrt{A}\sin\Theta}{(A+t)\sqrt{(A+t')}}((A+t)E-(t-t')K) - \frac{4AKy}{(A+t)^{3/2}}$$

$$Z_1 = 4K\left(-iZ\gamma - \frac{Ax}{t\sqrt{A+t}}\right)$$

Die Kraftcomponenten für besondere Lagen des Bezugspunktes

a) Der Bezugspunkt liege im Unendlichen.

Es ist

$$X = -\sqrt{AB}\,x\int \frac{du}{(A+u)u\sqrt{u-r^2}}$$ (Weg eine Schlinge aus dem Ostp. um den Pol r^2).

Man verwandle nun die Schlinge durch Einschaltung des Horizontes in eine geschlossene Curve um die Pole $-A$ und 0, und weil sich die Wege auf der Realitätslinie zwischen $-A$ und 0 aufheben, so erhält man als neuen Weg zwei kleine rückläufige Kreise um die Pole $-A$ und 0. Man erhält also

$$X = i\sqrt{AB}\,x\int \frac{1}{\sqrt{r^2-u}\sqrt{(-u)}}\cdot\frac{du}{A+u}$$ (Weg ein rückläufiger Kreis um den Pol $-A$)

$$-i\sqrt{AB}\,x\int \frac{1}{(A+u)\sqrt{(r^2-u)}}\cdot\frac{du}{u}$$ (Weg ein rückläufiger Kreis um 0)

und mithin nach Cauchy

$$X = -\frac{\pi\sqrt{AB}}{r^2}\cdot\cos(rx)$$

Ebenso findet man

$$Y = -\frac{\pi\sqrt{AB}}{r^2}\cos(ry),$$

$$Z = -\frac{\pi\sqrt{AB}}{r^2}\cos(rz)$$

b) Der Bezugspunkt liege auf der Focalhyperbel

$$(t' = t'' = -B, \quad y = 0)$$

Man findet

$$X = -\sqrt{AB}\,x\int\frac{du}{(A+u)(B+u)\sqrt{(u-t)}} \quad \text{(Weg eine Schlinge)}$$

$$= -i\sqrt{AB}\,x\int\frac{du}{(A+u)(B+u)\sqrt{(t-u)}} \quad \text{(Weg ein rückläufiger Kreis um } -B)$$

$$+i\sqrt{AB}\,x\int\frac{du}{\sqrt{(t-u)(-B-u)(A+u)}} \quad \text{(Weg ein rückläufiger Kreis um den Pol } -A)$$

$$= \frac{2\pi\sqrt{AB}\,x}{A-B}\left(\frac{1}{\sqrt{A+t}}-\frac{1}{\sqrt{B+t}}\right)$$

$$= -\frac{2\pi\sqrt{AB}\,x}{\sqrt{(A+t)(B+t)}\,(\sqrt{A+t}+\sqrt{B+t})}$$

Ebenso ist

$$Y = 0, \quad Z = -\frac{2\pi\sqrt{AB}\,z}{\sqrt{(B+t)t}\,(\sqrt{t}+\sqrt{B+t})}$$

und für die Brennpunkte der Ellipse

$$X = -\frac{2\pi x}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}, \quad Y = 0, \quad Z = -2\pi$$

c) Der Bezugspunkt liege in unmittelbarer Nähe der Randellipse.

$$X = -2\sqrt{AB}\int_{t_1}^{\infty}\frac{x}{A+u}\cdot\frac{du}{R}$$

Um den log unendlich werdenden Teil abzutrennen, ersetze ich $\frac{1}{A+u}$ durch $\frac{1}{A+t}-\frac{u-t}{(A+t)(A+u)}$. Da

$$T' = 2\sqrt{AB}\int_{t}^{\infty}\frac{du}{R}$$

gesetzt war, so hat man

$$X = -\frac{x}{A+t}T' + \frac{2\sqrt{AB}}{A+t}\,x\int_t^{\infty}\frac{u-t}{A+u}\cdot\frac{du}{R}$$

$$= \qquad I \qquad + \qquad II$$

$$I = -\frac{x}{A+t}\cdot\frac{4\sqrt{AB}\,K}{\sqrt{(t-t'')}}$$

und weil

$$x = \frac{\sqrt{(A+t)(A+t')(A+t'')}}{\sqrt{A}\sqrt{(A-B)}}$$

so erhält man

$$I = -\frac{4\sqrt{B}}{\sqrt{(A-B)}}\cdot\frac{\sqrt{(A+t'')}}{\sqrt{(A+t)}}\cdot\frac{\sqrt{(A+t')}}{\sqrt{(A-t'')}}K$$

Nun ist

$$K(k^2) = -iL(l^2)$$

also

$$I = \frac{4\sqrt{B}}{\sqrt{(A-B)}}\,\frac{\sqrt{(A+t')(A+t'')}}{\sqrt{(A+t)(t-t'')}}\,iL(l^2)$$

Um Integral *II* zu berechnen, machen wir Substitution

$$u = t-(t-t')S^2v$$

also

$$\sqrt{u-t} = -i\sqrt{(t-t')}\,Sv,\quad \sqrt{u-t'} = \sqrt{(t-t')}\,Cv,$$
$$\sqrt{(u-t'')} = \sqrt{(t-t'')}\,Dv,$$

$$\frac{du}{R} = -\frac{2i\,dv}{\sqrt{(t-t'')}},$$

$$\frac{u-t}{A+u} = -\frac{(t-t')\,S^2v}{(A+t)\left(1+\frac{t-t'}{A+t}S^2v\right)}$$

Setzt man nun

$$\frac{t-t'}{A+t} = k^2S^2\alpha$$

also

$$S^2\alpha = \frac{t-t'}{A+t}\cdot\frac{t-t''}{t-t'} = \frac{t-t''}{A+t},$$

$$C^2\alpha = \frac{A+t''}{A+t},\quad D^2\alpha = \frac{A+t'}{A+t};$$

$$S\alpha = \frac{\sqrt{t-t''}}{\sqrt{A+t}},\quad C\alpha = \frac{\sqrt{A+t''}}{\sqrt{A+t}},\quad D\alpha = \frac{\sqrt{A+t'}}{\sqrt{A+t}},$$

$$\alpha = K - \beta \quad (0 < \beta < K),$$

so folgt

$$\frac{u-t}{A+u}\cdot\frac{du}{R} = \frac{(t-t')S^2v}{(A+t)\left(1-\frac{t-t'}{A+t}S^2v\right)}\cdot\frac{2i\,dv}{\sqrt{(t-t'')}}$$

$$= \frac{2i(t-t')S^2v\,dv}{(A+t)\sqrt{(t-t'')}(1-k^2S^2\alpha S^2v)}$$

$$= \frac{2i(t-t')}{(A+t)\sqrt{(t-t'')}}\cdot\frac{k^2S\alpha\,C\alpha\,D\alpha\,S^2v\,dv}{k^2S\alpha\,C\alpha\,D\alpha(1-k^2S^2\alpha S^2v)}$$

Nun ist

$$k^2S\alpha\,C\alpha\,D\alpha = \frac{t-t'}{t-t''}\cdot\frac{\sqrt{(t-t'')}}{\sqrt{(A+t)}}\cdot\frac{\sqrt{(A+t'')}}{\sqrt{(A+t)}}\cdot\frac{\sqrt{A+t'}}{\sqrt{A+t}}$$

also

$$\frac{1}{k^2\,S\alpha\,C\alpha\,D\alpha} = \frac{\sqrt{(t-t'')}(A+t)^{\frac{1}{2}}}{(t-t')\ \sqrt{(A+t')(A+t'')}},$$

$$\frac{t-t'}{(A+t)\sqrt{(t-t'')}}\cdot\frac{1}{k^2\,S\alpha\ C\alpha\,D\alpha} = \frac{\sqrt{(A+t)}}{\sqrt{(A+t')(A+t'')}}$$

und somit ist

$$\int_t^\infty \frac{u-t}{A+u}\cdot\frac{du}{R} = \frac{2i\sqrt{(A+t)}}{\sqrt{(A+t')(A+t'')}}\int_3^L \frac{k^2S\alpha\ C\alpha\,D\alpha\,S^2v\,dv}{1-K^2S^2\alpha S^2v}$$

$$= \frac{2i\sqrt{(A+t)}}{\sqrt{(A+t')(A+t'')}}\,\Pi(L,\ \alpha)$$

Weil

$$\frac{2\sqrt{AB}\,x}{A-t} = \frac{2\sqrt{AB}}{A+t}\cdot\frac{\sqrt{(A+t)(A+t')(A+t'')}}{\sqrt{A}\sqrt{(A-B)}}$$

$$= \frac{2\sqrt{B}}{\sqrt{(A-B)}}\cdot\frac{\sqrt{(A+t')(A+t'')}}{\sqrt{(A+t)}}$$

so ist

$$\frac{2\sqrt{AB}}{A+t}\,x\int_t^\infty \frac{u-t}{A+u}\cdot\frac{du}{R} = \frac{4\sqrt{B}\,i\,\Pi(L,\alpha)}{\sqrt{A-B}}$$

und weil

$$\Pi(L,\alpha) = L\,Z\alpha - \frac{i\pi}{2} + \frac{i\pi\alpha}{2K}$$

so ist schliesslich

$$X - \frac{4\sqrt{B}}{\sqrt{(A-B)}}\left(iL\,Z\alpha + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi\alpha}{2K} + iL\,\frac{C\alpha\,D\alpha}{S\alpha}\right)$$
$$= \frac{4\sqrt{B}}{\sqrt{A-B}}\left(iL\left(Z\alpha + \frac{C\alpha\,D\alpha}{S\alpha}\right) + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi\alpha}{2K}\right)$$

Dieser Ausdruck soll nach t, t' mit Vernachlässigung der mit $\log(t-t')$ multiplicirten zweiter Ordnung entwickelt werden. Weil

$$iL = (1+\tfrac{1}{4}k^2)\log\frac{k}{4} + \tfrac{1}{4}k^2$$

mit Vernachlässigung von $k^4\log k, \ldots$;

$$k^2 = \frac{t-t'}{t-t''} = \frac{(t-t')}{-t''}\left(1+\frac{t}{-t''}\right)^{-1} = \frac{t-t'}{-t''}\left(1-\frac{t}{(-t'')}+\ldots\right)$$

$$\log\frac{k}{4} = \tfrac{1}{2}\log\frac{k^2}{16} = \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{t-t'}{-16t''}\right)\left(1-\frac{t}{(-t'')}+\ldots\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}\log\frac{t-t'}{-16t''} - \tfrac{1}{2}\frac{t}{-t''} + \ldots$$

also

$$iL = \left(1+\tfrac{1}{4}\frac{t-t'}{-t''} - \frac{t(t-t')}{4(-t'')^2}+\ldots\right)\times\left(\tfrac{1}{2}\log\frac{t-t'}{-16t''} - \tfrac{1}{2}\frac{t}{(-t'')}+\ldots\right)$$
$$+\tfrac{1}{4}\frac{(-t'')}{t-t'} - \tfrac{1}{4}\frac{(t-t')t}{(-t'')^2}+\ldots$$
$$= \left(1+\tfrac{1}{4}\frac{t-t'}{(-t'')}\right)\times\tfrac{1}{2}\log\frac{t-t')}{(-16t'')} - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{t}{(-t'')} + \tfrac{1}{4}\frac{t-t'}{(-t'')}+\ldots$$
$$= \tfrac{1}{2}\log\frac{t-t'}{-16t''}\times\left(1+\tfrac{1}{4}\frac{t-t'}{(-t'')}\right) - \tfrac{1}{4}\frac{t+t'}{(-t'')}+\ldots$$

Ferner ist

$$Zx = \int_0^x\left(B^2x - \frac{E}{K}\right)dx$$

und weil in unserem Falle $x < K$ ist, so setze man

$$\sin\varphi = Sx$$

also

$$dx = \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

folglich

$$Zx = \int\left((1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}} - \frac{E}{K}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right)d\varphi$$

Für ein kleines k^2 ist auch

$$K = \frac{\pi}{2}\left(1+\tfrac{1}{4}k^2+\frac{9}{64}k^4+\dots\right)$$

und

$$E = \frac{\pi}{2}\left(1-\tfrac{1}{4}k^2-\frac{3}{64}k^4+\dots\right)$$

folglich

$$\frac{\pi}{2K} = 1-\tfrac{1}{4}k^2-\frac{5}{64}k^4+\dots$$

also

$$\frac{E}{K} = 1-\tfrac{1}{2}k^2-\frac{4}{64}k^4+\dots$$

Ferner ist auch

$$(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}} = \left(1-\frac{k^2}{2}(1-\cos 2\varphi)\right)^{1/2}$$

$$= 1-\frac{k^2}{4}+\frac{k^2}{4}\cos 2\varphi-\frac{k^4}{32}(1-2\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi)+\dots$$

$$= 1-\frac{k^2}{4}+\frac{k^2}{4}\cos 2\varphi-\frac{k^4}{32}\left(1-2\cos 2\varphi+\frac{\cos 4\varphi+1}{2}\right)+\dots$$

$$= 1-\frac{k^2}{4}+\frac{k^2}{4}\cos 2\varphi-\frac{3k^4}{64}+\frac{k^4}{16}\cos 2\varphi-\frac{k^4\cos 4\varphi}{64}+\dots$$

und ebenso $(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}$

$$= 1+\frac{k^2}{4}-\frac{k^2}{4}\cos 2\varphi+\frac{9}{64}k^4-\frac{3}{16}k^4\cos 2\varphi$$

$$+\frac{3}{64}k^4\cos 4\varphi+\dots,$$

$$(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{E}{K} = 1-\tfrac{1}{4}k^2-\tfrac{1}{4}k^2\cos 2\varphi-\frac{3}{64}k^4-\frac{1}{16}k^4\cos 2\varphi$$

$$+\frac{3}{64}k^4\cos 4\varphi+\dots$$

und

$$(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}-(1-k^2\sin\varphi)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{E}{K} = \tfrac{1}{2}k^2\cos 2\varphi$$

$$+\frac{1}{16}k^4(2\cos 2\varphi-\cos 4\varphi)+\dots$$

also

$$Zx = \int_0\left(\frac{1}{2}k^2\cos 2\varphi+\frac{1}{16}k^4(2\cos 2\varphi-\cos 4\varphi)\,d\varphi\right.$$

$$= \frac{1}{4}k^2\sin 2\varphi+\frac{1}{16}k^4(\sin 2\varphi-\tfrac{1}{4}\sin 4\varphi)+\dots$$

$$= \sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{k^2}{2}+\frac{1}{16}k^4(1+2\sin^2\varphi)\right)+\dots$$

$$-SxCx\left(\frac{k^2}{2}+\frac{1}{16}k^4(1+2S^2x)\right)+\ldots$$

$$-\frac{k^2}{2}SxCx+\frac{k^4}{16}(SxCx+2S^3xCx)+\ldots$$

die Entwicklung der Z Function hat also für unsern Fall folgende Form:

$$Z\alpha=\frac{k^2}{2}S\alpha C\alpha+\frac{k^4}{16}(S\alpha C\alpha+2S^3\alpha C\alpha)+\ldots$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{t-t'}{-t''}\cdot\frac{\sqrt{-t''}\,.\,\sqrt{(A+t'')}}{A}+\ldots=\tfrac{1}{2}\frac{t-t'}{A}\operatorname{tg}\theta$$

wenn

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\sqrt{(A+t'')}}{\sqrt{-t''}}$$

also

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{-t''}}{\sqrt{A}},\quad \sin\theta=\frac{\sqrt{(A+t'')}}{\sqrt{A}}$$

daher ist

$$iL\,Z\alpha=\tfrac{1}{4}\quad\frac{t-t'}{A}\operatorname{tg}\theta\,.\log\frac{t-t'}{-16t''}$$

Es sei

$$\alpha=K-\beta$$

man soll $\frac{\pi\alpha}{2K}$ berechnen.

$$S\alpha=\frac{C\beta}{D\beta}=\frac{\sqrt{A+t''}}{\sqrt{A+t'}}=\frac{\sqrt{A+t''}}{\sqrt{A}}\left(1+\frac{t''}{A}\right)^{-1/2}$$

$$=\sin\theta\left(1-\tfrac{1}{2}\frac{t'}{A}\right)$$

Wenn

$$\operatorname{am}\alpha=\varphi$$

also

$$\sin\varphi=\sin\theta\left(1-\frac{1}{2}\frac{t'}{A}\right)$$

so folgt hieraus

$$\varphi=\theta-\tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\theta\frac{t'}{A}$$

Nun ist

$$\alpha=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{(-k^2\sin^2\varphi)}}$$

$$=\int_0^{\varphi}(1+\tfrac{1}{2}k^2\sin^2\varphi)d\varphi=\varphi+\tfrac{1}{4}k^2\sin\varphi\cos\varphi$$

also

$$\frac{\pi\alpha}{2K} = (1-\tfrac{1}{4}k^2)(\varphi+\tfrac{1}{4}k^2(\varphi-\sin\varphi\cos\varphi)) = \varphi-\tfrac{1}{4}k^2\sin\varphi\cos\varphi$$

$$= \theta-\tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\theta\cdot\frac{t'}{A}-\tfrac{1}{4}\frac{t-t'}{-t''}\sin\theta\cos\theta$$

$$= \theta-\tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\cdot\frac{t'}{A}-\tfrac{1}{4}\cdot\frac{t-t'}{-t''}\operatorname{tg}\theta\cos^2\theta$$

$$= \tfrac{1}{4}\operatorname{tg}\theta\left(\frac{2t'}{A}+\frac{t-t'}{A}\right)$$

nnd endlich

$$\frac{\pi\alpha}{2K} = \theta-\tfrac{1}{4}\operatorname{tg}\theta\cdot\frac{t+t'}{A}$$

also

$$iL\,Z\alpha+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi\alpha}{2K}-\theta-\tfrac{1}{4}\operatorname{tg}\theta\left(\frac{t-t'}{A}\log\frac{-16t''}{t-t'}+\frac{t+t'}{A}\right)$$

Ferner ist

$$\frac{C\alpha\,D\alpha}{S\alpha}=\int\frac{\sqrt{(A-t'')}}{\sqrt{-t''+t}}\cdot\frac{\sqrt{(A+t')}}{\sqrt{(A+t)}}=\frac{\sqrt{(A+t'')}}{\sqrt{-t''}}\times$$

$$\left(1+\frac{1}{2}\frac{t'}{A}-\frac{1}{2}\frac{t}{-t''}-\tfrac{1}{2}\frac{t}{A}\right)$$

$$=\operatorname{tg}\theta_1\left(1-\tfrac{1}{2}\left(\frac{t-t'}{A}+\frac{t}{-t''}\right)\right)$$

Weil

$$\left(1+\tfrac{1}{4}\frac{t-t'}{-t''}\right)\left(1-\tfrac{1}{2}\left(\frac{t-t'}{A}+\frac{t}{-t''}\right)\right)=1-\tfrac{1}{4}\left(\frac{t+t'}{-t''}+2\frac{t-t'}{A}\right)$$

so ist

$$iL\,\frac{C\alpha\,D\alpha}{S\alpha}=-\tfrac{1}{2}\log\frac{-16t''}{t-t'}\operatorname{tg}\theta\left(1-\tfrac{1}{4}\left(\frac{t+t'}{-t''}+2\frac{t-t'}{A}\right)\right)$$

$$-\tfrac{1}{4}\operatorname{tg}\theta\cdot\frac{t+t'}{-t''}$$

folglich

$$X=\frac{4\sqrt{B}}{\sqrt{(A-B)}}\Big[-\tfrac{1}{2}\log\frac{-16t''}{t-t'}\operatorname{tg}\theta\left(1-\tfrac{1}{4}\frac{t+t'}{-t''}\right)$$

$$-\frac{\operatorname{tg}\theta}{4}(t+t')\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{-t''}\right)+\theta\Big]$$

Für den Fall einer Kreisscheibe ist

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{A+t''}}{\sqrt{-t''}} = \frac{\sqrt{C}\cos\theta}{\sqrt{A}}$$

also

$$X_1 = 4\sqrt{A}\left[-\tfrac{1}{2}\log\frac{16A}{t-t'}\frac{\cos\theta}{\sqrt{A}}\left(1-\tfrac{1}{4}\frac{t+t'}{A}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{\cos\theta}{4\sqrt{A}}(t+t')\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{A}\right)\right]$$
$$= 2\cos\theta\left[-\log\frac{16A}{t-t'}\left(1-\tfrac{1}{4}\frac{t+t'}{A}\right)-\frac{(t+t')}{A}\right]$$
$$= 2\left[-\log\frac{16A}{t-t'}\left(1-\tfrac{1}{4}\frac{t+t'}{A}-\frac{(t+t'}{A}\right]\right.$$

$$Y = -2\sqrt{AB}\int_t^\infty \frac{y}{B+u}\frac{du}{R}.$$

Um auch hier den unendlich werdenden Teil abzutrennen, ersetze man $\frac{1}{B+u}$ durch $\frac{1}{B+t} - \frac{u-t}{(B+t)(B+u)}$ Da

$$T' = 2\sqrt{AB}\int_t^\infty \frac{du}{R}$$

so ist

$$Y = -\frac{y}{B+t}T' + \frac{2\sqrt{AB}}{B+t}\,y\int_t^\infty \frac{u-t}{B+u}\cdot\frac{du}{R}$$

$$Y = I + II$$

Weil

$$\frac{y}{B+t} = \frac{\sqrt{-B-t''}}{\sqrt{B(A-B)}}\cdot\frac{\sqrt{(B+t')}}{\sqrt{(B+t)}}$$

$$T' = \frac{4\sqrt{AB}}{\sqrt{(t-t'')}}\cdot\frac{\Gamma(l^2)}{i}$$

so ist

$$I = \frac{4\sqrt{A}}{\sqrt{(A-B)}}\,\frac{\sqrt{-B-t''}}{\sqrt{-t''-t}}\cdot\frac{\sqrt{B+t'}}{\sqrt{B+t}}\,iL$$
$$= \frac{4\sqrt{A}}{\sqrt{(A-B)}}\,\frac{\sqrt{(-B-t'')}}{\sqrt{-t''}}\left(1-\tfrac{1}{2}\left(\frac{t}{-t''}+\frac{t-t'}{B}\right)\right)$$
$$\times\left[\tfrac{1}{2}\log\frac{-16t''}{t-t'}\left(1-\tfrac{1}{4}\frac{t+t'}{-t''}\right)-\tfrac{1}{4}\frac{t+t'}{-t''}\right]$$

$$= \frac{4\sqrt{A}}{\sqrt{(A-B)}} \cdot \frac{\sqrt{-B-t''}}{\sqrt{-t''}} \times$$
$$\left[-\tfrac{1}{2} \log \frac{-16t''}{t-t'} \cdot \left(1 - \tfrac{1}{4} \left(\frac{t+t'}{-t''} + 2\,\frac{t-t''}{B} \right) \right) - \tfrac{1}{4}\,\frac{t-t'}{-t''} \right]$$

Um *II.* zu berechnen machen wir folgende Substitution

$$u = t - (t-t')\,S^2 v$$

also

$$S^2 v = -\frac{u-t}{t-t''} = \frac{t-u}{t-t'}$$

$$C^2 v = \frac{u-t'}{t-t'} \quad D^2 v = \frac{u-t''}{t-t'}$$

wo also v von 0 bis L wächst. Es ist nun

$$\frac{u-t}{B+u} \cdot \frac{du}{B} = -2\,\frac{t-t'}{B+t} \cdot \frac{1}{\sqrt{t-t''}} \cdot \frac{S^2 v}{1 - \frac{t-t'}{B+t} S^2 v} \cdot \frac{dv}{i}$$

Man setzo daher

$$k^2 S^2 b = \frac{t-t'}{B+t}$$

und kann dann

$$Sb = \frac{\sqrt{t-t''}}{\sqrt{B+t}}, \quad Cb = -\frac{i\sqrt{-B-t''}}{\sqrt{B+t}}, \quad Db = \frac{\sqrt{B+t'}}{\sqrt{B+t}}$$

annehmen, so dass b zwischen K und $K+L$ liegt und dass

$$k^2\,Sb\,Cb\,Db = -i\,\frac{t-t'}{B+t} \cdot \frac{\sqrt{-B-t''}}{\sqrt{t-t''}} \cdot \frac{\sqrt{B+t'}}{\sqrt{B+t}}$$

Weil

$$\frac{2\sqrt{AB}}{B+t}\,y = \frac{2\sqrt{A}}{\sqrt{A-B}} \cdot \sqrt{-B-t''} : \frac{\sqrt{B+t'}}{\sqrt{B+t}}$$

so hat man

$$\Pi = -\frac{4\sqrt{A}}{\sqrt{A-B}} \int_0^L \frac{t-t'}{B+t} \cdot \frac{\sqrt{-B-t''}}{\sqrt{(t-t'')}} \cdot \frac{\sqrt{B+t'}}{\sqrt{B+t}} \cdot \frac{S^2 v}{1-k^2 S^2 b\, S^2 v} \cdot \frac{dv}{i}$$

$$= -\frac{4\sqrt{A}}{\sqrt{(A-B)}} \int_0^L \frac{k^2\,Sb\,Cb\,Db\,S^2 v}{1-k^2 S^2 b\, S^2 v}\,dv = -\frac{4\sqrt{A}}{\sqrt{A-B}}\,\Pi(L, b)$$

$$= -\frac{4\sqrt{A}}{\sqrt{A-B}} \left(L Zb - \frac{i\pi}{2} + \frac{i\,\pi\,b}{2K} \right)$$

Wenn

$$b = K + b'$$

so ist b' nördlich lateral und liegt zwischen 0 und L. Weil

$$b' = b - K$$

so sind

$$Sb' = -S(K-b) = -\frac{Cb}{Db}, \quad Cb' = C(K-b) = l\frac{Sb}{Db}$$

$$Db' = D(K-b) = \frac{l}{Db}$$

Da nun

$$l = \frac{\sqrt{t'-t''}}{\sqrt{t-t''}}$$

so sind

$$Sb' = \frac{i\sqrt{-B-t''}}{\sqrt{B+t'}}, \quad Cb' = \frac{\sqrt{t'-t''}}{\sqrt{B+t'}} \quad Db' = \frac{\sqrt{t'-t''}}{\sqrt{(t-t'')}}\frac{\sqrt{B+t}}{\sqrt{B+t'}}$$

Aus

$$Z(K+b) = Zb' - k^2\frac{Sb'Cb'}{Db'}$$

folgt, dass

$$Zb = Zb' - i\frac{(t-t')\sqrt{(-B-t'')}}{\sqrt{(t-t'')(B+t)(B+t')}}$$

Daher ist

$$H = -\frac{4\sqrt{A}}{\sqrt{(A-B)}}\left[L\left(\frac{Zb' - i(t-t')\sqrt{(-B-t'')}}{\sqrt{(t-t'')(B+t)(B+t')}}\right) + \frac{in b'}{2K}\right]$$

Annähernde Berechnung von H. Wenn am $b' = i\chi$, so ist b' gleich

$$b' = i\int_0 \frac{d\chi}{\sqrt{(1+k^2\sin^2\chi)}} = i\int_0 (1-\tfrac{1}{2}k^2\sin^2\chi)\,d\chi$$

$$= i(\chi - \tfrac{1}{2}k^2(\sin\chi\cos\chi - \chi)).$$

Ferner ist

$$Sb' = i\sin\chi$$

also

$$\sin\chi = \frac{\sqrt{(-B-t'')}}{\sqrt{B+t'}} = \frac{\sqrt{-B-t''}}{\sqrt{B}}\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{t'}{B}\right)$$

Man setze daher

$$\sin\mu = \frac{\sqrt{-B-t''}}{\sqrt{B}}$$

folglich

$$\operatorname{cof}\mu = \frac{\sqrt{-t''}}{\sqrt{B}}$$

$$\mu = \log \frac{\sqrt{-t''}+\sqrt{-B-t''}}{\sqrt{B}}$$

Nun folgt aus obiger Formel

$$\chi = \mu - \eta$$

also

$$\operatorname{fin}\chi = \operatorname{fin}(\mu-\eta) = \operatorname{fin}\mu - \eta\operatorname{cof}\mu$$

also

$$\operatorname{cof}\mu . \eta = \operatorname{fin}\mu . \tfrac{1}{2}\frac{t'}{B}$$

oder

$$\eta = \operatorname{tg}\mu . \tfrac{1}{2}\frac{t'}{B}$$

folglich

$$\chi = \mu - \tfrac{1}{2}\frac{t'}{B}\operatorname{tg}\mu$$

oder

$$\chi = \mu - \tfrac{1}{2}\frac{t'}{B}\frac{\sqrt{-B-t''}}{\sqrt{-t''}}$$

Weil

$$\frac{\pi}{2K} = 1 - \tfrac{1}{4}k^2$$

so ist

$$\frac{i\pi b'}{2K} = -\chi + \tfrac{1}{4}k^2 \operatorname{fin}\chi\operatorname{cof}\chi$$

$$= -\mu + \tfrac{1}{4}\frac{\sqrt{-B-t''}}{\sqrt{-t''}}\left(2\frac{t'}{B}+\frac{t-t'}{B}\right)$$

$$= -\mu + \tfrac{1}{4}\frac{\sqrt{-B-t''}}{\sqrt{-t''}}\cdot\frac{t+t'}{B}$$

$$Zb' = \tfrac{1}{2}k^2 Sb'\,Cb' = \tfrac{1}{2}\frac{i(t-t')\sqrt{-B-t''}}{B\sqrt{-t''}}$$

$$Zb' - \frac{i(t-t')\sqrt{-B-t''}}{\sqrt{(t-t'')(B+t)(B+t')}} = -\tfrac{1}{2}\frac{i(t-t'')\sqrt{-B-t''}}{B\sqrt{-t''}} + \ldots$$

$$L = i.\log\frac{-16t''}{t-t'} + \ldots$$

Also

$$\Pi = \frac{4\sqrt{A}}{\sqrt{A-B}}\left(\mu - \tfrac{1}{4}\frac{\sqrt{-B-t''}}{\sqrt{-t''}}\left(\frac{t-t'}{B}\log\frac{-16t''}{t-t''}+\frac{t+t'}{B}\right)\right)$$

Endlich

$$Y = \frac{4\sqrt{A}}{\sqrt{A-B}}\left[-\tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{-B-t'}}{\sqrt{-t'}}\log\frac{-16t''}{t-t'}\cdot\left(1-\tfrac{1}{4}\frac{t+t'}{-t''}\right)\right.$$
$$\left. + \mu - \tfrac{1}{4}\frac{\sqrt{-B-t''}}{\sqrt{-t''}}\frac{B-t''}{-Bt''}(t+t')\right]$$

$$Z = -2\sqrt{AB}\int_t^\infty \frac{z}{u}\cdot\frac{du}{R}$$

Wollte man dasselbe Argument v, das durch

$$u = t-(t-t')S^2v$$

definirt war, behalten, so bekäme man wegen des Nenners u bei der Π Function k^2S^2 (Parameter) $= \dfrac{t-t'}{t} > 1$ und der Parameter läge zwischen L und $K+L$. Man kann aber einen reellen Parameter bekommen, wenn man $L-$ (früheres Argument) als Argument wählt und auch mit v bezeichnet. Dann ist

$$u = t - \frac{t-t''}{S^2v}$$

also

$$Sv = \frac{i\sqrt{t-t''}}{\sqrt{u-t}}; \quad \sqrt{u-t} = \frac{i\sqrt{t-t''}}{Sv}, \quad \sqrt{u-t'} = \bar{i}\sqrt{(t-t')}\frac{Dv}{Sv}$$

$$\sqrt{(u-t'')} = i\sqrt{(t-t')}\frac{Cv}{Sv}, \quad R = -i(t-t')^{\frac{1}{2}}\frac{Cv\,Dv}{S^3v}$$

$$du = -2(t-t')\frac{Cv\,Dv}{S^3v}dv$$

$$\frac{du}{R} = \frac{2}{\sqrt{(t-t')}}\frac{dv}{i}$$

also

$$Z = -\frac{4i\sqrt{tt't''}}{(t-t'')^{\frac{1}{2}}}\int_0^L \frac{S^2v\,dv}{1-k^2S^2cS^2v}$$

wenn z pos. und

$$k^2S^2c = \frac{t}{t-t'}$$

Für ein neg. z hätte man den entgegengesetzten Ausdruck erhalten.

Man kann

$$Sc = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{(t-t')}} \quad Cc = \frac{\sqrt{-t'}}{\sqrt{t-t'}} \quad Dc = \frac{\sqrt{-t''}}{\sqrt{(t-t'')}}$$

$$0 < c < K$$

annehmen. Dann ist

$$k^2 Sc\, Cc\, Dc = \frac{\sqrt{t\,t'\,t''}}{(t-t'')^3}$$

also

$$Z = -4i\Pi(L,c) = -4i\left(LZc\,\frac{\pi}{2K} - \frac{i\pi}{2} + \frac{i\pi c}{2K}\right)$$

Wenn t und t', folglich auch k^2, als sehr klein erster Ordnung gelten und man die zweite Ordnung, multipl. mit $\log\frac{-16t''}{t-t'}$ vernachlässigt), so kann man c durch einen Winkel ersetzen; und damit dieser in der Ebene der Scheibe ausserhalb der Ellipse verschwinde, muss er zugleich mit t', also mit Cc verschwinden. Man setze daher

$$\mathrm{am}c = \frac{\pi}{2} - \lambda$$

damit

$$\cos\lambda = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t-t'}}$$

$$\sin\lambda = \frac{\sqrt{-t'}}{\sqrt{(t-t')}}$$

werde. Dann ist

$$\frac{\pi c}{2K} = \frac{\pi}{2} - \lambda - \tfrac{1}{4}k^2\sin\lambda\cos\lambda = \frac{\pi}{2} - \lambda - \tfrac{1}{4}\frac{\sqrt{-tt'}}{-t''}$$

$$Zc = \tfrac{1}{2}k^2\sin\lambda\cos\lambda = \tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{-tt'}}{-t''}$$

$$\frac{L}{i}Zc = \tfrac{1}{4}\frac{\sqrt{-tt'}}{-t''}\log\frac{-16t''}{t-t'}$$

Da nun

$$Z = \frac{4L}{i}Zc + 4\left(\frac{\pi c}{2K} - \frac{\pi}{2}\right)$$

ist, so ergibt sich

$$Z = -4\lambda + \frac{\sqrt{-tt'}}{-t''}\left(\log\frac{-16t''}{t-t'} - 1\right)$$

Das durch den Bezugspunkt gehende zweischalige Hyperboloid (t'') schneide den Rand der Scheibe im Punkte (X, Y, 0). Den Abstand s beider Punkte kann man wegen seiner Kürze (insofern das kleine Stück des rechtwinklig schneidenden Hyperboloides als eben gilt) als kürzesten Abstand des Bezugspunktes vom Scheibenrande ansehen. Für diesen Abstand s haben wir aber früher den Ausdruck

$$s = \frac{t - t'}{2} \cdot \frac{\sqrt{-t''}}{\sqrt{AB}}$$

erhalten.

$$s \times \frac{-16t''}{t - t'} = \frac{8.(-t'')^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{AB}}$$

ist endlich. Man kann daher den Unstetigkeitslogarithmus

$$\log \frac{-16t''}{t - t'}$$

durch $\log \frac{1}{s}$ ersetzen, wenn man daneben endliche Werte vernachlässigt, wie bald in den Unendlichkeitstermen von X, Y geschehen soll. Setzt man nun für den nächsten Augenblick

$$r^2 = (x - X)^2 + (y - Y)^2$$

wo

$$x = \frac{\sqrt{(A+t)(A+t')(A+t'')}}{\sqrt{A(A-B)}} = X\left(1 + \frac{t+t'}{2A}\right) = X + \frac{t+t'}{2A} \frac{\sqrt{A(A+t'')}}{\sqrt{(A-B)}}$$

$$y = \frac{\sqrt{(B+t)(B+t')(-B-t'')}}{\sqrt{B(A-B)}} = Y\left(1 + \frac{t+t'}{2B}\right)$$

$$= Y + \frac{t+t'}{2B} \cdot \frac{\sqrt{B(-B-t'')}}{\sqrt{(A-B)}}$$

also

$$x - X = \frac{t+t'}{2\sqrt{AB}\sqrt{(A-B)}} \cdot \sqrt{B(A+t'')}$$

$$y - Y = \frac{t+t'}{2\sqrt{AB}\sqrt{(A-B)}} \cdot \sqrt{A(-B-t'')}$$

und

$$(x - X)^2 + (y - Y)^2 = \frac{(t+t')^2(-t'')}{4AB}$$

folglich

$$r = \frac{t+t'}{2} \cdot \frac{\sqrt{-t''}}{\sqrt{AB}}$$

Man kann sich r als Projection der kleinen Strecke s auf die Ebene der Ellipse denken. Weil s im Raume normal zur Ellipse ist, so ist es auch r in deren Ebene. Wenn $t' = 0$, so liegt der Punkt (x, y, z) in der Ebene der Ellipse ausserhalb der Curve, und r ist dann pos. Die Proj. des Punktes liegt also ausserhalb, wenn $t + t'$ pos., innerhalb, wenn $t + t'$, folglich auch r, neg. ist. r und z sind Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, s dessen Hypotenuse. Der Cosinus des Winkels, den s mit r bildet, ist

$$\frac{r}{s} = \frac{t+t'}{t-t'}.$$

Weil aber

$$\cos\lambda = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{(t-t')}},$$

$$\sin\lambda = \frac{\sqrt{-t'}}{\sqrt{(t-t')}}$$

so ist

$$\frac{t+t'}{t-t'} = \cos^2\lambda - \sin^2\lambda = \cos 2\lambda$$

die Strecke s bildet also mit der nach aussen gerichteten (in deren Ebene befindlichen) Normale der Ellipse den Winkel 2λ; man hat

$$r = s\cos 2\lambda, \quad z = s\sin 2\lambda$$

In tiefster Näherung ist

$Z = -4\lambda$ (wenn man das weglässt, was im Rande verschwindet.

Wenn nun der Winkel 2λ von $-\pi$ bis zu $+\pi$ wächst, so dass die Strecke s um den Punkt des Randes, von dem sie ausgeht, eine ganze pos. Drehung ausführt, so nimmt die Kraftcomp. Z ununterbrochen von 2π bis auf -2π ab.

Bedeutet μ den Winkel, den die Normale der Ellipse mit der x Axe bildet, so ist

$$x - X = r\cos\mu, \quad y - Y = r\sin\mu$$

folglich

$$\cos\mu = \frac{\sqrt{B(A+t'')}}{\sqrt{(A-B)(-t'')}}$$

$$\sin\mu = \frac{\sqrt{A(-B-t'')}}{\sqrt{(A-B)(-t'')}}$$

Die unendlich werdenden Anfangsterme der Ausdrücke für die zwei ersten Abgeleiteten (Kraftcomp.) waren aber

$$X = -\frac{2\sqrt{B(A+t'')}}{\sqrt{(A-B)(-t'')}}\log\frac{-16t''}{t-t'}$$

$$Y = -\frac{2\sqrt{A(-B-t'')}}{\sqrt{(A-B)(-t'')}}\log\frac{-16t''}{t-t'}$$

und für diese kann man also auch

$$X = -2\cos\mu \log \frac{1}{\varepsilon}, \quad Y = -\sin\mu \log \frac{1}{\varepsilon}$$

setzen.

Aus der allgemeinen Theorie des Potentials ist bekannt, dass die Kraftcomponente eine Fläche, welche mit Masse von variabler Dichtigkeit belegt ist, in der Richtung der Normale sich beim Durchgange durch dieselbe sprungweise ändert und zwar um $4\pi\varrho$, wenn ϱ die Dichtigkeit im Durchgangspunkte bezeichnet, und die Fläche in neg. Richtung passirt wird. Dieser Satz wird gewöhnlich mittelst des Gaussischen Lehrsatzes bewiesen; allein er kann auch durch eine einfache Integration gefunden werden. Zu diesem Zwecke grenze ich auf der Fläche ein kleines, kreisförmiges Element ab und errichte im Mittelpunkte derselben eine Normale, deren pos. Seite nach aussen gerichtet sein soll. Es ist nun zu untersuchen, was aus der Kraftcomp. in der Richtung dieser Normale für den Durchgangsp. wird, wenn die Fläche in pos. oder neg. Sinne von dem Bezugspunkte passirt wird. Liegt der Bezugspunkt auf der pos. Seite der Normale, so sei die Kraftcomp. der Fläche in der Richtg. der Normale mit $\overset{+}{N}$, liegt er aber auf der neg. Seite, so sei sie mit $\overset{-}{N}$ bezeichnet. Wird nun die Normale von dem Bezugspunkte in pos. Sinne durchlaufen, so erhält man für den Durchgangsp.

$$\overset{+}{N} = A_0 + a$$

wo A_0 die Kraftcomp. des ausserhalb der kleinen Kreisscheibe liegenden Teiles der Fläche ist, während sich a nur auf die abgegrenzte Kreisscheibe bezieht. Wird hingegen die Fläche in neg. Sinne passirt, so erhält man für den Durchgangsp.

$$\overset{-}{N} = A_0 + a_1$$

wo sich a_1 nur auf das kleine abgegrenzte Flächenstück bezieht. Der Unterschied ist also

$$\overset{+}{N} - \overset{-}{N} = a - a_1$$

und man hat nun noch die a zu berechnen. Der Mittelpunkt des abgegrenzten, kreisförmigen Flächenelementes werde als Ursprung eines neuen Coordinatensystems gewählt, dessen pos. z Axe mit der pos. Normale zusammenfällt. Der Bezugsp. hat dann die Coordinaten $(0, 0, z)$. a sei der Radius der Scheibe, r die Entfernung des Bezugspunktes von einem Punkte derselben und h Radius eines auf dem Flächenelemente liegenden Kreises, wo $0 < h < a$. Das Flächenelement der Kreisscheibe ist demnach $2\pi h\,dh$, und weil für die-

selbe ϱ als constant angesehen werden kann, so ist das Potential derselben

$$\text{Pot.} = 2\pi\varrho \int_0^a \frac{h\,dh}{r}$$

Nun ist

$$r^2 = h^2 + z^2$$

also

$$r\,dr = h\,dh$$

folglich ist für ein pos. z

$$\overset{+}{\text{Pot.}} = 2\pi\varrho \int_z^{\sqrt{a^2+z^2}} dr = 2\pi\varrho\,(\sqrt{a^2+z^2} - z)$$

und für ein neg. z

$$\overset{-}{\text{Pot.}} = 2\pi\varrho\,(\sqrt{a^2+z^2} + z) \quad \text{also für} \quad z = 0$$

$$\text{Pot.} = 2\pi\varrho\,a$$

Das Potential einer stetig gekrümmten, mit Masse von variabler Dichtigkeit belegten Fläche hat also keine Unstetigkeitspunkte. Aus obigen Formeln für das Potential folgt

$$\frac{\partial \overset{+}{\text{Pot.}}}{\partial z} = 2\pi\varrho\left(\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}} - 1\right), \quad \frac{\partial \overset{-}{\text{Pot.}}}{\partial z} = 2\pi\varrho\left(\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}} + 1\right)$$

und also für den Ursprung

$$\frac{\partial \overset{+}{\text{Pot.}}}{\partial z} = -2\pi\varrho, \quad \frac{\partial \overset{-}{\text{Pot.}}}{\partial z} = 2\pi\varrho$$

Es ist demnach

$$a = -2\pi\varrho \quad \text{und} \quad a_1 = 2\pi\varrho$$

folglich

$$\overset{+}{N} = A_0 - 2\pi\varrho, \quad \overset{-}{N} = A_0 + 2\pi\varrho$$

also

$$\overset{+}{N} - \overset{-}{N} = -4\pi\varrho$$

Auf diesen Satz nun soll die Kraftcomp. Z der elliptischen Scheibe geprüft werden. Wir hatten

$$Z = -\sqrt{AB}\int \frac{z}{u} - \frac{du}{R}$$ (Weg eine rückläufige Schlinge aus dem Ostp. allein um den Pol t).

Durch Einschalten des Horizontes in die Schlinge erhält man nun

$$Z = -i\sqrt{AB}\int \frac{z}{u}\cdot\frac{du}{R} \qquad \text{(Weg ein kleiner rücklänfiger Kreis allein nm den Pol 0)}$$

$$+i\sqrt{AB}\int \frac{z}{(-u)}\,\frac{du}{R'} \qquad \text{(Weg eine Curve um die Pole } t' \text{ nnd } t'')$$

nnd nach Canchy erhält man demnach für ein pos. z

$$Z = -2\pi + i\sqrt{AB}\int \frac{z}{(-u)}\cdot\frac{du}{R'} \qquad \text{(Weg wie oben)}$$

nnd für ein neg. z

$$\bar{Z} = 2\pi - i\sqrt{AB}\int \frac{z}{-u}\cdot\frac{du}{R'} \qquad \text{(Weg wie vorhin)}$$

Da nnn die Integrale anch für $z = 0$ einen endlichen Wert behalten, so verschwinden für diesen Fall die zweiten Terme, nnd man bekommt für einen Pnnkt der Scheibe

$$\overset{+}{Z} = -2\pi, \quad \bar{Z} = +2\pi$$

also

$$\overset{+}{Z} - \bar{Z} = -4\pi$$

was der Dichtigkeit 1 entspricht.

§. 14. Berechnung des Differentialparameters zweiter Ordnung.

Um den Differentialparameter zu berechnen, gehe ich von den Integralausdrücken der ersten Abgeleiteten aus nnd benntze als Integrationsweg die Schlinge, welche aus dem Ostpnnkte allein nm den Pol t geworfen ist. Weil für alle Pnnkte der Randellipse die Comp. X und Y unendlich werden nnd die ganze elliptische Scheibe für die Comp. Z eine Unstetigkeitsfläche ist, so müssen wir alle diese Punkte von der nachfolgenden Betrachtnng ausschliessen. Weil

$$\frac{\partial\frac{1}{W}}{\partial x} = -\frac{1}{W^2}\cdot\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{1}{W^3}\cdot\frac{x}{A+u}, \qquad \frac{\partial\frac{1}{W}}{\partial y} = \frac{1}{W^3}\cdot\frac{y}{B+u}$$

$$\frac{\partial\frac{1}{W}}{\partial z} = \frac{1}{W^3}\cdot\frac{z}{u}$$

so ist

$$\frac{\partial X}{\partial x} = -\sqrt{AB}\int\left(\frac{x}{A+u}\right)^2\cdot\frac{du}{UW^3} - \sqrt{AB}\int\frac{1}{A+u}\cdot\frac{du}{UW}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = -\sqrt{AB}\int\left(\frac{y}{B+u}\right)^2\cdot\frac{du}{UW^3} - \sqrt{AB}\int\frac{1}{B+u}\cdot\frac{du}{UW}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = -\sqrt{AB}\int\left(\frac{z}{u}\right)^2\cdot\frac{du}{UW^3} - \sqrt{AB}\int\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{UW}$$

(Weg wie früher)

folglich

$$\Sigma\frac{\partial X}{\partial x} = -\sqrt{AB}\int\Sigma\left(\frac{x}{A+u}\right)^2\cdot\frac{\partial u}{UW^3} - \sqrt{AB}\int\Sigma\left(\frac{1}{A+u}\right)\cdot\frac{du}{UW}$$

Nun ist

$$\Sigma\left(\frac{x}{A+u}\right)^2 = 2W\cdot\frac{\partial W}{\partial u}$$

$$\Sigma\frac{1}{A+u} = \frac{\partial\log U^2}{\partial u} = \frac{2}{U}\cdot\frac{\partial U}{\partial u}$$

also

$$\Sigma\frac{\partial X}{\partial x} = 2\sqrt{AB}\int\left(\frac{1}{U}\cdot\frac{\partial\frac{1}{W}}{\partial u} + \frac{1}{W}\cdot\frac{\partial\frac{1}{U}}{\partial u}\right)du$$

$$= \left[2\sqrt{AB}\cdot\frac{1}{UW}\right]_{\text{Anfangsw.}}^{\text{Endwert}} = 0$$

oder

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0$$

§. 15. Das Potential einer elliptischen Scheibe von der Dichtigkeit 1 ist eine homogene Function 1. Grades der Grössen $\sqrt{A}$, $\sqrt{B}$, x, y, z.

Wenn in der Formel

$$P = 2\sqrt{AB}\int_i^\infty\frac{W}{U}\,du$$

die Elemente $\sqrt{A}$, $\sqrt{B}$, x, y, z resp. durch $\alpha\sqrt{A'}$, $\alpha\sqrt{B'}$, $\alpha x'$, $\alpha y'$, $\alpha z'$ ersetzt werden, dann geht dieselbe in

$$P = 2\alpha\sqrt{A'B'}\int_{i'}^\infty\frac{W'}{U'}\,du$$

über nnd somit ist P eine homogene Fnnction 1. Grades $\sqrt{A}$, $\sqrt{B}$, x, y, z. Also ist

$$P = \sqrt{A}\frac{\partial P}{\partial \sqrt{A}} + \sqrt{B}\frac{\partial P}{\partial \sqrt{B}} + x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y} + z\frac{\partial P}{\partial z}$$

Diese Formol erhält man anch auf folgende Weise:

Das Potential einer ellipt. Scheibe, begrenzt von der Ellipse

$$\frac{X^2}{A\alpha^2} + \frac{Y^2}{B\alpha^2} = 1$$

ist nach Früherom

$$P_1 = 2\alpha^2\sqrt{AB}\int_t^\infty \frac{W_1}{U_1}\,du$$

wenn

$$W_1^2 = 1 - \frac{x^2}{A\alpha^2+u} - \frac{y^2}{B\alpha^2+u} - \frac{z^2}{u}$$

$$U_1^2 = (A\alpha^2+u)(B\alpha^2+u)u$$

Ersetzt man nun u nnd t dnrch $\alpha^2 u$ nnd $\alpha^2 t$ nnd sotzt

$$\alpha^2 W_1^2 = \overline{W}^2 = \alpha^2 - \frac{x^2}{A+u} - \frac{y^2}{B+u} - \frac{z^2}{u}$$

dann erhält man

$$P_1 = 2\sqrt{AB}\int_{t_1}^\infty \frac{\overline{W}}{\overline{U}}\,du$$

somit ist

$$\frac{\partial P_1}{\partial \alpha} = 2\sqrt{AB}\int_{t_1}^\infty \frac{\alpha}{WU}\,du = \sqrt{A}\frac{\partial P_1}{\partial(\sqrt{A'}\alpha^2)} + \sqrt{B}\frac{\partial P_1}{\partial(\sqrt{B'}\alpha)}$$

folglich

$$\frac{\partial P}{\partial \alpha} = 2\sqrt{AB}\int_t^\infty \frac{1}{WU}\,du = \sqrt{A}\frac{\partial P}{\partial \sqrt{A}} + \sqrt{B}\frac{\partial P}{\partial \sqrt{B}}$$

was zn erwarten war. Nun ist

$$xX + yY + zZ = 2\sqrt{AB}\int_t^\infty \frac{W}{U}\,du - 2\sqrt{AB}\int_t^\infty \frac{du}{UW}$$

demnach

$$P = xX + yY + zZ + \sqrt{A}\frac{\partial P}{\partial \sqrt{A}} + \sqrt{B}\frac{\partial P}{\partial \sqrt{B}}$$

V. Potential einer elliptischen Scheibe von der Dichtigkeit 1, deren Punkte den Gleichungen

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}\leqq 1,\ z=0$$

genügen, abgeleitet mittelst des discontinuirlichen Factors von Dirichlet.

Die Coordinaten des Bezugspunktes seien a, b, c; diejenigen eines Punktes der elliptischen Scheibe x und y. Wird die Entfernung dieser beiden Punkte mit r bezeichnet, so ist eine erste Form des Potentials

$$I \qquad \text{Pot.} = \int\int \frac{dx\,dy}{r}$$

wo sich die Integration über alle Punkte der Scheibe ausdehnt. Bedeutet nun N eine pos. sehr grosse Zahl, so ist

$$II \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{\pi}\int_0^N e^{-r^2\chi}\,\chi^{-\frac{1}{2}}\,d\chi$$

Ich betrachte nun das Integral $\int \frac{e^{bt}-e^{at}}{t^{1+c}}\,dt$. Der Weg derselben sei eine aus dem Westpunkte um den Pol 0 geworfene, rechtläufige Schlinge. Sind die reellen Comp. von a und b pos. und ist c ein ächter pos. Bruch, so lässt sich der Weg auf die Realitätslinie zwischen $-\infty$ und 0 zusammenziehen und weil

$$e^{i\pi(1+c)}\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{bt}-e^{at}}{(-t)^{1+c}}\,dt = e^{i\pi(1+c)}\int_0^{\infty}\frac{e^{-bt}-e^{-at}}{t^{1+c}}\,dt$$

$$e^{-i\pi(1+c)}\int_0^{-\infty}\frac{e^{bt}-e^{at}}{(-t)^{1+c}}\,dt = -e^{-i\pi(1+c)}\int_0^{\infty}\frac{e^{-bt}-e^{-at}}{t^{1+c}}\,dt$$

so ist (wenn $-\infty \ldots 0$ eine aus dem Westpunkte um den Pol 0 geworfene Schlinge als Weg bezeichnet)

$$\int_{-\infty\ldots 0}\frac{e^{bt}-e^{at}}{t^{1+c}}\,dt = (e^{i\pi(1+c)}-e^{-i\pi(1+c)})\int_0^{\infty}\frac{e^{-bt}-e^{-at}}{t^{1+c}}\,dt$$

$$= -2i\pi\,\frac{\sin\pi c}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{-bt}-e^{-at}}{t^{1+c}}\,dt$$

$$III \qquad = -\frac{2i\pi}{\Gamma(c)\Gamma(1-c)}\int_0^\infty \frac{e^{-bt}-e^{-at}}{t^{1+c}}\,dt$$

Weil

$$\int_{-\infty\ldots 0} e^{bt}\,t^{-(1+c)}\,dt = b^c \int_{-\infty\ldots 0} e^{-bt}\,(bt)^{-(1+c)}\,d(bt)$$

also nach einem bekannten Satze

$$\int_{-\infty\ldots 0} e^{bt}\,t^{-(1+c)}\,dt = \frac{2i\,\pi b^c}{\Gamma(1+c)}$$

ebenso ist

$$\int_{-\infty\ldots 0} e^{at}\,t^{-(1+c)}\,dt = \frac{2i\,\pi a^c}{\Gamma(1+c)}$$

und somit

$$IV \qquad \int_{-\infty\ldots 0} \frac{e^{bt}-e^{at}}{t^{1+c}}\,dt = \frac{2i\pi(b^c-a^c)}{\Gamma(1+c)}$$

also nach Formel III

$$V \qquad \int_0^\infty \frac{e^{-bt}-e^{-at}}{t^{1+c}}\,dt = \Gamma(1+c)\,.\,\frac{(a^c-b^c)}{c}$$

folglich auch

$$VI \qquad \int_0^\infty \frac{e^{-bt}-e^{-at}}{t}\,dt = \log\frac{a}{b}$$

Die imaginäre Comp. dieses Log. werde ausgedrückt durch die Grösse der Drehung des Strahles von 0 nach b bis zum Punkte a. Ich setze nun $b = -ig-i$, $a = -ig+i$, g sei eine pos. reelle Zahl. Dann folgt aus VI für den Fall, dass $g > 1$ ist

$$\int_0^\infty e^{igt}\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{t}\right)dt = \log\frac{g-1}{g+1}$$

also

$$1) \quad 2i\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,e^{igt}\,dt = \log\frac{g-1}{g+1}$$

somit auch

$$2) \quad -2i\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,e^{-igt}\,dt = \log\frac{g-1}{g+1}$$

Aus 1) und 2) folgt

VII $$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,(e^{igt}+e^{-igt})\,dt = 0$$

Ist hingegen $0 < g < 1$, so folgt aus VI

$$3)\quad 2i\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,e^{igt}\,dt = \log\frac{1-g}{1+g} + i\pi$$

und hieraus

$$4)\quad -2i\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,e^{-igt}\,dt = \log\frac{1-g}{1+g} - i\pi$$

somit nach 3) und 4)

VIII $$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,(e^{igt}+e^{-igt})\,dt = 1$$

Das Integral $\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}(e^{igt}+e^{-igt})\,dt$ nennt man den discontinuirlichen Factor von Dirichlet. Ist in demselben $0 < g < 1$, so ist der Wert 1, und ist $1 < g$, so ist derselbe 0. Wird nun in dem Ausdrucke I für das Potential $\frac{1}{r}$ durch das Integral der Formel II ersetzt und ist

$$g = \frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B},\quad \Omega = r^2\chi - ig\varphi,\quad \Omega' = r^2\chi + ig\varphi$$

so kann man dem Potentiale der elliptischen Scheibe folgende Form geben

IX $$\text{Pot.} = \frac{1}{\pi^2}\iiiint \frac{\sin\varphi}{\varphi}\,\chi^{-\frac{1}{2}}(e^{-\Omega}+e^{-\Omega'})\,dx\,dy\,d\varphi\,d\chi$$

In diesem Ausdrucke laufen die Variabeln φ und χ von 0 bis $+\infty$, und die Integration nach x und y erstreckt sich über die ganze Ebene $z = 0$. Setzt man

$$\mathfrak{A} = \frac{\sqrt{A\chi - i\varphi}}{\sqrt{A}}\,x - \frac{\sqrt{A}\,a\chi}{\sqrt{A\chi - i\varphi}},\qquad \mathfrak{B} = \frac{\sqrt{B\chi - i\varphi}}{\sqrt{B}}\,y - \frac{\sqrt{B}\,b\chi}{\sqrt{B\chi - i\varphi}}$$

$$\mathfrak{S} = \frac{-ia^2\chi}{\sqrt{(A\chi - i\varphi)^2}} + \frac{-ib^2\chi}{B\chi - i\varphi} + \frac{c^2\chi}{\varphi}$$

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{\sqrt{A\chi+i\varphi}}{\sqrt{A}}x - \frac{\sqrt{A}a\chi}{\sqrt{A\chi+i\varphi}}, \quad \mathfrak{B}_1 = \frac{\sqrt{B\chi+i\varphi}}{\sqrt{B}}y - \frac{\sqrt{B}b\chi}{\sqrt{B\chi+i\varphi}}$$

$$S_1 = \frac{ia^2\chi}{A\chi+i\varphi} + \frac{ib^2\chi}{B\chi+i\varphi} + \frac{c^2\chi}{\varphi}$$

und versteht $\sqrt{A}$, $\sqrt{B}$ und ebenso die reellen Comp. von $\sqrt{A\chi-i\varphi}$, $\sqrt{B\chi-i\varphi}$ pos., so ist, weil

$$r^2 = (x-a)^2+(y-b)^2+c^2, \quad g = \frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B} \text{ ist,}$$

$$\Omega = \mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+S\varphi, \quad \Omega' = \mathfrak{A}_1^2+\mathfrak{B}_1^2+S_1\varphi$$

In Formel IX integrire ich zuerst nach x und dann nach y nnd setze

$$u = \frac{\sqrt{A\chi-i\varphi}}{\sqrt{A}}x - \frac{\sqrt{A}a\chi}{\sqrt{A\chi-i\varphi}}, \quad du = \frac{\sqrt{A\chi-i\varphi}}{\sqrt{A}}dx$$

Durchläuft nun x die Realitätslinie vom Westpunkte bis zum Ostpunkte, so durchläuft u eine neue Gerade, welche die R. L. unter einem Winkel schneidet, der kleiner als $\frac{\pi}{4}$ ist. Der Anfang dieses Weges werde mit dem Westpunkte und das Ende mit dem Ostpunkte verbunden und weil nun die Elemente des Integrals $\int e^{-u}\,du$ in diesen Punkten des Horizontes sehr klein sind, und innerhalb der R. L. und des Weges von u keine kritischen Punkte vorhanden sind, so lässt sich der Weg von u wieder in die R. L. verlegen und man hat

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mathfrak{A}^2}dx = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A\chi-i\varphi}}\int_{=\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{2\sqrt{A}}{\sqrt{A\chi-i\varphi}}\int_0^{\infty} e^{-u^2}du$$

$$= \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A\chi-i\varphi}}\int_0^{\infty} e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt$$

$$= \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A\chi-i\varphi}}\Gamma(\tfrac{1}{2})$$

Ebenso ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mathfrak{A}^2}dx = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A\chi+i\varphi}}\Gamma(\tfrac{1}{2}), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mathfrak{B}^2}dy = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B\chi-i\varphi}}\Gamma(\tfrac{1}{2})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mathfrak{B}_1^2}dy = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B\chi+i\varphi}}\Gamma(\tfrac{1}{2})$$

somit

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{-(\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+S\varphi)}+e^{-(\mathfrak{A}_1^2+\mathfrak{B}_1^2+S_1\varphi)})dx\,dy$$

$$=\sqrt{AB}\,\pi\left(\frac{e^{-S\varphi}}{\sqrt{(A\chi-i\varphi)(B\chi-i\varphi)}}+\frac{e^{-S_1\varphi}}{\sqrt{(A\chi+i\varphi)(B\chi+i\varphi)}}\right)$$

und demnach

$$X\ \text{Pot.}=\frac{\sqrt{AB}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\sin\varphi}{\varphi}\chi^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{e^{-S\varphi}}{\sqrt{(A\chi-i\varphi)(B\chi-i\varphi)}}\right.$$

$$\left.+\frac{e^{-S_1\varphi}}{\sqrt{(A\chi+i\varphi)(B\chi+i\varphi)}}\right)d\varphi\,d\chi$$

Um eine fernere Integration ausführen zu können, setze man

$$s=\frac{\varphi}{\chi},\quad d\chi=-\frac{\varphi}{s^2}ds$$

$$S=-\frac{ia^2}{A-is}+\frac{-ib^2}{B-is}+\frac{c^2}{s}$$

somit

$$\text{Pot.}=\frac{\sqrt{AB}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\sin\varphi}{\varphi^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{e^{-S\varphi}}{\sqrt{(A-is)(B-is)}}\right.$$

$$\left.+\frac{e^{-S_1\varphi}}{\sqrt{(A+is)(B+is)}}\right)\frac{ds\,d\varphi}{\sqrt{s}}$$

Ich integrire nnn nach φ. Es ist

$$\int_0^\infty\frac{\sin\varphi}{\varphi^{\frac{1}{2}}}e^{-S\varphi}d\varphi=\frac{1}{2i}\int_0^\infty\left(\frac{e^{-(S-i)\varphi}-e^{-(S_1+i)\varphi}}{\varphi^{\frac{1}{2}}}\right)d\varphi$$

und weil die reellen Comp. von $S-i$ nnd $S+i$ pos. sind, so erhält man die Formel V

$$\int_0^\infty\frac{\sin\varphi}{\varphi^{\frac{1}{2}}}e^{-S\varphi}d\varphi=\Gamma(\tfrac{1}{2})\cdot\left(\frac{\sqrt{S+i}-\sqrt{S-i}}{i}\right)$$

und

$$\int_0^\infty\frac{\sin\varphi}{\varphi^{\frac{1}{2}}}e^{-S_1\varphi}d\varphi=\Gamma(\tfrac{1}{2})\frac{\sqrt{S_1+i}-\sqrt{S_1-i}}{i}$$

folglich

$$XI \quad \text{Pot.} = \sqrt{AB}\int_0^\infty \left(\frac{\sqrt{S+i}-\sqrt{S-i}}{i\sqrt{(A-is)\,(B-is)}}\right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{S_1+i}-\sqrt{S_1-i}}{i\sqrt{(A+is)\,(B+is)}}\right)\frac{ds}{\sqrt{s}}$$

oder auch

$$\text{Pot.} = \sqrt{AB}\int_0^\infty \frac{\sqrt{S+i}-\sqrt{S-i}}{i\sqrt{(A-is)(B-is)}}\cdot\frac{ds}{\sqrt{s}}$$

$$+\sqrt{AB}\int_0^\infty \frac{\sqrt{S_1+i}-\sqrt{S_1-i}}{i\sqrt{(A+is)(B+is)}}\cdot\frac{ds}{\sqrt{s}}$$

weil beide Integrale für sich convergiren. Die reellen Comp. der Quadratwurzeln $\sqrt{S+i}$, $\sqrt{S-i}$ werden auf diesem Wege von s pos. verstanden, und im übrigen überlasse ich es dem Leser, aus der Continuität die Bedeutung derselben für andere Lagen von s zu beurteilen.

Das Integral $\int \frac{\sqrt{S+i}-\sqrt{S-i}}{i\sqrt{(A-is)(B-is)}}\cdot\frac{ds}{\sqrt{s}}$ verschwindet im Horizonte wie $\frac{1}{\sqrt{s}}$. Man setze deshalb den geradlinigen Integrationsweg im Ostpunkte des Horizontes bis zum Nordpunkte fort, um die Nordhälfte der lateralen Axe zum neuen Integrationswege zu machen. Hier setze ich nun

$$s = e^{i\frac{\pi}{2}}u$$

durchläuft nun s von 0 aus die Nordhhälfte der lateralen Axe, so u von 0 aus der Osthälfte der Realitätslinie. Ist nun t die Wurzel der Gleichung:

$$\frac{a^2}{A+u}+\frac{b^2}{B+u}+\frac{c^2}{u}=1$$

die dem Ellipsoid entspricht, das durch den Punkt (a, b, c) geht, so ist für das Intervall $0 < u < t$ die Grösse T stets grösser als 1 und für $t < u$ ist T kleiner als 1, wenn

$$T=\frac{a^2}{A+u}+\frac{b^2}{B+u}+\frac{c^2}{u}$$

gesetzt wird. Für das Intervall $0 < u < t$ hat man demnach:

$$\log(S+i) = \log(T-1) - \frac{i\pi}{2},$$

$$\log(S-i) = \log(T+1) - \frac{i\pi}{2}$$

und für $t < u$ ist

$$\log(S+i) = \log(1-T) + \frac{i\pi}{2},$$

$$\log(S-i) = \log(1+T) - \frac{i\pi}{2}$$

wo die Logarithmen von $T-1$, $1-T$, etc. reell verstanden werden. Man findet somit

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{S+i}-\sqrt{S-i}}{i\sqrt{(A-is)(B-is)}} \cdot \frac{ds}{\sqrt{s}} = e^{-i\frac{\pi}{2}} \int_0^t \frac{\sqrt{T-1}-\sqrt{T+1}}{\sqrt{(A+u)(B+u)u}}\,du$$

$$-i\frac{\pi}{2} \int_t^\infty \frac{\sqrt{1-T}\,e - \sqrt{1+T}}{\sqrt{(A+u)(B+u)u}}\,du$$

Um das zweite Integral der Formel XI) auf ähnliche Art umzuformen, setze man den Integrationsweg im Horizonte vom Ostpunkte bis zum Südpunkte fort und verlege den neuen Weg auf die Südhälfte der lateralen Axe. Hier setze man

$$s = e^{-i\frac{\pi}{2}} u$$

für $0 < u < t$ ist

$$\log(S_1+i) = \log(T+1) + \frac{i\pi}{2}$$

$$\log(S_1-i) = \log(T-1) + \frac{i\pi}{2}$$

und für $t < u$ hat man

$$\log(S_1+i) = \log(T+1)+\frac{i\pi}{2},$$

$$\log(S_1-i) = \log(1-T)-\frac{i\pi}{2}$$

wo die Logarithmen von $T+1$, $1-T$, etc. reell verstanden werden. Es ist somit

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{S_1+i}-\sqrt{S_1-i}}{i\sqrt{(A+iS)(B+iS)}}\cdot\frac{ds}{\sqrt{s}} = e^{-i\frac{\pi}{2}}\int_0^t \frac{\sqrt{T+1}-\sqrt{1-T}}{\sqrt{(A+u)(B+u)u}}du + e^{-i\frac{\pi}{2}}\int_t^\infty \frac{\sqrt{1+T}+e^{i\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-T}}{\sqrt{(A+u)(B+u)u}}du$$

folglich nach Formel XI)

$$XII.\quad \text{Pot.} = 2\sqrt{AB}\int_t^\infty \frac{\sqrt{1-\left(\frac{a^2}{A+u}+\frac{b^2}{B+u}+\frac{c^2}{u}\right)}}{\sqrt{(A+u)(B+u)u}}du$$

Fortsetzung folgt später.

XIV.

Determinanten bei wiederholter Halbirung des ganzen Winkels.

Von

J. Hermes.

Auf die hier betrachteten Determinanten wird man bei Untersuchungen über construirbare Ecke geführt und können dieselben auch als Verallgemeinerung der Formel

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

für gewisse specielle Winkel aufgefasst werden.

Die zu Grunde liegende Figur ist eine sehr einfache, nämlich ein regelmässiges Strahlenbüschel (Stern) mit wiederholt-gerader Strahlenanzahl.

„Bezeichnet α einen Winkel, der durch wiederholte Halbirung des ganzen Winkels 2π entstanden ist, also $\alpha = \frac{2\pi}{2^\nu}$, ferner $u\alpha$ ein ungerades Vielfache dieses Winkels, wo u die Werte 1, 3, 5 ... $(2^{\nu-2}-1)$ annimmt, und wird nun eine Determinante gebildet, deren erste Colonne der Reihe nach die $\cos(u\alpha)$, deren zweite $\cos(3u\alpha)$ etc., deren letzte $\cos(\lambda u\alpha)$ für $\lambda = 2^{\nu-2}-1$ enthält, so stellt der numerische Wert dieser Determinante, falls $\nu \geqq 3$, eine Potenz von zwei dar, verschwindet [1]) aber für einen doppelt so grossen Wert des Winkels."

1) Vgl. Balzer, Determinanten § 17, 3

Die wievielte Potenz von 2 wird wol hiebei erhalten?

Beginnen wir mit $\nu = 4$.

Die Determinante D_4 wird dann:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos(3\alpha) \\ \cos(3\alpha) & \cos(9\alpha) \end{vmatrix} \quad \text{für} \quad \alpha = \frac{2\pi}{2^4} = \frac{\pi}{8}$$

Da

$$\cos(9\alpha) = \cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) = -\cos\alpha$$

ist, und $\sin\alpha$ statt $\cos(3\alpha)$ gesetzt werden kann, so wird

$$D_4 = -\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -1$$

also

$$-D_4 = 1 = 2^0$$

Wir können aber auch diese Determinante dadurch ausrechnen, dass wir die erste Colonne zur letzten legen und

$$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

anwenden. Indem

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

und zur Abkürzung

$$\cos(m\alpha) = c_m$$

gesetzt wird, ergiebt sich

$$-D_4 = -\sqrt{2}\begin{vmatrix} c_1 & c_1 \\ c_3 & -c_3 \end{vmatrix} = 2\sqrt{2}c_1c_3 = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} = 1 = 2^0$$

wie vorhin.

Dass D_4 für einen doppelt so grossen Winkel $\alpha = \frac{\pi}{4}$ verschwindet, folgt für D_4 (wie auch allgemein für D_ν) daraus, dass dann an Stelle von

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

der Factor $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ tritt.

Für $\nu = 5$, also

$$\alpha = \frac{2\pi}{2^5} = \frac{\pi}{16}$$

wird D_5, indem Zeilen und Colonnen zunächst umgestellt werden mögen,

$$= \begin{vmatrix} c_1 & c_7 & c_3 & c_5 \\ c_7 & + & + & + \\ c_3 & + & + & + \\ c_5 & + & + & + \end{vmatrix}$$

wobei die mit + ausgefüllten Stellen stets ein $+c_n$ enthalten sollen, dessen Numer n das Product der Numern ist, welche die in der betreffenden Zeile und Colonne am Anfange befindlichen c haben.

Wird nun die erste Zeile zur zweiten, die dritte zur vierten gelegt und der Factor $\sqrt{2^3}$ vorgezogen, so erhält man:

$$D_5 = \sqrt{2^3} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & c_7 & c_3 & c_5 \\ c_3 & + & - & - \\ c_5 & + & + & + \\ c_1 & + & - & - \end{vmatrix}$$

Hier deutet das minus an, dass das an der Stelle befindliche c_n negativ zu nehmen ist.

Es wird sich also die Determinante, wenn die vierte Zeile zur ersten, die dritte zur zweiten gelegt und sodann der Factor 2 aus beiden Zeilen herausgezogen wird, als das Product zweier Partialdeterminanten darstellen:

$$D_5 = 2^2\sqrt{2^3} \begin{vmatrix} c_1 & c_7 \\ c_3 & + \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_3 & c_5 \\ + & + \end{vmatrix} = 2\sqrt{2^3} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \begin{vmatrix} c_1 & c_3 \\ c_3 & - \end{vmatrix}^2$$

falls man mit den Colonnen, wie vorhin mit den Zeilen verfährt. Nun ist

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_3 \\ c_3 & -c_9 \end{vmatrix} = -c_1 c_9 - c_3 c_3 = \tfrac{1}{2}\{-c_{10} - c_8 - c_0 - c_6\}$$
$$= -\tfrac{1}{2}(c_8 + c_0) = -c_4{}^2 = -\tfrac{1}{2}$$

folglich das Quadrat $= +\frac{1}{4}$ und somit

$$D_5 = \frac{2^{2 \cdot 1}\sqrt{2^{2(1+2\frac{1}{2})}}}{2^3} = 2^3$$

Verfahren wir analog bei $\nu = 6$;

$$\alpha = \frac{2\pi}{2^6} = \frac{\pi}{32}$$

so zerfällt D_6 nach Absonderung des Factors $\sqrt{2^4} \cdot 2^4$ in das Product der beiden Teildeterminanten:

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_{15} & c_7 & c_9 \\ c_7 & + & + & + \\ c_3 & + & + & + \\ c_5 & + & + & + \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_3 & c_{13} & c_5 & c_{11} \\ + & + & + & + \\ + & + & + & + \\ + & + & + & + \end{vmatrix}$$

diese, nach Absonderung des Factors $\sqrt{2^2.2^2}$ für jede in das Product der vier Determinanten:

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_7 \\ c_7 & + \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_3 & c_5 \\ + & + \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_3 & + \\ c_5 & + \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} + & + \\ + & + \end{vmatrix}$$

welches

$$= +\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right).\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)^2\sin^2\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$
$$= \frac{1}{2^4}\sin^4\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2^4}$$

ist. Im ganzen wird also:

$$D_6 = \frac{2^{1.4+2.2}.\sqrt{2^{2(1.2+2.1)}}}{2^4} = 2^8 = 4^4$$

Bei $\nu = 7$, für

$$\alpha = \frac{2\pi}{2^7} = \frac{\pi}{64}$$

tritt nach der analog ausgeführten Zeilen- und Colonnenaddition, indem der Factor:

$$\sqrt{2^8.2^8.\{\sqrt{2^4.2^4}\}^2}$$

gewonnen wird, das Product der vier Teildeterminanten

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_{15} & c_7 & c_9 \\ c_{15} & + & + & + \\ c_7 & + & + & + \\ c_9 & + & + & + \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_3 & c_{13} & c_5 & c_{11} \\ + & + & + & + \\ + & + & + & + \\ + & + & + & + \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_3 & + & + & + \\ c_{13} & + & + & + \\ c_5 & + & + & + \\ c_{11} & + & + & + \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} + & + & + & + \\ + & + & + & + \\ + & + & + & + \\ + & + & + & + \end{vmatrix}$$

auf, welches nach einer zweiten in analoger Weise auszuführenden

Zeilen- und Colonnenaddition [1]) in das Product der 8 Determinanten

$$\left\{\begin{vmatrix} c_1 & c_7 \\ c_7 & - \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_3 & c_5 \\ + & - \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_3 & + \\ c_5 & - \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} + & + \\ + & - \end{vmatrix}\right\}^2$$

übergeht, indem der Factor:

$$\left\{\left(2.\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^2 . 2^2\right\}^2 \cdot \left\{\left(2\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)^2 . 2^2\right\}^2 \cdot \left(2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^4 \left(2\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)^4$$

gewonnen wird. Da das Product der 8 Determinanten zu je vier Elementen

$$\left\{+\cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)\left(\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\right\}^2$$
$$= \left\{\frac{1}{2^4}\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2\right\}^2$$
$$= \left\{\frac{1}{2^4}\cdot\frac{1}{2^2}\sin^2\frac{\pi}{2}\right\}^2 = \left(\frac{1}{2^{4+2}}\right)^2$$

beträgt, so erhält man schliesslich:

$$D_7 = \frac{2^{1.8+2.4+4.2}\cdot\sqrt{2^{2(1.4+2.2+2.1+4(\frac{1}{2}))}}}{2^{8+4}} = 2^{24} = 8^8$$

Bei

$$\nu = 8,\ \alpha = \frac{2\pi}{2^5}$$

wird man nach zwei vollen Zeilen- und Colonnenadditionen den Factor:

$$\sqrt{2^{16}}.2^{16}\{\sqrt{2^8}.2^8\}^2 \cdot \left\{\left(2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^4 .2^4\right\}^2 \cdot \left\{\left(2\cos\frac{3\pi}{8}\right)^4 2^4\right\}^2$$
$$\cdot \left\{\left(2\cos\frac{\pi}{8}\right)^2 .2^2\right\}^4 \cdot \left\{\left(2\cos\frac{3\pi}{8}\right)^2 .2^2\right\}^4$$

und als Kern das Product der 16 Determinanten zu je vier Elementen, nämlich:

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_{15} \\ c_{15} & + \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_7 & c_9 \\ + & + \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_3 & c_{13} \\ + & + \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_5 & c_{11} \\ + & + \end{vmatrix} \cdot$$
$$\begin{vmatrix} c_7 & + \\ c_9 & + \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} + & + \\ + & + \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} + & + \\ + & + \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} + & + \\ + & + \end{vmatrix} .$$

---

1) Die letztere ist bei ungerader Ordnungszahl ν nur zur Hälfte auszuführen.

$$\begin{vmatrix} c_3 & + \\ c_{12} & + \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} + & + \\ + & + \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} + & + \\ + & + \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} + & + \\ + & + \end{vmatrix} \cdot$$

$$\begin{vmatrix} c_5 & + \\ c_{11} & + \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} + & + \\ + & + \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} + & + \\ + & + \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} + & + \\ + & + \end{vmatrix}$$

erhalten, welches, wie sogleich allgemein gezeigt werden kann,

$$= \frac{1}{2^{16+8}}$$

ist, so dass

$$D_6 = \frac{2^{1.16+2.8+4.4+8.2} \cdot \sqrt{2^{2(1.8+2.4+2.2+4.1)}}}{2^{16+8}} = 2^{64} = (16)^{16} \text{ ist.}$$

Diese Determinante, die also erst dem regulären 256-Eck entsprechen {und beim 257-Eck in Bezug auf die Bedingungsgleichungen daselbst in Anwendung kommen} würde, hat schon bei directer Ausrechnung:

263 130 836 933 693 530 167 218 012 160 000 000

nicht verschwindende Glieder und zwar ist jedes Glied ein Product von 32 Diagonalen des Ecks [Durchmesser = 1.]. Die Summe aller Glieder hat aber die einfache Formel: $(2^{\nu-4})^{2^{\nu-4}}$ für $\nu = 8$, das ist

$$(16)^{16} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616$$

Die dem regulären 65536-Eck entsprechende Determinante würde eine Gliederzahl haben, welche mit 28504 Stellen zu schreiben wäre. Ihr Wert ist

$$(2^{16-4})^{2^{16-4}} = (2^{12})^{2^{12}} = (4096)^{4096}$$

Wird für immer grössere und grössere ν (bis ∞) die Gliederzahl durch das Product aus der vierten Wurzel der Elementenanzahl und dem Quadrat des Determinantenwertes dividirt, so ergiebt sich die Constante $\sqrt{2\pi}.0 = 0$; für abnehmende ν wird die Formel $(2^{\nu-4})^{2^{\nu-4}}$, welche für $\nu = 3$ den Wert

$$(2^{-1})^{2^{-1}} = (\tfrac{1}{2})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \cos\left(\frac{2\pi}{2^2}\right) = |\cos\alpha|$$

hat und soweit noch stimmt, natürlich illusorisch; für $\nu = 2$ z. B. wird

$$D_2 = (2^{-2})^{2^{-2}} = (\tfrac{1}{2})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

wie vorhin, dazwischen liegt bekanntlich für $x = \frac{1}{e}$ ein Minimum der Function x^x.

Aus den vorstehenden Ausrechnungen der einfachsten Fälle $\nu = 4$ ... bis $\nu = 8$ unsrer Determinante ist nun schon der Gang des Beweises der Hauptsache nach ersichtlich, so wie auch, dass die Fälle eines geraden ν, wo eine volle Anzahl Zeilen- und Colonnenadditionen stattfinden muss, bis man auf den Kern kommt, und eines ungeraden ν, wo die letzte Colonnenaddition nur zur Hälfte ausführbar, zu unterscheiden sind.

Die erste Zeilen- und Colonnenaddition giebt als Exponenten von 2 und $\sqrt{2}$, da die Determinante $(2^{\nu-3})^2$ Elemente und als erste Zeile (oder auch Colonne) die $2^{\nu-3}$ Cosinus mit den Numern

$$1,\quad (2^{\nu-2}-1),\quad 2^{\nu-3}-1,\quad 2^{\nu-3}+1,\quad 2^{\nu-4}-1,\quad \ldots \text{ etc.}$$

enthält, wie aus der Analogie mit dem Vorgehenden folgt:

$$1.2^{\nu-4}+2.2^{\nu-5} \text{ und } 2[.1.2^{\nu-5}+2.2^{\nu-6}]$$

die zweite Zeilen- und Colonnenaddition:

$$4.2^{\nu-6}+8.2^{\nu-7} \text{ und } 2\left[\frac{4}{\bar{2}}.2^{\nu-7}+\frac{8}{2}.2^{\nu-8}\right]$$

die dritte Zeilen- und Colonnenaddition:

$$16.2^{\nu-8}+32.2^{\nu-9} \text{ und } 2\left[\frac{16}{4}.2^{\nu-9}+\frac{32}{4}.2^{\nu-10}\right], \ldots \text{ etc.}$$

Für gerade ν wird nun die $\left(\frac{\nu}{2}-2\right)$te, d. i. die letzte volle Zeilen- und Colonnenaddition:

$$2^{\nu-6}.2^2+2^{\nu-5}.2 \text{ und } 2\left[\frac{2^{\nu-6}}{2^{\frac{\nu}{2}-3}}.2+\frac{2^{\nu-5}}{2^{\frac{\nu}{2}-3}}.1\right]$$

Eine Determinante des Kerns, die ja vier Elemente hat, wird, wenn p und q zwei ungerade Zahlen bedeuten:

$$\begin{vmatrix} +c_{pq} & +c_{q.2}\overset{\nu}{\bar{2}}-qp \\ +c_{p^2}\overset{\nu}{\bar{2}}-pq & +c_{2^{\nu-2}}\overset{\nu}{\bar{2}}(p+q)+pq \end{vmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left\{c_{2^{\nu-2}}\overset{\nu}{\bar{2}}(p+q)+2pq+c_{2^{\nu-2}}\overset{\nu}{\bar{2}}(p+q)-c_2\overset{\nu}{\bar{2}}(p+q)-2pq \right.$$
$$\left. -c_2\overset{\nu}{\bar{2}}(p-q)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{c_2^{\frac{\nu}{2}}(p+q) - c_2^{\frac{\nu}{2}}(p-q)\right\}$$
$$= \frac{-2}{2}\sin\left(\frac{2\pi p}{2^{\frac{\nu}{2}}}\right)\sin\left(\frac{2\pi q}{2^{\frac{\nu}{2}}}\right)$$

der Kern selbst also das Product:

$$\Pi_p\,\Pi_q \sin\left(\frac{2\pi p}{2^{\frac{\nu}{2}}}\right)\sin\left(\frac{2\pi q}{2^{\frac{\nu}{2}}}\right)$$

Da nun im Producte auch:

$$\sin\left(\frac{2\pi p'}{2^{\frac{\nu}{2}}}\right)\sin\left(\frac{2\pi q'}{2^{\frac{\nu}{2}}}\right)$$

vorkommt, wobei

$$p' = 2^{\frac{\nu}{2}-2} - p$$
$$q' = 2^{\frac{\nu}{2}-2} - q \quad \text{und} \quad \sin\left(\frac{2\pi p'}{2^{\frac{\nu}{2}}}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi p}{2^{\frac{\nu}{2}}}\right) = \cos\left(\frac{2\pi p}{2^{\frac{\nu}{2}}}\right)$$

ist, so zieht sich das Product in

$$\frac{1}{2\left(2^{\frac{\nu}{2}-2}\right)^2}\,\Pi\,\Pi \sin\left(\frac{2\pi p}{2^{\frac{\nu}{2}-1}}\right)\sin\left(\frac{2\pi q}{2^{\frac{\nu}{2}-1}}\right)$$

zusammen. Es wird also der Exponent von 2 um $-2^{\nu-4}$ zu verändern sein. Dieser Process lässt sich offenbar noch $\frac{\nu}{2}-3$ mal hintereinander anwenden, so dass schliesslich

$$\Pi \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

bleibt, sonach ist der Exponent um

$$-\left[2^{\nu-4} + 2^{\nu-5} + 2^{\nu-6} \ldots 2^{\nu-4-\left(\frac{\nu}{2}-3\right)}\right]$$

zu verändern. Dies hebt sich nun gerade mit dem von $\sqrt{2^3}$ her-

rührenden Teile fort [1]). Schliesslich bleibt dann für den Exponenten $(\nu-4).2^{\nu-4}$, also ist der Wert der Determinante $= (2^{\nu-4})^{2^{\nu-4}}$.

Für ungerade ν sind die Teildeterminanten des Kerns im übrigen genau dieselben, nur dass statt $\frac{\nu}{2}$ hier $\frac{\nu-1}{2}$, die Zeichen von den c nicht $\begin{matrix}+&+\\+&+\end{matrix}$, sondern $\begin{matrix}+&+\\+&-\end{matrix}$ und die Winkel halb so gross zu nehmen sind. Dies letztere hat zur Folge, dass sich jetzt ebenfalls zwei der vier Cosinus fortheben [obgleich sie dasselbe Zeichen haben, so betragen ihre Winkel nunmehr zusammen π nicht 2π wie vorhin].

Ueberdies ist das ganze Product noch in's Quadrat zu erheben. Aus dem Nenner $\left[\frac{1}{2\left(2\frac{\nu-1}{2}-2\right)^{\frac{1}{2}}}\right]^2$, um das Product auf die Hälfte Factoren zusammenziehen zu können, folgt für den Exponenten von 2 eine Veränderung um $-2^{\nu-4}$ wie oben, doch wiederholt sich jetzt der Process dieses Zusammenziehens einmal mehr, also noch $\frac{\nu-1}{2}-2$ mal, mithin ist der Exponent im ganzen um

$$-\left[2^{\nu-4}+2^{\nu-5}+\ldots 2^{\nu-4}-\left(\frac{\nu-1}{2}-2\right)\right]$$

zu vermindern. Dies hebt sich aber auch jetzt mit dem von $\sqrt{2^2}$ herrührenden Teile auf, weil daselbst von der $\left(\frac{\nu-1}{2}-1\right)$ten, d. i. letzten „unvollständigen" Zeilen- und Colonnenaddition noch $\frac{2^{\nu-4}}{2\frac{\nu-1}{2}-2}(\tfrac{1}{4})$ hinzukommt, so dass wie oben $(\nu-4)2^{\nu-4}$ bleibt also auch hier $D_\nu = (2^{\nu-4})^{2^{\nu-4}}$ ist, w. z. b w.

Anmerkung 1. Unsre Determinanten behalten denselben Wert wenn überall, wo cos steht, sin gesetzt wird, denn

$$\cos(u\alpha) = \sin(u'\alpha)$$

wenn

---

1) So dass man einen einfacheren Beweis erwarten möchte, etwa durch Schluss von n auf $n+1$, indem man auf Cosinus von doppelt so grossem Winkel zu kommen sucht; $2\alpha = \alpha'$; vgl. Anm. 2.

$$u + u' = 2^{\nu-2}, \quad \alpha = \frac{2\pi}{2^\nu}$$

ist, und ebenso

$$\cos(\lambda u\,\alpha) = \pm \sin(\lambda u'\alpha)$$

weil

$$\lambda(u+u')\alpha = (4\lambda' \pm 1)(u+u')\alpha = 2\lambda'\pi \pm \frac{\pi}{2}\alpha$$

Dies gilt auch für D_3 nnd D_4, weil bei ersterer

$$\nu = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

nnd weil bei letzterer noch eine Umstellung der Zeilen erfordert wird, so dass $D_4 = (-1)^3$, also auch wieder $= -1$, wie vorhin ist. Daraus folgt dann auch, dass für $e = 2{,}718\ldots$, $i = \sqrt{-1}$

$$\begin{vmatrix} e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}, & e^{3i\alpha} + e^{-3i\alpha} \ldots \\ e^{3i\alpha} + e^{-3i\alpha}, & \ldots \\ \vdots & \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}, & e^{3i\alpha} - e^{-3i\alpha} \ldots \\ e^{3i\alpha} - e^{-3i\alpha}, & \ldots \\ \vdots & \end{vmatrix}$$

sein muss, woraus wieder Schlüsse über die Determinanten:

$$\begin{vmatrix} e^{i\alpha}, & e^{3i\alpha} \ldots \\ e^{3i\alpha}, & \ldots \\ \vdots & \end{vmatrix}$$

gezogen werden können, woranf wir hier nicht näher eingehen wollen.

Anmerknng 2. Durch das Vorstehende können auch Determinanten Δ_ν von folgender Constrnction berechnet werden, bei welcher viererlei in Betracht kommt.

1) Abgesehen vom Vorzeichen sei das in der $2k+1$ten Zeile nnd $2k+1$ten Colonne befindliche Element von $\Delta_{\nu+1}$ nämlich:

$$a^{\nu+1}_{2k+1,\,2k+1} = \text{dem Product: } a^{\nu}_{k+1,\,k+1} \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{2^{\nu-3}}\right)$$

{ Die vorhorgehende Doterminante Δ_ν sei nämlich:

$$\begin{vmatrix} a^{\nu}_{11} & a^{\nu}_{12} \ldots \\ a^{\nu}_{21} & \ldots \\ \vdots & \end{vmatrix}$$

Sie ist für $\nu = 5$ und $\nu = 6$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} -1 & +1 \\ +1 & +1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\Delta_6 = \begin{vmatrix} -\cos\left(\frac{\pi}{8}\right), & +\sin\left(\frac{\pi}{8}\right), & +\cos\left(\frac{\pi}{8}\right), & -\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ +\sin\left(\frac{\pi}{8}\right), & +\cos\left(\frac{\pi}{8}\right), & +\sin\left(\frac{\pi}{8}\right), & +\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ +\cos\left(\frac{\pi}{8}\right), & +\sin\left(\frac{\pi}{8}\right), & +\sin\left(\frac{\pi}{8}\right), & -\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ -\sin\left(\frac{\pi}{8}\right), & +\cos\left(\frac{\pi}{8}\right), & -\cos\left(\frac{\pi}{8}\right), & -\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \end{vmatrix} = 2^3 = (\Delta_5)^2$$

ferner:

$$\overset{\nu+1}{a}_{2k+2,\,2k+2} = \pm \overset{\nu+1}{a}_{2k+1,2k+1} = \pm \overset{\nu}{a}_{k+1,\,k+1} \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{2^{\nu-3}}\right)$$

und

$$\overset{\nu+1}{a}_{2k+2,\,2k+1} = \pm \overset{\nu+1}{a}_{2k+1,\,2k+2} = \overset{\nu}{a}_{k+1,\,k+1} \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{2^{\nu-3}}\right)$$

[oder auch cos mit sin zu vertauschen.]

2) ist

$$\overset{\nu+1}{a}_{4k+1,\,4k+1} = \overset{\nu}{a}_{2k+1,\,2k+1} \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{2^{\nu-3}}\right)$$

falls $\cos\left(\frac{m\pi}{2^{\nu-4}}\right)$ resp. $\sin\left[\left(\frac{2^{\nu-5}-m}{2^{\nu-4}}\right)\pi\right]$ der letzte in $\overset{\nu}{a}_{2k+1,\,2k+1}$ befindliche Factor ist; auch möge

$$\overset{\nu+1}{a}_{4k+3,\,4k+3} = \pm \overset{\nu}{a}_{2k+2,\,2k+2} \cdot \cos \text{ oder } \sin\left(\frac{m\pi}{2^{\nu-3}}\right) \text{ und}$$

$$\left\{ \begin{matrix} \overset{\nu+1}{a}_{4k+3,\,4k+1} \\ \overset{\nu+1}{a}_{4k+1,\,4k+3} \end{matrix} \right\} = \pm \overset{\nu}{a}_{2k+2,\,2k+1} \cdot \cos \text{ oder } \sin\left[(2^{\nu-5}-m)\,\frac{\pi}{2^{\nu-3}}\right]$$

sein.

3) Ob hierin cos oder sin zu setzen ist, wird entschieden, wenn man bei Δ_ν durchweg den letzten Factor von dem Element $\overset{a}{}_{2k+1,\,2k+1}$, der cos oder sin ist, heraus nimmt, diese Gesamtheit durch die beiden geraden Verbindungslinien der Seiten mitten eines um die Determinante beschriebenen Quadrats in vier Gruppen $\begin{matrix} GH \\ KL \end{matrix}$ teilt und dann die Anordnung

$GHHG$
$KLLK$
$KLGH$
$GHKL$ trifft.

4) Die Zeichen endlich werden in ähnlicher Weise für $\Delta_{\nu+1}$ aus Δ_ν bestimmt, indem man die Gesamtheit der Vorzeichen von Δ_ν analog in vier Gruppen $\begin{matrix}\Gamma H\\ K\Delta\end{matrix}$ teilt und

$\Gamma H \quad H \quad \Gamma$
$K\Delta \quad \Delta \quad K$
$K\Delta - \Gamma - H$
$\Gamma H - K - \Delta$

bildet, wobei $-\Gamma$ die entgegengesetzten Zeichen von Γ bedeuten soll, so dass auch $\Delta = -\Gamma$ sein muss.

Hienach würde nun aus Δ_6 folgendermassen Δ_7 zu construiren sein:

Nach 4) werden die Vorzeichen:

$$\begin{array}{cccc|cccc}
- & + & + & - & + & - & - & + \\
+ & + & + & + & + & + & + & + \\
+ & + & + & - & + & - & + & + \\
- & + & - & - & - & - & - & + \\
\hline
+ & + & + & - & + & - & - & + \\
- & + & - & - & - & - & - & - \\
- & + & + & - & - & - & - & + \\
+ & + & + & + & + & - & + & +
\end{array}$$

Nach 3) werden die vier Gruppen $\begin{Bmatrix}GH\\ KL\end{Bmatrix}$, wenn statt cos und sin nur c' und s' (mit Index m) gesetzt sind [1]), $= \begin{Bmatrix}c' & c'\\ c' & s'\end{Bmatrix}$, also die Verteilung der sin und cos bei Δ_7:

---

1) $\cos\left(\frac{m\pi}{8}\right) = c'_m, \quad \cos\left(\frac{m\pi}{16}\right) = c''_m, \quad \cos\left(\frac{m\pi}{32}\right) = c'''_m$

etc. ...

$$\begin{array}{cc|cc} c_1'' & c_3'' & c_1'' & c_3'' \\ c_3'' & s_1'' & s_3'' & c_1'' \\ \hline c_1'' & s_3'' & c_3'' & c_1'' \\ c_3'' & c_1'' & c_1'' & s_3'' \end{array}$$

wobei die Indices nach 2) folgen, endlich $\pm \Delta_7$ selbst nach 1)

$$\begin{vmatrix} -c_1'c_1''+c_1's_1''+s_1'c_3''-s_1's_3''+c_1'c_1''-c_1's_1''-s_1'c_3''+s_1's_3'' \\ +c_1's_1''+c_1'c_1''+s_1's_3''+s_1'c_3''+c_1's_1''+c_1'c_1''+s_1's_3''+s_1'c_3'' \\ +s_1'c_3''+s_1's_3''+c_1's_1''-c_1'c_1''+s_1's_3''-s_1'c_3''+c_1's_1''+c_1's_1'' \\ -s_1's_3''+s_1'c_3''-c_1'c_1''-c_1's_1''-s_1'c_3''-s_1's_3''-c_1's_1''+c_1'c_1'' \\ +c_1'c_1''+c_1's_1''+s_1's_3''-s_1'c_3''+s_1'c_3''-s_1's_3''-c_1'c_1''+c_1's_1'' \\ -c_1's_1''+c_1'c_1''-s_1'c_3''-s_1's_3''-s_1's_3''-s_1'c_3''-c_1's_1''-c_1'c_1'' \\ -s_1'c_3''+s_1's_3''+c_1'c_1''-c_1'c_1''-c_1'c_1''-c_1's_1''-s_1's_3''+s_1'c_3'' \\ +s_1's_3''+s_1'c_3''+c_1's_1''+c_1'c_1''+c_1's_1''-c_1'c_2''+s_1'c_3''+s_1's_3'' \end{vmatrix}$$
$$= (\Delta_6)^2 = 2^4 = 16$$

$\pm \Delta_8$ beginnt mit:

$$\pm \begin{vmatrix} -c_1'c_1''c_1''' & +c_1'c_1''s_1''' \dots \\ +c_1'c_1''s_1''' & +c_1'c_1''c_1''' \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{vmatrix} = (\Delta_7)^2 = 2^3$$

etc., allgemein wird:

$$\pm \Delta_{\nu+1} = (\Delta_\nu)^2$$

[Das Vorzeichen ergiebt sich nicht aus dem Beweis]. Erhebt man z. B. Δ_7 nach dem bekannten Determinantensatze in's Quadrat, so erhält man, indem

$$c = s = \tfrac{1}{2}\sqrt{2},$$

$$c' = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right), \quad s' = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right); \quad 2c^2 = 1; \quad s'+c' = 2cc';$$

$$-s'+c' = 2cs', \quad (s'+c')^2 = c+1, \quad (2s'+c')2s' = 2(s')^2+1,$$

$$(s'+c')^2+2s'(2s'+c') = 3; \quad 2(s')^2+c = 1; \quad \text{etc. ist:}$$

$$(\Delta_7)^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & c & -c \\ 0 & 0 & c & c \\ -c & -c & 0 & 0 \\ +c & -c & 0 & 0 \\ cs' & c'+cs' & cc' & s'+cc' \\ -(c'+cs') & cs' & s'+cc' & -cc' \\ -cs' & c'+cs' & -(s'+cc') & -cc' \\ c'+cs' & cs' & cc' & -(s'+cc') \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -cs' & c'+cs' & cs' & -(c'+cs') \\ -(c'+cs') & -cs' & -(c'+cs') & -cs' \\ -cc' & -(s'+cc') & s'+cc' & -cc' \\ -(s'+cc') & cc' & cc' & s'+cc' \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Indem man die erste Colonne mit minus zur zweiten, die dritte zur vierten fügt und analog bei den Zeilen verfährt, erhält man:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2c \\ -c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2c & 0 & 0 \\ cs' & c' & cc' & s'+2cc' \\ -(c'+cs') & c'+2cs' & s'+cc' & s' \\ 0 & 2c'+2cs' & -s' & 0 \\ 0 & 2cs' & s'+2cc' & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -cs' & c'+cs' & 0 & 0 \\ -c' & -(c'+2cs') & -(2c'+2cs') & -2cs' \\ -cc' & -(s'+cc') & s' & -(s'+2cc') \\ -s'+2cc' & -s' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Hierin mögen, um die c wegzuschaffen, die ersten beiden Colonnen, nachher die ersten beiden Zeilen mit $2c$ und c, also mit 1 multiplicirt werden, so ergiebt sich:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2s'+c' & 0 & 0 & s'+c' \\ -(s'+c') & 0 & 0 & 2s' \\ 0 & s'+c' & -2s' & 0 \\ 0 & 2s'+c' & s'+c' & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -(2s'+c') & s'+c' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(s'+c') & -(2s'+c') \\ 0 & 0 & 2s' & -(s'+c') \\ -(s'+c') & -2s' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Werden nun die 70 Producte je zweier Partialdeterminanten von je 4^2 Elementen gebildet, so ist das erste 1^2, das letzte $9^2 = 81$, 34 dieser Producte sind $= 0$, vier werden $c+1$, vier $(c+1)^2$, acht c^2+c+1; vier $2(s')^2+1$, vier $18(s')^2+9$; vier $c^2+8(s')^2$; vier $9c+9$, zwei 9, so dass im ganzen:

$$192+16c^2+56c+112(s')^2 = 200+56 = 256 = 2^8$$

erhalten wird, Δ_7 also $= \pm 2^4$ ist. Diese directe Ausrechnung ist nun durchaus nicht nötig, wenn wir auf den Zusammenhang mit den D_ν hinweisen.

D_ν war $= \Sigma \pm \Pi \cos(\lambda u \alpha)$, wo u und λ ungerade Zahlen 1, 3, ... $(2^{\nu-2}-1)$ und $\alpha = \frac{2\pi}{2^\nu}$; $D_{-\nu} = D_\nu = \Sigma \pm \Pi \cos(\varkappa u' \alpha)$. Dann wird ein Element von

$$(D_\nu)^2 = \Sigma_u (-1)^h \cos(\lambda u \alpha) \cos(\varkappa u' \alpha)$$

worin h in der ersten Hälfte gerade, in der zweiten ungerade;

$$u + u' = 2^{\nu-2}$$

Nun gilt

$$\cos(\lambda u \alpha)\cos(\varkappa u' \alpha) = \tfrac{1}{2}[\cos(\varkappa u + \lambda u')\alpha + \cos(\varkappa u - \lambda u')\alpha]$$

Da

$$\cos(2n\pi - x) = \cos x$$

und

$$(\varkappa u + \lambda u')\alpha + (\varkappa u' + \lambda u)\alpha = (\varkappa + \lambda)(u + u')\alpha = n 2\pi$$

wenn

$$\varkappa + \lambda \equiv 0 \mod 4$$

und auch

$$(\varkappa u - \lambda u')\alpha + (\varkappa u' - \lambda u)\alpha = (\varkappa - \lambda)(u + u')\alpha = 2n'\pi$$

wenn

$$\varkappa - \lambda \equiv 0, \text{ mod. } 4$$

so hebt sich entweder

$$\Sigma_u \frac{(-1)^\lambda}{2} \cos(xu + \lambda u')\alpha \quad \text{oder} \quad \Sigma_u \frac{(-1)^\lambda}{2} \cos(xu - \lambda u')\alpha$$

fort, zuweilen auch beide, falls

$$x \mp \lambda \equiv 0, \text{ mod. } 8$$

denn

$$\cos(xu + \lambda u')\alpha = -\cos(xu'' + \lambda u''')\alpha$$

wenn für

$$u + u'' = 2^{\nu-2} \quad \text{und} \quad u' + u''' = 2^{\nu-2} + 2^{\nu-2}$$

das Argument

$$\alpha(x(u+u'') + \lambda(u'+u''')) = \alpha((x-\lambda)(u+u'') + \lambda . 2^{\nu-1}) =$$

ungeradem Vielfachen von π wird, und das ist der Fall, sobald schon $\frac{x-\lambda}{4}$ gerade, indem ja λ eine ungerade Zahl bedeutete.

Somit werden zwei Viertel der quadratischen Fläche, die die Determinante $(D_\nu)^2$ einnimmt, das erste und vierte, mit Nullen erfüllt sein; der zweite und dritte Flächenteil sind einander gleich, wie es sein muss [indem die durchweg entgegengesetzten Zeichen bei einem in Bezug auf den andern bei gerader Zeilenanzahl ohne Einfluss sind], und wir erhalten somit $\pm D_\nu$ in einer Determinante mit halb soviel Zeilen und Colonnen. In dieser haben alle Elemente denselben Factor, nämlich $2^{\nu-5} . \sqrt{2}$. Wird derselbe herausgezogen, als $(2^{\nu-5}\sqrt{2})^{2\nu-4}$, da $2^{\nu-4}$ Colonnen sind, so bleibt, wie sich unschwer ergibt, Δ_ν übrig, also muss auch

$$(2^{\nu-5})2^{\nu-4}\Delta\nu = \pm (2^{\nu-4})2^{\nu-4} = \pm D_\nu$$

sein, mithin

$$\pm \Delta_\nu = 2^{2\nu-5}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Anmerkung 3. Indem α, wie vorhin $= \frac{2\pi}{2^\nu}$ ist, folgen aus dem System von $2^{\nu-2}$ linearen Gleichungen

$$\sum_0^{(2^{\nu-2}-1)} {}_m \; c_{um} x_m = 0$$

wo

$$u = 1, 3, 5 \ldots (2^{\nu-1}-1)$$

für sämtliche x die Werte 0, denn die Determinante des Systems ϑ_ν verschwindet nicht. Es wird nämlich:

$$\vartheta_2 = 1,$$

$$\vartheta_3 = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 \\ c_0 & c_3 \end{vmatrix}$$

das ist:

$$= \begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha \\ 1 & -\cos\alpha \end{vmatrix} = -\sqrt{2}$$

für

$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

ϑ_4 ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} c_0 & c_2 & c_1 & c_3 \\ c_0 & -c_2 & c_3 & c_9 \\ c_0 & -c_2 & -c_3 & -c_9 \\ c_0 & c_2 & -c_1 & -c_3 \end{vmatrix}$$

für

$$\alpha = \frac{\pi}{8}$$

Wird die erste Zeile zur letzten, die zweite zur vorletzten gelegt und der Factor 2^2 hervorgezogen, so ergiebt sich

$$\vartheta_4 = 2^2 \begin{vmatrix} c_0 & -c_2 \\ c_0 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & c_3 \\ c_3 & c_9 \end{vmatrix}$$

In diesem Producte ist aber die erste Determinante $= \begin{vmatrix} c_0 & -c_1 \\ c_0 & c_1 \end{vmatrix}$

für den doppelt so grossen Winkel, also für $\frac{\pi}{4}$, mithin

$$= -\vartheta_3 = +\sqrt{2}$$

die zweite ist

$$= D_4 = -1$$

also

$$\vartheta_4 = 2^2(-\vartheta_3) D_4 = -2^2\sqrt{2} = -D_5\sqrt{2}$$

Analog wird:

$$\vartheta_5 = 2^4 . \vartheta_4 D_5 = -2^3\sqrt{2} = -D_6\sqrt{2}$$

etc., endlich:

$$\vartheta_\nu = 2^{2^{\nu-3}} . \vartheta_{\nu-1} D_\nu = \vartheta_{\nu-1} . D_\nu . (A_{\nu+1})^2$$

$$= -(2^{\nu-3})^{2^{\nu-3}} . \sqrt{2} = -D_{\nu+1}\sqrt{2}$$

Hiebei ist die Formel:

$$\sum_3^\nu (\nu-2)2^{\nu-3} = (\nu-3)2^{\nu-2}+1$$

benutzt. Die Gleichungen

$$x_m = 0$$

für

$$m = 0, 1\ 2, \ldots (2^{\nu-2}-1)$$

können aber hierin als die bekannten Bedingungsgleichungen

$$x_0 = \sum_{0}^{(2^{2\nu-1}-1)} (c_k)^2 - p = 0 \quad \text{und} \quad x_h = \sum_{0}^{2^{2\nu-1}} c_k c_{k+\lambda} = 0$$

für $$h = 1, 2, \ldots 2^{\nu-2}-1$$

wo p eine Primzahl von der Form $2^{2\mu}+1$ ist. anfgefasst werden, welche Gleichungen sich stets durch ganze Zahlen c identisch erfüllen lassen.

Die Ermittlung dieser Zahlen ist Arch. der Math. u. Phys. 2. Reihe, IV. pag. 217. gezeigt.

XV.

Mittelwerte, die Krümmung ebener Curven und krummer Flächen betreffend.

Von

Emanuel Czuber.

I. **Ebene Curven.** Mittlerer Krümmungsradius und mittlere Krümmung eines Bogens. Die Länge des einförmig gekrümmten Bogens AMB werde mit s_0 bezeichnet; der Krümmungshalbmesser im Punkte M heisse ϱ, die Krümmung daselbst $\varkappa$, ferner sei Bogen $AM = s$, das anstossende Bogenelement ds und der entsprechende Contingenzwinkel $d\tau$.

Für den mittleren Krümmungsradius ϱ_m des betrachteten Bogens ergibt sich der Ausdruck

$$\varrho_m = \frac{1}{s_0}\int \varrho\, ds = \int \frac{ds}{d\tau} ds \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

wobei die Integration über AMB auszudehnen ist. Das hier auftretende Integral hat eine einfache geometrische Bedeutung; denn das Product ϱds drückt den doppelten Inhalt des Dreiecks aus, welches von dem Bogenelement ds und den Normalen in seinen Endpunkten begrenzt wird, das Integral somit den doppelten Inhalt jener Fläche, welche von dem Bogen AMB, den Normalen seiner Endpunkte A, B und dem zugehörigen Bogen der Evolute umschlossen wird. Bezeichnet man den einfachen Inhalt mit u_0, so ist

$$\varrho_m = \frac{2u_0}{s_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Die Bestimmnng der Punkte in *AMB*, in welchen der Krümmungshalbmesser dem mittleren gleichkommt, erfolgt durch Verbindung der Gleichnng $\varrho = \varrho_m$ mit jenor der Curve.

Die mittlere Krümmnng des Bogens *AMB* ist dargestellt durch

$$\varkappa_m = \frac{1}{s_0}\int \varkappa\, \partial s = \frac{1}{s_0}\int \frac{\partial \tau}{\partial s}\, \partial s = \frac{1}{s_0}\int d\tau \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

die Integration über *AMB* ausgedehnt. Ihr Resultat ist aber derjenige Winkel τ_0, welchen die Tangente der Curve beschreiht, während ihr Berührungspunkt den betrachteten Bogen durchläuft; mithin ist

$$\varkappa_m = \frac{\tau_0}{s_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Es fällt also die mittlere Krümmnng eines Bogens überein mit derjenigen Grössc, welche als dessen relative Krümmnng hezeichnet zn werden pflegt.

Für eine geschlossene convexe Curvo ohno Ecken wird

$$\tau_0 = 2\pi$$

und somit

$$\varkappa_m = \frac{2\pi}{s_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

d. h. die mittlere Krümmnng einer solchen Curve kommt gleich der eines Kreises, welcher mit ihr gleichen Umfang hat.

Zur Erläuterung der Formeln wählen wir die gemeine Cykloide nnd die Ellipse.

Bedentet *AMB* einen Ast der Cykloide, so ist u_0 der Fläche eines Rechtecks gleich, das den Dnrchmesser $2a$ des rollenden Kreises zur Höhe und seinen Umfang zur Basis hat, also

$$u_0 = 4\pi a^2$$

ferner

$$s_0 = 8a \quad \text{nnd} \quad \tau_0 = \pi$$

Darans berechnet sich

$$\varrho_m = \pi a$$

gleich dem halben Umfang des rollenden Kreises; und den beiden Pnnkten, in welchen

$$\varrho = 4a \sin \frac{\varphi}{2} = \varrho_m$$

ist, kommen die Rollwinkel

$$\varphi_1 = 2 \arcsin \frac{\pi}{4} \quad \text{und} \quad \varphi_2 = 2\pi - \varphi_1$$

zu; weiter ist

$$\varkappa_m = \frac{\pi}{8a}$$

und die beiden Punkte, in welchen

$$\varkappa = \varkappa_m$$

ist, sind durch die Rollwinkel

$$\varphi_1 = 2 \arcsin \frac{2}{\pi}$$

und

$$\varphi_2 = 2\pi - \varphi_1$$

charakterisirt.

Ist ABM der Quadrant einer Ellipse mit den Halbaxen a, b, so hat der Quadrant der Evolute den Inhalt $\frac{3\pi}{32} \frac{(a^2 - b^2)^2}{ab}$, mithin ist

$$u_0 = \frac{3\pi}{32} \frac{(a^2 - b^2)^2}{ab} + \frac{\pi}{4} ab = \frac{\pi}{32} \frac{3a^4 + 2a^2b^2 + 3b^4}{ab}$$

da ferner

$$s_0 = aE \quad \text{und} \quad \tau_0 = \frac{\pi}{2}$$

so hat man

$$\varrho_m = \frac{\pi}{16} \frac{3a^4 + 2a^2b^2 + 3b^4}{2^3 bE}, \quad \varkappa_m = \frac{\pi}{2aE}$$

selbstverständlich gelten diese Worte auch für die ganze Ellipse.

II. Krumme Flächen. 1. Schnitte durch eine Tangente der Fläche. Es sei t eine Tangente, n die Normale einer gegebenen Fläche im Punkte A derselben; ist R der Krümmungsradius, M_0 der Krümmungsmittelpunkt des durch t und n gelegten Schnittes oder des Normalschnittes durch t in A, so liegen die Krümmungsmittelpunkte M aller weiteren durch t geführten Schnitte dem Satze von Mensnior zufolge auf einem Kreise $\mathfrak{K}$, welcher AM_0 zum Durchmesser hat und derjenigen Ebene angehört, welche durch n senkrecht zu t gelegt wird. Trägt man auf den Linien AM_0, AM die zugehörigen Krümmungen K, k nach irgend einem Maassstabe von A aus ab, so liegen die Endpunkte N_0, N auf einer dem

vorgedachten Kreise inversen Figur, d. i. auf der Geraden $\mathfrak{g}$, welche in N_0 senkrecht zur Ebene (t, n) errichtet ist.

Bezeichnet θ den Winkel, welchen die Ebene (t, M) mit n bildet, so ist der Krümmungsradius des zugeordneten Schnittes

$$r = R\cos\theta$$

und der mittlere Krümmungshalbmesser aller durch t gelegten Schnitte

$$r_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\,d\theta = \frac{2R}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta = \frac{2R}{\pi} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Er gibt zugleich die mittlere Länge der aus A gezogenen Sehnen des Kreises $\mathfrak{K}$ an.

Die Lage derjenigen unter den Schnitten durch s', deren Krümmungshalbmesser dem Mittelwerte gleich kommt, ergibt sich durch Auflösung der Gleichung

$$r = r_m$$

in Bezug auf θ; man findet

$$\theta_1 = \arccos\frac{2}{\pi}, \quad \theta_2 = -\theta_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Die mittlere Krümmung der in Rede stehenden Schnitte wäre geometrisch dargestellt durch den Mittelwert der aus A nach der Geraden $\mathfrak{g}$ gezogenen Radienvectoren; sie ist daher unendlich gross.

2. Schnitte durch eine Normale der Fläche. Wie vorhin sei A der betrachtete Punkt der Fläche, n die zugehörige Normale und ε die Tangentenebene, ferner seien t_1, t_2 die auf ε bezogenen Spuren der beiden Hauptschnitte, R_1, R_2 ihre Krümmungsradien, K_1, K_2 die Krümmungen. Auf der Spur t eines beliebigen durch n gelegten Schnittes, dessen Krümmungshalbmesser und Krümmung in A mit R, bzw. mit K bezeichnet werden möge, werde von A aus beiderseits eine der Quadratwurzel aus $|R|$ und ebenso eine der Quadratwurzel aus $|K|$ proportionale Strecke abgetragen. Die ersten so erhaltenen Punktepaare M, M' ordnen sich, dem Euler'schen Satze zufolge, nach Kegelschnitten, welche t_1, t_2 zu Hauptaxen und die Punkte M_1, M_1', M_2, M_2' zu Scheiteln haben; demzufolge ordnen sich die zweitgenannten Punktepaare N, N' nach Linien, welche diesen Kegelschnitten invers sind in Bezug auf A

als Pol, d. i. auf bicircularen Curven 4. Ordnung, welche t_1, t_2 zu Symmetrieaxen, A zum Doppelpunkt und N_1, N_1'; N_2, N_2' zu cyklischen Punkten haben.

Im übrigen unterscheiden wir folgende Fälle.

a) In einem Punkte mit gleichgerichteten endlichen Hauptkrümmungsradien ist die den Verlauf von $\sqrt{R}$ darstellende Curve (M) eine Ellipse mit den Halbaxen $\sqrt{R_1}$, $\sqrt{R_2}$, die den Verlauf von $\sqrt{K}$ darstellende Linie (N) eine Curve mit isolirtem Doppelpunkt in A; die imaginären Tangenten in diesem, zusammenfallend mit den Asymptoten der ersterwähnten Ellipse, bilden die Inflexionstangenten der Fläche in dem betrachteten Punkte, welcher als elliptischer Punkt bezeichnet wird.

Heisst α der Winkel, welchen t mit t_1 bildet, so ist

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\alpha}{R_1} + \frac{\sin^2\alpha}{R_2}$$

und der mittlere Krümmungsradius der Normalschnitte in A kommt gleich

$$R_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\,d\alpha = \frac{2R_1R_2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{R_2\cos^2\alpha + R_1\sin^2\alpha} = \sqrt{R_1R_2} \quad (3)$$

Man kann ihn zufolge des zwischen R und der Ellipse (M) bestehenden Zusammenhanges als mittleres Halbmesserquadrat der letzteren ableiten; als solches stellt er sich in Form eines Bruches dar, dessen Zähler die Fläche jener Ellipse, d. i $\pi\sqrt{R_1R_2}$, und dessen Nenner π ist, man findet also wie oben das geometrische Mittel der Hauptkrümmungsradien.

Durch Auflösung der Gleichung

$$R = R_m$$

in Bezug auf α ergibt sich die Lage jener beiden Normalschnitte, deren Krümmungshalbmesser dem Mittelwerte gleichkommt; man findet

$$\alpha_1 = \operatorname{arc\,tg}\sqrt[4]{\frac{R_2}{R_1}}, \quad \alpha_2 = -\alpha_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Die mittlere Krümmung der betrachteten Schnitte kann auf Grund einer ähnlichen Bemerkung, wie sie oben zur Darstellung

von R_m angewendet worden, als Quotient des Flächeninhaltes der Curve (N) durch die Zahl π gefunden werden. Sie ist

$$K_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (K_1\cos^2\alpha + K_2\sin^2\alpha)\,d\alpha = \frac{K_1+K_2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

oder dem arithmetischen Mittel der beiden Hauptkrümmungen gleich. Es ist dies eine natürliche Folge des bekannten Satzes, dass die mittlere Krümmung je zweier zu einander rechtwinkligen Schnitte durch n dem obigen Werte gleichkommt [1]).

Aus der Gleichung

$$K = K_m$$

ergeben sich die Azimute der beiden Schnitte, welche die mittlere Krümmung haben, u. zw.

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{4}, \quad \alpha_2 = -\alpha_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

die genannten Normalschnitte halbiren also die Winkel der beiden Hauptschnitte.

b) In einem Punkte mit ungleich gerichteten endlichen Hauptkrümmungsradien setzt sich die Curve (M), welche den Verlauf von $\sqrt{|R|}$ versinnlicht, aus zwei Hyperbeln zusammen, deren Axen mit einander vertauscht sind, und die den Verlauf von $\sqrt{(K)}$darstellende Curve (N) aus zwei lemniskaten-ähnlichen Linien, deren jede in A einen Doppelpunkt hat; ihre gemeinsamen Tangenten in diesem Punkte, gleichzeitig gemeinschaftliche Asymptoten jener Hyperbeln, bilden die Wendetangenten der Fläche im Punkte A, welcher nun als hyperbolischer Punkt bezeichnet wird.

Setzt man die dem Zeiger 1 entsprechende Hauptkrümmung als die positive fest, so ist mit Beibehaltung der früheren Bezeichnungen

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\alpha}{R_1} - \frac{\sin^2\alpha}{R_2}$$

---

1) Bezüglich der in den Gleichungen 3) und 5) niedergelegten Sätze vgl. die Abhandlungen Grunert's in dessen Archiv, Bd. 40. pag. 259 flg., Bd. 41, pag. 241 flg., und die Bemerkung Beltrami's, ibid., Bd. 42, pag. 116.

Das arithmetische Mittel der algebraischen Werte von R ist null, das der absoluten Werte ist unendlich gross; denn das erstere wird durch die mit $\frac{1}{\pi}$ multiplicirte Differenz, das letztere durch die mit dem nämlichen Factor multiplicirte Summe jener Flächen ausgedrückt, welche die oben genannten Hyperbeln mit ihren gemeinschaftlichen Asymptoten begrenzen.

Der Mittelwert der mit ihrem Vorzeichen versehenen Krümmungen ist

$$K_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (K_1\cos^2\alpha - K_2\sin^2\alpha)\,d\alpha = \frac{K_1 - K_2}{2} \quad \ldots\ldots (7)$$

in Uebereinstimmung mit (5); er stellt zugleich die durch π geteilte, entsprechend gebildete Differenz der Flächen vor, welche von den beiden lemniskatenartigen Curven (N) eingeschlossen werden.

Für die Schnitte von mittlerer Krümmung findet man aus der Gleichung

$$K = K_m$$

die Azimute

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{4}, \quad \alpha_2 = -\alpha_1 \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

so dass sie wie bei dem elliptischen Punkte die Winkel der Hauptschnitte halbiren.

Der Mittelwert der absoluten Krümmungen hingegen ist, wenn

$$\alpha_0 = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{K_1}{K_2}}$$

gleich

$$|K|_m = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\alpha_0}(K_1\cos^2\alpha - K_2\sin^2\alpha)d\alpha + \int_{\alpha_0}^{\frac{\pi}{2}}(K_2\sin^2\alpha - K_1\cos^2\alpha)d\alpha\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[(K_1 - K_2)\left(\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{K_1}{K_2}} - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{K_1 K_2}\right] \quad \ldots\ldots (9)$$

es ist dies zugleich die mit $\frac{1}{\pi}$ multiplicirte Summe der Flächen, welche durch (N) begrenzt werden.

In einem Punkte mit gleichen und entgegengesetzt bezeichneten Hauptkrümmungen $\pm K_1$ wird

$$K_m = 0, \quad |K|_m = \frac{2K_1}{\pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

und die Curve (N) besteht hier aus zwei congruenten Lemniskaten.

c) In einem Punkte, wo einer der beiden Hauptkrümmungsradien $-R_2$ — unendlich gross ist, wird der Verlauf von $\sqrt{R}$ durch zwei zu t_2 parallele Gerade (M) dargestellt, welche zu beiden Seiten von A in der Entfernung $\sqrt{R_1}$ liegen, und der Verlauf von $\sqrt{K}$ durch zwei gleiche Kreise, welche in A die gemeinschaftliche Tangente t_2, zugleich die Vereinigung der beiden Inflexionstangenten der Fläche in A, und den Durchmesser $\sqrt{K_1}$ haben; A heisst in diesem Falle ein parabolischer Punkt der Fläche.

Mit Beibehaltung der früheren Bezeichnungen ist

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\alpha}{R_1}$$

Der mittlere Krümmungshalbmesser R_m ist unendlich gross; denn er ist der von dem Geradenpaar (M) eingeschlossenen Fläche proportional.

Die mittlere Krümmung ist

$$K_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} K_1 \cos^2\alpha\, d\alpha = \frac{K_1}{2} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

und ergibt sich auch als Quotient der Flächensumme der Kreise (N) durch die Zahl π; sie ist in den Formeln (5) und (7) als Specialwert für $K_2 = 0$ enthalten.

Für die Schnitte von mittlerer Krümmung ergeben sich aus der Gleichung

$$K = K_m$$

dieselben Azimute wie in a) und b), nämlich

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{4}, \quad \alpha_2 = -\alpha_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

3. Schnitte durch einen Punkt der Fläche. Nach dem Vorausgeschickten kommt nur bei einem elliptischen Punkte der mittlere Krümmungsradius aller durch ihn gelegten Schnitte

in Betracht; bezeichnet man ihn mit ϱ_m, so findet sich durch Verbindung der Resultate (1) und (3) für ihn der Ausdruck

$$\varrho_m = \frac{2R_m}{\pi} = \frac{2\sqrt{R_1R_2}}{\pi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

4. **Mittlere Krümmung und mittlerer Krümmungsradius einer Fläche.** Auf der gegebenen Fläche sei durch eine ihr aufgeschriebene Curve ein Teil begrenzt, dessen Grösse wir mit S_0 bezeichnen. In einem beliebigen Punkte A dieses Teils seien R_1, R_2 die Hauptkrümmungsradien, dS das anstossende Flächenelement, $d\Sigma$ die Grösse seiner Abbildung auf einer Kugel vom Halbmesser Eins. Bezeichnet man das Krümmungsmaass oder kurz die Krümmung der Fläche in dem genannten Punkte mit $\mathfrak{K}$, so ist

$$\mathfrak{K} = \frac{d\Sigma}{dS} = \frac{1}{R_1R_2},$$

Wir beschränken uns von hier ab auf Flächen mit elliptischen Punkten. Die Krümmung einer solchen kann mit derjenigen einer Kugel verglichen werden. Entsprechend dem Begriffe des Krümmungskreises einer Curve belegen wir eine Kugel, welche mit der Fläche im Punkte A gleiche Krümmung hat, mit dem Namen **Krümmungskugel**, ihren Halbmesser mit dem Namen **Krümmungshalbmesser**, beides auf den Punkt A bezogen. Für die letztgenannte Grösse ergibt sich, da die Krümmung einer Kugel durch das reciproke Halbmesserquadrat gemessen wird, der Wert

$$\Re = \sqrt{R_1R_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

welcher mit dem Werte des mittleren Krümmungshalbmessers R_m der durch A gelegten Normalschnitte übereinstimmt.

Die **mittlere Krümmung** von S_0 ist gegeben durch

$$\mathfrak{K}_m = \frac{1}{S_0}\int \mathfrak{K}\, dS = \frac{1}{S_0}\int d\Sigma$$

die Integration ist über S_0 auszudehnen; ihr Resultat ist Σ_0 oder die Grösse der sphärischen Abbildung von S_0, so dass

$$\mathfrak{K}_m = \frac{\Sigma_0}{S_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Hiernach fällt die mittlere Krümmung von S_0 mit derjenigen Grösse überein, welche als **relative Krümmung** dieses Flächenteils bezeichnet zu werden pflegt.

Diejenige Kugel, deren Krümmung dem eben berechneten Mittelwerte gleich ist, wollen wir Kugel mittlerer Krümmung von S_0 nennen; für ihren Radius ergibt sich der Ausdruck

$$\mathfrak{R}_m = \sqrt{\frac{S_0}{\Sigma_0}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Zu einem bemerkenswerten Satze führt die Anwendung dieser Formeln auf eine geschlossene convexe Fläche ohne singuläre Punkte; da hier, wenn man die ganze Fläche in Betracht nimmt,

$$\Sigma_0 = 4\pi$$

ist, so wird

$$\mathfrak{K}_m = \frac{4\pi}{S_0}, \quad \mathfrak{R}_m = \sqrt{\frac{S_0}{4\pi}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Dies sagt aus: Die mittlere Krümmung einer geschlossenen convexen Fläche stimmt mit der Krümmung einer Kugel von gleicher Oberfläche überein.

Dem Radius der Kugel mittlerer Krümmung stellt sich der mittlere Krümmungsradius oder der mittlere Halbmesser der Krümmungskugeln gegenüber. Man erhält für ihn auf Grund von (14) den allgemeinen Ausdruck

$$\mathfrak{R}_m = \frac{1}{S_0} \int \sqrt{R_1 R_2}\, dS \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

die Integration über S_0 ausgedehnt.

Als Beispiele hierzu wählen wir die durch Umdrehung einer Cykloide um ihre Grundlinie entstandene Fläche und das Sphäroid.

Wird bei der ersten Fläche der Halbmesser des rollenden Kreises mit a, der zu einem Punkte A des Meridians gehörige Rollwinkel mit φ bezeichnet, so findet man

$$R_1 = 4a \sin\frac{\varphi}{2}, \quad R_2 = 2a \sin\frac{\varphi}{2}, \quad \mathfrak{R} = 2a\sqrt{2} \sin\frac{\varphi}{2},$$

$$dS = 8\pi a^2 \sin^3\frac{\varphi}{2}\, d\varphi, \quad S_0 = \frac{64}{3}\pi a^2$$

Daraus berechnen sich auf Grund von (17) und (18) die Werte

$$\mathfrak{K}_m = \frac{3}{16a^2}, \quad \mathfrak{R}_m = \frac{4}{\sqrt{3}}, \quad \mathfrak{R}_m = \frac{9\pi}{8\sqrt{2}}a$$

Im zweiten Beispiel[1]) sei a die grosse Halbaxe, ε die relative Excentricität des Meridians, β die Breite eines beliebigen Punktes, d. ist die Neigung der zugehörigen Normale gegen die Aequatorebene; dann ist für den gedachten Punkt

$$R_1 = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2\sin^2\beta)^{\frac{3}{2}}}, \quad R_2 = \frac{a}{(1-\varepsilon^2\sin^2\beta)^{\frac{1}{2}}}, \quad \mathfrak{R} = \frac{a(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}}{1-\varepsilon^2\sin^2\beta},$$

$$dS = 2\pi a^2(1-\varepsilon^2)\frac{\cos\beta\, d\beta}{(1-\varepsilon^2\sin^2\beta)^2}; \quad S_0 = 2\pi a^2\left[1+\frac{1-\varepsilon^2}{2\varepsilon}\log\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right]$$

daraus berechnet sich mittelst der nämlichen Formeln

$$\mathfrak{R}_m = \frac{\frac{3}{2\varepsilon}}{a^2\left[1+\frac{1}{1-\varepsilon}\log\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right]} = \frac{1}{a^2}\left[1+\frac{\varepsilon^2}{3}+\frac{8\varepsilon^4}{45}+\frac{104\varepsilon^6}{945}+\ldots\right],$$

$$\mathfrak{R}_{g_m} = \sqrt{1.\mathfrak{R}_m} = a\left[1-\frac{\varepsilon^2}{6}-\frac{17\varepsilon^4}{360}-\frac{67\varepsilon^6}{3024}-\ldots\right].$$

$$\mathfrak{R}_m = \tfrac{1}{2}a(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}\frac{\frac{10-6\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2}+\frac{3}{\varepsilon}\log\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}{1+\frac{1-\varepsilon^2}{2\varepsilon}\log\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}$$

$$= a\left[1-\frac{\varepsilon^2}{6}+\frac{31\varepsilon^4}{360}+\frac{1697\varepsilon^6}{15120}+\ldots\right].$$

---

1) S. Dr. F. R. Helmert, Die mathem. n. physik. Theorien der höheren Geodäsie, Bd. I, pag. 63 flg.

XVI.

Ueber die Entwickelung von $e^{-1:(1-x)}$ in eine Potenzenreihe nebst einigen Anwendungen derselben.

Von

Louis Saalschütz.

Die erste Anregung zur nachfolgenden Reihenentwicklung lag für mich in dem Bestreben $e^{-\frac{1}{y}}$, wobei y einen positiven echten Bruch oder 1 bedeutet, in einer nach ganzen Functionen von y fortlaufenden Reihe darzustellen, welche um so willkommener wäre, wenn sie auch noch für $y = 0$ gültig wäre und den richtigen Wert null in zweifelloser Art lieferte. Dies lässt sich in der Tat erreichen, wenn man y durch $1-x$ ersetzt und dann nach Potenzen von x entwickelt. Dabei stellt sich heraus, dass die Coefficienten dieser und einer mit ihr eng zusammenhangenden Reihe in so eigentümlicher Art fortschreiten, dass die nachfolgenden Mitteilungen, wie ich hoffe, nicht ganz interesselos sein dürften. Schliesslich wird noch gezeigt, dass und in welcher Art die gewonnene Reihe sich zur Berechnung mancher Integrale, deren obere Grenze unendlich ist, verwenden lässt.

§ 1.

Unabhängige Darstellungsweise der Coefficienten.

Es sei:

$$1)\quad e^{-\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{e}(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots)$$

Um die Coefficienten $b_0 b_1 b_2 \ldots$ in unabhängiger Art darzustellen, kann man den Taylor'schen Lehrsatz benutzen [1]), zuvor die von verschiedenen Differentialquotienten von $f(x)$ für $x = 0$ aufstellen. Setze ich

$$\frac{1}{1-x} = z$$

so ist

$$f(x) = e^{-z} = \psi(z)$$

und dann weiter:

$$\psi' z = -e^{-z}, \quad \psi'' z = e^{-z}, \quad \ldots \quad \psi^{(n)} z = (-1)^n e^{-z};$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{(1-x)^2} = z^2$$

Daher wird:

$$f'x = \psi' z \, \frac{dz}{dx} = -e^{-z} z^2; \quad f''x = \frac{df'x}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = e^{-z}(z^4 - 2z^3)$$

ebenso:

$$f'''x = -e^{-z}(z^6 - 6z^5 + 6z^4)$$
$$f^{(4)}x = e^{-z}(z^8 - 12z^7 + 36z^6 - 24z^5)$$
$$f^{(5)}x = -e^{-z}(z^{10} - 20z^9 + 120z^8 - 240z^7 + 120z^6)$$

Diesen letzten Ausdruck kann man auf die Form bringen:

$$f^{(5)}x = -e^{-z}(z^{10} - 1.(4)_1(5)_1 z^9 + 1\ 2(4)_2(5)_2 z^8 - 1.2.3(4)_3(5)_3 z^7 + 1.2.3.4(4)_4(5)_4 z^6)$$

und dass hierin das allgemeine Gesetz ausgesprochen ist, wollen wir durch den Schluss von n auf $n+1$ beweisen. Es sei also:

2) $(-1)^n f^{(n)} x = e^{-z}(z^{2n} - 1.(n-1)_1(n)_1 z^{2n-1} \pm \ldots$
$+(-1)^{k-1}(k-1)!(n-1)_{k-1}(n)_{k-1} z^{2n-k+1} + (-1)^k . k!(n-1)_k(n)_k z^{2n-k} + \ldots$
$+(-1)^{n-1}(n-1)!(n-1)_{n-1}(n)_{n-1} z^{n+1})$

dann wird:

$$(-1)^n \frac{d f^{(n)} x}{dz} = e^{-z}(-z^{2n} + (n-1)_1(n)_1 z^{2n-1} \mp \ldots) + e^{-z}(2nz^{2n-1} \mp \ldots)$$

und der Coefficient von z^{2n-k} ergiebt sich:

---

1) Eine andere Methode, die gleichfalls zum Ziele führt, benutzt die Reihe für e^{-z}, in welche dann für z der Wert $(1-x)^{-1}$ einzuführen ist.

$$C_{2n-k} = -(-1)^k\{k!\,(n-1)_k(n)_k + (k-1)!\,(n-1)_{k-1}(n)_{k-1}(2n-k+1)\}$$
$$= -(-1)^k(k-1)!\,(n-1)_{k-1}(n)_{k-1}\left\{\frac{k(n-k)}{k}\,\frac{(n-k+1)}{k} + (2n-k+1)\right\}$$
$$= -(-1)^k(k-1)!\,(n-1)_{k-1}(n)_{k-1}\,\frac{n^2+n}{k}$$
$$= -(-1)^k k!\,(n)_k(n+1)_k$$

daher erhalten wir:

$$(-1)^{n+1}f^{(n+1)}x = e^{-x}(x^{2n+2} - 1\,.\,(n)_1\,(n+1)_1\,x^{2n+1} \pm \ldots$$
$$+ (-1)^k k!\,(n)_k(n+1)_k\,x^{2n+2-k} + \ldots)$$

womit der Beweis geführt ist. Bezeichnen wir nun den Wert von $f^{(n)}\,x$ für $x=0$ oder $x=1$ mit a_n, so ist der Coefficient von x^n in der Entwickelung von $f(x)$ $\dfrac{a_n}{1.2\ldots n}$ folglich giebt der Vergleich mit 1):

$$b_n = e\cdot\frac{a_n}{1.2\ldots n}$$

und daher wie 2) zeigt:

3) $$(-1)^n b_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n} - \frac{(n-1)_1\,(n)_1}{2.3\ldots n} + \frac{(n-1)_2\,(n)_2}{3\ldots n} \mp \ldots$$
$$+ (-1)^{n-1}\,\frac{(n-1)_{n-1}(n)_{n-1}}{n}.$$

Aus $f(0)$, $f'0$ folgt $b_0 = 1$, $b_1 = -1$ und dann aus Gl. 3):

$$b_2 = \tfrac{1}{2} - \frac{1.2}{2} = -\tfrac{1}{2},\quad -b_3 = \tfrac{1}{6} - \frac{2.3}{6} + \frac{1.3}{3} = \tfrac{1}{2},\quad b_4 = \frac{1}{24}\ \text{etc.}$$

Eine andere unabhängige Darstellungsweise ergiebt sich bei Entwickelung von $f(x)$ in der Form:

$$f(x) = e^{-(1+x+x^2+\ldots)}$$

mittelst der combinatorischen Ausdrücke [1]):

4) $$b_n = \Sigma\left[\frac{\alpha^p{}_1\,\alpha^q{}_2\,\alpha^r{}_3\ldots\alpha^t{}_n}{1.2\ldots p\,.\,1.2\ldots q\ldots 1.2\ldots t}\right]_{\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=-1}$$

wobei $p\,q\,r\ldots t$ so als positive ganze Zahlen einschliesslich der Null zu wählen sind, dass die Gleichung:

5) $$1\,.\,p + 2q + 3r + \ldots nt = n$$

---

1) Stern, Algebraische Analysis. Note VII. F. 1). (S. 388).

erfüllt wird, wonach der Ausdruck in 4) zu bilden [1]), und für alle die Gl. 5) befriedigenden Systeme von $pq\ldots t$ die Summation auszuführen ist.

Der Vergleich der (nicht identischen) Ausdrücke 3) und 4) liefert eine Beziehung zwischen Binomialcoeffienten. Z. B. ist für $n = 5$:

$$-\frac{1}{1.2.3.4.5}+\frac{(4)_1(5)_1}{2.3.4.5}-\frac{(4)_2(5)_2}{3.4.5}+\frac{(4)_3(5)_3}{4.5}-\frac{(4)_4(5)_4}{5}$$
$$=\frac{\alpha_1^5}{1.2.3.4.5}+\frac{\alpha_1^3\alpha_2}{1.2.3.1}+\frac{\alpha_1^2\alpha_3}{1.2.1}+\frac{\alpha_1\alpha_2^2}{1.1.2}+\frac{\alpha_1\alpha_4}{1.1}+\frac{\alpha_2\alpha_3}{1.1}+\alpha_5$$
$$=-\frac{1}{1.2.3.4.5}+\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{1.2}-\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}-1=\frac{19}{120}$$

§ 2.

Abhängige Darstellungsweise der Coefficienten.

Im vorigen Paragraphen war die Gleichung gefunden worden:

$$f'x = -e^{-x}.x^2$$

d. i.:

$$f'x = -\frac{f(x)}{(1-x)^2}$$

oder:

$$(1-x)^2 f'x + f(x) = 0.$$

Differentiirt man diese Gleichung weiter, so erhält man eine Beziehung zwischen drei aufeinander folgenden Differentialquotienten, nämlich:

6) $(1-x)^2 f^{(n+1)}x+(2nx-(2n-1))f^{(n)}x+n(n-1)f^{(n-1)}x = 0$

und somit auch, indem man $x = 0$ setzt, zwischen drei aufeinander folgenden Coefficienten der Reihe 1). Leichter gelangt man folgendermassen zu derselben Formel. Differentiiren wir Gl. 1) nach x, so kommt:

$$-\frac{e^{-1:(1-x)}}{(1-x)^2} = \frac{1}{e}(b_1+2b_2x+3b_3x^2+\ldots)$$

folglich:

$$e^{-\frac{1}{1-x}} = -\frac{(1-2x+x^2)}{e}(b_1+2b_2x+3b_3+x^2+\ldots)$$

---

1) Das Symbol 0! ist durch 1 zu ersetzen.

Führen wir die Multiplication aus und vergleichen die Coefficienten der rechten Seite mit denjenigen in 1), so erhalten wir die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
-b_1 &= b_0\\
-2b_2+2b_1 &= b_1\\
-3b_3+4b_2-b_1 &= b_2\\
-4b_4+6b_3-2b_2 &= b_3\\
-5b_5+8b_4-3b_3 &= b_4\\
&\cdots\cdots\cdots\\
-(n+1)b_{n+1}+2nb_n-(n-1)b_{n-1} &= b_n
\end{aligned}$$

oder:

$$7)\qquad (n+1)b_{n+1}-(2n-1)b_n+(n-1)b_{n-1}=0$$

Ich führe jetzt die neue Bezeichnung

$$8)\qquad nb_n=\beta_n,\quad b_n=\frac{1}{n}\beta_n$$

ein, dann nimmt die Gl. 7) die Form an:

$$\beta_{n+1}-\left(2-\frac{1}{n}\right)\beta_n+\beta_{n-1}=0$$

woraus folgt:

$$9)\qquad \beta_{n+1}=\left(2-\frac{1}{n}\right)\beta_n-\beta_{n-1}$$

und

$$10)\qquad (\beta_{n+1}-\beta_n)-(\beta_n-\beta_{n-1})+\frac{1}{n}\beta_n=0$$

Aus der Gl. 9) sind nach einander die β's und mittelst 8) gleichzeitig die b's berechnet worden, sowie sie in den Tafeln am Schlusse dieser Arbeit aufgeführt sind. Die Gl. 10) bildet die Grundlage der weiteren Untersuchung.

Noch eine andere Formel zwischen den Grössen b und β, die für uns von Wichtigkeit werden wird, erhalten wir, wenn wir in die Recursionsformel der allgemeinen Entwickelung

$$11)\qquad e^{a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots}=1+A_1x+A_2x_2+A_3x^3+\cdots$$

nämlich [1])

---

1) A. a. O. (F. 21) S. 389.

12) $$A_n = \frac{1}{n}(a_1 A_{n-1} + 2a_2 A_{n-2} + \ldots + (n-1)\, a_{n-1} A_1 + n a_n)$$

statt $A_1 A_2 \ldots b_1 b_2 \ldots$ und für $a_1 a_2 \ldots$ den Wert -1 einsetzen, folgendes:

$$n b_n + b_{n-1} + 2b_{n-2} + 3b_{n-3} + \ldots + (n-1) b_1 + n = 0$$

ebenso:

$$(n+1) b_{n+1} + b_n + 2b_{n-1} + 3b_{n-2} + \ldots + n b_1 + (n+1) = 0$$

Ziehen wir die erstere Formel von der zweiten ab, schreiben statt nb_n und $(n+1)b_{n+1}$ bzhw. β_n und β_{n+1} und am Ende b_0 statt 1, so entsteht folgende:

13) $$b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \beta_{n+1} - \beta_n = 0$$

und dies ist die erwähnte Beziehung. Sie folgt übrigens auch aus 10), wenn man diese

$$\beta_{n+1} - 2\beta_n + \beta_{n-1} + b_n = 0$$

schreibt, darin nach einander $n = 2, 3, 4, \ldots$ setzt, addirt und $\beta_1 = b_1$, $\beta_2 = 2b_2$ und $-1 = -b_0$ substituirt.

§ 3.

Die Grössen β und die von ihnen näherungsweise befriedigte Differentialgleichung.

Werfen wir einen Blick auf Tafel II, welche der Grössen β enthält, so sehen wir sofort, dass dieselben in Gruppen von abwechselnd positiven und negativen Gliedern zerfallen. Die Anzahl Glieder nimmt von Gruppe zu Gruppe zu, und zwar beträgt dieselbe bezüglich:

14) 1 3 9 13 19 23

In jeder Gruppe nimmt der Absolutwert der Glieder von Anfang zu, erreicht ein Maximum und nimmt dann wieder ab. Diese Maxima sind in den sechs berechneten Gruppen:

15) 0 1 1,56 1,94 2,26 2,55

Sie nehmen also zu. Betrachtet man die Gliedzahl n als Abscisse, β_n als Ordinate, so macht das Ganze den Eindruck einer Zusammensetzung von Sinus-Curven mit stets grösserer Spannung und stets grösserer Pfeilhöhe. Wir wollen nun sehen, wie weit diese Vorstellung sich mit der Gl. 10) in Uebereinstimmung bringen lässt. Wir

denken uns n bereits recht gross geworden und betrachten den Zuwachs 1 als dn; dann ist:

$$\beta_n - \beta_{n-1} = \frac{d\beta}{dn}$$

$$(\beta_{n+1} - \beta_n) - (\beta_n - \beta_{n-1}) = \frac{d^2\beta}{dn^2}$$

und daher geht die Gl. 10) über in

16) $$\frac{d^2\beta}{dn^2} + \frac{\beta}{n} = 0$$

Wir wollen im Anschluss an diese Gleichnng nur eine bestimmte Gruppe in's Auge fassen. Wir bezeichnen den Index des grössten β (immer absolut verstanden) in ihr mit λ und setzen:

17) $$n = \lambda + \xi$$

so dass ξ bei wachsendem n aus dem Negativen ins Positive übergeht, Dadnrch wird die Gleichung 16):

18) $$\frac{d^2\beta}{d\xi^2} + \frac{\beta}{\lambda + \xi} = 0.$$

Nun ist der Maximalwert von ξ klein gegen λ, wenn n sehr gross ist. Das Verhältniss desselben zu λ ist:

in der Gruppe (13; 25) etwa $\frac{7}{19}$

„ „ „ (26; 44) „ $\frac{10}{35}$

„ „ „ (45; 67) „ $\frac{12}{56}$

Ich entwickele daher $\frac{1}{\lambda+\xi}$ nach Potenzen von $\frac{\xi}{\lambda}$ und lasse in der Gl. 18) nach einander drei Annäherungen eintreten, ich setze nämlich statt $\frac{\beta}{\lambda+\xi}$

1) $\frac{\beta}{\lambda}$; 2) $\frac{\beta}{\lambda}\left(1-\frac{\xi}{\lambda}\right)$; 3) $\frac{\beta}{\lambda}\left(1-\frac{\xi}{\lambda}+\frac{\xi^2}{\lambda^2}\right)$

Allerdings lässt sich die Gl. 18) oder 16) streng integriren, doch ist die Form des Resultates, ein bestimmtes Integral, als dessen Parameter $\lambda+\xi$ oder n anftritt, für unseren Zweck nicht bequem, schon deshalb nicht, weil dieser Parameter immer grösser wird, in-

dem wir gerade unserer Betrachtung grosse Werte von n zu Grunde legen müssen.

§ 4.

Erste Annäherung.

Die Gl. 18) nimmt in erster Annäherung die Form an:

$$19) \qquad \frac{d^2\beta}{d\xi^2} + \frac{\beta}{\lambda} = 0.$$

Ihr Integral lässt sich schreiben:

$$20) \qquad \beta = A\cos\left(\frac{\xi+\gamma}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

Nun soll $\xi = 0$ sein, wenn β seinen grössten Wert annimmt, folglich ist $\gamma = 0$

$$21) \qquad \beta = A\cos\left(\frac{\xi}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

und A der Maximalwert von β. Letzteres verschwindet für $\xi = \mp\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}$. Bezeichne ich nun den Unterschied des Anfangs- und End-Index der Gruppe [1]) mit z, so muss sein:

$$22) \qquad z = \pi\sqrt{\lambda} \quad \text{oder} \quad z^2 = \pi^2\lambda$$

Benenne ich dieselben Grössen für die Gruppen, die der betrachteten folgen, mit $\lambda_1 z_1$, $\lambda_2 z_2$, etc., so müssen analog 22) die Gleichungen stattfinden:

$$23) \qquad \begin{cases} z_1^2 = \pi^2\lambda_1 \\ z_2^2 = \pi^2\lambda_2 \\ z_3^2 = \pi^2\lambda_3 \\ \cdots\cdots \end{cases}$$

Andererseits ist aber auch:

$$\lambda_1 = \lambda + \frac{z}{2} + \frac{z_1}{2}$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2}$$

$$\lambda_3 = \lambda_2 + \frac{z_2}{2} + \frac{z_3}{2} \quad \text{etc.}$$

also folgt aus 22) und 23) durch Subtraction:

---

1) Diese Indices, also auch z, sowie λ sind durch Interpolation zu bestimmen; s. später.

$$z_1^2 - z^2 = \pi^2(\lambda_1 - \lambda) = \frac{\pi^2}{2}(z + z_1)$$

$$z_2^2 - z_1^2 = \pi^2(\lambda_2 - \lambda_1) = \frac{\pi^2}{2}(z_1 + z_2)$$

$$z_3^2 - z_2^2 = \pi^2(\lambda_3 - \lambda_2) = \frac{\pi^2}{1}(z_2 + z_3) \quad \text{etc.}$$

und daher:

$$24) \qquad z_1 - z = z_2 - z_1 = z_3 - z_2 = \ldots = \frac{\pi^2}{2}$$

Die Gliederanzahlen der aufeinander folgenden Gruppen bilden also eine arithmetische Reihe 1. Ordnung mit der Differenz $\frac{\pi^2}{2}$.

Wir wollen nun zunächst prüfen, wie weit die Resultate 22) und 23) mit dem berechneten Teil der β's übereinstimmen. Die Tafel II giebt

$$\beta_{12} = 0{,}193 \qquad \beta_{13} = -0{,}303.$$

Durch einfache Interpolation folgt dann:

$$\beta_{12{,}89} = 0$$

Diesen Anfangsindex einer Gruppe wollen wir μ, den Endindex derselben oder Anfangsindex der folgenden μ_1 nennen, sodass $s = \mu_1 - \mu$ wird. Dann ist für die Gruppe (13,25): $\mu = 12{,}39$; $\mu_1 = 25{,}96$. Ferner ist nach Taf. II:

$$-\beta_{18} = 1{,}912; \quad -\beta_{19} = 1{,}943; \quad -\beta_{20} = 1{,}872$$

Setze ich für diese Stelle der Tafel:

$$-\beta = a + bx + cx^2$$

sodass gleichzeitig

$$\begin{cases} x = 0 \\ \beta = \beta_{18}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ \beta = \beta_{19}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ \beta = \beta_{20} \end{cases}$$

wird, so folgt aus den angegebenen Zahlen:

$$a = 1{,}912 \quad b = 0{,}082 \quad c = -0{,}051$$

und:

$$-\frac{d\beta}{dx} = b + 2cx = 0 \quad \text{für} \quad x = 0{,}80$$

Es ist also der Maximalindex λ der Gruppe 18,80. In dieser Art ergiebt sich:

25)
$$\left\{\begin{array}{lll} \text{Gr.}(13;25)\left\{\begin{array}{l}\mu = 12{,}39\\ \lambda = 18{,}80\\ \mu_1 = 25{,}96\end{array}\right. & z = 13{,}57 & \pi\sqrt{\lambda} = 13{,}62\\ \text{Gr.}(26;44)\left\{\begin{array}{l}\lambda_1 = 34{,}84\\ \mu_2 = 44{,}47\end{array}\right. & z_1 = 18{,}51 & \pi\sqrt{\lambda_1} = 18{,}55\\ \text{Gr.}(45;67)\left\{\begin{array}{l}\lambda_2 = 55{,}81\\ \mu_3 = 67{,}91\end{array}\right. & z_2 = 23{,}44 & \pi\sqrt{\lambda_2} = 23{,}47 \end{array}\right.$$

$$z_1 - z_4 = 4{,}94 \quad z_2 - z_1 = 4{,}93, \quad \frac{\pi^2}{2} = 4{,}9348$$

Wir können also sagen, dass die Gültigkeit unserer Betrachtungen bereits im berechneten Teil der Tafel II beginne, was sich auch weiterhin bestätigen wird.

Dem Werte 21) von β gemäss erreicht der Differentialquotient $\frac{d\beta}{d\xi}$ seine, absolut genommen, grössten Werte am Anfang und Ende der Gruppe; dies bestätigt auch die Rechnung; es sind z. B. die Differenzen

$$\beta_{12} - \beta_{13} = 0{,}496 \quad \text{und} \quad \beta_{26} - \beta_{25} = 0{,}411$$

grösser als irgend welche andere im ersten, bzhw. zweiten Teil der Gruppe; dass dieselben verschiedenes Zeichen haben, versteht sich auch von selbst, da der Differentialquotient an der Grenze zweier Gruppen für beide identisch ist. Hingegen müssten die beiden Differentialquotienten am Anfang und Ende der Gruppe Gl. 21) zufolge gleiche Absolutwerte haben; damit stimmt aber die Rechnung nicht überein; wol aber stimmt sie hierin mit der Gl. (16), denn denken wir uns zwei β im ersten und zweiten Teil der Gruppe die einander gleich sind, so ist für das zweite $\frac{\beta}{n}$ also $\frac{d^2\beta}{d\xi^2}$ (absolut genommen) kleiner als für das erste, also der Krümmungsradius grösser und der Bogen selbst flacher, also der Absolutwert des Differentialquotienten kleiner. Aus demselben Grunde muss auch das Maximum von β etwas näher dem Anfang als dem Ende der Gruppe liegen, was man aus den Zahlen in 25) in der Tat erkennen kann.

Wir dürfen annehmen, dass die 2te (oder eine noch engere) Annäherung an die Gl. 18) uns über diese Umstände genauer unterrichten werde.

§ 5.

Zweite Annäherung.

Wir geben jetzt der Gl. 18) die sich ihr besser als 19) anschliessende Form:

$$26) \qquad \frac{d^2\beta}{d\xi^2} + \frac{\beta}{\lambda}\left(1 - \frac{\xi}{\lambda}\right) = 0 \text{ [1]}$$

Ein particuläres Integral von 19) hat die Form $e^{a\xi}$, es liegt also nahe, jetzt mit der Form $e^{a\xi + b\xi^2}$ zu versuchen, oder indem man Imaginäres von Reellem sondert, zu setzen:

$$27) \qquad \begin{cases} \beta = Ae^v \cos\left(\frac{u}{\sqrt{\lambda}}\right) \\ u = (1 + A_1)\xi + A_2\xi^2 + \gamma \\ v = B_1\xi + B_2\xi^2 \end{cases}$$

Hierin sind A und γ die Integrationsconstanten, während $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ gefunden werden sollen. Dann wird

$$28) \qquad \frac{d\beta}{d\xi} = Ae^v \left\{ \frac{dv}{d\xi} \cos\left(\frac{u}{\sqrt{\lambda}}\right) - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{du}{d\xi} \sin\left(\frac{u}{\sqrt{\lambda}}\right) \right\}$$

$$29) \qquad \frac{d^2\beta}{d\xi^2} = Ae^v \cos\left(\frac{u}{\sqrt{\lambda}}\right) \left\{ -\frac{1}{\lambda}\left(\frac{du}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dv}{\partial\xi}\right)^2 + \frac{d^2v}{d\xi^2} \right\}$$
$$- Ae^v \sin\left(\frac{u}{\sqrt{\lambda}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left\{ 2\frac{du}{d\xi}\frac{dv}{d\xi} + \frac{d^2u}{d\xi^2} \right\}$$

Ich werde im Folgenden unter der Voraussetzung, dass λ und auch schon $\sqrt{\lambda}$ sehr gross sei, die Glieder trennen in solche von der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda\sqrt{\lambda}}, \frac{1}{\lambda^2}$ etc., so dass also, wie immer, Glieder geringerer Ordnung einen grösseren Absolutwert haben als solche von höherer Ordnung. Dabei müssen wir, um grobe Irrtümer zu vermeiden, streng an dem Grundsatz festhalten, dass, wenn wir irgend ein Glied von der Ordnung $\frac{1}{\lambda^p}$ fortlassen, es fehlerhaft ist ein anderes von derselben oder höherer Ordnung beizubehalten.

Wir gehen nunmehr zur Ausführung der Rechnung über. Es ist

---

1) Bezüglich der strengen Integration dieser Gleichung gilt dasselbe, was von derjenigen der Gl. 18) am Ende von § 3. gesagt ist.

30) $$\frac{du}{d\xi} = 1 + A_1 + A_2\xi; \quad \frac{dv}{d\xi} = B_1 + 2B_2\xi$$

folglich muss nach 26) und 29) sein:

31) $$Ae^v \cos\left(\frac{u}{\sqrt{\lambda}}\right)\Big\{ -\frac{1}{\lambda}(1 + 2A_1 + A_1^2 + 4A_2(1+A_1)\xi + 4A_2^2\xi^2) + B_1^2 + 4B_1B_2\xi + 4B_2^2\xi^2 + 2B_2 + \frac{1}{\lambda} - \frac{\xi}{\lambda^2}\Big\}$$
$$- Ae^v \sin\left(\frac{u}{\sqrt{\lambda}}\right)\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\Big\{2B_1(1+A_1) + 4(B_1A_2 + B_2(1+A_1))\xi + 8A_2B_2\xi^2 + 2A_2\Big\} = 0$$

Wir setzen nun in den Coefficienten von $Ae^v \cos\left(\frac{u}{\sqrt{\lambda}}\right)$ und von $Ae^v \sin\left(\frac{u}{\sqrt{\lambda}}\right)$ die Factoren von ξ^0 und ξ einzeln gleich 0. Das giebt:

32)
$$\begin{cases} \text{a)} & -\frac{1}{\lambda}(2A_1 + A_1^2) + 2B_2 + B_1^2 = 0 \\ \text{b)} & -\frac{4}{\lambda}A_2(1+A_1) + 4B_1B_2 - \frac{1}{\lambda^2} = 0 \\ \text{c)} & \frac{2}{\sqrt{\lambda}}(B_1(1+A_1) + A_2) = 0 \\ \text{d)} & \frac{1}{\sqrt{\lambda}}(B_1A_2 + B_2(1+A)) = 0 \end{cases}$$

Nehme ich nun A_1 als von der Ordnung $\frac{1}{\lambda}$ an, so folgt aus a), dass B_2 und B_1^2 von keiner geringeren, und mindestens eine dieser Grössen auch von keiner höheren Ordnung sein können als $\frac{1}{\lambda^2}$. Aus c) folgt dann A_2 von der Ordnung B_1. Sind also $a_1 a_2$, $b_1 b_2$ endliche Zahlen so ist es das Natürlichste:

$$A_1 = \frac{a_1}{\lambda}, \quad B_2 = \frac{b_1}{\lambda}, \quad A_2 = \frac{a_2}{\lambda}, \quad B_2 = \frac{b_2}{\lambda^2}$$

zu setzen. Jetzt haben wir den Factor von ξ^2 im Coefficienten des Cosinus, nämlich $\frac{4A_2^2}{\lambda}$ d. i. $\frac{4a_2^2}{\lambda^3}$ als 0 betrachtet und mussten das, weil wir auch das Glied $\frac{\xi}{\lambda} \cdot \frac{\xi^2}{\lambda^2}$, also innerhalb des genannten Coef-

ficienten das Glied $\frac{\xi^2}{\lambda^2}$ fortgelassen haben; nun kann aber, wie die erste Annähernng zeigt, ξ bis zur Ordnung $\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}$ wachsen; wenn wir also das Glied $\frac{4a_2^2\xi^2}{\lambda^2}$ fortlassen, so lassen wir eln Glied von der Ordnung $\frac{1}{\lambda}$ fort, müssen also alle Glieder fortlassen. Im Coefficienten des Sinus lassen wir das Glied $\frac{8A_2B_2\xi^2}{\sqrt{\lambda}}$ d. i. ein Glied, dessen Ordnung mindestens $\frac{1}{\lambda^{2,5}}$ ist, fort, wodurch also keine weitere Beschränkung der Genauigkeit veranlasst wird. Sehen wir nun die Gl. (32) an, so ist die linke Seite der a) von der Ordnung $\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}}$; wir können also aus lhr keine weiteren Schlüsse ziehen, die Gl. b) lautet:

$$-\frac{4a^2}{\lambda^2}\left(1+\frac{a_1}{\lambda}\right)+\frac{4b_1b_2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=0$$

ihre linke Seite ist ebenfalls von der Ordnung $\frac{1}{\lambda^2}$, aber sie erhält den Factor ξ, kann also bis zur Grösse eines Gliedes der Ordnung $\frac{1}{\lambda^{1\frac{1}{2}}}$ steigen nnd ist daher zu berücksichtigen. Sie liefert, bei Fortlassnng der Glieder höherer (nämlich mindestens $2\frac{1}{2}$ter) Ordnung:

$$a_2=-\tfrac{1}{4}$$

Die Gl. c) lantet:

$$\frac{2}{\lambda^{1\frac{1}{2}}}\left(b_1\left(1+\frac{a_1}{\lambda}\right)+a_2\right)=0$$

Ihre linke Seite ist von der $1\frac{1}{2}$ten Ordnung, ihr Coefficient 1, sie ist also zu berücksichtigen. Sie giebt:

$$b_1=-a_2=\tfrac{1}{4}$$

Die Gl. d) ist von der Ordnung $\frac{1}{\lambda^{2\frac{1}{2}}}$; die linke Seite erhält den Coefficienten ξ, bleibt also stets mindestens von der Ordnung $\frac{1}{\lambda^2}$, ist also ausser Betracht zu lassen.

Wir haben also a_2 und b_1 gefunden, während a_1 und b_2 unbestimmt, d. h. für den erreichten Grad der Genauigkeit gleichgültig bleiben. Wir können sie also auch $=0$ setzen und haben daher:

33)
$$\begin{cases} \beta = Ae^{v}\cos\left(\dfrac{u}{\sqrt{\lambda}}\right) \\ u = \xi - \dfrac{\xi^2}{4\lambda} + \gamma; \quad v = \dfrac{\xi}{4\lambda} \end{cases}$$

Nun könnte jemand in der vorangehenden Deduction die nötige Schärfe vermissen, zumal wir erstere an eine Gleichung anknüpften, die sich später als unerheblich erwies. Darauf wäre zu erwidern: Wir haben in 33) einen Ausdruck für β gewonnen, bei dessen Substitution in die Gl. 26) sich alle diejenigen Glieder identisch zerstören, deren Grösse gleich oder bedeutender ist als die Grösse eines Gliedes von der Ordnung $\frac{1}{\lambda^{1\frac{1}{2}}}$. Solange wir uns also mit dieser Genauigkeit begnügen — und das müssen wir, weil in der Gl. 26) selbst Glieder höherer als der $1\frac{1}{2}$ten Ordnung fortgelassen sind — haben wir den obigen Ausdruck für β, der auch zwei willkürliche Constanten A und γ enthält, als das vollständige Integral der Differentialgleichung 26) anzusehen.

Wir bestimmen nun wieder γ so, dass β für $\xi = 0$ seinen Maximalwert erreicht. Setzen wir die Werte:

$$\left.\frac{du}{d\xi}\right]_{\xi=0} = 1, \qquad \left.\frac{dv}{d\xi}\right]_{\xi=0} = \frac{1}{4\lambda}$$

in $\frac{d\beta}{d\xi}$, Gl. (28), ein und dies dann $= 0$, so erhalten wir die Gleichung:

34)
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{\lambda}}\right) = \frac{1}{4\sqrt{\lambda}}$$

also

$$\frac{\gamma}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{4\sqrt{\lambda}} - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{1}{(4\sqrt{\lambda})^3} \pm \cdots$$

oder

$$\gamma = \frac{1}{4} - \frac{1}{192\lambda} \pm$$

Schon die Hinzufügung des Gliedes $-\frac{1}{192\lambda}$ zu $\frac{1}{4}$ wäre mindestens überflüssig, da es für grosse Werte von ξ das einzige Glied von der Ordnung $\frac{1}{\lambda}$ wäre; sie wäre aber auch geradezu fehlerhaft, da in u Glieder von der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ fortgelassen sind, welche erst bei der nächsen (3ten) Annäherung hinzugefügt werden. Aber selbst da noch nicht, erst bei der vierten Annäherung wäre γ von

$\frac{1}{\lambda}$ verschieden anznnehmen. Dann wäre aber der Coefficient von $\frac{1}{\lambda}$ nicht $-\frac{1}{192}$, sondern ein ganz anderer. Wir setzen also:

35) $$\gamma = \tfrac{1}{4}$$

Der Maximalwert von β, er sei B, ist jetzt:

36) $$B = A\left(1 - \frac{1}{32\lambda}\right)$$

odec solange wir andere Glieder von der Ordnnng $\frac{1}{\lambda}$ fortlassen:

37) $$B = A$$

Wir wollen jetzt die Werte horechnon, welche ξ annimmt, wenn

$$u = \mp\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}$$

wird. Sei gleichzeitig:

38) $$\begin{cases} u = \frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda} \\ \xi = p \end{cases} \quad \text{sowie} \quad \begin{cases} u = -\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda} \\ \xi = -q \end{cases}$$

so werden p nnd q anch nahezu $\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}$ sein. Setze ich nach 33) nnd 35):

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda} = p - \frac{p^3}{4\lambda} + \tfrac{1}{4}$$

nnd nehme für p die Form an:

$$p = \frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda} + c$$

worans:

$$p^2 = \frac{\pi^2}{4}\sqrt{\lambda}$$

so folgt:

$$c = \frac{\pi^2 - 4}{16}$$

Wir dürfen nämlich keine Glieder von der Ordnnng $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ nehmen, da erst die dritte Annäherung ein solches Glied in $\frac{\xi^3}{\lambda^2}\left(\text{für } \xi = \frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right)$ hinznbringt. — Setze ich $\xi = -q$ in 33), so erhalte ich die Gleichungen:

$$-\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda} = -q - \frac{q^2}{4\lambda} + \tfrac{1}{4}$$

und

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda} = q + \frac{q^2}{4\lambda} - \tfrac{1}{4}$$

$$q = \frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda} + c'$$

$$c' = -\frac{\pi^2 - 4}{16}$$

Also haben wir:

39)
$$\begin{cases} p = \frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda} + \frac{\pi^2-4}{16} \\ q = \frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda} - \frac{\pi^2-4}{16} \end{cases}$$

Also auch jetzt ist noch

$$p + q = \pi\sqrt{\lambda}$$

aber nicht mehr

$$p = q$$

sondern:

40) $$p - q = \frac{\pi^2 - 4}{8} = 0{,}7338$$

womit die zweite Bemerkung am Ende des § 5. ihre Erledigung gefunden hat. Die in 25) zusammengestellten Zahlen geben für $p - q$ die Werte:

$$(\mu_1 - \lambda) - (\lambda - \mu) = 0{,}75; \quad (\mu_2 - \lambda_1) - (\lambda_1 - \mu_1) = 0{,}75$$
$$(\mu_3 - \lambda_2) - (\lambda_2 - \mu_2) = 0{,}76$$

Die verhältnissmässig weniger gute Uebereinstimmung als früher erklärt sich leicht dadurch, dass, abgesehen von der Voraussetzung sehr grosser Werte von n, in der Gl. 40) die grosse Zahl $\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}$ sich fortgehoben hat.

Wir wenden uns nun zur Bestimmung der Werte für $\frac{d\beta}{d\xi}$ am Anfang und Ende der Gruppe, welche bei der 1ten Annäherung sich als gleich ergeben. Ersteres mag mit

$$\left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_a \quad \text{und sein Absolutwert mit} \quad \left(\overline{\frac{d\beta}{d\xi}}\right)_a$$

letzteres mit

$\left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_\omega$ und sein Absolutwert mit $\left(\frac{\overline{d\beta}}{d\xi}\right)_\omega$

bezeichnet werden. Nach 28) ist für $u = \mp \frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}$:

$$\left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_\alpha = \frac{Ae^v}{\sqrt{\lambda}} \frac{du}{d\xi}\Big]_{\xi=-q} \qquad \left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_\omega = -\frac{Ae^v}{\sqrt{\lambda}} \frac{du}{d\xi}\Big]_{\xi=p}$$

Um uns über die beizubehaltenden Glieder vollkommen klar zu werden, schreibe ich mit Rücksicht auf 33):

41)
$$\begin{cases} u = \xi - \frac{\xi^2}{4\lambda} + \gamma + \frac{a\xi^3}{\lambda^2} \\ v = \frac{\xi}{4\lambda} + \frac{b\xi^2}{\lambda^2} \end{cases}$$

dann sind alle diejenigen Glieder fortzulassen, deren Ordnung mit denen übereinstimmt, welche die (unbekannten) Factoren a oder b haben. Aus 41) folgt:

$$\frac{du}{d\xi}\Big]_{\xi=p} = 1 - \frac{p}{2\lambda} + \frac{3ap^2}{\lambda^2}; \quad e^v\Big]_{\xi=p} = 1 + \frac{p}{4\lambda} + \left(b + \frac{1}{32}\right)\frac{p^2}{\lambda^2}$$

also:

$$\left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_\omega = -\frac{A}{\sqrt{\lambda}}\left(1 - \frac{p}{4\lambda} + \frac{cp^2}{\lambda^2}\right)$$

worin

$$c = 3a + b - \frac{3}{32}$$

also ebenfalls unbekannt ist. Nach 39) folgt dann weiter:

$$\left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_\omega = -\frac{A}{\sqrt{\lambda}}\left(1 - \frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}} - \frac{\pi^2 - 4}{64\lambda} + \frac{c\pi^2}{4\lambda}\right)$$

Wir müssen also die Glieder von der Ordnung $\frac{1}{\lambda}$ fortlassen und haben den Absolutwert, wenn wir denjenigen von A auch mit $\bar{A}$ bezeichnen:

42)
$$\left(\frac{\overline{d\beta}}{d\xi}\right)_\omega = \frac{\bar{A}}{\sqrt{\lambda}}\left(1 - \frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}\right)$$

Ganz in derselben Art folgt für $\xi = -q$:

43)
$$\left(\frac{\overline{d\beta}}{\partial\xi}\right)_\alpha = \frac{\bar{A}}{\sqrt{\lambda}}\left(1 + \frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}\right)$$

so dass in der Tat jetzt der absolnte Schlnsswert kleiner als der absolnte Anfangswert sich heransstellt. (Vgl. § 4. am Schlusse). Die Formeln 42) nnd 43) führen nns aber noch zu weiteren wichtigen Resultaten. Zunächst ist nämlich mit dem bisherigen Grade der Annäherung:

$$\left(\frac{\overline{d\beta}}{d\xi}\right)_{\omega} = \left(\frac{\overline{d\beta}}{d\xi}\right)_{\alpha} \left(1-\frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}}\right)$$

Ferner ist aber der Endwert von $\frac{d\beta}{d\xi}$ bei der vorliegenden Gruppe identisch mit dem Anfangswert bei der folgenden; schreibe ich für diese λ_1, α_1, ω_1, bei den dann folgenden λ_2, α_2, ω_2 etc. statt λ, α, ω, so entstehen die Gleichnngen:

$$\left(\frac{\overline{d\beta}}{d\xi}\right)_{\omega_1} = \left(\frac{\overline{d\beta}}{d\xi}\right)_{\alpha_1} \left(1-\frac{\pi}{4\sqrt{\lambda_1}}\right)$$

$$\left(\frac{\overline{d\beta}}{d\xi}\right)_{\omega_2} = \left(\frac{\overline{d\beta}}{d\xi}\right)_{\alpha_2} \left(1-\frac{\pi}{4\sqrt{\lambda_2}}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(\frac{\overline{d\beta}}{d\xi}\right)_{\omega_r} = \left(\frac{\overline{d\beta}}{d\xi}\right)_{\alpha_r} \left(1-\frac{\pi}{4\sqrt{\lambda_r}}\right)$$

nnd daher durch Mnltiplication:

$$\left(\frac{\overline{d\beta}}{d\xi}\right)_{\omega_r} - \left(\frac{\overline{d\beta}}{d\xi}\right)_{\alpha} \left(1-\frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}}\right)\left(1-\frac{\pi}{4\sqrt{\lambda_1}}\right)\left(1-\frac{\pi}{4\sqrt{\lambda_2}}\right)\cdots$$
$$\cdots\left(1-\frac{\pi}{4\sqrt{\lambda_r}}\right)$$

Die zweiten Glieder in den Klammern werden immer kleiner, und ich habe daher, indem ich zur Grenze übergehe:

$$\lim\left(\frac{\overline{d\beta}}{d\xi}\right)_{\omega_r} - \left(\frac{\overline{d\beta}}{d\xi}\right)_{\alpha} \left(1-\frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}}\right)\left(1-\frac{\pi}{4\sqrt{\lambda_1}}\right)\left(1-\frac{\pi}{4\sqrt{\lambda_2}}\right)\cdots$$

Setze ich hierin für $\sqrt{\lambda}$, $\sqrt{\lambda_1}$ ... die Werte aus 22) nnd 23), so wird:

44) $$\lim\left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_{\omega_r} - \left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_{\alpha} \left(1-\frac{\pi^2}{4z}\right)\left(1-\frac{\pi^2}{4z_1}\right)\left(1-\frac{\pi^2}{4z_2}\right)\cdots$$

Jetzt bilden aber die Grössen $z, z_1, z_2 \ldots$ eine arithmetische Reihe 1. Ordn. (s. § 4. Gl. 24)), folglich divergirt die Reihe:

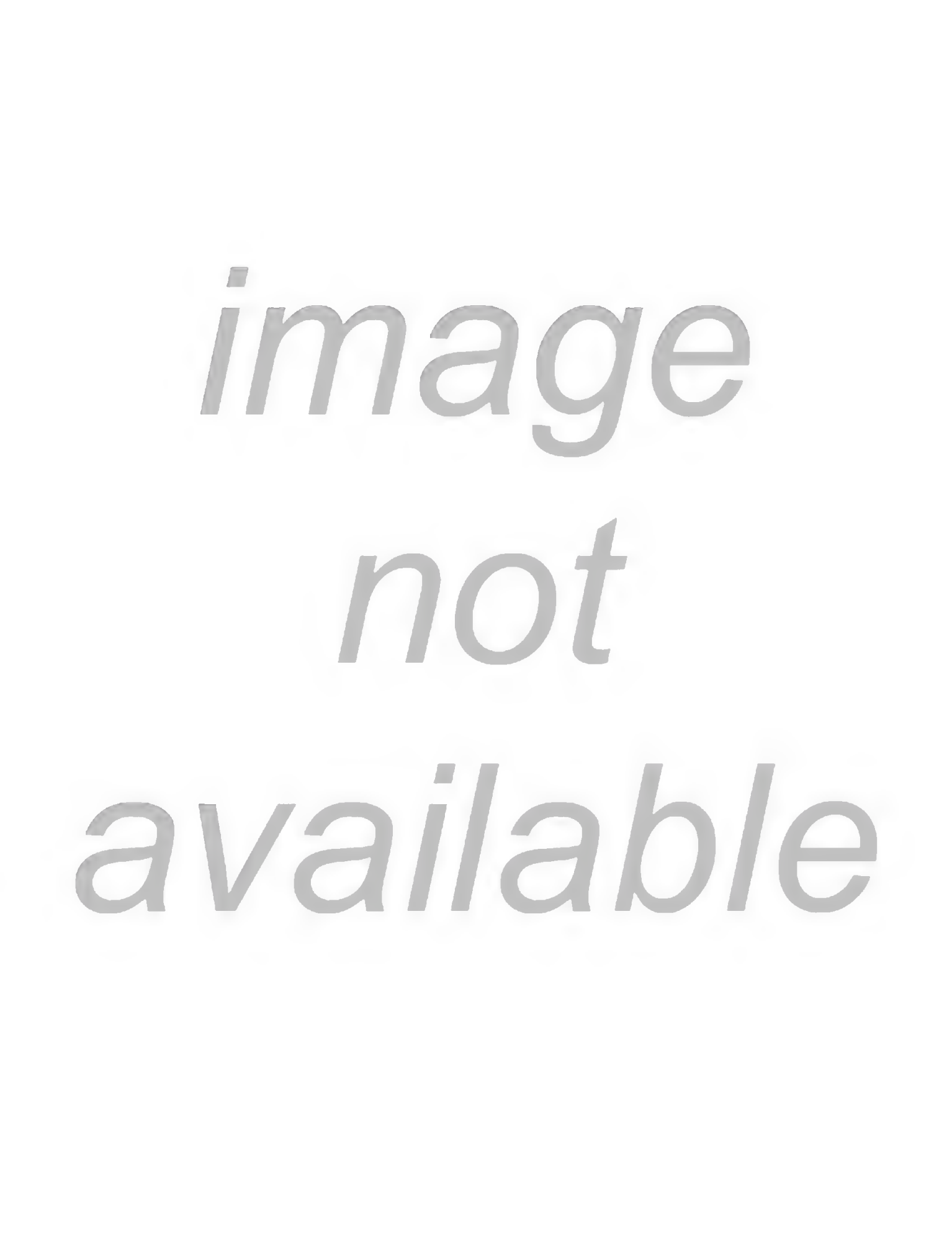


image
not
available

$$\overline{A_r} = \bar{A}\frac{z_r}{z}\frac{1-\frac{\pi^2}{8z}}{1-\frac{\pi^2}{8z_{-r}}}\left(1-\frac{\pi^2}{4z_1}\right)\left(1-\frac{\pi^2}{4z_2}\right)\ldots\left(1-\frac{\pi^2}{4z_r}\right)$$

Indem wir zur Grenze übergehen, wird $\left(1-\frac{\pi^2}{8z_r}\right)=1$ und wir erhalten:

47) $$\lim \overline{A_r} = \bar{A}\frac{8z-\pi^2}{8z^2}\lim P_r$$

$$P_r = z_r\left(1-\frac{\pi^2}{4z_1}\right)\left(1-\frac{\pi^2}{4z_2}\right)\ldots\left(1-\frac{\pi^2}{4z_r}\right)$$

Der Wert von P_r lässt sich nicht unmittelbar angeben, da es in der Form $\infty . 0$ erscheint. Es ist aber, wenn ich natürliche Logarithmen nehme,

$$\log P_r = \log z_r - \left(\frac{\pi^2}{4z_1}+\frac{\pi^2}{4z_2}+\ldots+\frac{\pi^2}{4z_r}\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\pi^2}{4z_1}\right)^2+\left(\frac{\pi^2}{4z_2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\pi^2}{4z_r}\right)^2\right\}$$
$$-\text{ etc.}$$

Setze ich nun

$$z_1 = \frac{\pi^2}{2}(a+\alpha)$$

wobei a eine posit. ganze Zahl und α ein positiver echter Bruch ist, so ist nach 24):

$$z_2 = \frac{\pi^2}{2}(a+1+\alpha),\quad z_3 = \frac{\pi^2}{2}(a+2+\alpha),\ \ldots\ z_r = \frac{\pi^2}{2}(a+r-1+\alpha)$$

folglich, wenn ich zur Abkürzung

$$\frac{1}{(a+\alpha)^p}+\frac{1}{(a+1+\alpha)^p}+\ldots+\frac{1}{(a+r-1+\alpha)^p} = U_p$$

setze:

48) $$\log P_r = \log z_r - \frac{U_1}{2} - \frac{1}{2}\frac{U_2}{2^2} - \frac{1}{3}\frac{U_3}{2^3} - \frac{1}{4}\frac{U_4}{2^4} - \ldots$$

Jetzt ist

$$U_p < \frac{1}{a^p}+\frac{1}{(a+1)^p}+\ldots+\frac{1}{(a+r-1)^p}$$
$$< 1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\text{ in infin.}$$

also:

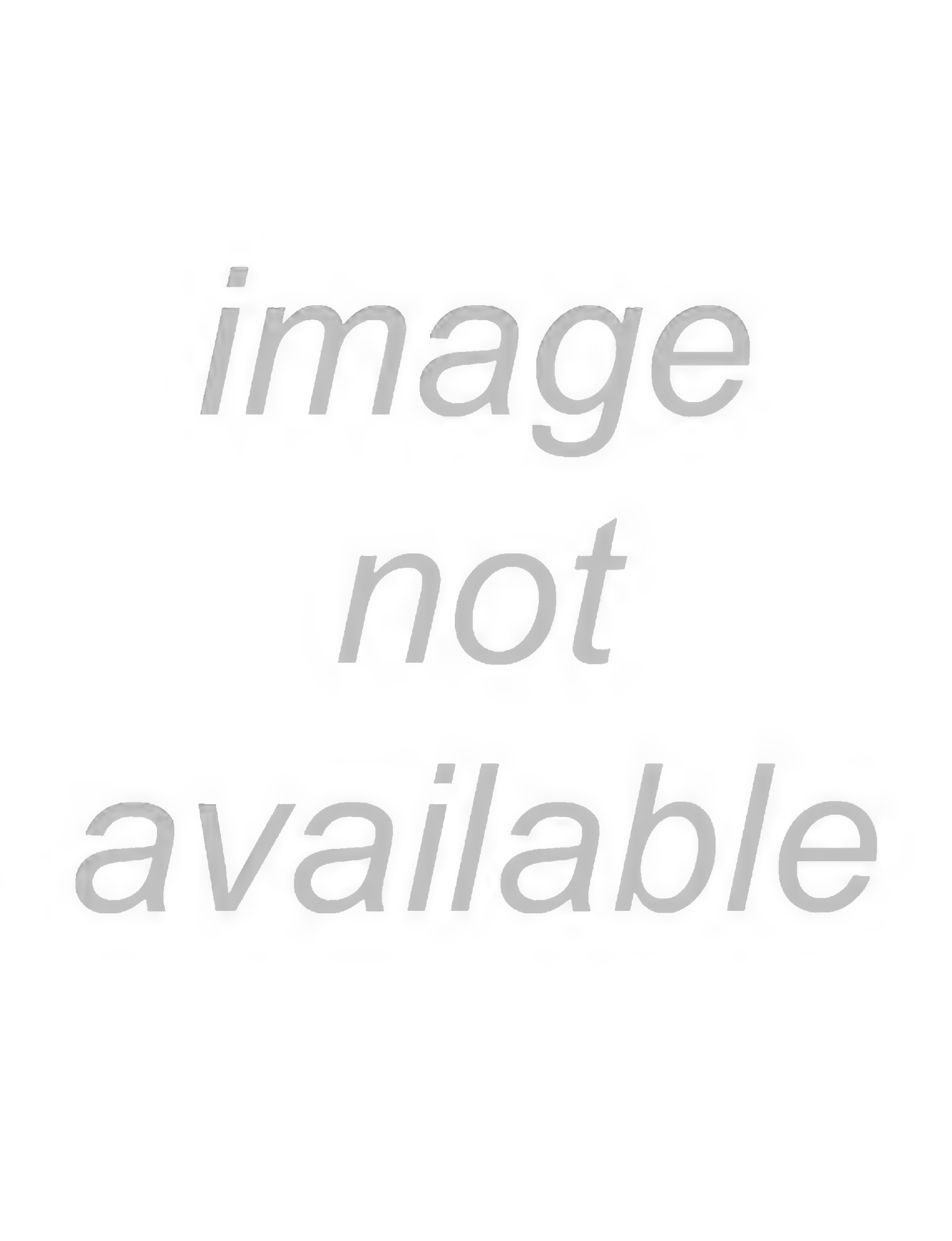


image
not
available

d. i. wieder eine endliche Zahl $< \alpha \frac{\pi^2}{6}$; sie sei F_r und in der Grenze aF, daher wird:

$$\frac{1}{2} U_1 = -\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{a-1}\right)-\frac{a}{2}F_r+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a}+\ldots+\frac{1}{a+r-1}\right)$$

Endlich ist:

$$\log z_r = \log\frac{\pi^2}{2}+\log\left(1+\frac{\alpha}{a+r-1}\right)+\log(a+r-1)$$

folglich wird, wenn ich auf beiden Seiten von 48) $\frac{1}{2}\log z_r$ abziehe:

$$\log\left(\frac{P_r}{\sqrt{z_r}}\right)=\frac{1}{2}\log\frac{\pi^2}{2}+\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\alpha}{a+r-1}\right)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{a-1}\right)$$
$$+\frac{\alpha}{2}F_r-D_r-E_r-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{a+r-1}-\log(a+r-1)\right)$$

Jetzt ist:

$$\lim\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{a+r-1}-\log(a+r-1)\right) = \text{Const} = 0{,}57\ldots$$

gehen wir also zur Grenze über, so wird:

$$\lim\log\left(\frac{P_r}{\sqrt{z_r}}\right)=\frac{1}{2}\log\frac{\pi^2}{2}+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{a-1}\right)$$
$$+\frac{\alpha}{2}F-D-E-\frac{1}{2}\,0{,}577\ldots$$

d. h. gleich einer von a und α oder von z abhängigen Constanten. Dasselbe ist also mit der Grenze von $\frac{P_r}{\sqrt{z_r}}$ selbst der Fall, und bezeichne ich deren Wert, um an ihre Abhängigkeit von z zu erinnern, mit C_z, so folgt aus 47), wenn ich diese Gleichung durch $\sqrt{z_r}$ dividire:

$$\lim\left(\frac{\overline{A_r}}{\sqrt{z_r}}\right)=\overline{A}\,\frac{8z+\pi^2}{8z}\,C_z$$

In dieser Gleichung hängt A sowol wie z von derjenigen Gruppe ab, die den Ausgangspunkt bildet. Bezeichne ich die rechte Seite mit K, so habe ich:

49) $$\lim\left(\frac{\overline{A_r}}{\sqrt{z_r}}\right) = K$$

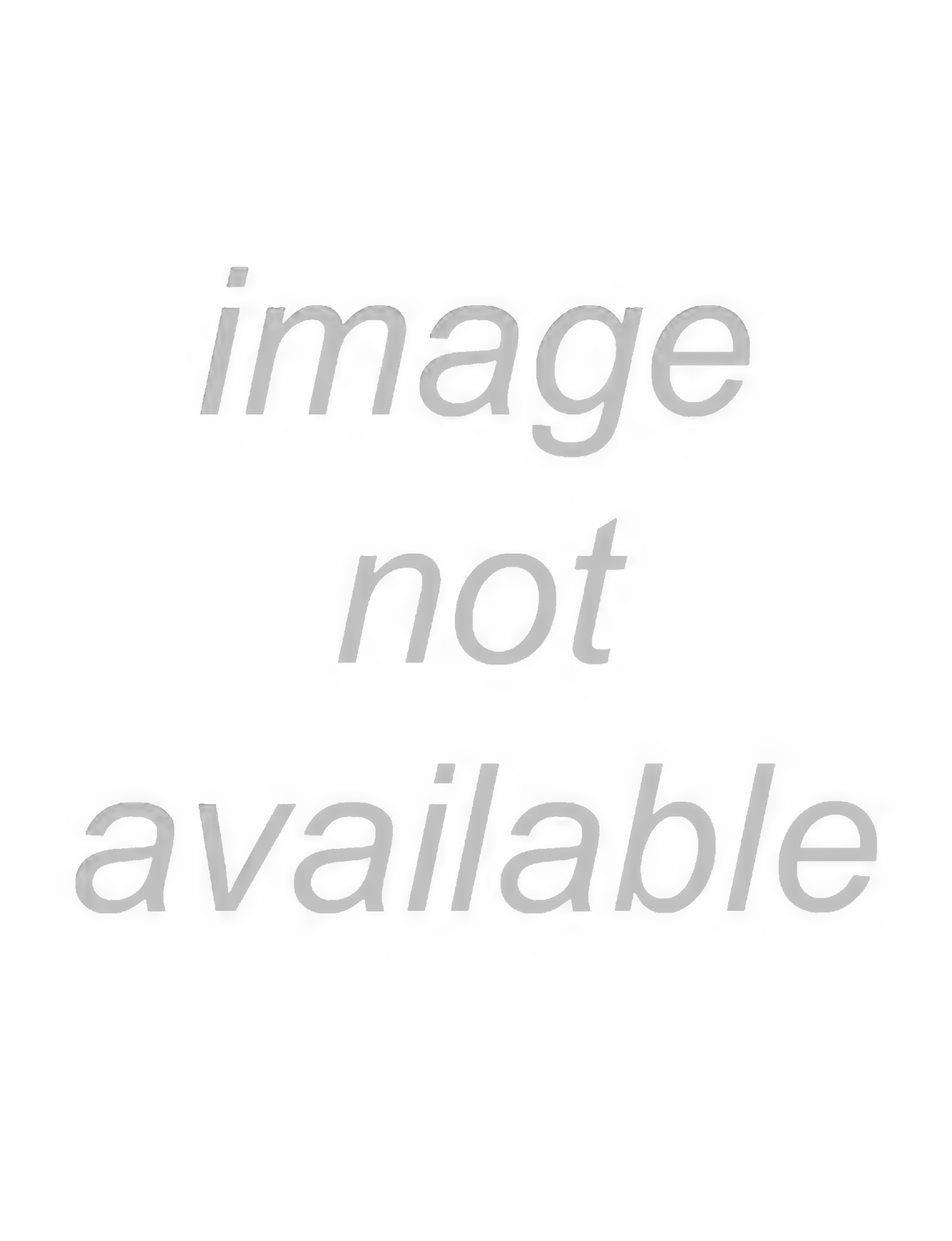


image
not
available

$$\lim \left(\frac{d\bar{\beta}}{d\xi}\right)_a = H \lim \frac{1}{\lambda!}\left(1+\frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}\right)_{\lambda=\infty}$$
$$= 0$$

erhalten wird, die mit 45) in Einklang steht.

Addire ich die Gleichungen 42) und 43), so entsteht nach Substitution von 51):

53) $$\left(\frac{d\bar{\beta}}{d\xi}\right)_a + \left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_\omega = \frac{2H}{\lambda!};\quad \lambda \text{ genügend gross.}$$

Diese Gleichung wird für uns von besonderer Bedeutung werden. Bezeichne ich ihre linke Seite mit $\bar{G}$, so wird:

54) $$\bar{G} = \frac{2H}{\lambda!} \quad \text{oder} \quad G\lambda! = \text{const}$$

Prüfen wir wieder die Genauigkeit dieser Formel für die berechneten Zahlen! Es ist Gruppe (13,25):

$$\left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_a = \beta_{13} - \beta_{12} = -0{,}4962$$

$$\left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_\omega = \beta_{26} - \beta_{25} = 0{,}4107$$

daher:

$$\bar{G} = \left(\frac{d\bar{\beta}}{d\xi}\right)_a + \left(\frac{d\bar{\beta}}{d\xi}\right) = 0{,}9069$$

ebenso für Gr. (26; 44): $G = 0{,}7711$
„ „ (45; 67) „ „ 0,841

Dadurch ergiebt sich für diese drei Gruppen:

55) $$\frac{\log}{\log 10}\left(\bar{G}\sqrt[4]{\lambda}\right) = 0{,}2761;\ 0{,}2727;\ 0{,}1719$$

Diese Uebereinstimmung ist merklich geringer als die frühere. Dies ist dadurch zu erklären, dass in 53) sich das Glied niedrigster Ordnung $\frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}$ fortgehoben hat, und dass somit die Glieder höherer Ordnung, zunächst von der Ordnung $\frac{1}{\lambda}$, an Bedeutung gewinnen. Diese Glieder lehrt aber erst die dritte Annäherung kennen. — Selbstverständlich werden die Gl. 53) und 54) desto genauer erfüllt, je grösser n oder λ sind.

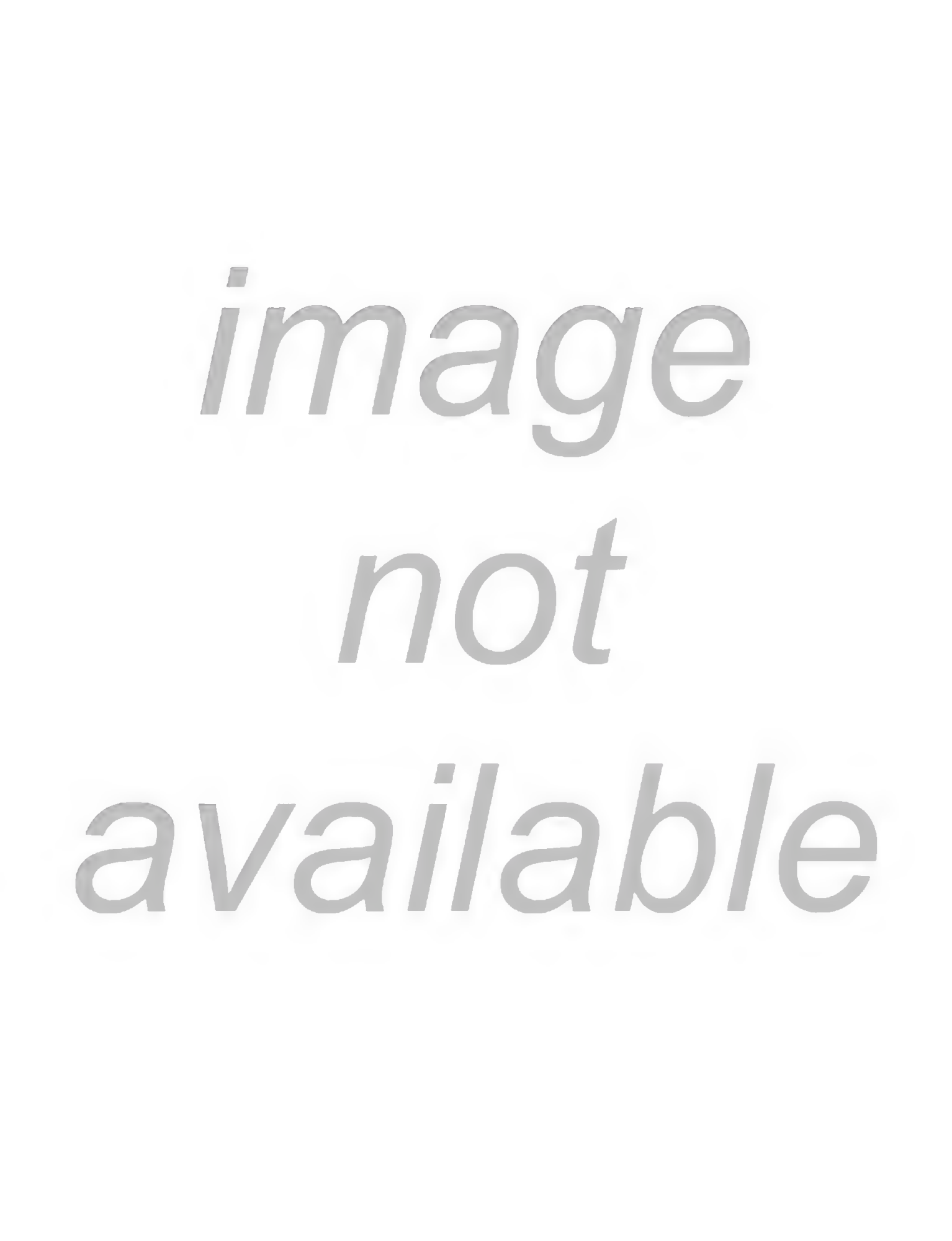


image
not
available

Jeder dieser Ausdrücke geht jetzt um eine halbe Ordnung weiter, u — für ξ (nahezu) gleich $\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}$ — bis $\frac{1}{\lambda^1}$, v bis $\frac{1}{\lambda}$ etc. Wiederum ist $\gamma = \frac{1}{4}$ zu setzen, weil in u Glieder von der Ordnung $\frac{1}{\lambda}$ fehlen, (vgl. oben vor Gl. 35)). Die Grössen p und q sind ähnlich zu bestimmen wie früher und erhalten ebenfalls ein Glied hinzu:

$$60) \quad \begin{cases} p = \frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda} + \frac{\pi^2-4}{16} - \frac{\pi}{64\sqrt{\lambda}} \\ q = \frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda} - \frac{\pi^2-4}{16} - \frac{\pi}{64\sqrt{\lambda}} \end{cases}$$

woraus für s der wenig geänderte Wert

$$61) \quad s = p + q = \pi\sqrt{\lambda} - \frac{\pi}{32\sqrt{\lambda}}$$

folgt, während $p - q$ ungeändert bleibt.

Ferner wird jetzt für $u = \pm\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}$:

$$\left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_a = \frac{Ae^v}{\sqrt{\lambda}}\frac{du}{d\xi}\Big]_{\xi=-q}$$

$$\left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_\omega = -\frac{Ae^v}{\sqrt{\lambda}}\frac{du}{d\xi}\Big]_{\xi=p}$$

Hier geht $\frac{du}{d\xi}$ bis $\frac{1}{\lambda}$ herab, entwickeln wir e^v ebensoweit, setzen also

$$e^v = 1 + \frac{\xi}{4\lambda} - \frac{3}{32}\frac{\xi^2}{\lambda^2}$$

so wird:

$$\left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_a = \frac{A}{\sqrt{\lambda}}\left(1 - \frac{\xi}{4\lambda} - \frac{3}{32\lambda} + \frac{5}{32}\frac{\xi^2}{\lambda^2}\right)_{\xi=-q}$$

$$\left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_\omega = -\frac{A}{\sqrt{\lambda}}\left(1 - \frac{\xi}{4\lambda} - \frac{3}{32\lambda} + \frac{5}{32}\frac{\xi^2}{\lambda^2}\right)_{\xi=p}$$

d. i. nach 60) bis $\frac{1}{\lambda}$ in der Klammer einschliesslich:

$$\left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_a = \frac{A}{\sqrt{\lambda}}\left(1 + \frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}} + \frac{3\pi^2-4}{128\lambda}\right)$$

$$\left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_\omega = -\frac{A}{\sqrt{\lambda}}\left(1 - \frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}} + \frac{3\pi^2-4}{128\lambda}\right).$$

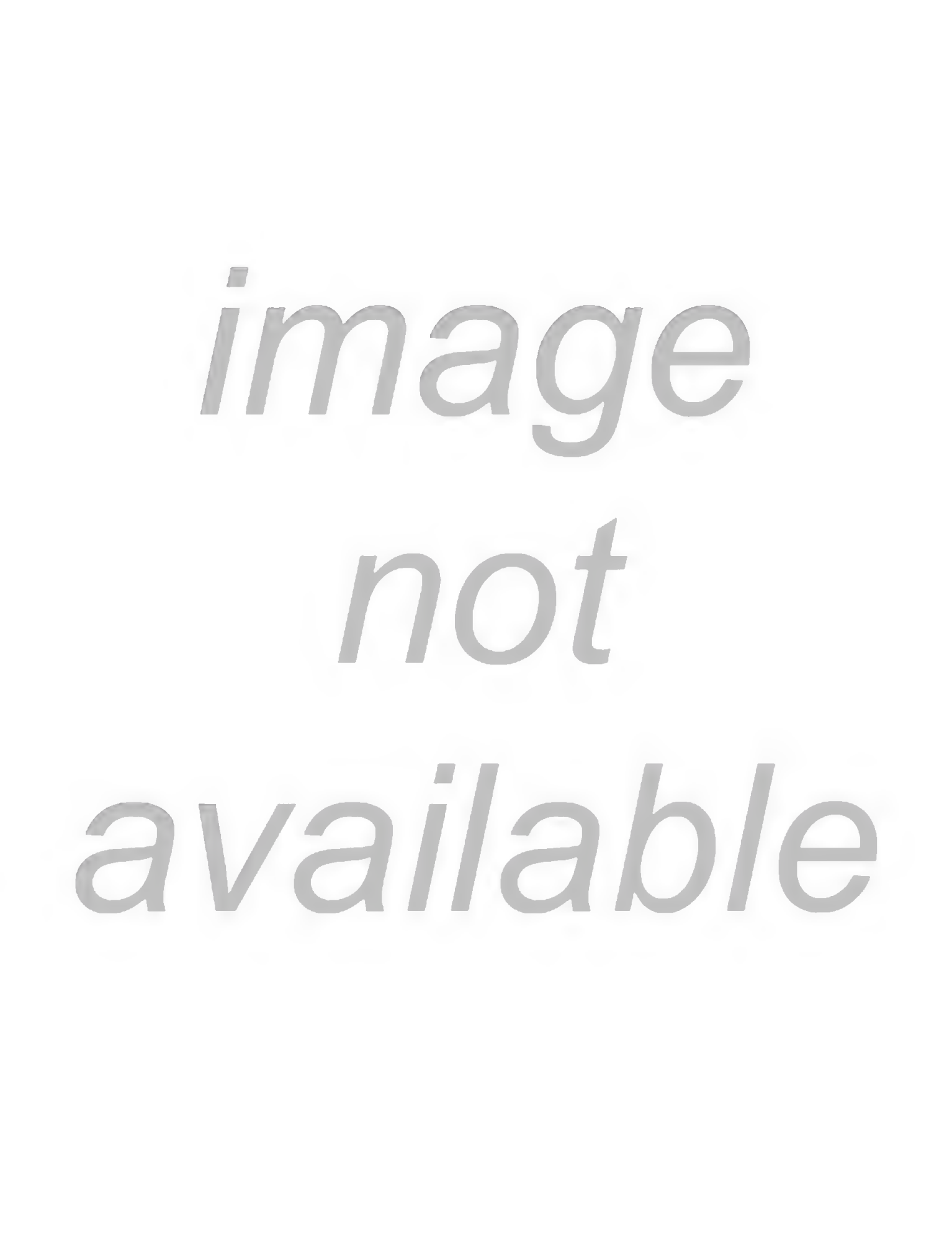


image
not
available

hat, können wir nun die bei der Untersuchung der Grössen β gewonnenen Resultate für die Grössen b selbst nutzbar machen. Wir können letztere zunächst in folgender Art charakterisiren, wobei ich daran erinnere, dass (Gl. 8)):

$$b_n = \frac{1}{n}\beta_n \quad \text{ist.}$$

Die Grössen b zerfallen (vgl. Taf. I) in Gruppen von abwechselnd positiven und negativen Gliedern. Die Anzahl der Gruppenglieder wächst von Gruppe zu Gruppe in arithmetischer Reihe[1]) mit der Differenz $\frac{\pi^2}{2}$ (Gl. 24)). In jeder einzelnen Gruppe nehmen die Glieder von nahe an Null bis zu einem Maximalwerte zu und von da an wieder ab. Die Maximalwerte verringern sich von Gruppe zu Gruppe, und zwar schneller als umgekehrt proportional der Anzahl ihrer Glieder; denn n ist nahezu prop. z_r^2, also $Br:n$ nahezu prop. z^{-1}.

Die wichtigste Frage ist nun die nach der Convergenz der Reihe in 1):

65) $$S = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots$$

Ich nehme zuerst $x = 1$ an und erhalte dadurch:

$$S_1 = b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$$

Seien jetzt r und s die Anfangsgliedzahlen zweier aufeinander folgenden Gruppen, so ist nach 13) für $u = r-1$:

$$b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_{r-1} + \beta_r - \beta_{r-1} = 0$$

Nun ist aber $\beta_r - \beta_{r-1}$ nach unserer Auffassung soviel als $\frac{d\beta}{d\xi}$ für das Ende der mit b_{r-1} schliessenden oder den Anfang der mit b_r beginnenden Gruppe; die letztere fasse ich aber in's Auge und schreibe daher die obere Gleichung:

$$b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_{r-1} + \left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_a = 0$$

Ebenso erhalte ich für den Schluss der mit b_r beginnenden Gruppe:

$$b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_{s-1} + \left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_\omega = 0$$

---

1) Hiebei, wie im Folgenden, wird n genügend gross vorausgesetzt.

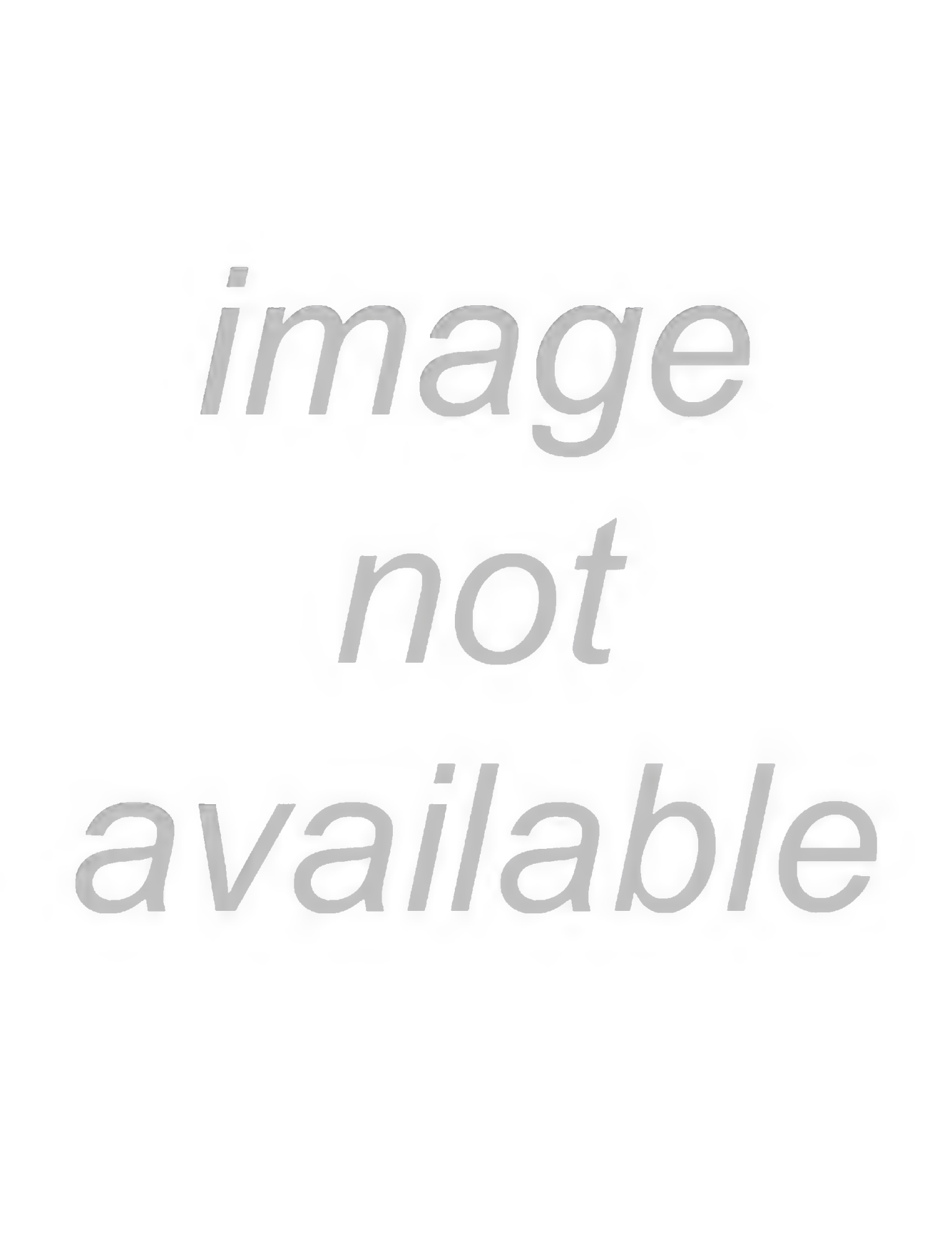


image
not
available

$$\lim (b_0+b_1+b_2+\ \dots\ +b_n)_{n=\infty} = 0$$

d. i.

70) $$S_1 = 0$$

Setzen wir aber in 1) $x = 1$, so erhalten wir die in der Tat richtige Gleichung:

$$e^{-\frac{1}{0}} = \frac{1}{e}.S_1$$

d. i.

$$e^{-\infty} = 0$$

Dass die Reihe S auch für negative Werte von x bis $x = -1$ einschl., und zwar noch schneller convergirt, ist fast selbstverständlich; ich begnüge mich daher, nur als Resultat anzugeben, dass sie im letzteren Falle, wie die Reihe:

$$\frac{C}{z^{2i}} + \frac{C}{(z+d)^{2i}} + \frac{C}{(z+2d)^{2i}} + \cdots$$

convergirt.

Bemerkung. Betrachten wir die Grössen β und b als Coordinaten von Curven, deren Abscisse n ist, so liegen (im weiteren Verlaufe) die Maxima und Minima bei der ersteren auf einer Curve, die sich langsamer öffnet als die Parabel, bei der letzteren auf einer zweiästigen Curve, die der Abscissenaxe die convexen Seiten zukehrt und sich ihr (von oben bzhw. von unten her) asymptotisch nähert, aber langsamer als eine Hyperbel, deren Asymptoten die Coordinatenaxen sind.

§ 8.

Anwendungen.

I. Setze ich in 1) $x = 1-y$, so erhalte ich:

71) $$e^{-\frac{1}{y}} = \frac{1}{e}(b_0+b_1(1-y)+b_2(1-y)^2+\dots)$$

Diese Reihe ist gültig für y von 2 herunter bis zur 0 einschliesslich, doch darf eine Umordnung nach Auflösung der Klammern nicht stattfinden.

II. Bestimmung des Integrals:

$$U = \int_1^\infty \frac{e^{-y}dy}{y}$$

Durch partielle Integration ergiebt sich:

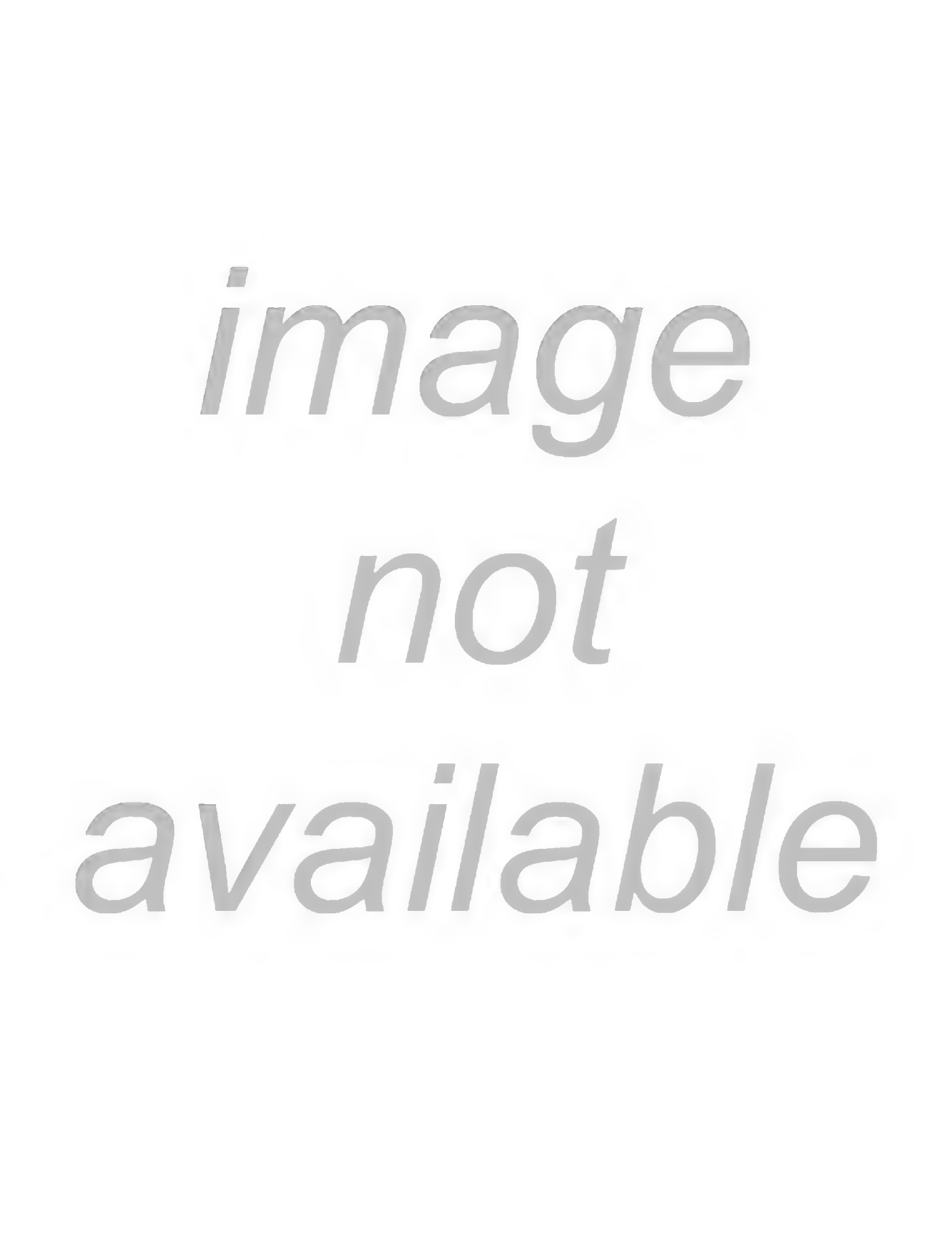


image
not
available

Snbstituire ich also für $e^{-\frac{1}{1-x}}$ die Reihe 1), mnltiplicire sie mit $(1-x)^{k-1}$ nnd integrire von 0 bis 1, so erhalte ich:

$$76)\quad kU_k = \frac{1}{e}\left(b_0 + b_1\cdot\frac{1}{k+1} + b_2\cdot\frac{1.2}{(k+1)(k+2)} + \cdots + b_{n-1}\frac{1.2\ldots(n-1)}{(k+1)\ldots(k+n-1)}\right) + \frac{kT}{e}$$

$$77)\quad T = \int_0^1 (1-x)^{k-1}(b_n x^n + b_{n+1}x^{n+1} + \ldots)\,dx$$

Jetzt nehme ich an, dass b_n das Anfangsglied einer Grnppe nnd zwar will ich sageu, einer positiven Grnppe sei; die Aufangsglieder der folgenden Gruppen seien b_r, b_s, b_t, ... oder um nur mit positiven Grössen zn tnn zn haben: $-c_r$, $+b_s$, $-c_t$, ... wobei also $b_\alpha = -c_\alpha$ gesetzt ist. Dann ist:

$$b_n x^n + b_{n+1}x^{n+1} + \ldots + b_{r-1}x^{r-1} < x^n(b_n + b_{n+1} + \ldots + b_{r-1})$$

oder wonn ich die Snmmo einer mit b_α beginnonden Grnppe ihrem wirklichen Werte nach (d. h. mit Rücksicht anf das Vorzeichen) dnrch G_α bezeichne:

$$b_n x^n + \ldots + b_{r-1}x^{r-1} \leqq x^n . G_n$$

$$c_r x^r + \ldots + c_{s-1}x^{s-1} \geqq x^s . \overline{G_r}$$

$$b_s x^s + \ldots + b_{t-1}x^{t-1} \leqq x^s . G_s$$

etc.

also:

$$78)\quad b_n x^n + b_{n+1}x^{n+1} + \ldots \text{ in infin.} \leqq G_n x^n - \overline{G_r}x^s + G_s x^s \mp \ldots$$

wobei das Gleichheits-Zeichen nur für $x = 1$ gilt. Nun bilden G_n, $\overline{G_r}$, G_s, ... eine abnehmende Reihe folglich ist

$$G_n x^n - \overline{G_r}x^s \pm \ldots = G_n x^n - \vartheta_1 \overline{G_r}x^s \quad 0 < \vartheta_1 < 1$$

aber es ist anch

$$b_n + b_{n+1} + \ldots \text{ in infin.}$$

eine positive Grösse, denn nach 13):

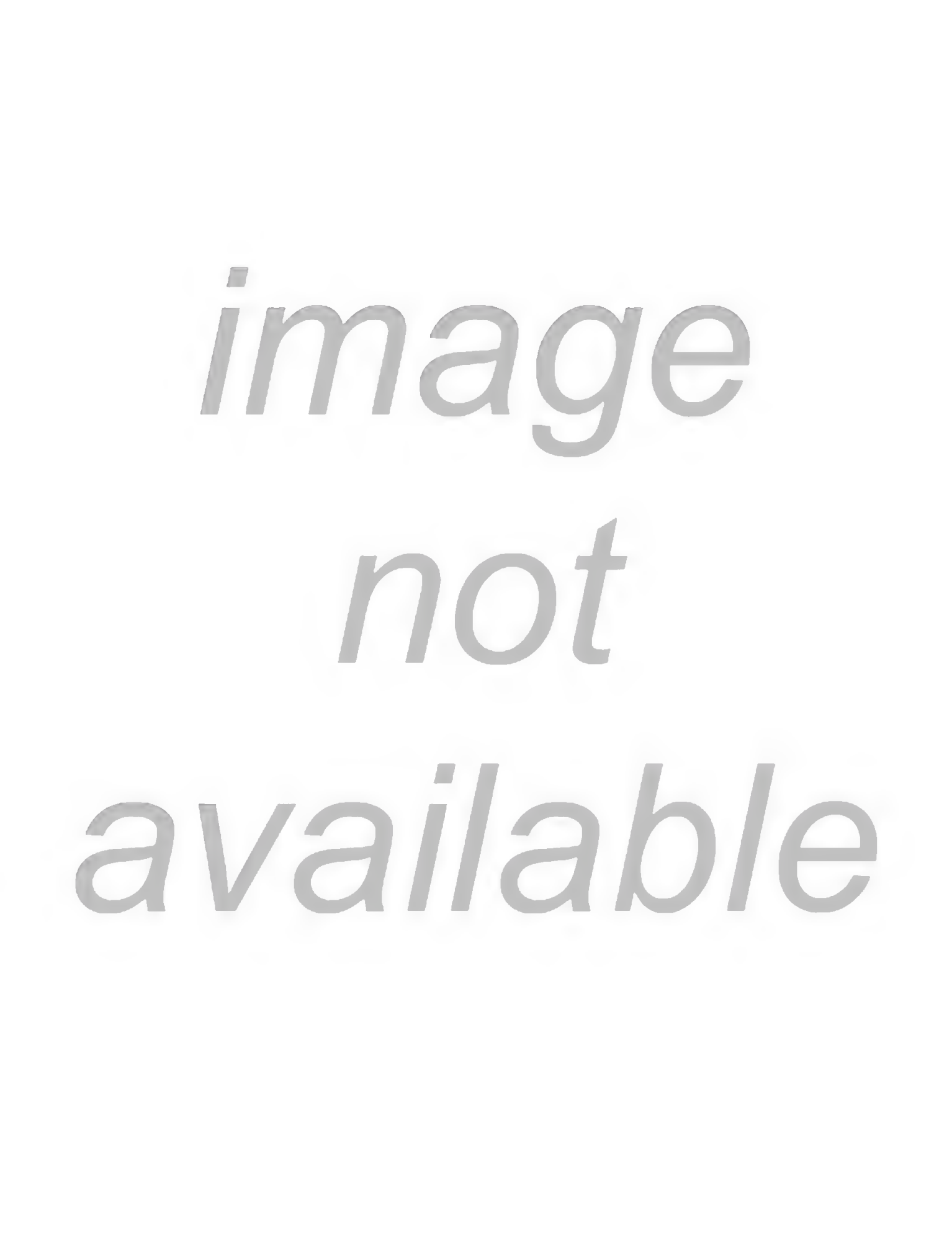


image
not
available

Fehler so klein wie möglich wird. Dabei nehme ich an, es sei n (als Anfangsindex einer Gruppe), also die Anzahl der zu berechnenden Glieder schon vorweg bestimmt worden. Dann ist dem Rest- oder Fehlergliede — es sei $\vartheta . V_k . (-1)^k$

$$V_k = \frac{1.2 \ldots (k-1)\, n!}{(k+1) \ldots (k+n)} G_n -$$

$n! G_n$ fest gegeben, das Andere hängt aber von k ab. Dieser Teil nimmt mit wachsendem k anfänglich ab, dann wieder zu; er wird also sein Minimum erreichen, wenn so nahe wie möglich $V_k = V_{k+1}$ ist. Nun ist

$$V_{k+1} = \frac{1.2 \ldots (k-1)\, k . n!}{(k+2) \ldots (k+n+1)}$$

also

$$\frac{V_{k+1}}{V_k} = \frac{k(k+1)}{n+k+1}.$$

Dies ist $= 1$, wenn

$$k(k+1) = n+k+1$$
$$(k+1)(k-1) = n$$

82) $$k = \sqrt{n+1} \quad \text{ist.}$$

Ist k grösser als $\sqrt{n+1}$, so ist V_{k+1} grösser als V_k. Wir müssen also $k = \sqrt{n+1}$ oder, falls dies irrational ist, gleich der nächst grösseren ganzen Zahl wählen. Da bei solcher Bestimmung immer n grösser als k ist, so heben sich in 81) in den Coefficienten der b von b_k an Factoren vom Zähler gegen Nenner fort und wir können schreiben:

$$83) \quad U = \frac{1}{e}\left\{1-1+1.2-1.2.3 \pm \ldots + (-1)^{k-1}.(k-1)!\right.$$
$$+(-1)^k (k-1)! \left(b_0 + b_1 \cdot \frac{1}{k+1} + \ldots + b_{k-1} \cdot \frac{1.2 \ldots (k-1)}{(k+1) \ldots (2k-1)} \right.$$
$$\left.\left. +1.2 \ldots k \left\{ \frac{b_k}{(k+1) \ldots (2k)} + \ldots + \frac{b_{n-1}}{n(n+1) \ldots (k+n-1)} \right\} \right) + W \right\}$$

$$W = (-1)^k \frac{(k-1)!\, k!}{(n+1) \ldots (k+n)} \cdot \vartheta\, G_n \quad \left(\begin{matrix} G_n \text{ Summe der Gruppe, deren} \\ \text{erster Index } n \text{ ist} \end{matrix} \right)$$

$$k \overset{=}{(>)} \sqrt{n+1}$$

Hierin hebt sich noch das Glied mit b_0 gegen das vorangehende fort.

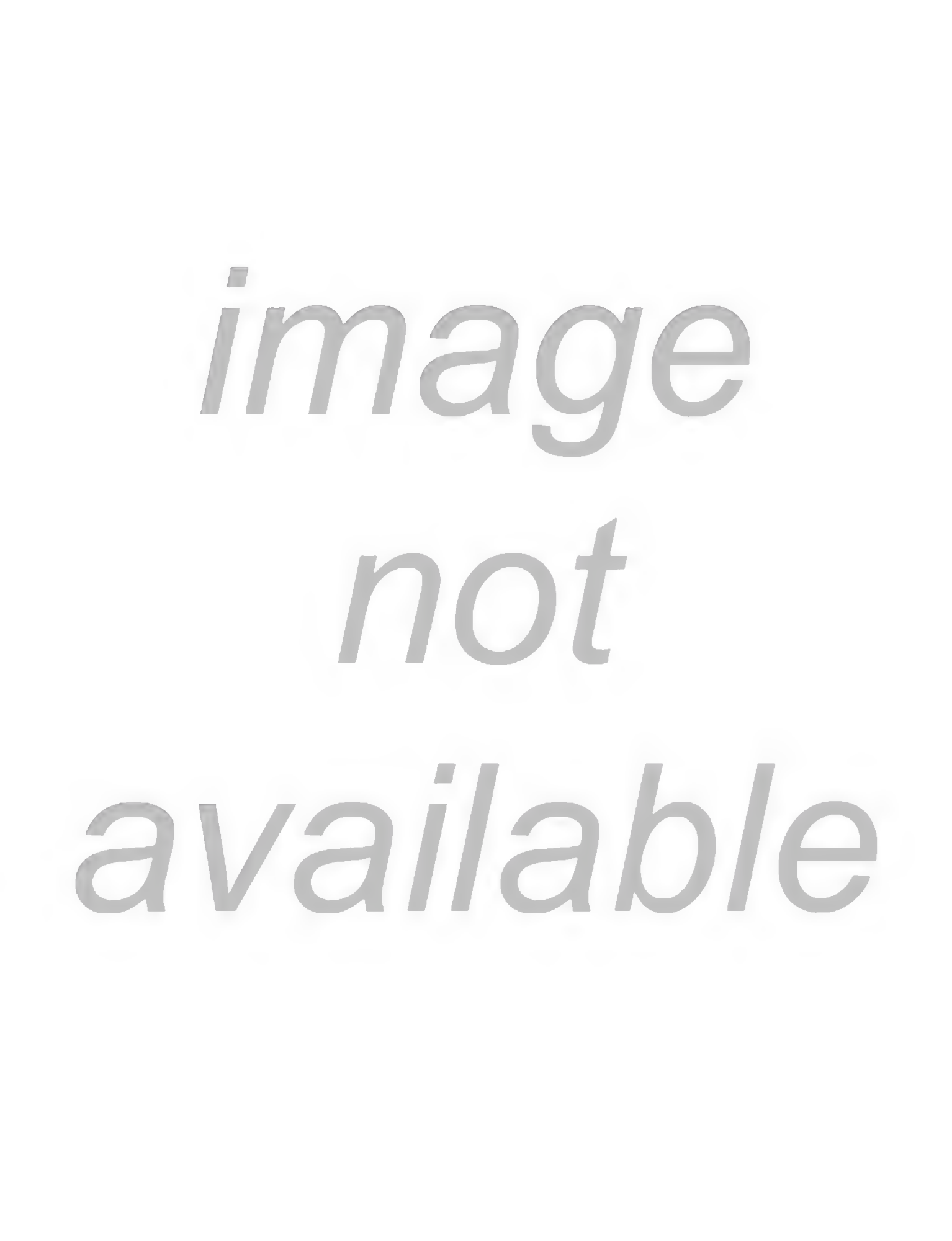


image
not
available

Jetzt nehme ich der Beqnemlichkeit wegen, nnd nm die Vorstellnng zn fixiren, vorläufig an, dass mit b_n eine negative Gruppe beginne, dass also $b_r \dots b_{n-1}$ positive Grössen seien. Bezeichne ich wieder negative b's durch $-c$, so werden die obigen Gleichnngen:

$$86) \quad \begin{cases} b_r + \dots b_{n-1} = (\beta_{n-1} - \beta_n) + \delta_1 \dots a) \\ c_n + \dots c_{s-1} = (\beta_{n-1} - \beta_n) + \delta_2 \dots b) \\ c_s + \dots c_{p-1} = (\beta_p - \beta_{p-1}) - \delta_2 \dots c) \\ b_p + \dots b_{t-1} = (\beta_p - \beta_{p-1}) - \delta_3 \dots d) \end{cases}$$

worin $(\beta_{n-1} - \beta_n)$ nnd $(\beta_p - \beta_{p-1})$ positive Grössen sind. Ich will jetzt den Fehler bestimmen, der beim Abbrnch der Rechnnng mit b_{r-1} begangen wird. Derselbe ist (vgl. 73) und 76)):

$$87) \quad \begin{cases} \qquad\qquad (-1)^k k! \dfrac{T}{e} \\ T = \displaystyle\int_0^1 (1-x)^{k-1} (b_r x^r + b_{r+1} x^{r+1} + \dots) dx \end{cases}$$

Es ist aber:

$$b_r x^r + \dots + b_{n-1} x^{n-1} < x^r (b_r + \dots + b_{n-1})$$
$$c_n x^n + \dots + c_{s-1} x^{s-1} > x^{s-1} (c_n + \dots + c_{s-1})$$

also:

$$b_r x^r + \dots + b_{n-1} x^{n-1} - (c_n x^n + \dots + c_{s-1} x^{s-1}) < x^r (b_r + \dots b_{n-1}) - x^{s-1} (c_n + \dots c_{s-1})$$

(Den Grenzfall $x = 1$ lasse ich ausser Betracht, weil das entsprechende Glied in der Snmmation wegen des Factors $(1-x)^{k-1}$ verschwindet). Indem ich nnn die Gl. 86) benutzen will, lasse ich darin die für die Benrteilung des Fehlers nnerheblichen Grössen δ fort, nnd erhalte, nachdem dies geschehen:

$$88) \quad b_r x^r + \dots + b_{n-1} x^{n-1} - (c_n x^n + \dots + c_{s-1} x^{s-1}) < (\beta_{n-1} - \beta_n)(x^r - x^{s-1})$$

Ferner ist:

$$c_s x^s + \dots + c_{p-1} x^{p-1} > x^p (c_s + \dots c_{p-1})$$
$$b_r x^r + \dots + b_{t-1} x^{t-1} < x^p (b_p + \dots b_{t-1})$$

folglich nach 86) c) d):

$$c_s x^s + \dots + c_{p-1} x^{p-1} > x^p (\beta_p - \beta_{p-1}) > b_r x^r + \dots + b_{t-1} x^{t-1}$$

daher ist die Differenz

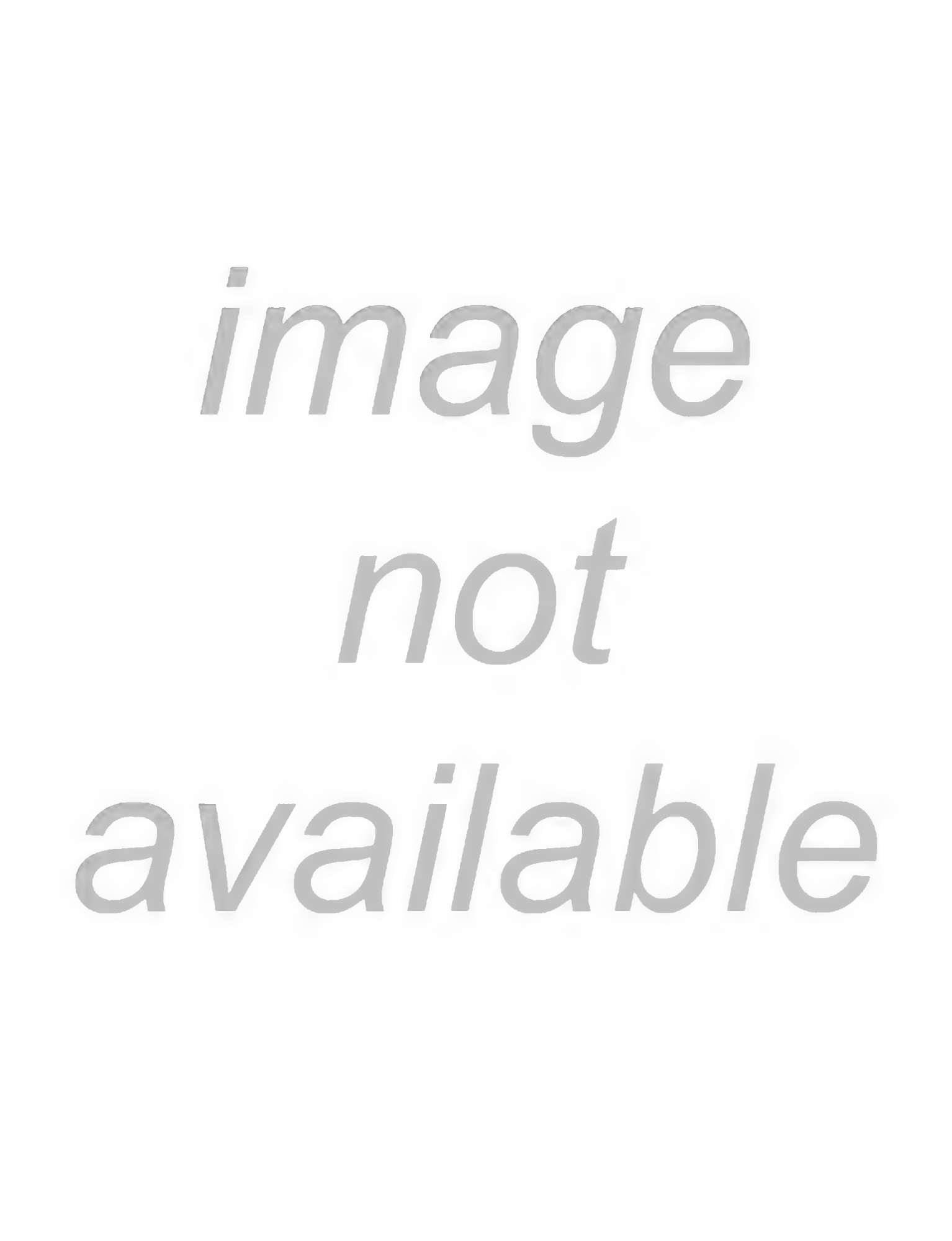


image
not
available

Wir hatten nnn die Reihe 1) bis b_{12} benntzt, es war also $n=13$; in der vorangebenden Gruppe ist $s = 8$, also die Rechnnng mit b_7 abznbrechen, in der folgenden Gruppe $s = 19$, dann:

$$\beta_{12} - \beta_{13} = 0{,}496$$

endlich, wie früher, $k = 4$; daher:

$$W = 1.2.3.1.2.3.4\left(\frac{1}{9.10.11.12} - \frac{1}{19.20.21.22}\right).\vartheta.0{,}496$$
$$= \vartheta.0{,}0019$$

und daher:

$$U = \frac{0{,}5938 + \vartheta.0{,}0019}{e} \quad 0 < \vartheta < 1$$

Wir haben jetzt also bei etwa demselben Maximalfehler die Berechnung von 5 Gliedern erspart. Halten wir aber dies Resultat mit dem früheren 84)

$$U = \frac{0{,}5967 - \vartheta_1.0{,}0023}{e} \quad 0 < \vartheta_1 < 1$$

znsammen, so können wir die Grenzen enger machen; $e.U$ kann nur zwischen 0,5944 nnd 0,5957 liegen, so dass wir

91) $$U = \frac{0{,}5950 \pm 0{,}0007}{e}$$

schreiben können.

Anmerkung. Ist das allgemeinere Integral

$$\int_1^y \frac{e^{-y}\,dy}{y}$$

zu bestimmen, so convergirt die Reihe noch schneller, es sind dann aber Integrale von der Form:

$$\int_0^a x^n (1-x)^{k-1}\,dx$$

zu ermitteln, die man nacheinander, wie man sie braucht, mittelst der Formeln:

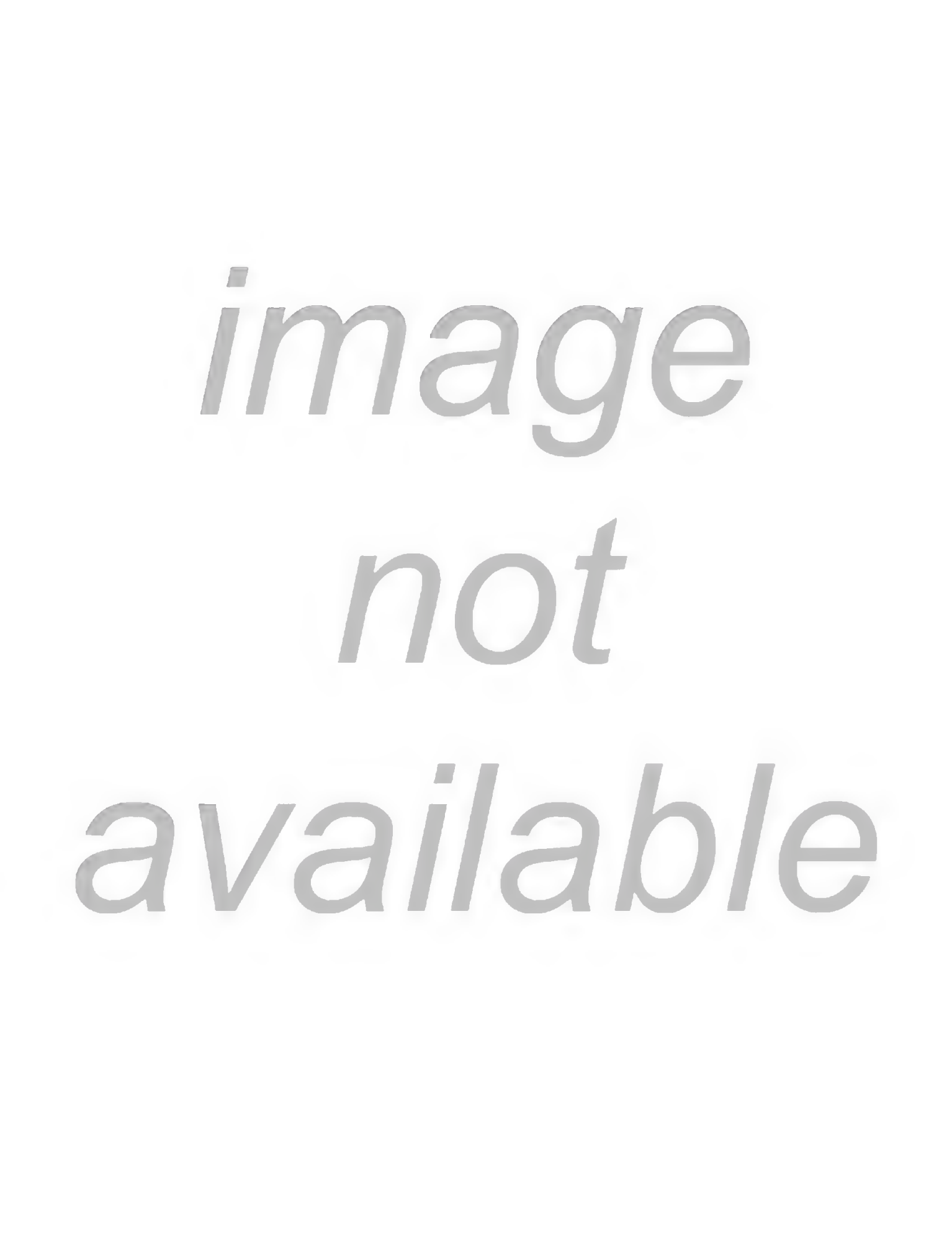


image
not
available

94)
$$\begin{cases} \int_1^\infty \frac{e^{-y^4}\,dy}{y^8} = \frac{1}{4e} - \frac{11}{4}\int_1^\infty \frac{e^{-y^4}\,dy}{y^{12}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \int_1^\infty \frac{e^{-y^4}\,dy}{y^{4(k-1)}} = \frac{1}{4e} - \frac{4k-1}{4}\int_1^\infty \frac{e^{-y^4}\,dy}{y^{4k}} \end{cases}$$

Multiplicire ich diese Gleichungen der Reihe nach mit $1, -\frac{3}{4}, \frac{3.7}{4.4}, \ldots (-1)^{k-1}.\frac{3.7\ldots(4k-5)}{4.4\ldots 4}$ und addire, so erhalte ich:

95)
$$\begin{cases} U = \frac{1}{4e}\left(1 - \frac{3}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{7}{4} \mp \ldots + (-1)^{k-1}\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{4}\ldots\left(\frac{4k-5}{4}\right)\right) \\ \qquad + (-1)^k.\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{4}\ldots\frac{4k-1}{4}.U_k \\ U_k = \int_1^\infty \frac{e^{-y^4}\,dy}{y^{4k}} \end{cases}$$

Zur Berechnung von U_k setze ich:

$$y = \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{4}}}$$

so wird es:

96)
$$\begin{cases} U_k = \frac{1}{4}\int_0^1 e^{-\frac{1}{1-x}}(1-x)^{\frac{4k-1}{4}-1}\,dx \\ = \frac{1}{4e}\int_0^1 (1-x)^{p-1}(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots)\,dx \\ p = \frac{4k-1}{4} \end{cases}$$

Mittelst der Formeln:

$$\int_0^1 (1-x)^{p-1}\,dx = \frac{1}{p};$$

97)
$$\int_0^1 x^n (1-x)^{p-1}\,dx = \frac{1.2.3\ldots n}{p(p+1)\ \ldots\ (p+n)}$$

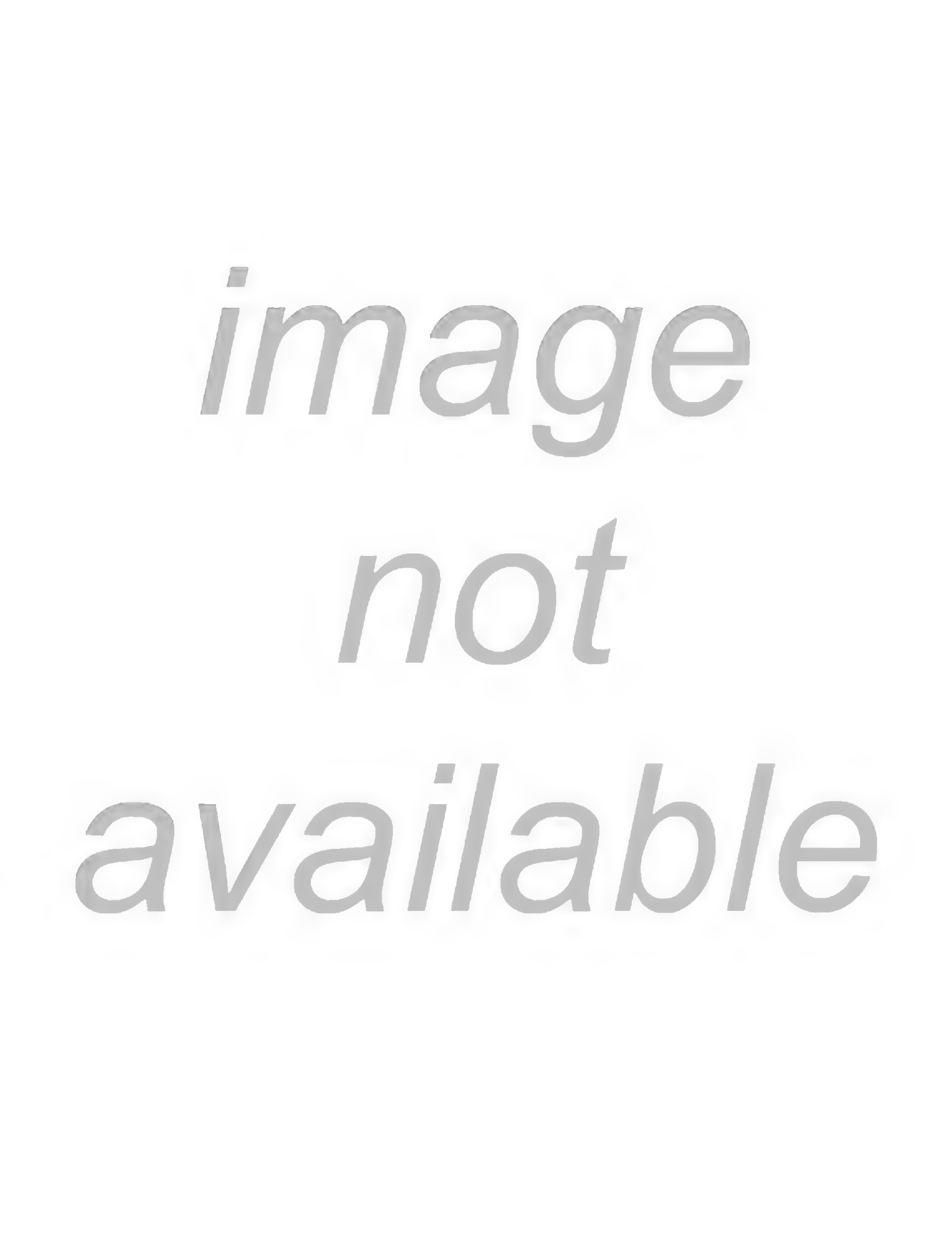


image
not
available

daher in beiden Fällen nach 99) nnd wenn ich für p den Wert $\frac{4k-1}{4}$ einsetze:

$$100) \quad W = (-1)^k \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{4} \cdots \frac{4k-5}{4} \cdot \frac{4.8 \ldots 4n}{(4k+3) \ldots (4k+4n-1)} \cdot \vartheta G_n$$

oder:

$$W = (-1)^k \cdot 4^{n-k+1} \cdot \frac{3.7 \ldots (4k-5).1.2.3 \ldots n}{(4k+3)(4k+7) \ldots (4k+4n-1)} \cdot \vartheta G_n$$

$$0 < \vartheta < 1$$

Die erste Form von W schliesst sich direct der Berechnung der einzelnen Glieder an, die zweite benntzen wir, um den zweckmässigsten Wert von k zu finden. Der von k abhängige Teil in W ist (ohne Rücksicht auf das Zeichen):

$$V_k = \frac{3.7 \ldots (4k-5)}{4^k(4k+3) \ldots (4k+4n-1)}$$

ebenso:

$$V_{k+1} = \frac{3.7 \ldots (4k-5)(4k-1)}{4^{k+1}(4k+7) \ldots (4k+4n+3)}$$

folglich:

$$\frac{V_{k+1}}{V_k} = \frac{(4k-1)(4k+3)}{4(4k+4n+3)}$$

Dies müsste (vgl. II.) $= 1$ sein, nnd wäre es, wenn

$$(4k-1)^2 = 16(n+1)$$

oder

$$101) \qquad k = \frac{1}{4} + \sqrt{n+1}$$

sein könnte. Genau kann diese Forderung niemals erfüllt werden, nnd es ist daher für k die nächst grössere ganze Zahl zn nehmen.

Für die Berechnung ist also k nach 101) zn wahlen, nachdem n von vornherein angenommen ist, dann folgt U aus 98) und der Maximalfehler aus 100).

Beispiel. $n = 13$, $k \overset{=}{>} \frac{1}{4} + \sqrt{14} = 3{,}99$ also $k = 4$.

$$\text{Fehler} = \frac{W}{4e} = \frac{3.7.11}{4.4.4} \cdot \frac{4.8 \ldots 52}{19.23 \ldots 67} \cdot \frac{\vartheta.(-0{,}907)}{4e}$$

$$= -\vartheta.0{,}00018$$

$$U = \frac{0{,}6702 + W}{4e} = 0{,}06163 - \vartheta.0{,}00018 \quad 0 < \vartheta < 1$$

oder:

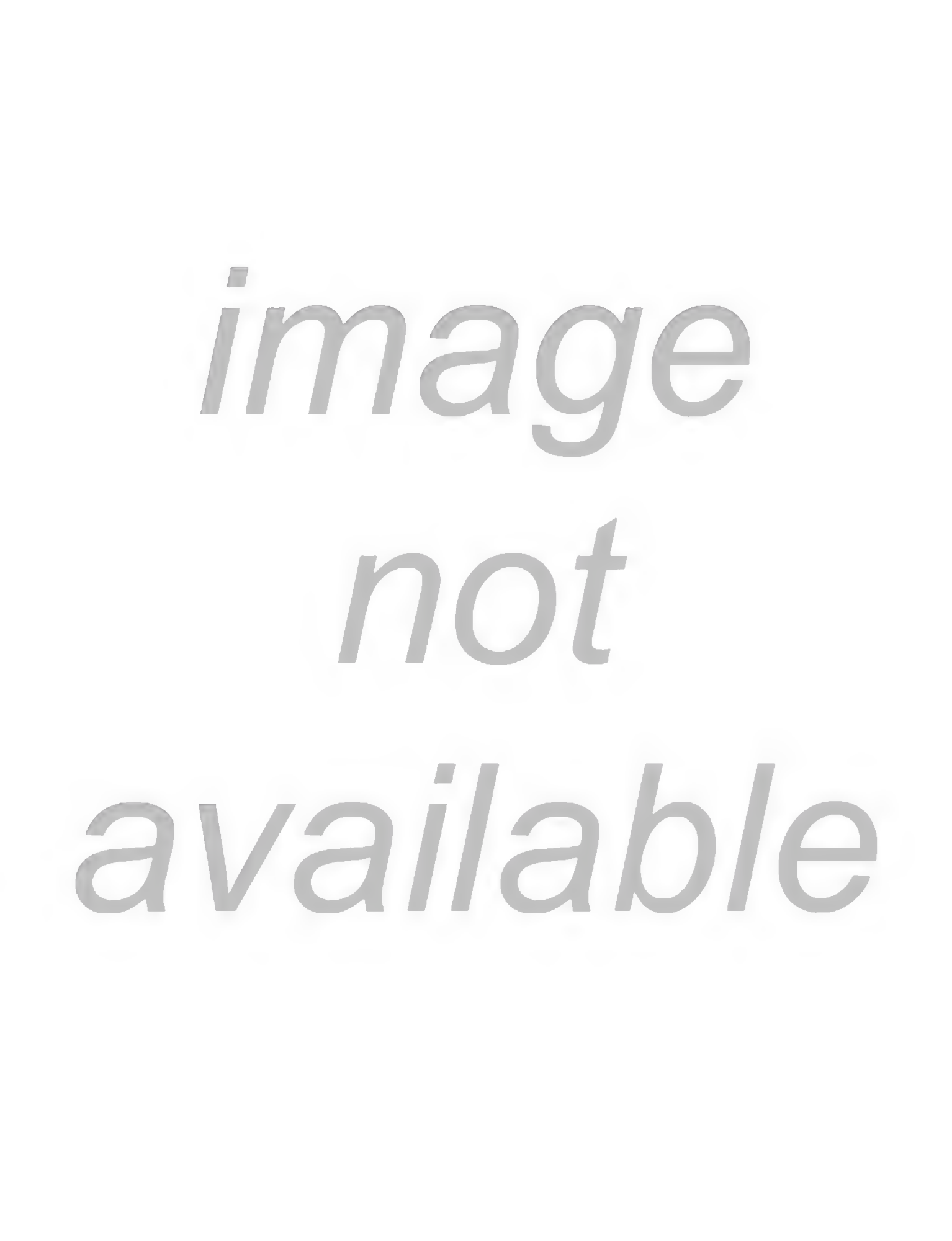


image
not
available

und dies ist durch die erste der Gl. 94) auf $\int_1^\infty e^{-y^q} dy$ zurückgeführt.

Ist endlich $p<1$, so lässt es sich auf den Fall eines Exponenten grösser als 1 zurückführen. Zunächst gilt nämlich die Gleichung:

$$\int_0^1 e^{-\frac{1}{x^q}} dx = \int_0^1 \frac{qe}{x^{q+1}} \cdot \frac{x^{q+1}\,dx}{q}$$

$$= -\left[-e^{-\frac{1}{x^q}} \cdot \frac{x^{q+1}}{q}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-\frac{1}{x^q}} \cdot \frac{(q+1)}{q} x^q\,dx$$

$$= -\frac{1}{qe} + \frac{q+1}{q} \int_0^1 e^{-\frac{1}{x^q}} x^q\,dx$$

woraus:

$$104) \quad \int_0^1 e^{-\frac{1}{x^q}} \cdot x^q\,dx = \frac{1}{(q+1)e} + \frac{q}{q+1} \int_0^1 e^{-\frac{1}{x^q}} dx$$

Ist nun in dem Integral

$$U = \int_0^1 e^{-\frac{1}{x^p}} dx$$

p kleiner als 1, so setze ich:

$$x = u^{\frac{1}{1-p}}$$

dann wird:

$$U = \frac{1}{1-p} \int_0^1 e^{-u^{\frac{p}{1-p}}} \cdot u^{\frac{p}{1-p}} du$$

also, wenn ich

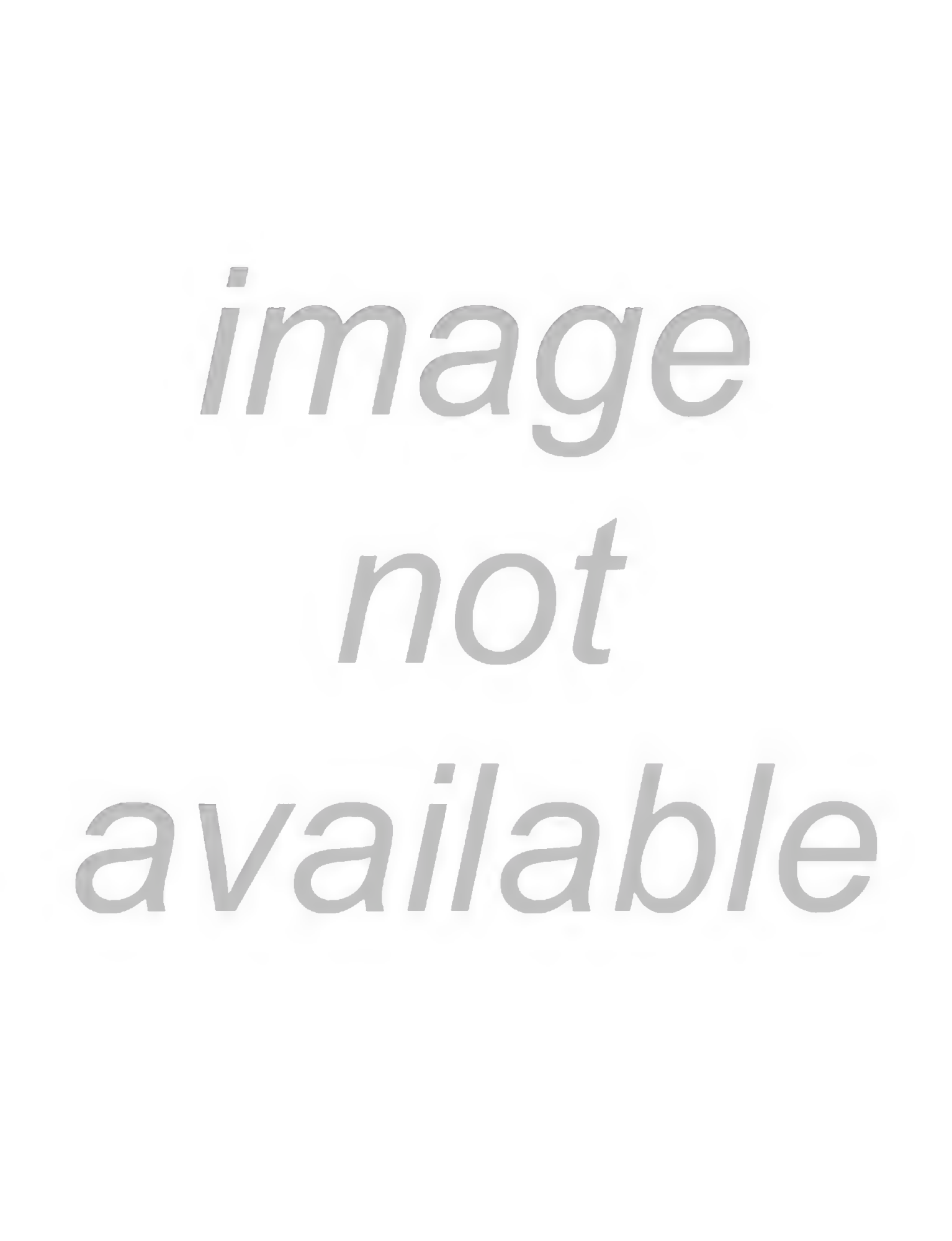


image
not
available

Tafel I.

n	b_n	n	b_n
0	+1	35	+0,064580
1	−1	36	0,061724
2	−0,5	37	0,057246
3	−0,166667	38	0,051498
4	+0,041667	39	0,044723
5	0,158333	40	0,037170
6	0,209722	41	0,029078
7	0,216468	42	0,020679
8	0,194469	43	0,012190
9	0,155792	44	0,003810
10	0,109198	45	−0,004283
11	0,061182	46	−0,011930
12	0,016069	47	−0,018998
13	−0,023338	48	−0,025376
14	−0,055449	49	−0,030976
15	−0,079583	50	−0,035732
16	−0,095725	51	−0,039601
17	−0,104338	52	−0,042560
18	−0,106197	53	−0,044604
19	−0,102271	54	−0,045745
20	−0,093624	55	−0,046016
21	−0,081342	56	−0,045453
22	−0,066480	57	−0,044114
23	−0,050019	58	−0,042059
24	−0,032846	59	−0,039362
25	−0,015733	60	−0,036098
26	+0,000669	61	−0,032350
27	0,015831	62	−0,028200
28	0,029344	63	−0,023735
29	0,040914	64	−0,019038
30	0,050349	65	−0,014193
31	0,057551	66	−0,009281
32	0,062504	67	−0,004376
33	0,065263	68	+0,000449
34	0,065940		

Tafel II.

n	$\beta_n = nb_n$	n	$\beta_n = nb_n$
0	0	35	+2,264308
1	−1	36	2,222075
2	−1	37	2,118118
3	−0,5	38	1,956915
4	+0,166667	39	1,744214
5	0,791667	40	1,486790
6	1,258334	41	1,192196
7	1,515279	42	0,868524
8	1,555756	43	0,524173
9	1,401764	44	0,167632
10	1,091980	45	−0,192719
11	0,672998	46	−0,548787
12	0,192834	47	−0,892925
13	−0,303399	48	−1,218065
14	−0,776294	49	−1,517829
15	−1,193740	50	−1,786617
16	−1,531603	51	−2,019673
17	−1,773741	52	−2,213128
18	−1,911541	53	−2,364023
19	−1,943144	54	−2,470314
20	−1,872476	55	−2,530860
21	−1,708184	56	−2,545390
22	−1,462550	57	−2,514467
23	−1,150436	58	−2,439430
24	−0,788303	59	−2,322334
25	−0,393324	60	−2,165876
26	+0,017388	61	−1,973320
27	0,427431	62	−1,748414
28	0,821643	63	−1,495308
29	1,186511	64	−1,218467
30	1,510465	65	−0,922588
31	1,784070	66	−0,612516
32	2,000124	67	−0,293163
33	2,153674	68	+0,030566
34	2,241961		

Gruppensummen.

$$b_0 = 1$$

$$(1;3) = b_1 + b_2 + b_3 = -1{,}66667$$

$$(4;12) = b_4 + \ldots + b_{12} = +1{,}162900$$

$$(13;25) = b_{13} + \ldots + b_{25} = -0{,}906945$$

$$(26;44) = b_{26} + \ldots + b_{44} = +0{,}771063$$

$$(45;67) = b_{45} + \ldots + b_{67} = -0{,}684080$$

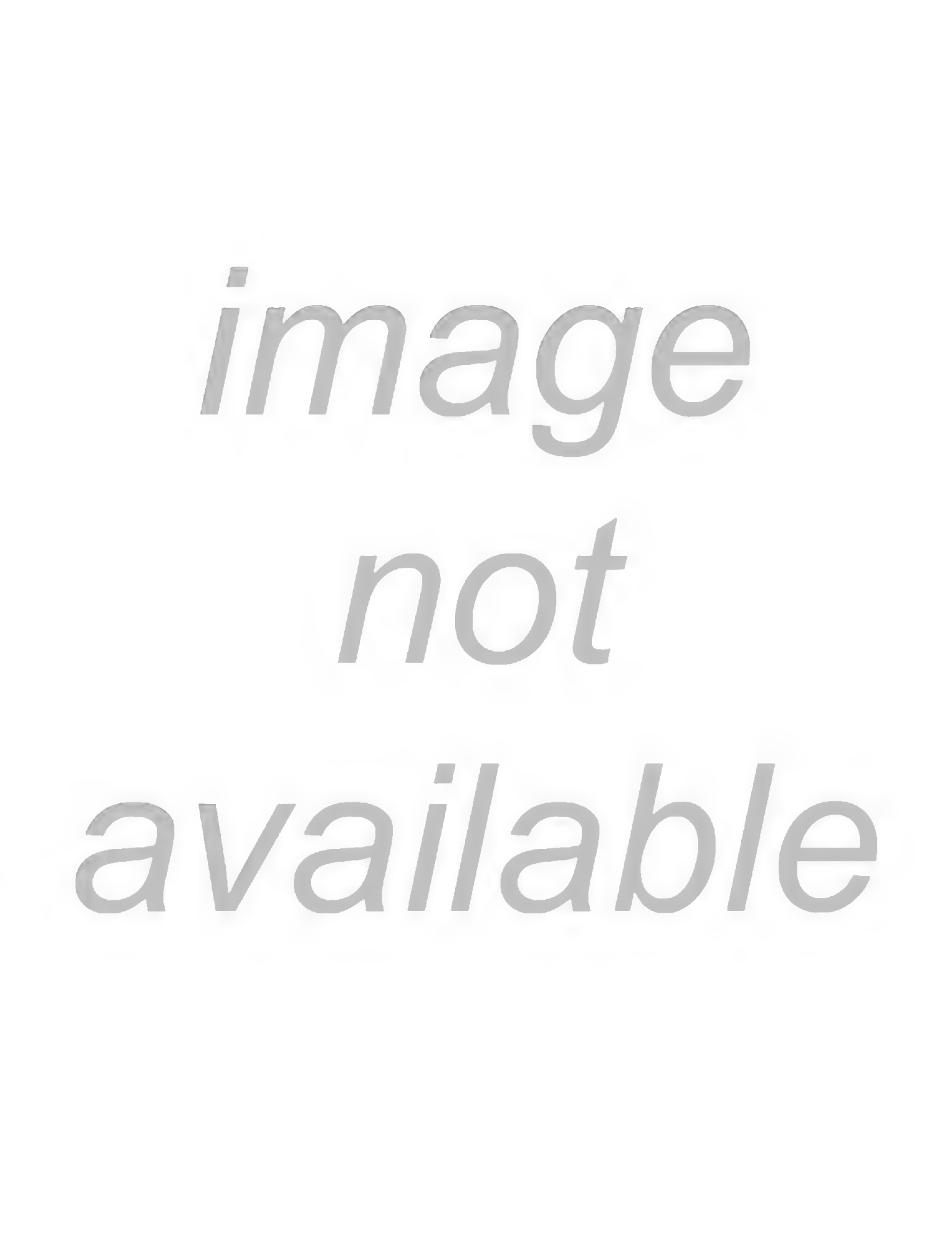


image
not
available

$+cv^2$ darstellen, wo $hu+kv=N$ und a, b, c Mittelwerte der Functionen $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ sind, entsprechend Mittelwerten von x, und y auf dem Wege des Wachsens um u und v, so dass a, b, c bei Verschwinden von u und v in endliche (oder Null-)Werte a_0, b_0, c_0 stetig übergeben.

Durch Bestimmung von v kann man $N=u^2w$ machen, wo w nach freier Verfügung unabhängig von u oder Function davon ist. Eliminirt man v und dividirt die Ausdrücke von M und N, so erhält man:

$$K=1+\frac{1}{w}\left\{a+b\,\frac{uw-h}{k}+c\left(\frac{uw-h}{k}\right)^2\right\}$$

Ist nun w endlich, w_0 sein Grenzwert bei verschwindendem u, und $w=w_0+r$, so wird

$$\lim K=1+\frac{1}{w_0}\left(a_0-\frac{b_0h}{k}+\frac{c_0h^2}{k^2}\right)$$

woraus:

$$w_0=\frac{a_0k^2-b_0hk+c_0h^2}{k^2(\lim K-1)};\qquad v=\left\{\frac{a_0k^2-b_0hk+c_0h^2}{k^2(\lim K-1)}+r\right\}u^2$$

wo r eine beliebige mit u verschwindende Grösse, der andere Teil der Klammer nur von x und y abhängig ist. Dieser Wert entspricht jedem endlichen und unendlich kleinen K mit der Ausnahme $\lim K=1$. Um K unendlich gross zu erhalten, braucht man nur $w_0=0$, also $v=ru^2$ zu setzen. Den Fall $\lim K=1$ erhält man nach Gl. (3), wenn man w unendlich gross, dagegen uw nicht unendlich gross nimmt.

Um mit der Berechnung, welche zum Beweise des aufgestellten Satzes gedient hat, die geometrische Darstellung zu verbinden, sei P ein Punkt der Fläche $z=f(x,y)$, ferner E die Berührungsebene der Fläche in diesem Punkte, und F die Ebene, welche parallel der xy Ebene durch P geht. E und F schneiden sich in der Geraden T. Da T Tangente der Fläche ist, so kann man auf letzterer eine Curve S ziehen, welche T in P berührt. Auf S liege der Nachbarpunkt Q von P, dessen Coordinaten $x+u$, $y+v$, $f(x+u,y+v)$ seien, wodurch u, v in gegenseitiger Abhängigkeit definirt sind. Man fälle das Lot QR auf F, welches E in L trifft. Dann ist die Strecke

$$RQ=f(x+u,y+v)-f(x,y)=M$$
$$RL=\frac{\partial z}{\partial u}u+\frac{\partial z}{\partial v}v\qquad\qquad=N$$

Beide Strecken sind zufolge der 2 genannten Berührungen unendlich klein mindestens 2 Ordnung. Den Wert ihres Quotienten ergibt die obige Rechnung.

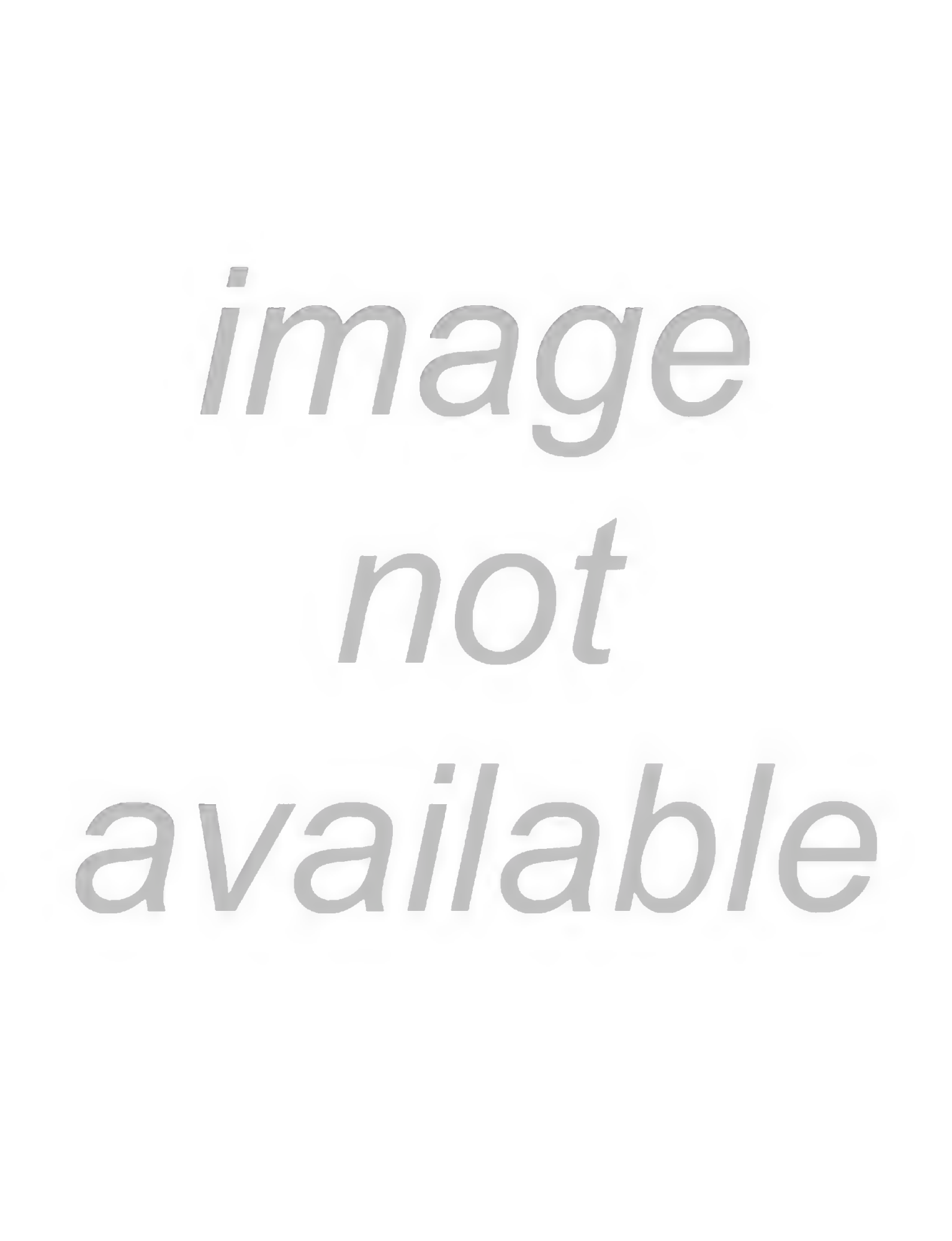


image
not
available

reichender Genauigkeit darzustellen, aber die Ausdrücke, welche zur Angabe der Coordinaten dienen, enthalten die Zeit explicit und versagen somit ihren Dienst, wenn t eine gewisse Grenze überschreitet, auch ist klar, dass Entwickelungen dieser Art, welche für grössere Werte von t divergiren, der Natur der Sache — unter Voraussetzung der Stabilität des Planetensystems — nicht entsprechen können. Diese Uebelstände werden nun durch Herrn Gyldén's Theorie vollständig vermieden. Die Reihen, welche in der absoluten Bahn die Coordinaten des gestörten Planeten angeben, enthalten die Zeit nur innerhalb des Winkelarguments und können somit für keinen Wert von t aufhören convergirt zu sein.

Es mögen hier noch einige Worte über den Unterschied zwischen absoluter und intermediärer Bahn statthaben.

Die bei der intermediären Bahn auftretenden Differentialgleichungen enthalten Glieder von der Form

$$\frac{d^2\xi}{dv^2} = \Sigma \alpha_n \cos(\sigma_n v + B)$$

wo α und σ kleine Grössen von der Ordnung der störenden Masse sind.

Das Integral erhält die Form

$$\xi = -\Sigma \frac{\alpha_n}{\sigma_n^2} \cos(\sigma_n v + B)$$

und hier sind die einzelnen Glieder durch eine Grösse von der Ordnung der störenden Masse dividirt, und erscheinen also als sehr gross — als hyperelementär. Zwar heben sich die grossen Werte

---

P Harzer, Quelques remarques sur un cas spécial du problème des trois corps. — Astronomiska iakttagelser och undersökningar anstälda på Stockholms Observatorium.

„ Untersuchungen über einen speciellen Fall des Problems der drei Körper. Mémoires de l'académie impériale des sciences de St.-Pétersbourg. T. XXXIV. Nr. 12.

A. Shdanow, Recherches sur le mouvement de la lune autour de la terre d'après la théorie de M. Gyldén. Astronomiska iakttagelser etc. 1885.

Mn. Brendel, Ueber einige in neuerer Zeit angewandte Formen für die Differentialgleichungen im Problem der 3 Körper. Astr. Nachr. Bd. 116.

K. Bohlin, Om en grupp af differentialequationer hvilkas solution medför s. k. små divisorer. Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar. 1887. Nr. 5. Stockholm.

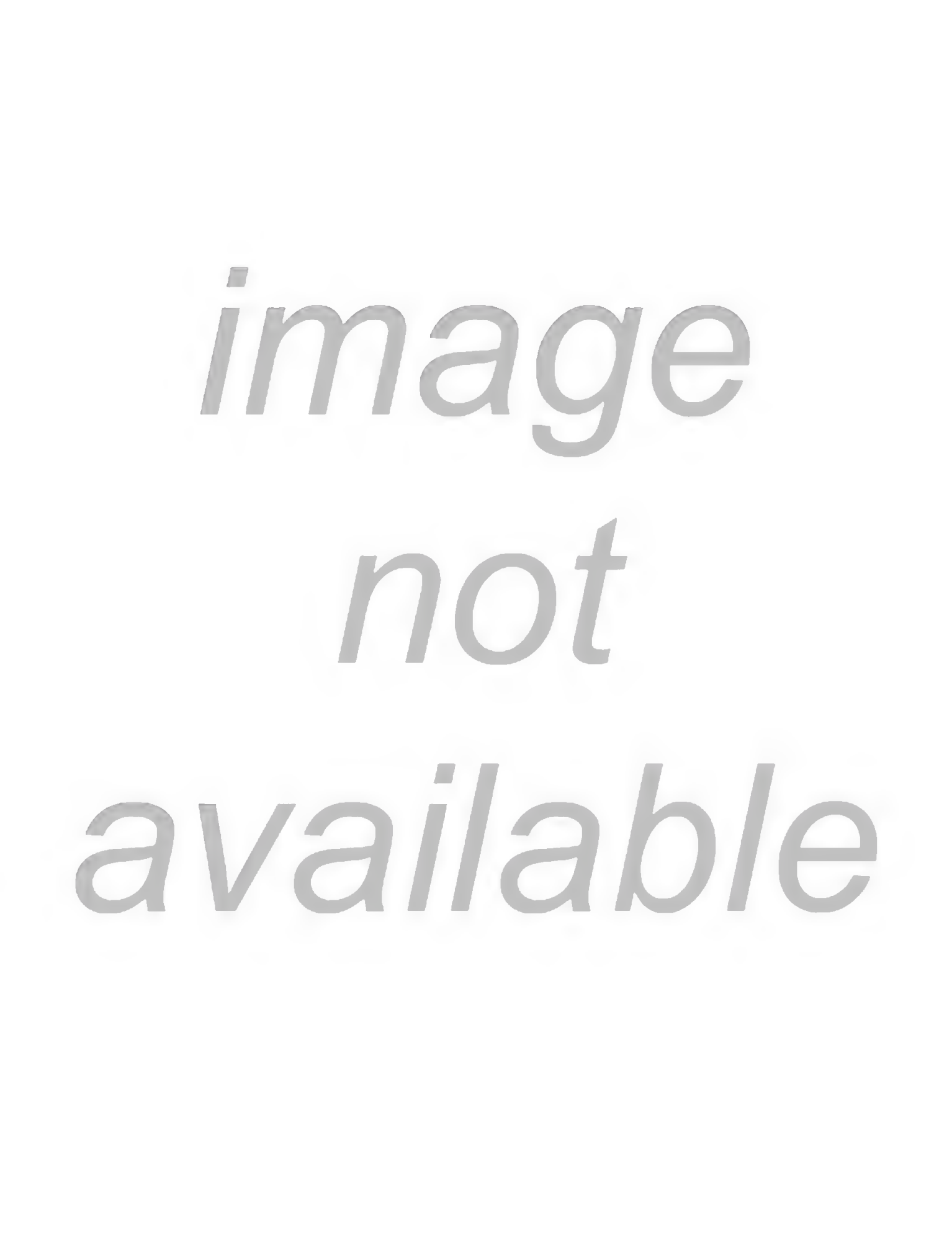


image
not
available

wo l^2 die Gauss'sche Constante bezeichnet, so ist die Bewegung des gestörten Körpers innerhalb seiner Bahnebene gegeben durch die bekannten Gleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu_1 x}{r^3} = \frac{\partial \Omega}{\partial x}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu_1 y}{r^3} = \frac{\partial \Omega}{\partial y}$$

wo $\Omega = \mu' \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}} - \frac{xx'+yy'}{r'^3} \right\}$ ist, und die mit einem Strich versehenen Buchstaben für den störenden Körper gelten.

Führt man statt der Zeit eine neue Variable, die „reducirte Zeit", τ, ein, durch die Gleichung

$$dt = \frac{1+S}{(1+\psi)^2} d\tau \tag{3}$$

wo S eine Grösse von derselben Ordnung wie ψ ist, und ersetzt in den obigen Bewegungs-Gleichungen x, y, r, t durch x_0, y_0, r_0, τ, so findet man

(4)

$$\frac{d^2x_0}{d\tau^2} - \frac{1}{1+S}\frac{dS}{d\tau}\frac{dx_0}{d\tau}\left\{ -\frac{d^2\psi}{d\tau^2} + \mu_1 \frac{(1+S)^2}{r_0^3} + \frac{1}{1+S}\frac{dS}{d\tau}\frac{d\psi}{d\tau} \right\} \frac{x_0}{1+\psi} = \frac{(1+S)^2}{(1+\psi)^3}\frac{\partial \Omega}{\partial x}$$

$$\frac{d^2y_0}{d\tau^2} - \frac{1}{1+S}\frac{dS}{d\tau}\frac{dy_0}{d\tau} + \left\{ -\frac{d^2\psi}{d\tau^2} + \mu_1 \frac{(1+S)^2}{r_0^3} + \frac{1}{1+S}\frac{dS}{d\tau}\frac{d\psi}{d\tau} \right\} \frac{y_0}{1+\psi} = \frac{(1+S)^2}{(1+\psi)^3}\frac{\partial \Omega}{\partial y}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen resp. mit y_0 und x_0 und subtrahirt die erste von der zweiten, so wird

$$x_0\frac{d^2y_0}{d\tau^2} - y_0\frac{d^2x_0}{d\tau^2} - \frac{1}{1+S}\frac{dS}{d\tau}\left(x_0\frac{dy_0}{d\tau} - y_0\frac{dx_0}{d\tau}\right) = -\frac{(1+S)^2}{(1+\psi)^3}\left(x_0\frac{\partial \Omega}{\partial y} - y_0\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right) = \frac{(1+S)^2}{(1+\psi)^2}\left(x\frac{\partial \Omega}{\partial y} - y\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right) = -\frac{(1+S)^2}{(1+\psi)^2}\frac{\partial \Omega}{\partial v}$$

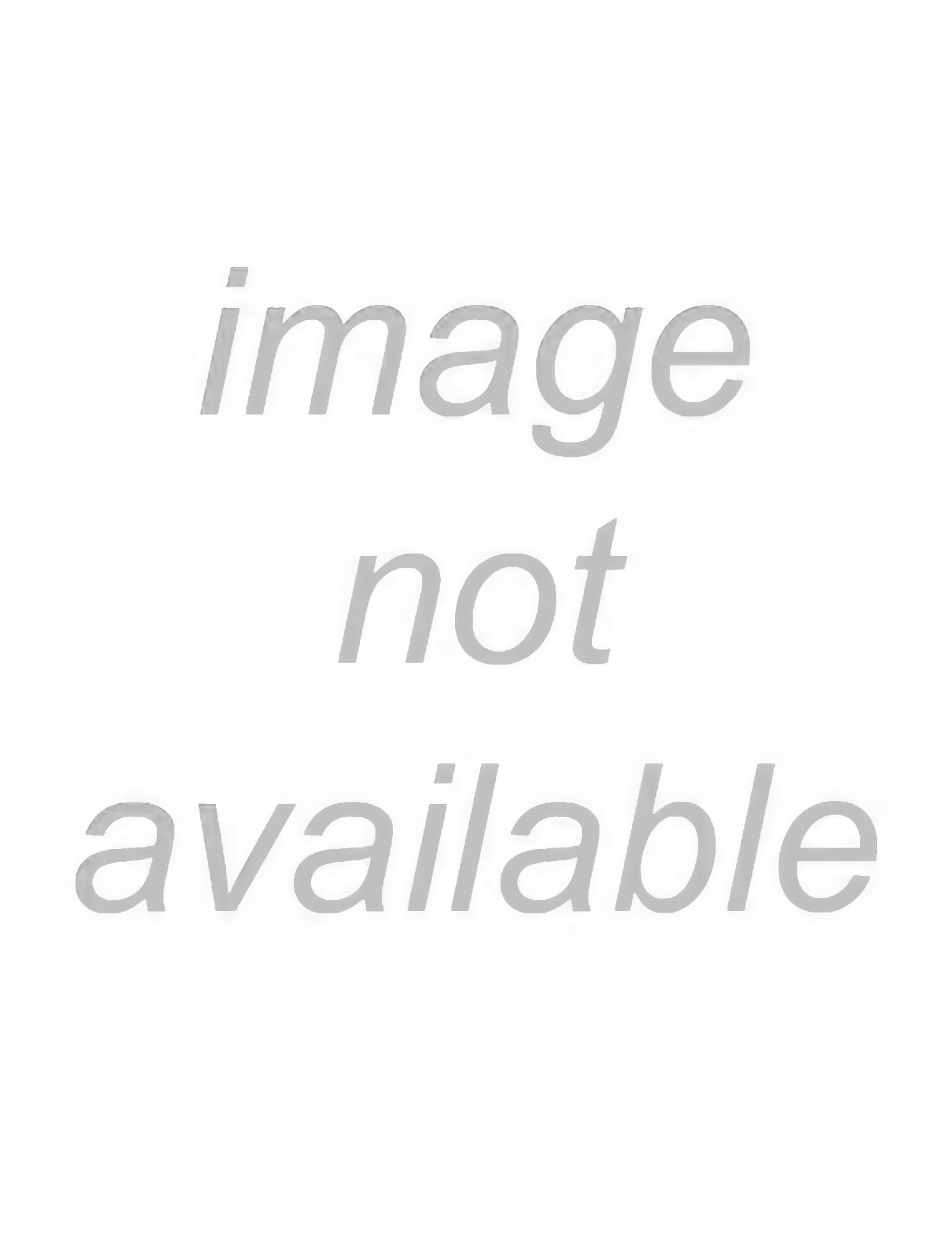


image
not
available

$$\frac{d^2\chi}{dv_0^2} = \frac{r^2}{c}\frac{\partial\Omega}{\partial v} + (2S+S^2)\frac{r^2}{c}\frac{\partial\Omega}{\partial v} + \frac{dS}{dv_0}\left\{1 + \int (1+S)\frac{r^2}{c}\frac{\partial\Omega}{\partial v}\,dv_0\right\}$$
$$= Q_0 + \frac{Q_1}{1+S} + (2S+S^2)\left(Q_0 + \frac{Q_1}{1+S}\right) + \frac{dS}{dv_0}\frac{1}{1+S}\left[1+\frac{d\chi}{dv_0}\right]$$

Zur Bestimmung der intermediären Länge verwendet man nun nur das erste Glied, Q_0, und hat also:

$$\frac{d^2\chi}{dv_0^2} = Q_0 \tag{7}$$

wonach man zur Bestimmung der Störungen zurückbehält

$$\frac{dS}{dv_0}\left[1+\frac{d\chi}{dv_0}\right] + (2S+S^2)(Q_0+Q_1) + Q_1 = 0 \tag{8}$$

Oder, mit Vernachlässigung der Producte $S^2 Q_0$ und SQ_1

$$\frac{dS}{dv_0}\left[1+\frac{d\chi}{dv_0}\right] + 2SQ_0 = -Q_1$$

Ersetzt man Q_0 durch $\frac{d^2\chi}{dv_0^2}$, so wird

$$\frac{dS}{dv_0}\left[1+\frac{d\chi}{dv_0}\right]^2 + 2S\left[1+\frac{d\chi}{dv_0}\right]\frac{d^2\chi}{dv_0^2} = -\left[1+\frac{d\chi}{dv_0}\right]Q_1$$

und das Integral dieser Gleichung ist

$$S = -\frac{\int Q_1\left(1+\frac{d\chi}{dv_0}\right)dv_0}{\left(1+\frac{d\chi}{dv_0}\right)^2} \tag{9}$$

Zur Bestimmung des intermediären radius vector multiplicirt man die Glu. (4) resp. mit x_0 und y_0 und addirt sie, so wird

$$x_0\frac{d^2x_0}{d\tau^2} + y_0\frac{d^2y_0}{d\tau^2} - \frac{1}{1+S}\frac{dS}{d\tau}\left\{x_0\frac{dx_0}{d\tau} + y_0\frac{dy_0}{d\tau}\right\}$$
$$+ \frac{r_0^2}{1+\psi}\left\{-\frac{d^2\psi}{d\tau^2} + \mu_1\frac{(1+S)^2}{r_0^3} + \frac{1}{1+S}\frac{dS}{d\tau}\frac{d\psi}{d\tau}\right\}$$
$$= \frac{(1+S)^2}{(1+\psi)^2}\left(x\frac{\partial\Omega}{\partial x} + y\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right)$$
$$= \frac{(1+S)^2}{(1+\psi)^2}\,r\,\frac{\partial\Omega}{\partial r}$$

Nun ist aber

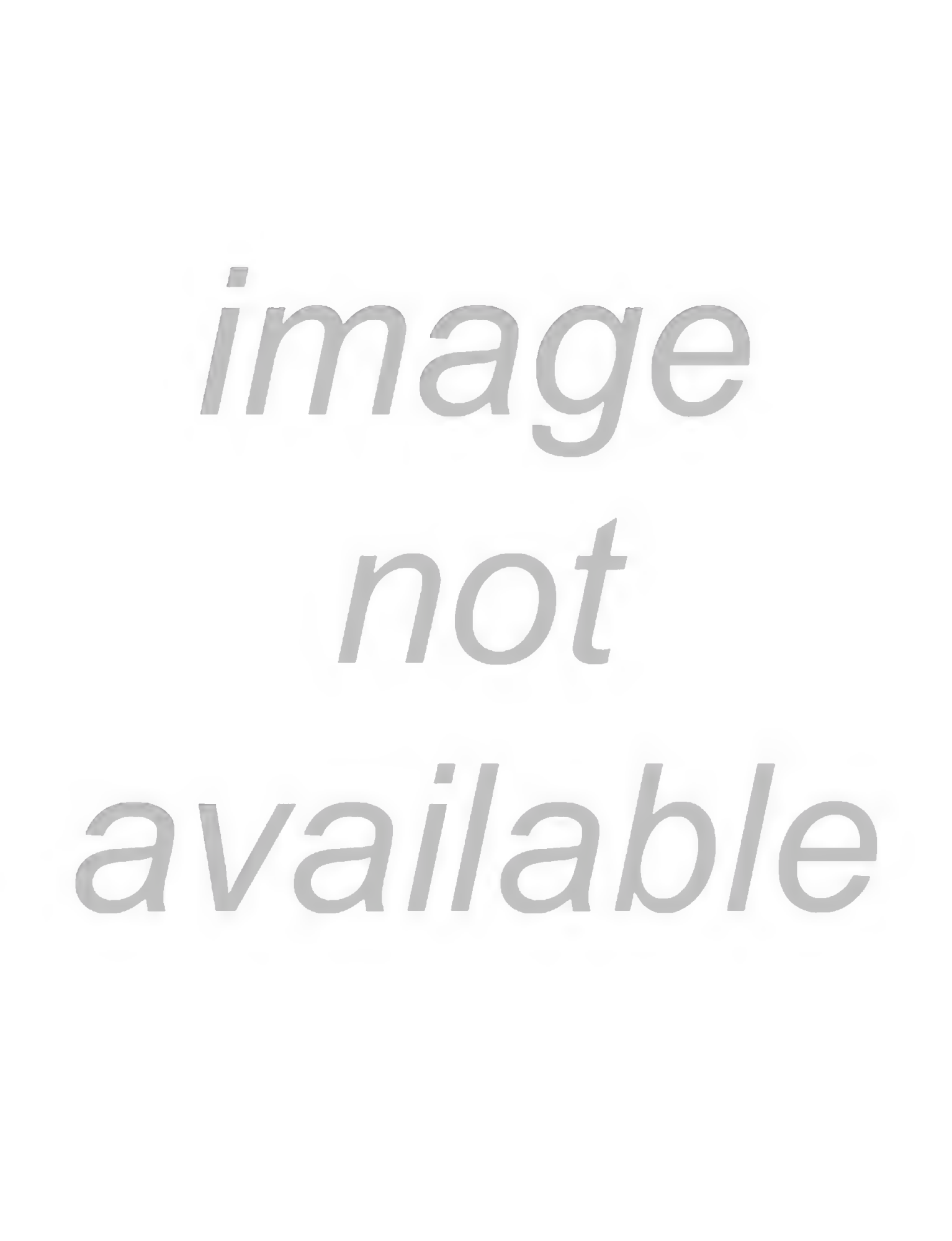


image
not
available

$$+\frac{1}{1+\psi}\left\{-\frac{1}{r_0}\frac{d^2\psi}{dv_0^2}-\frac{\mu_1}{c}(1+S)^2\psi-2\frac{d\left(\frac{1}{r_0}\right)}{dv_0}\frac{d\psi}{dv_0}+\frac{1}{r_0(1+S)}\frac{dS}{dv_0}\frac{d\psi}{dv_0}\right\}$$
$$=\frac{(1+S)^2}{1+\psi}\frac{r^2}{c}\frac{\partial\Omega}{\partial r} \qquad (10)$$

Diese Gleichung multiplicirt man mit einem Factor, a, — welchen man mit der mittleren Entfernung des gestörten Körpers identificiren kann —, und teilt sie dann, ganz analog dem früheren Verfahren, wieder in zwei Gruppen, durch die Definitions-Gleichung

$$\frac{ar^2}{c}\frac{\partial\Omega}{\partial r}=P_0+P_1 \qquad (B)$$

wonach man wieder nur das erste Glied, P_0, zur Bestimmung des intermediären radius vector verwendet, das zweite Glied, P_1, zur Bestimmung seiner Störungen. Lässt man ferner aus der Gleichung für den radius vector diejenigen Glieder fort, welche von der zweiten Ordnung in Bezug auf Q, S und ψ sind, so erhält man

$$\frac{d^2\left(\frac{a}{r_0}\right)}{dv_0^2}+\frac{a}{r_0}\left\{1+2\frac{d\chi}{dv_0}+\left(\frac{d\chi}{dv_0}\right)^2\right\}-\frac{\mu_1 a}{c}=-P_0 \qquad (11)$$

Nun ersetzt man den radius vector, r_0, durch eine neue Variable, ϱ_0, indem man setzt

$$r_0=\frac{a\mu}{1+\varrho_0} \qquad (12)$$
$$\mu=\frac{c}{\mu_1 a}$$

so wird

$$\frac{d^2\varrho_0}{dv_0^2}+\left\{1+2\frac{d\chi}{dv_0}+\left(\frac{d\chi}{dv_0}\right)^2\right\}\varrho_0=-\frac{2d\chi}{dv_0}-\left(\frac{d\chi}{dv_0}\right)^2-\mu P_0 \qquad (13)$$

Es sei noch bemerkt, dass Gl. (12) mit der Gleichung der Ellipse identisch wird, wenn $\varrho_0=e\cos v$ wird.

Zur Bestimmung der Störungen des radius vector behält man dann aus Gl. (10) die Gleichung zurück

$$a\frac{d^2\psi}{dv_0^2}+\frac{a\mu_1}{c}(1+S)^2r_0\psi-\frac{1+\psi}{1+S}r_0\frac{dS}{dv_0}\frac{d\left(\frac{a}{r_0}\right)}{dv_0}$$
$$-\frac{a\mu_1}{c}(+\psi)r_0(2S+S^2)+2r_0\frac{d\left(\frac{a}{r_0}\right)}{dv_0}\frac{d\psi}{dv_0}$$
$$-\frac{a}{1+S}\frac{dS}{dv_0}\frac{d\psi}{dv_0}=-(1+S)^2r_0P_1-(2S+S^2-\psi)r_0P_0$$

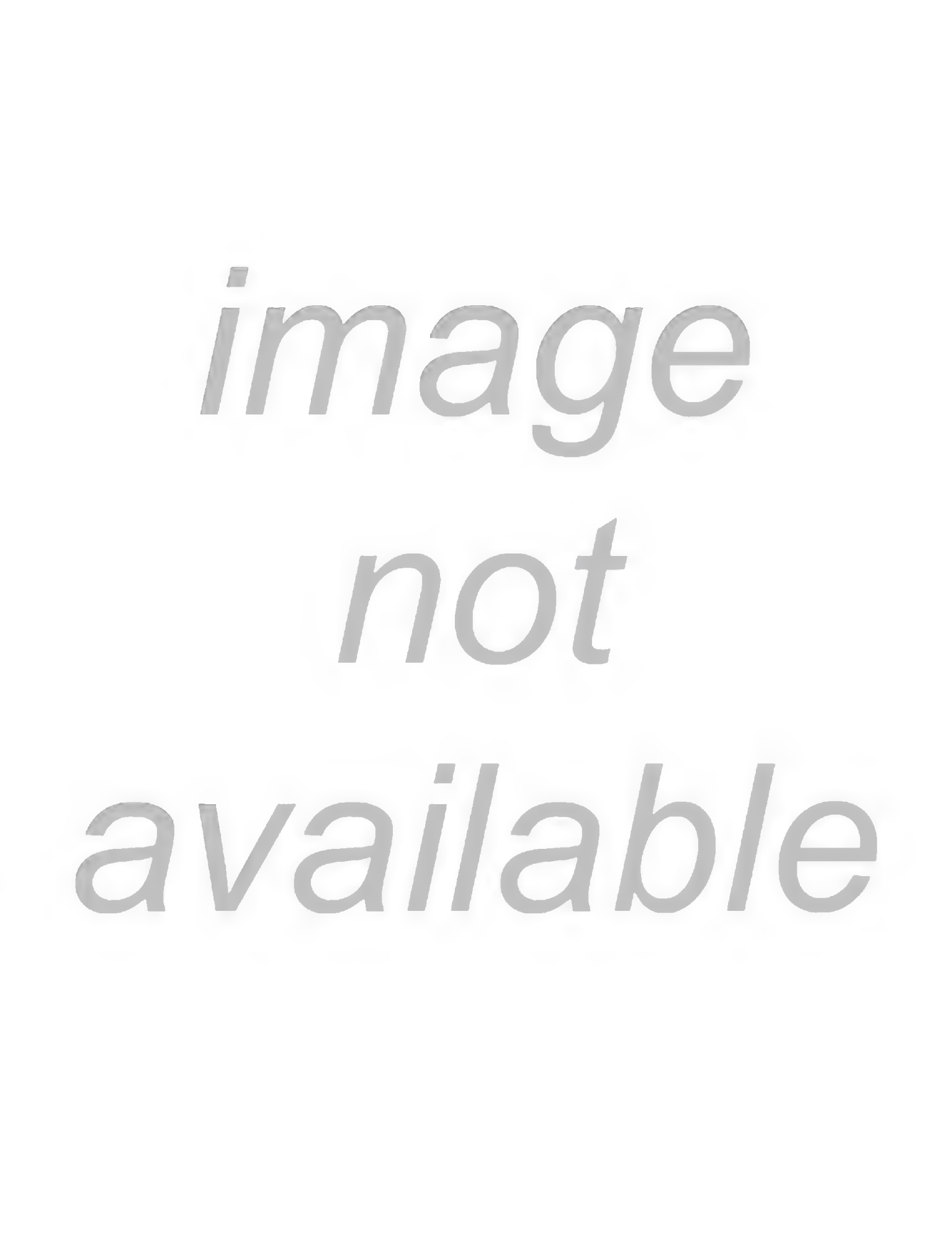


image
not
available

$$\Omega = 2\Sigma' \Sigma\Sigma \Omega_{(n,r,s')} \varrho^r \varrho'^{s'} \cos nH \tag{C}$$

$$\frac{ar^2}{c} \frac{\partial \Omega}{\partial r} = P_0 + P_1 = \frac{2}{\mu} \Sigma' \Sigma\Sigma P_{(n,r,s')} \varrho^r \varrho'^{s'} \cos nH \tag{D}$$

$$\frac{r^2}{c} \frac{\partial \Omega}{\partial v} = Q_0 + \frac{Q_1}{1+S} = 2\Sigma' \Sigma\Sigma Q_{(n,r,s')} \varrho^r \varrho'^{s'} \frac{\partial \cos nH}{\partial v} \tag{E}$$

Hier bedeuten $\Omega_{(n,r,s')}$, $P_{(n,r,s')}$, $Q_{(n,r,s')}$ nnmerische Constanten, wolche ans dem Verhältniss der mittleren Geschwindigkeiten des störenden nnd des gestörten Körpers abgeleitet werden nnd späterhin angegeben werden.

ϱ_0 ist die durch Gl. (12) gegebene Fnnction, ϱ_0' dieselbe Funetion für den störenden Körper, von welcher wir hier jedoch nnr das erste Glied mitznnehmen brauchen nnd setzen könnon

$$\varrho_0' = \varkappa' \cos[(1-\varsigma')v_0' - \Gamma'] \tag{15}$$

wo $\varkappa'$ dio Excentricität der Jnpiters-Bahn hedentet, $\varsigma' v_0'$ dio Bewegnng ihrer Apsidenlinie nnd Γ' dio Längo seines Perihols.

Für den Winkel H hat man nnter Vernachlässigung der Qnadrate der Neigung

$$H = v - v' = v_0 + \chi - v_0' - \chi'$$

wo χ' dio den χ analoge Fnnction für Jnpiter ist. Bei der nachfolgenden Bestimmnng von ϱ_0 können in erster Annäherung χ nnd χ' fortgelassen werden, während bei der späteren Bestimmnng von $\frac{d^2\chi}{dv^2}$ die Fnnction χ wieder in ohigen Ansdrnck eingeführt wird. Wir hahen also znnächst

$$H = v_0 - v_0'.$$

In diesem Ansdrucke mnss nnn v_0' dnrch v_0 ersetzt werden.

Bezeichnet man die mittlere Bewogung des gostörten Körpers mit n, diejenige des störenden mit n' nnd setzt

$$\frac{n'}{n} = \mu$$

nennt man ferner die mittleren Längon beider Himmelskörper zu einer bestimmten Epoche Λ nnd Λ', so wird

$$v_0' - \Lambda' = \mu(v_0 - \Lambda) + G$$

wo G eine kleine Grösse ist, welcho von den Bahn-Exentricitäten ahhängt. Dieselbe wird folgender Weise bestimmt.

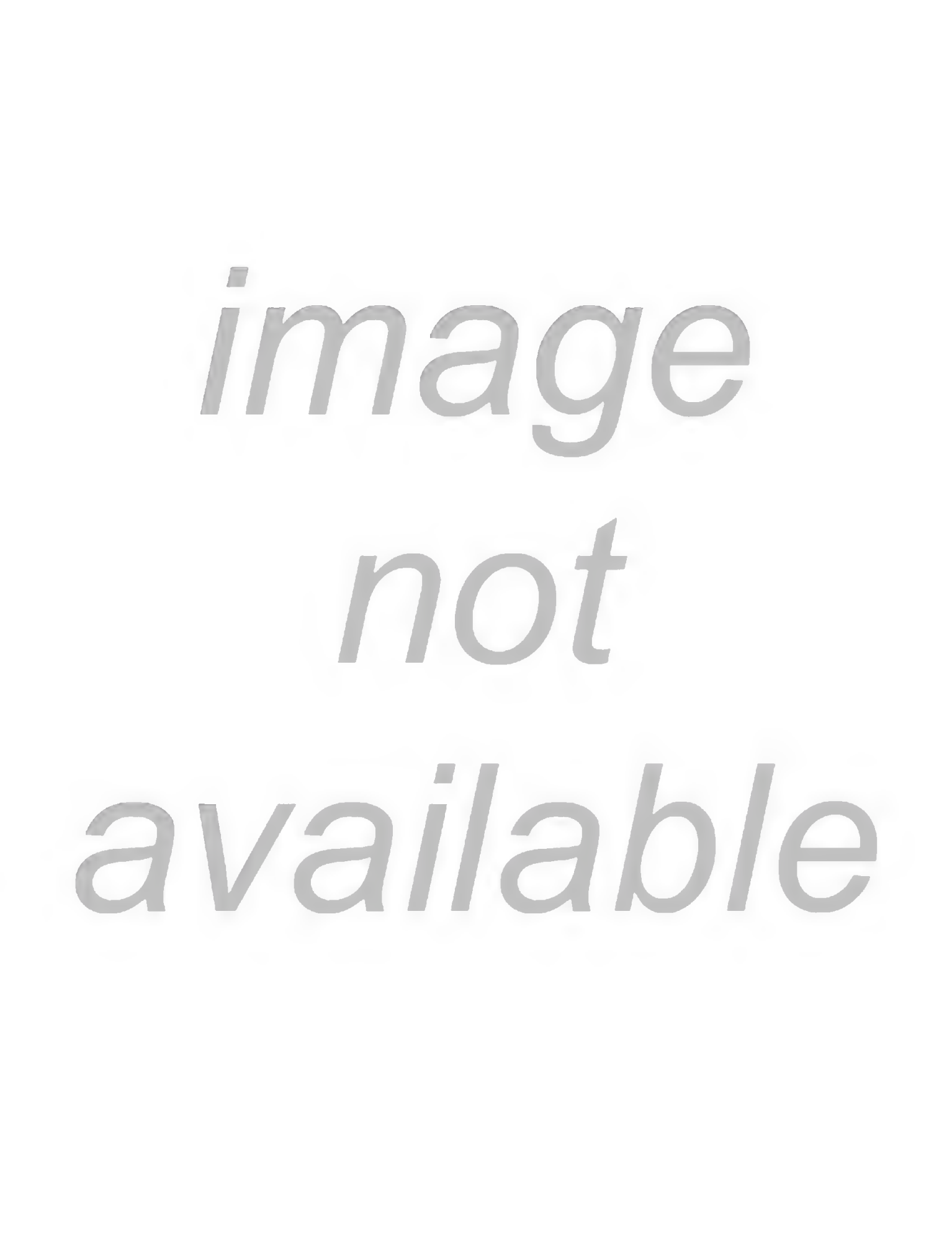


image
not
available

Indem man den Taylor'schen Lehrsatz anwendet, findet man

$$\cos nH = \cos[nv_0(1-\mu)-n(\Lambda'-\mu\Lambda)]$$
$$+2n\left(\mu\int\varrho_0' dv_0 - \mu\int\varrho_0 dv_0\right)\sin[nv_0(1-\mu)-n(\Lambda'-\Lambda)]$$
$$+n^2\left(\mu\int\varrho_0' dv_0 - \mu\int\varrho_0 dv_0\right)^2\cos[nv_0(1-\mu)-n(\Lambda'-\Lambda)]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

und ferner

$$\frac{\partial\cos nH}{\partial v_0} = -n\sin[nv_0(1-\mu)-n(\Lambda'-\mu\Lambda)]$$
$$+2n\left(\mu\int\varrho_0' dv' - \mu\int\varrho_0 dv_0\right)\cos[nv_0(1-\mu)-n(\Lambda'-\mu\Lambda)]$$
$$-2n^2\left(\mu\int\varrho_0' dv_0' - \mu\int\varrho_0 dv_0\right)^2\sin[nv_0(1-\mu)-n(\Lambda'-\mu\Lambda]$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

Durch die Gln. (C), (D), (E), (16) (17) sind die Componenten der Störungsfunction bestimmt.

Die Gln. (C), (D), (E) enthalten nun zwar unendlich viele Glieder, aber nur eine beschränkte Anzahl derselben — welche Herr Gyldén elementäre oder charakteristische Glieder nennt — werden durch die Integrale so gross, dass sie bei Aufstellung der intermediären Bahn berücksichtigt werden müssen, und nur diese Glieder werden zur Bildung von P_0, resp. Q_0, verwandt.

Beobachtet man also, aus der dreifachen Summe nur die Glieder mitzunehmen, welche durch die Integration gross werden, so folgen aus den Gln. (7) und (13), indem man zugleich das Quadrat von $\frac{d\chi}{dv_0}$ vernachlässigt, die Gleichungen:

$$\frac{d^2\chi}{dv_0^2} = 2\Sigma'\Sigma\Sigma Q_{(n,\sigma,\tau')}\varrho_0^{\sigma}\varrho_0'^{\tau'}\frac{\partial\cos nH}{\partial v_0} \qquad (18)$$

$$\frac{d^2\varrho_0}{dv_0^2} + \left(1+\frac{2d\chi}{dv_0}\right)\varrho_0 = -2\frac{d\chi}{\partial v_0} - 2\Sigma'\Sigma\Sigma P_{(n,\sigma,\tau')}\varrho_0^{\sigma}\varrho_0'^{\tau'}\cos nH \qquad (19)$$

III.

Es ist nun zunächst zu untersuchen, welche Glieder in Gl. (19) durch die Integration gross werden.

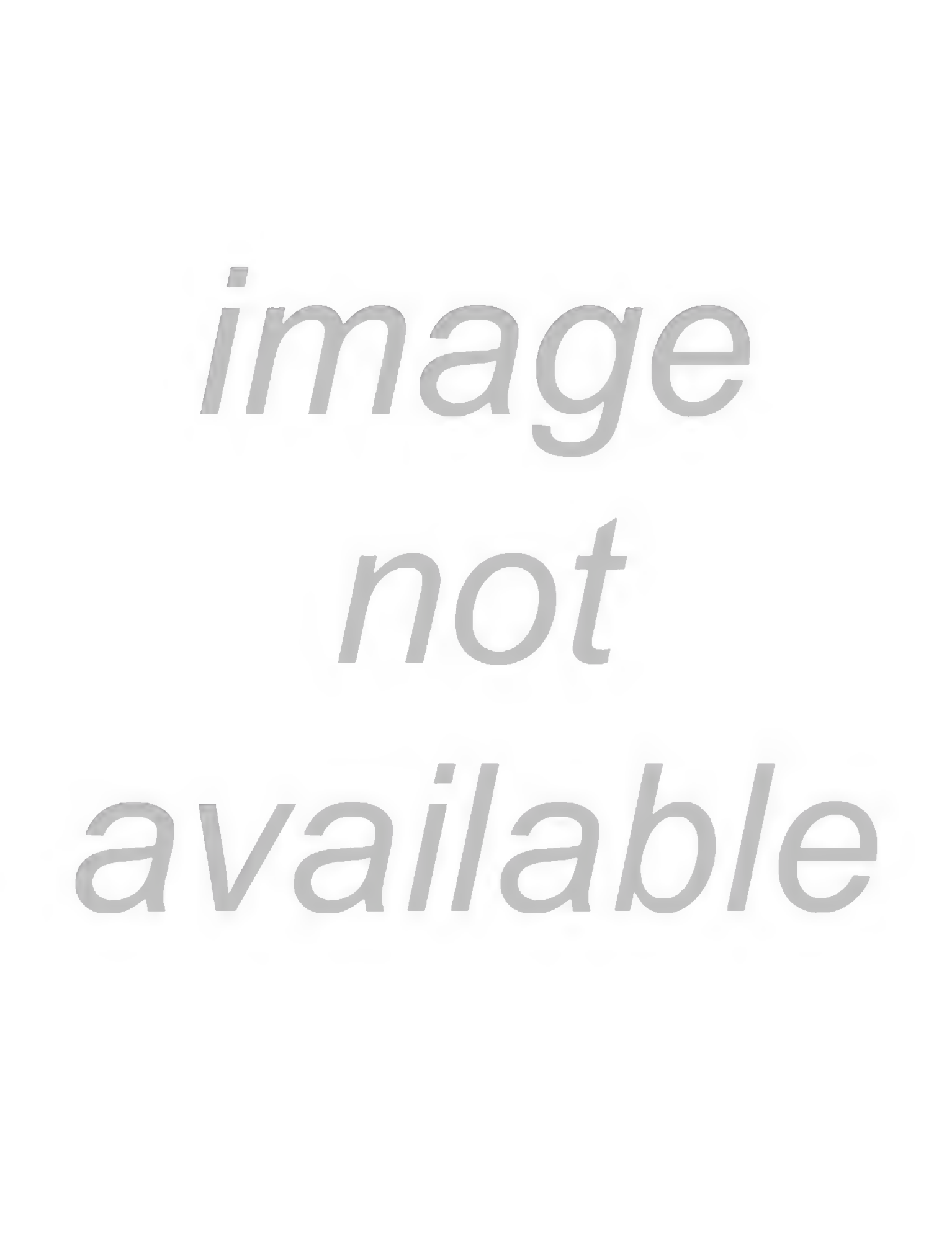


image
not
available

$$\cos\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)+\tfrac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$$

so sieht man, dass die Glieder die Form annehmen

$$\tfrac{1}{2}ab\cos[v_0[(1-\varsigma)\pm n(1-\mu)]+C_1\pm E] \qquad \text{(I)}$$
$$\tfrac{1}{2}a'k\cos[v_0[(1-\varsigma')\mu\pm n(1-\mu)]+C_2\pm D] \qquad \text{(II)}$$

Nnn sind ς nud ς' — die Apsidenhewegungen — sehr kleine Grössen; ferner ist in unserem Falle — bei (17) Thetis) — μ nahezu gleich $\frac{1}{3}$, nämlich $\mu = 0.3277046$. Mithin sieht man, dass der Factor von v_0 von der Form $(1+\sigma)$ wird

im Falle (I) wenn $n = 0$ oder $n = 3$ ist
„ „ (II) „ $n = 1$ „ $n = 2$ „

Anf diese Weise ergehen sich ans der Summenformel der Gl. (19) folgende Glieder

$$-P_{010}\varrho_0+P_{300}\sin[\lambda v_0-3B]12\mu\int\varrho_0 dv_0-P_{000}$$
$$-2P_{101}\cos[v_0(1-\mu)-B]\varrho_0'-2P_{201}\cos[v_0 2(1-\mu)-2B]\varrho_0'$$
$$-2P_{100}2\mu\sin[v_0(1-\mu)-B]\int\varrho_0' dv_0$$
$$-2P_{200}4\mu\int\varrho_0' dv_0\sin[2v_0(1-\mu)-2B]-2P_{310}\cos[\lambda v_0-3B]\varrho_0$$

wo $B = A'-\mu A$ nud $\lambda = 3(1-\mu)$ ist.

Auf gleicho Weise erhält man aus der Summenformel der Gl. (18) die grossen Glieder, nnd, indem man dieselben einmal integrirt, erhält man als die Glieder, welche für $2\frac{d\chi}{dv_0}$ in der rechten Seite der Gl. (19) eingesetzt werden müssen, die folgenden

$$+12Q_{300}\int\cos[\lambda v_0-3B]dv_0\int 6\mu\varrho_0 dv_0$$
$$-12Q_{310}\int\varrho_0\sin[\lambda v_0-3B]dv_0+4Q_{101}\int\sin[v_0(1-\mu)-B]\varrho_0' dv_0$$
$$+8Q_{201}\int\sin[v_0 2(1-\mu)-2B]\varrho_0' dv_0-4Q_{100}\int\cos[v_0(1-\mu)-B]dv_0$$
$$\times\int 2\mu\varrho_0' dv_0-4\mu Q_{200}\int\cos[v_0 2(1-\mu)-2B]dv_0\int 8\mu\varrho_0' dv_0$$

und für das linkerseits stehende Glied

$$-12Q_{300}\int\sin[\lambda v_0-3B]dv_0$$

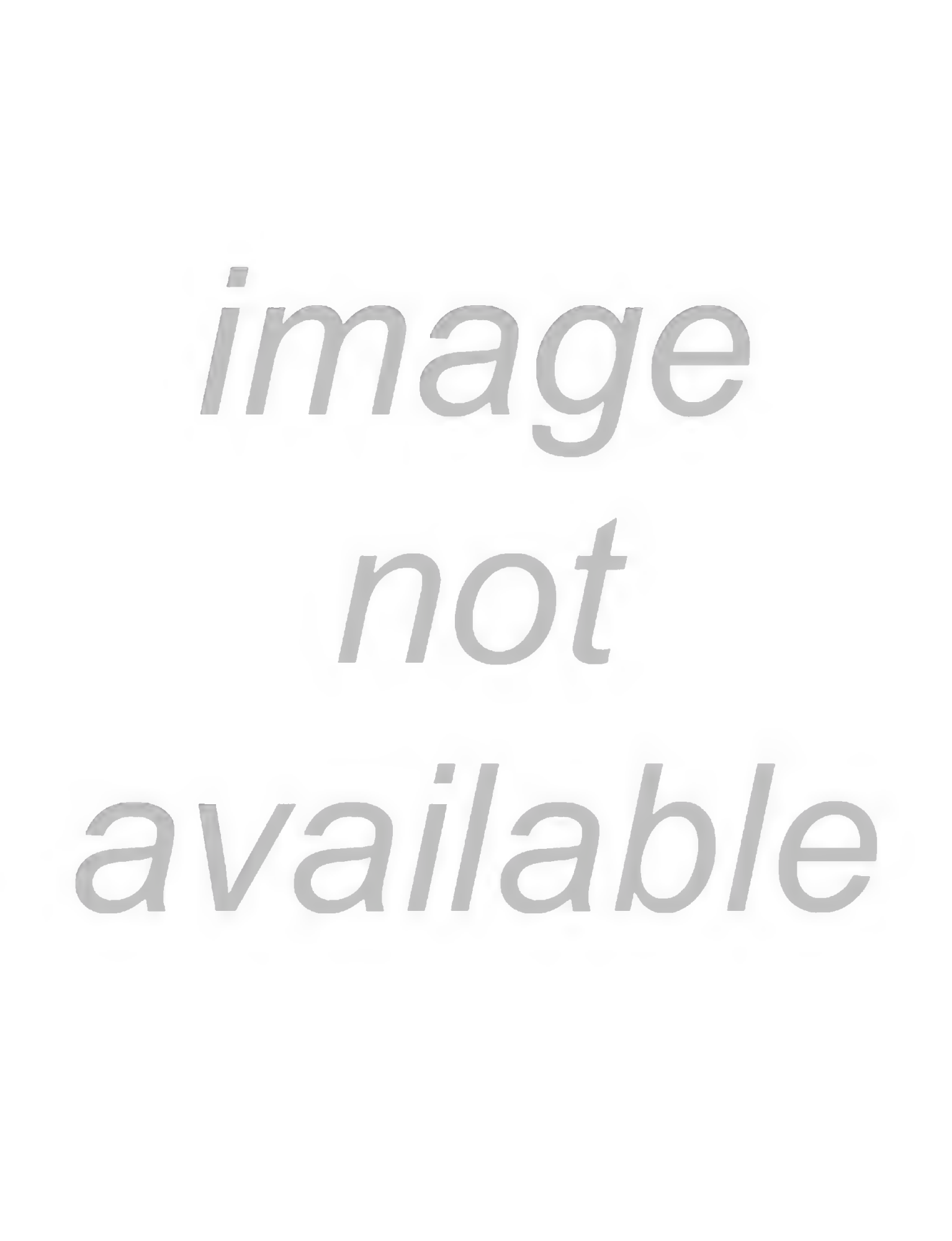


image
not
available

$$\int \cos[\lambda v_0 - 3B]dv_0 \int \varrho_0 dv_0 = -\frac{1}{1+P_{010}} \int \cos[\lambda v_0 - 3B] \frac{d\varrho_0}{dv_0} dv_0$$
$$+ \frac{1}{1+P_{010}} \int \cos[\lambda v_0 - 3B]dv_0 \int W_1 dv_0$$
$$= -\frac{1}{1+P_{010}} \cos[\lambda v_0 - 3B]\varrho_0 + \frac{\lambda}{1+P_{010}} \int \varrho_0 \sin[\lambda v_0 - 3B]dv$$
$$+ \frac{1}{1+P_{010}} \int \cos[\lambda v_0 - 3B]dv_0 \int W_1 dv_0$$

Endlich

$$\int \varrho_0 \sin[\lambda v_0 - 3B]dv_0 = -\frac{1}{1+P_{010}} \int \sin[\lambda v_0 - 3B] \frac{d^2\varrho_0}{dv_0^2} dv_0$$
$$+ \frac{1}{1+P_{010}} \int \sin[\lambda v_0 - 3B] W_1 dv_0$$
$$= -\frac{1}{1+P_{010}} \left(\frac{d\varrho_0}{dv_0} \sin[\lambda v_0 - 3B] - \lambda \varrho_0 \cos[\lambda v_0 - 3B] \right.$$
$$\left. - \lambda^2 \int \varrho_0 \sin[\lambda v_0 - 3B]dv_0 + \int W_1 \sin[\lambda v_0 - 3B]dv_0 \right)$$

Mithin

$$(\lambda^2 - P_{010} - 1) \int \varrho_0 \sin[\lambda v_0 - 3B]dv_0 = \frac{d\varrho_0}{dv_0} \sin[\lambda v_0 - 3B]$$
$$- \lambda \varrho_0 \cos[\lambda v_0 - 3B] - \int W_1 \sin[\lambda v_0 - 3B]dv_0$$

Setzt man diese Werte in Gl. (19_1) ein, so erhält man

$$\frac{d^2\varrho}{dv_0^2} + \frac{d\varrho_0}{dv_0} \left\{ \frac{12\mu P_{300}}{1+P_{010}} + \frac{72\mu\lambda Q_{300}}{\eta_0(1+P_{010}} - \frac{12}{\eta_0} Q_{310} \right\} \sin[\lambda v_0 - 3B]$$
$$+ \varrho_0 \left\{ 1 + P_{010} + \left[2P_{210} + \frac{4}{1-\mu} Q_{300} + \frac{12\lambda}{\eta_0} Q_{310} \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{72\mu}{1+P_{010}} Q_{300} \cdot \left(1 - \frac{\lambda^2}{\eta_0} \right) \right] \cos[\lambda v_0 - 3B] \right\} = W_1 \quad (20)$$

wo $\eta_0 = \lambda^2 - P_{010} - 1$ ist.

In diesem Ausdruck muss man nun den ersten Differentialquotienten verschwinden machen; zu diesem Zwecke führt man eine neue Variable, E, ein durch die Gleichung

$$\varrho_0 = E\varphi(v_0)$$

wo $\varphi(v_0)$ so zu bestimmen ist, dass der Coefficient von $\frac{dE}{dv_0}$ zu null wird. Es ist

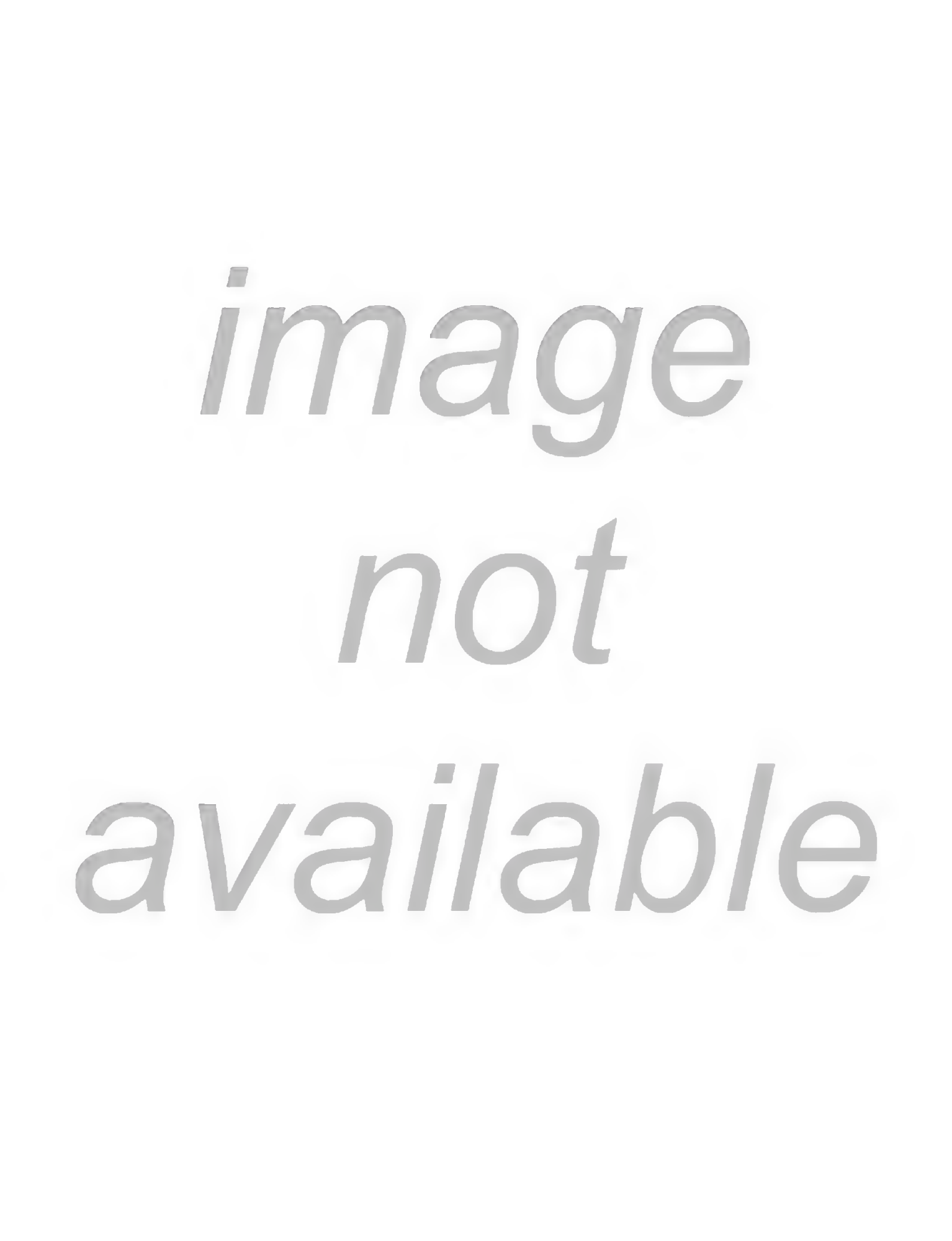


image
not
available

$$W_1 = -P_{000} - 2P_{101}\cos[v_0(1-\mu) - B]\varrho_0' - 2P_{201}\cos[v_0 2(1-\mu) - 2B]\varrho_0'$$
$$-4P_{100}\sin[v_0(1-\mu) - B]\mu \int \varrho_0' dv_0$$
$$-P_{200}8\mu\sin[v_0(1-\mu) - 2B]\int \varrho_0' dv_0 + 4Q_{101}\int \sin[v_0(1-\mu) - B]\varrho_0' dv_0$$
$$+8Q_{201}\int \sin[v_0 2(1-\mu) - 2B]\varrho_0' dv_0$$
$$-8\mu Q_{100}\int \cos[v_0(1-\mu) - B]dv_0 \int \varrho_0' dv_0$$
$$-32\mu Q_{200}\int \cos[v_0 2(1-\mu) - 2B]dv_0 \int \varrho_0' dv_0$$

$$W_2 = E\,\frac{A'^2}{4}\sin^2[\lambda v_0 - 3B]$$

$$A' = \frac{12\mu P_{300}}{1+P_{010}} + \frac{72\mu\lambda}{\eta_0(1+P_{010})}Q_{300} - \frac{12}{\eta_0}Q_{310}$$

V.

Behufs Integration obiger Gleichung setze man

$$\lambda v_0 - 3B = 2\frac{\pi}{2K}x - 180^0$$

wo K ein vollständiges elliptisches Integral erster Gattung ist, dessen Modul vorläufig noch unbestimmt bleibt, so wird

$$\frac{d^2E}{dx^2} + \frac{4\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2}{\lambda^2}\left\{1 - \beta_0 + \bar{\beta}\cos\left(2\frac{\pi}{2K}x\right)\right\}E = \frac{4\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2}{\lambda}W$$

wo

$$W = \frac{W_1}{e^{\frac{A'}{2\lambda}\cos(\lambda v_0 - 3B)}} + W_2$$

gesetzt worden ist.

Betrachtet man nun die Relation

$$\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\cos 2\frac{\pi}{2K}x = \frac{k^2(1-q^2)}{16q}\cos 2\,\mathrm{am}\,x - \frac{k^2(1-q^2)}{16q}\Gamma_{(0)}{}^{(2)}$$
$$-\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2(1-q)^2\left\{\frac{2q}{1-q^4}\cos 4\frac{\pi}{2K}x + \frac{3q^2}{1-q^6}\cos 6\frac{\pi}{2K}x + \ldots\right\}$$

und bestimmt q aus der Gleichung

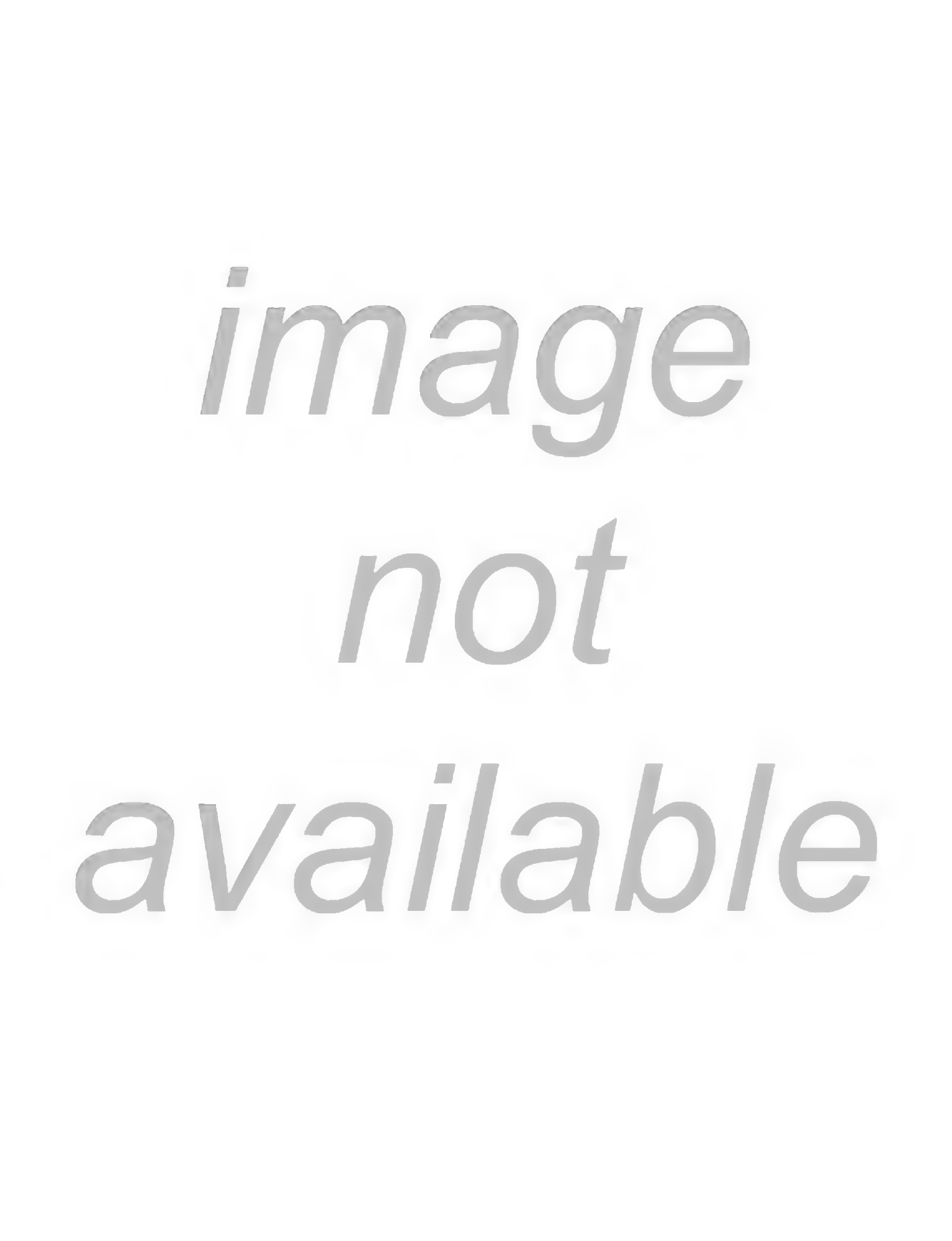


image
not
available

Da

$$\frac{\pi}{2K}x = \tfrac{3}{2}(1-\mu)v_0 - \tfrac{3}{2}B + \frac{\pi}{2}$$

war, wird also

$$\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x = i(\nu - \tfrac{1}{2})\left((1-\mu)v_0 - B + \frac{\pi}{3}\right)$$

Ferner ersetze man C_1 und C_2 durch zwei andere Constanten, $\varkappa$ und Γ, gemäss den Gleichungen

$$C_1 = \frac{\varkappa}{2}\frac{e}{\sqrt[4]{q}}^{-\frac{\pi}{2K}\omega}\, e^{i\Gamma - i(\nu-\frac{1}{2})\left(A-\mu A-\frac{\pi}{3}\right) - i\frac{3}{2}(A'-\mu A)}$$

$$C_2 = \frac{\varkappa}{2}\frac{e}{\sqrt[4]{q}}^{-\frac{\pi}{2K}\omega}\, e^{-i\Gamma + i(\nu-\frac{1}{2})\left(A'-\mu A-\frac{\pi}{3}\right) + i\frac{3}{2}(A'-\mu A)}$$

Mithin wird nach Gl. (23)

$$\Theta(x)E = \frac{\varkappa}{2}\frac{e}{\sqrt[4]{q}}^{-\frac{\pi}{2K}\omega}\, H(x+i\omega)e^{-i(\nu-\frac{1}{2})\left((1-\mu)v_0 - B + \frac{\pi}{3}\right) + i\Gamma - i(\nu-\frac{1}{2})\left(B-\frac{\pi}{3}\right) - i\frac{3}{2}B}$$

$$+\frac{\varkappa}{2}\frac{e}{\sqrt[4]{q}}^{-\frac{\pi}{2K}\omega}\, H(x-i\omega)e^{+i(\nu-\frac{1}{2})\left((1-\mu)v_0 - B + \frac{\pi}{3}\right) - i\Gamma + (\nu-\frac{1}{2})\left(B-\frac{\pi}{3}\right) + i\frac{3}{2}B}$$

Nun ist die Exponentialgrösse in der oberen Reihe dieser Gleichung

$$\cos[(\nu-\tfrac{1}{2})((1-\mu)v_0 - \Gamma + \tfrac{3}{2}B)] + i\sin[(\nu-\tfrac{1}{2})((1-\mu)v_0 - \Gamma + \tfrac{3}{2}B)]$$

diejenige in der unteren Reihe

$$\cos[(\nu-\tfrac{1}{2})((1-\mu)v_0 - \Gamma + \tfrac{3}{2}B)] - i\sin[(\nu-\tfrac{1}{2})((1-\mu)v_0 - \Gamma + \tfrac{3}{2}B)]$$

Mithin wird

$$(24)\quad \Theta(x)E =$$

$$\frac{\varkappa}{2}\frac{e}{\sqrt[4]{q}}^{-\frac{\pi}{2K}\omega}\{H(x+i\omega) = H(x-i\omega)\}\cos[(\nu-\tfrac{1}{2})((1-\mu)v_0 - \Gamma + \tfrac{3}{2}B)]$$

$$-i\frac{\varkappa}{2}\frac{e}{\sqrt[4]{q}}^{-\frac{\pi}{2K}\omega}\{H(x+i\omega) - H(x-i\omega)\}\sin[(\nu-\tfrac{1}{2})((1-\mu)v_0 - \Gamma + \tfrac{3}{2}B)]$$

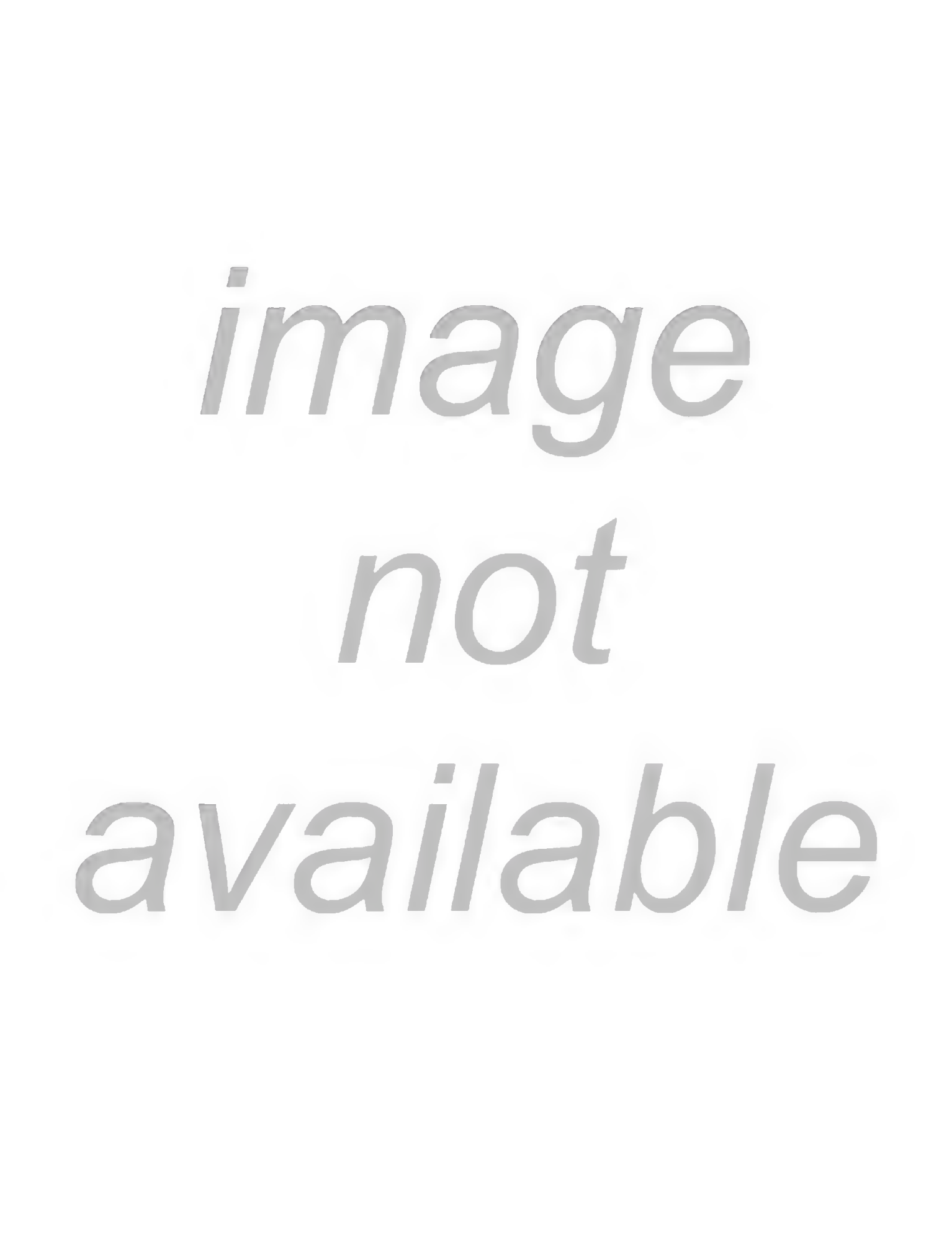


image
not
available

Setzt man uun

$$\frac{1}{\Theta(x)} = 1 + 2q\cos 2\frac{\pi}{2K}x \ \ldots = 1 - 2q\cos[3(1-\mu)v_0 - 3B] \ \ldots$$

ein, setzt ferner

$$\mu - \nu(1-\mu) = \varsigma$$

uud resubstituirt ϱ_0 für E, so erhält man

$$\varrho_0 = \varkappa e^{\frac{A'}{2\varkappa}\cos[3(1-\mu)v_0 - 3B]} \times$$

$$\Big\{\cos[(1-\varsigma)v_0 - \Gamma][1 - qe^{-\frac{\pi}{K}\omega}$$

$$-\cos[3(1-\mu)v_0 - 3B - (1-\varsigma)v_0 - \Gamma][q - e^{-\frac{\pi}{K}\omega}]$$

$$-q\cos[3(1-\mu)v_0 - 3B + [1-\varsigma)v_0 - \Gamma)]$$

$$-qe^{-\frac{\pi}{2K}\omega}\cos[6(1-\mu)v_0 - 6B - [(1-\varsigma)v_0 - \Gamma]]\Big\}$$

oder, da

$$e^{\frac{A'}{2\lambda}\cos[3(1-\mu)v_0 - 3B]} = 1 + \frac{A'}{2\lambda}\cos[3(1-\mu)v_0 - 3B] + \ldots \text{ ist,}$$

$$\varrho_0 = \varkappa\Big\{\cos[(1-\varsigma)v_0 - \Gamma]\Big[1 - qe^{-\frac{\pi}{K}\omega} + \frac{A'}{4\lambda}e^{-\frac{\pi}{K}\omega}\Big]$$

$$-\cos[\lambda v_0 - 3B - [(1-\varsigma)v_0 - \Gamma]]\Big[q - e^{-\frac{\pi}{K}\omega} - \frac{A'}{4\lambda}\Big]$$

$$-\cos[\lambda v_0 - 3B + [(1-\varsigma)v_0 - \Gamma]]\Big[q - \frac{A'}{4\lambda}\Big]$$

$$-\cos]2\lambda v_0 - 6B - [(1-\varsigma)v_0 - \Gamma]]\Big[qe^{-\frac{\pi}{K}\omega} - \frac{A'}{4\lambda}e^{-\frac{\pi}{K}\omega}\Big]\Big\} \qquad (25)$$

Wie man aus dem erstou Gliede, $\cos[(1-\varsigma)v_0 - \Gamma]$, ersieht, ist die Grösse εv_0 die mittlero Bewegung der Apsidenlinie.

VI.

Der Ausdruck in Gl. (25) ist nnn noch unvollständig, weil bei Herleitnug desselben die rechte Seite der Gl. (22) vernachlässigt

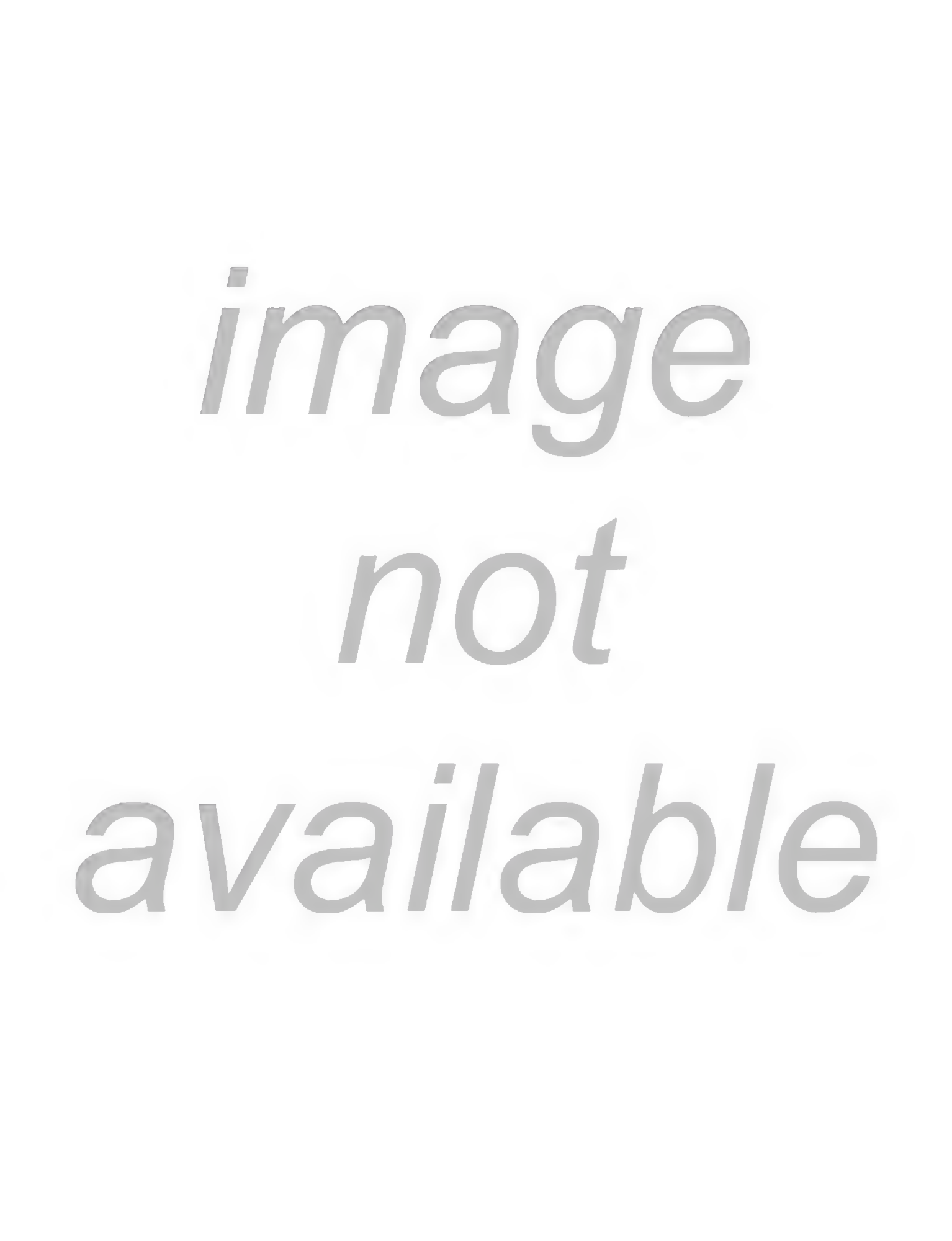


image
not
available

$$\overline{W} = \left(\frac{\pi}{K\lambda}\right)^2 \left\{h_0 + h_1\left[e^{i(\alpha_1 x+\beta_1)} + e^{-i(\alpha_1 x+\beta_1)}\right] + h_2\left[e^{i(\alpha_2 x+\beta_2)} + e^{-i(\alpha_2 x+\beta_2)}\right]\right\}$$

Diesen Wert hat man in Gl. (26) einzusetzen, indem man zugleich dv_0 durch $\frac{\pi}{K\lambda}dx$ setzt. Ferner erhält man leicht

$$\frac{H(x-i\omega)}{\Theta(x)} e^{\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x} = \frac{\sqrt[4]{q}}{i} e^{\frac{\pi}{2K}\omega} \left\{e^{i\frac{\pi}{2K}x} - e^{-\frac{\pi}{K}\omega - i\frac{\pi}{2K}x}\right\} \times e^{i\frac{\pi}{2K}\frac{2}{3}(\nu-\frac{1}{2})x}\left\{1 + q\left(e^{i\frac{\pi}{K}x} + e^{-i\frac{\pi}{K}x}\right) \ldots\right\}$$

$$\frac{H(x+i\omega)}{\Theta(x)} e^{-\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x} = -\frac{\sqrt[4]{q}}{i} e^{\frac{\pi}{2K}\omega} \left\{-e^{-i\frac{\pi}{2K}x} - e^{-\frac{\pi}{K}\omega + i\frac{\pi}{2K}x}\right\} e^{-i\frac{\pi}{2K}\frac{2}{3}(\nu-\frac{1}{2})}\left\{1 + q\left(e^{i\frac{\pi}{K}x} + e^{-i\frac{\pi}{K}x}\right) \ldots\right\}$$

Das Glied ψ werden wir später berücksichtigen.

Durch Einsetzung obiger Werte erhält man

$$\frac{H(x+i\omega)}{\Theta(x)} e^{-\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x} \int \frac{H(x-i\omega)}{\Theta(x)} e^{\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x} \overline{W} dv_0$$

$$= \frac{\sqrt{q}}{i} \frac{\pi}{K\lambda} e^{\frac{\pi}{K}\omega}\left[h_0\left\{\frac{1}{\mu_1} - \frac{e}{\mu_1} e^{-\frac{\pi}{K}\omega} e^{ix(\mu_1-\mu_2)} - \frac{e}{\mu_2} e^{-\frac{\pi}{K}\omega} e^{-ix(\mu_1-\mu_2)} + \frac{e}{\mu_2} e^{-\frac{2\pi}{K}\omega}\right\}\right.$$

$$+ h_1\left\{e^{ix\frac{\pi}{K}\alpha_1 + i\beta_1}\left(\frac{1}{\mu_1+\alpha_1} + \frac{e^{-ix\alpha_1 - i\beta_1}}{\mu_1-\alpha_1} - \frac{e^{-\frac{\pi}{K}\omega - ix(\mu_1-\mu_2-\alpha_1)+i\beta_1}}{\mu_2-\alpha_1}\right.\right.$$

$$- \frac{e^{-\frac{\pi}{K}\omega - ix(\mu_1-\mu_2+\alpha_1) - i\beta_1}}{\mu_2+\alpha_1} - \frac{e^{-\frac{\pi}{K}\omega - ix(\mu_1-\mu_2+\alpha_1)+i\beta_1}}{\mu_1+\alpha_1}$$

$$\left.\left. - \frac{e^{-\frac{\pi}{K}\omega - ix(\mu_1-\mu_2-\alpha_1)+i\beta_1}}{\mu_1-\alpha_1} + \frac{e^{-\frac{2\pi}{K}\omega - ix\alpha_1 - i\beta_1}}{\mu_2+\alpha_1}\right\} + h_2\left\{\ldots\right\}\right]$$

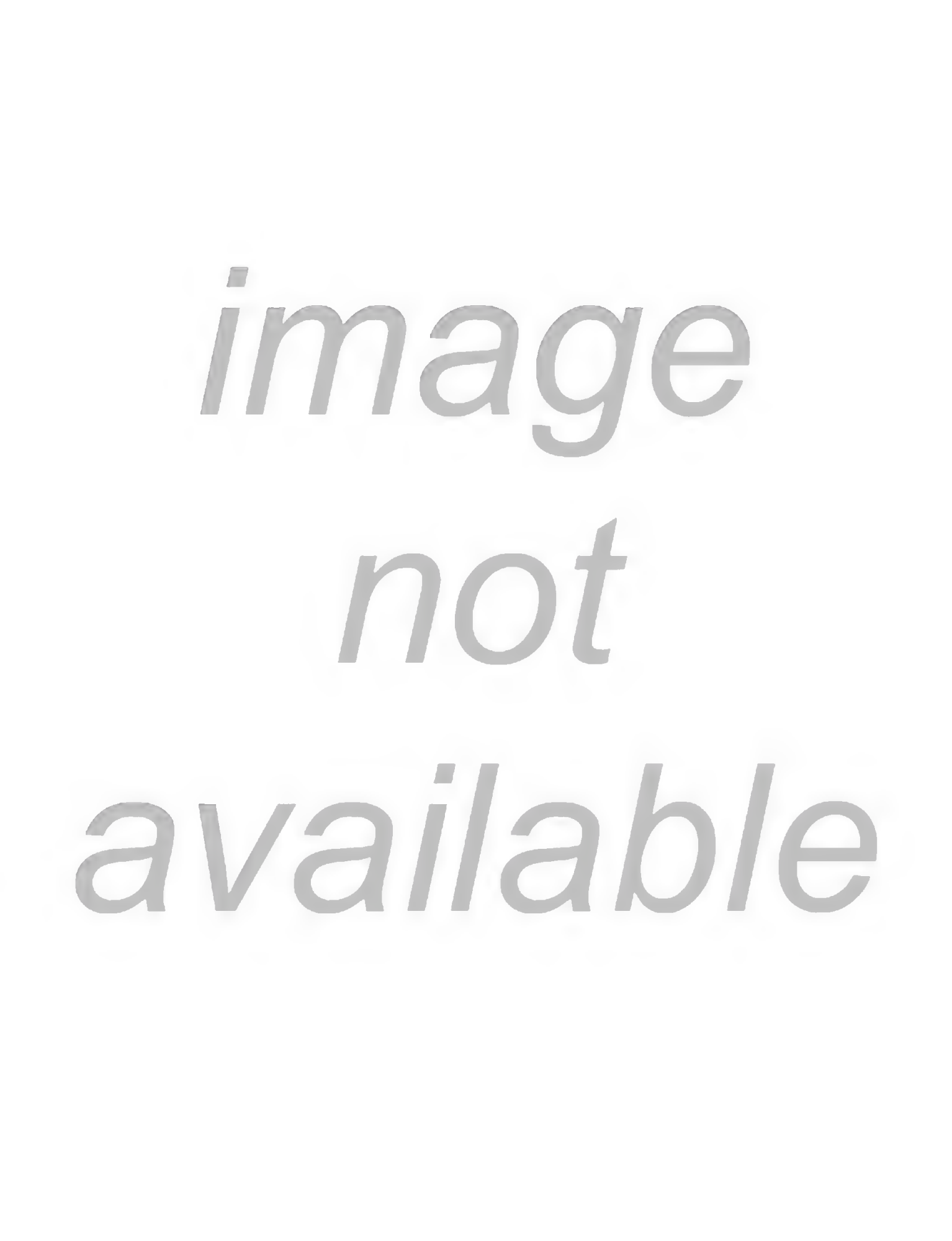


image
not
available

von	zu addiren
$\cos[(1-\mu\varsigma')v_0-\varsigma' A-\Gamma']$	$-\left(\frac{h_1 qe^{-\frac{\pi}{K}\omega}}{\varsigma-\mu\varsigma'}-\frac{h_2 q}{2(\varsigma-\mu\varsigma')}\right)$
$\cos[(\lambda+1-\mu\varsigma')v_0-(3+\varsigma')B-\Gamma']$	$-\left(\frac{h_1 q}{2(\varsigma-\mu\varsigma')}+\frac{h_2 qe^{-\frac{\pi}{K}\omega}}{2(\varsigma-\mu\varsigma')}\right)$
$\cos[(\lambda-1+\mu\varsigma')v_0-(3-\varsigma')B+\Gamma']$	$-\left(\frac{h_1 q}{2(\varsigma-\mu\varsigma')}+\frac{h_2 qe^{-\frac{\pi}{K}\omega}}{\varsigma-\mu\varsigma'}\right)$
$\cos[(1+\lambda+\delta+\mu\varsigma')v_0-(6-\varsigma')B+\Gamma']$	$-\frac{h_1 qe^{-\frac{\pi}{K}\omega}}{2(\varsigma-\mu\varsigma')}$

Es ist nun noch der gemeinschaftliche Factor

$$\bar{\varphi}=\frac{2}{i}\,\frac{\pi}{2\lambda KK'}\,\frac{\Theta_{(0)}^2\Theta(i\omega)}{H(i\omega)\,H_1(i\omega)\,\Theta_1(i\omega)}\,\sqrt{q}$$

zu bestimmen. Mit Hülfe der Relationen

$$\Theta(i\omega)=\frac{\Theta_{(0)}}{[(1-q)(1-q^3)\ldots]^2}\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-2q^{2n-1}\cos\left(2\,\frac{\pi}{2K}\,i\omega\right)+q^{4n-2})$$

$$H(i\omega)=\frac{2\sqrt[4]{q}\,\Theta(0)\sin\left(\frac{\pi}{2K}\,i\omega\right)}{[(1-q)(1-q^3)\ldots]^2}\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-2q^{2n}\cos\left(2\,\frac{\pi}{2K}\,i\omega\right)+q^{4n})$$

$$\Theta_1(i\omega)=\Theta\left(i\omega+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$H_1(i\omega)=H\left(i\omega+\frac{\pi}{2}\right)$$

findet man [1])

---

1) Sholomow, Recherches etc. pag. 19.

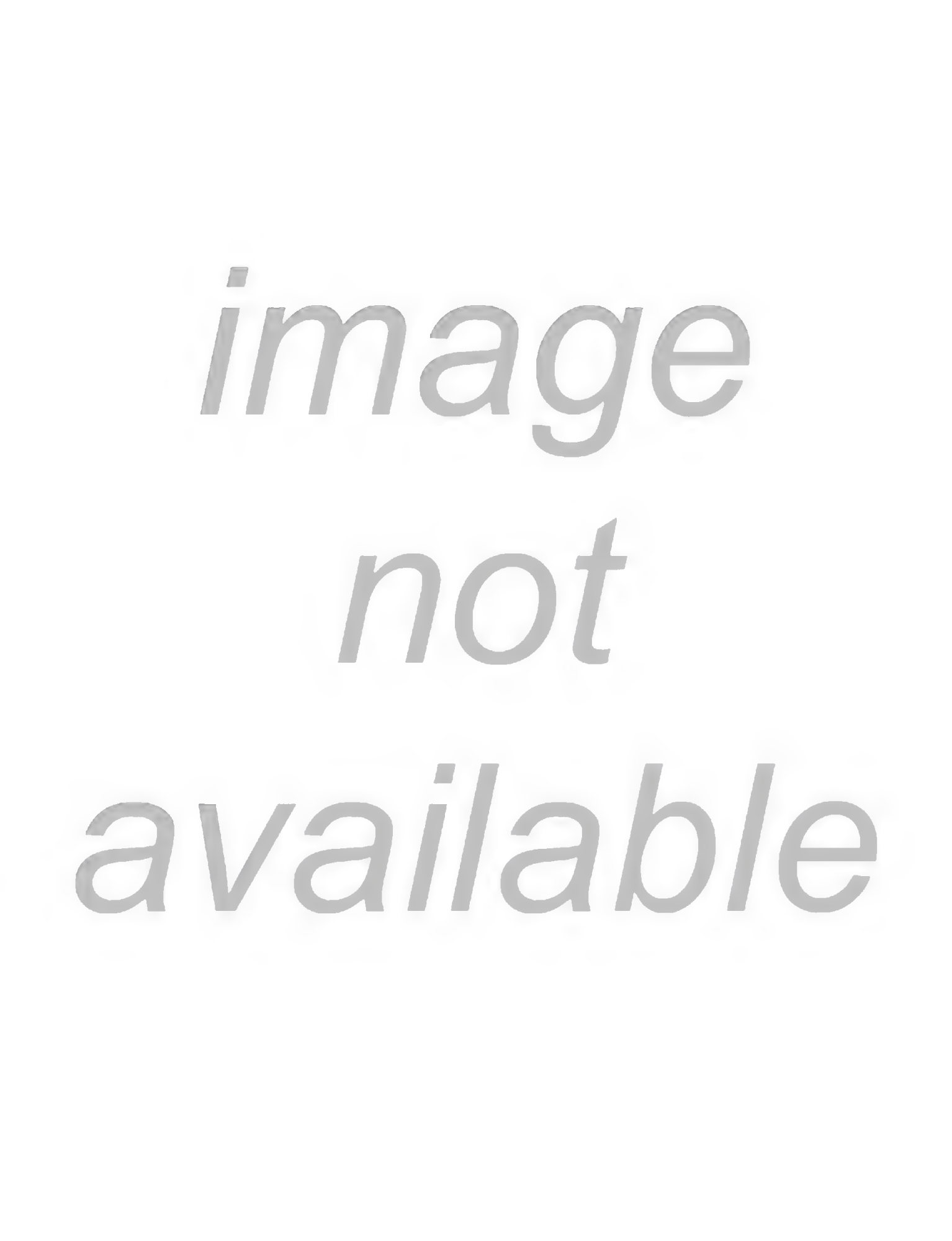


image
not
available

Das erste Glied, welches nicht mit einem Cosinus multiplicirt ist, berücksichtigt man nun sehr einfach dadurch, dass man es auf die linke Seite der Gl. (21) und zu β_0 schlägt, so dass man also nur statt

$$\beta_0 = -P_{010}$$

zu setzen hat

$$\overline{\beta_0} = -P_{010} - \frac{A'^2}{8}$$

Das mit dem Cosinus multiplicirte Glied giebt als Correction von E ein säculäres Glied; dasselbe kann man jedoch, wie Herr Gyldén gezeigt hat, dadurch verschwinden lassen, dass man ω um eine kleine Grösse, $\Delta\omega$, variirt. Da jedoch in unserem Falle $\Delta\omega$ so klein wird, dass wir es vernachlässigen können, soll auf seine Bestimmung hier nicht näher eingegangen werden [1])

VII

Wir kommen nun zur numerischen Berechnung der Apsiden-Bewegung ς und der Function ϱ_0.

Zunächst findet man durch Entwicklung der Störungsfunction (pag. 9. Gl. D und E) die in Gl. (20) auftretenden Constanten $P_{\alpha,\beta,\beta'}$ und $Q_{\alpha\beta\beta'}$

P_{000}	$= 5.8340370$ [2])	Q_{100}	$= 5.0286201$	Q_{211}	$= 6\,7858956_n$
P_{010}	6.3963098_n	Q_{101}	5.6616538	Q_{210}	6.2574556_n
P_{100}	5.5465697	Q_{200}	5.6303454	Q_{102}	$5\,9084426$
P_{101}	6.2094726	Q_{201}	6.1404250	Q_{320}	6.4537522
P_{200}	5.9799200	Q_{300}	5.2306291		
P_{201}	6.5243287	Q_{310}	5.9506802_n		
P_{300}	5.7423376	Q_{110}	5.7525447_n		
P_{310}	6.3901285_n	Q_{111}	6.4044070_n		

Demnach erhält man für dass Verhältniss der mittleren Bewegungen

$$\mu = \frac{n'}{n} = 9.5156893$$

$$\lambda = 3(1-\mu) = 0.3045806$$

---

1) Vergl. Gyldén, Die intermediäre Bahn des Mondes. pag. 158. Sholanow, Recherches etc. pag 30.

2) Sämtliche Zahlen sind Logarithmen.

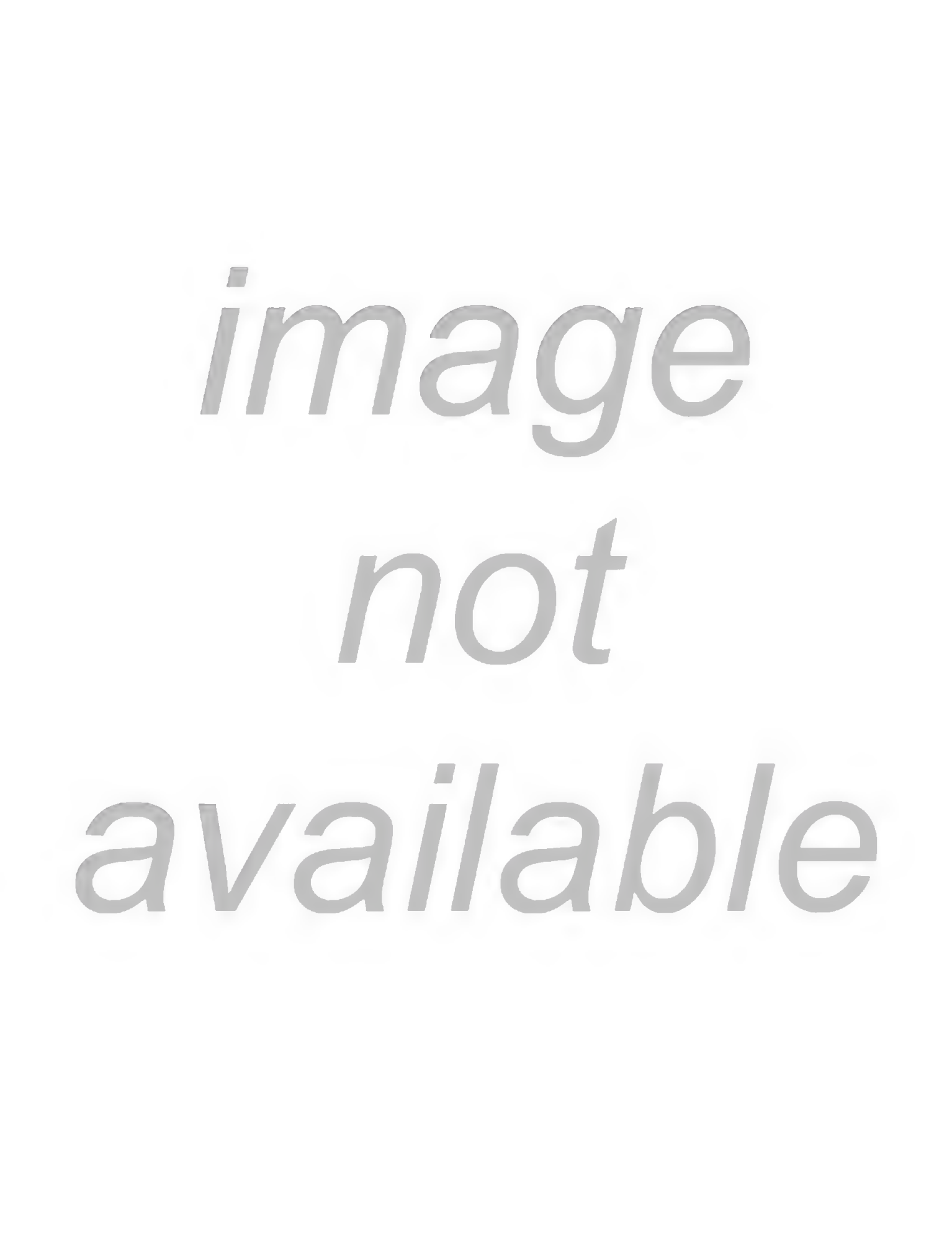


image
not
available

$$2\sqrt{q}(1+q)\,\frac{\pi}{2K}x+q\sigma x^2=\sigma(1-q)^2$$

woraus man die Reihe erhält

$$x=\frac{\sigma(1-q)^3}{2\sqrt{q}(1+q)}\,\frac{2K}{\pi}\left\{1-\frac{\sigma^4(1-q^2)}{4(1+q)^2}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2-\cdots\right\}$$

und als Näherungswert von x findet

$$x_1=0.7597264 \text{ (n. imag)}$$

Setzt man

$$\mu=\frac{q(1+q)^3}{(1-q^3)^2-q^3x_1^2}$$

in Gl, (30) ein, also

$$\sigma=\frac{\pi}{2K}x.2\sqrt{q}(1+q)\left\{\frac{1}{(1-q)^2-qx^2}+p\right\}$$

so findet man

$$\mu=6.1179156$$

und die zweite Näherung von x

$$x_2=0.7597617 \text{ (n. mag.)}$$

und damit

$$e^{\frac{\pi}{2K}\omega}=0.7460129 \text{ (imag)}$$

$$e^{\frac{\pi}{K}\omega}=1.4920258$$

Wir hatten nun (pag. 372. und 374.) gesetzt

$$\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}=i\frac{\pi}{2K}\,\vartheta(\nu-\tfrac{1}{2})$$

und

$$\varsigma=\mu-\nu(1-\mu)$$

Benutzt man nun die Entwicklungen

$$\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}=2i\,\frac{\pi}{2K}\,x\left(e^{\frac{\pi}{2K}\omega}+e^{-\frac{\pi}{2K}\omega}\right)\times$$

$$\left\{\frac{q}{(1-q)^2-qx^2}+\frac{q^3}{(1-q^3)^2-q^3x^2}+\cdots\right\}$$

$$\frac{2K}{\pi}=1+\frac{4q}{1-q}-\frac{4q^3}{1+q^3}+\cdots$$

so findet man

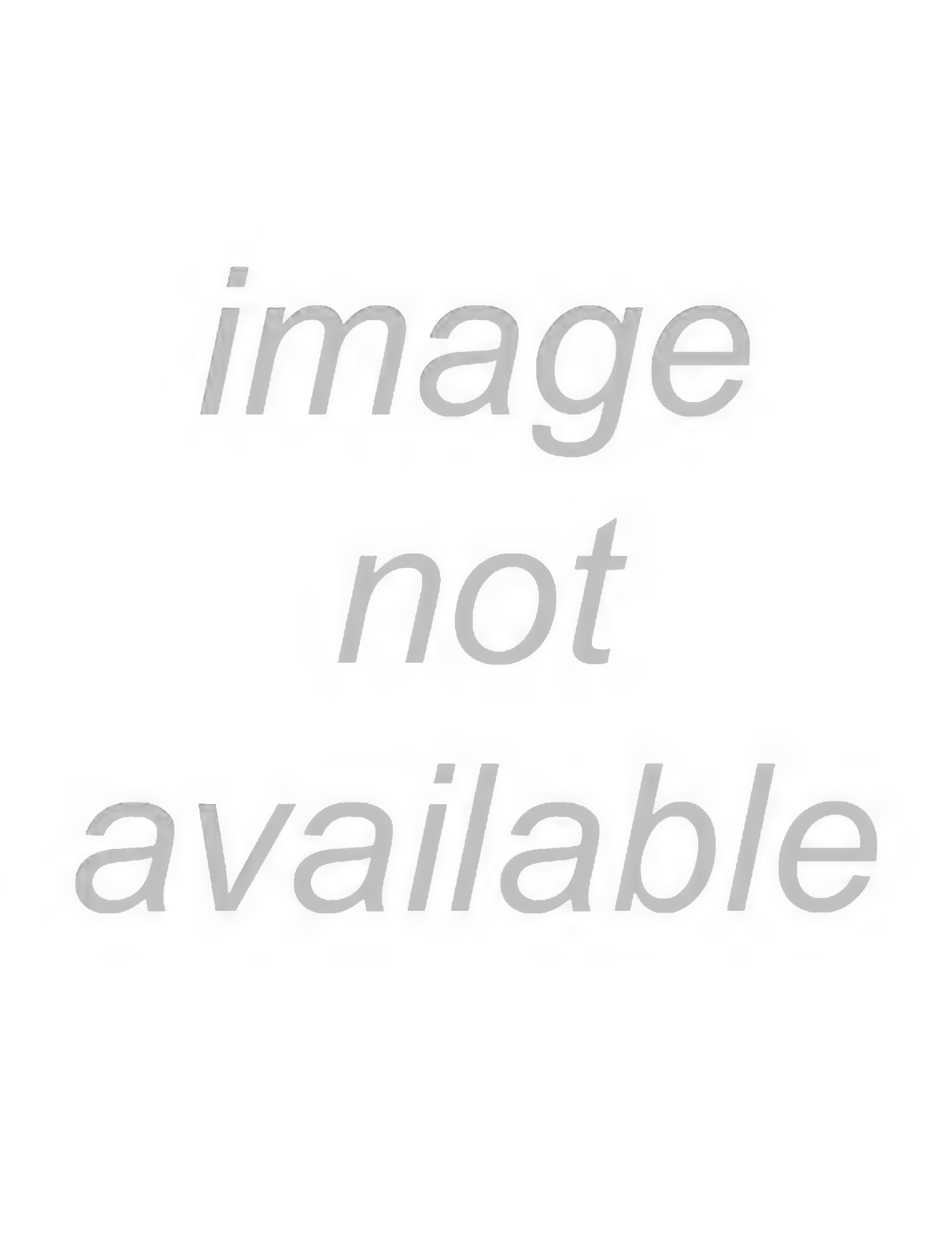


image
not
available

$$\varkappa' = 8.6835140$$

und dessen Apsiden-Bewegung

$$\varsigma' = 5.53914$$

Damit findet man (vergl. pag. 375) und 377))

$$h_0 = 5.83404_n$$
$$h_1 = 4.52972_n$$
$$h_2 = 5.67277_n$$

ferner

$$\alpha_1 = 9.9962180$$
$$\alpha_2 = 0.0\,32973$$

und

$$\mu_1 = 9.5951300$$
$$\mu_2 = 0.2\,55516_n$$

womit sich ergiebt

$$\begin{aligned}\varrho_0 = {} & [9.1082915]\cos[(1-\varsigma)v_0 - I'] + [8.\,6704\,5]\cos[(1-\mu\varsigma')v_0 - \varsigma' B - I''] \\ & + [7.6144949\cos[\lambda v_0 - 3B - [(1-\varsigma)v_0 - I']] \\ & + [7.2993016]\cos[\lambda v_0 - 3B - [(1-\mu\varsigma')v_0 - \varsigma' B - I'']] \\ & - [5.2244026]\cos[\lambda v_0 - 3B + [(1-\varsigma)v_0 - I']] \\ & - [4.3868\,09]\cos[\lambda v_0 - 3B + [(1-\mu\varsigma')v_0 - \varsigma' B - I'']] \\ & - [3.73238]\cos[2\lambda v_0 - 6B - [(1-\varsigma)v_0 - I']] - [5.8278775] \qquad (31)\end{aligned}$$

Es möge noch erwähnt werden, dass man das letzte constante Glied fortschaffen kann, indem man in Gl. (12) Zähler und Nenner durch $1-[5.8278775]$ dividirt.

VIII.

Zur Bestimmung der Variation χ sind nun aus Gl. (18) diejenigen Glieder auszusuchen, welche gross werden Durch eine ganz gleiche Betrachtung, wie sie in III. angestellt wurde, ersieht man, dass dies solche Glieder sind, welche die Form haben

$$A\cos(\delta v_0 + C)$$

wo δ eine kleine Grösse ist.

Solche Argumente treten, wie man sich leicht überzeugt, nur in solchen Gliedern auf, welche von der 2ten, 4ten Ordnung in Bezug auf ϱ_0 und ϱ_0' sind, und man erhält, wenn man

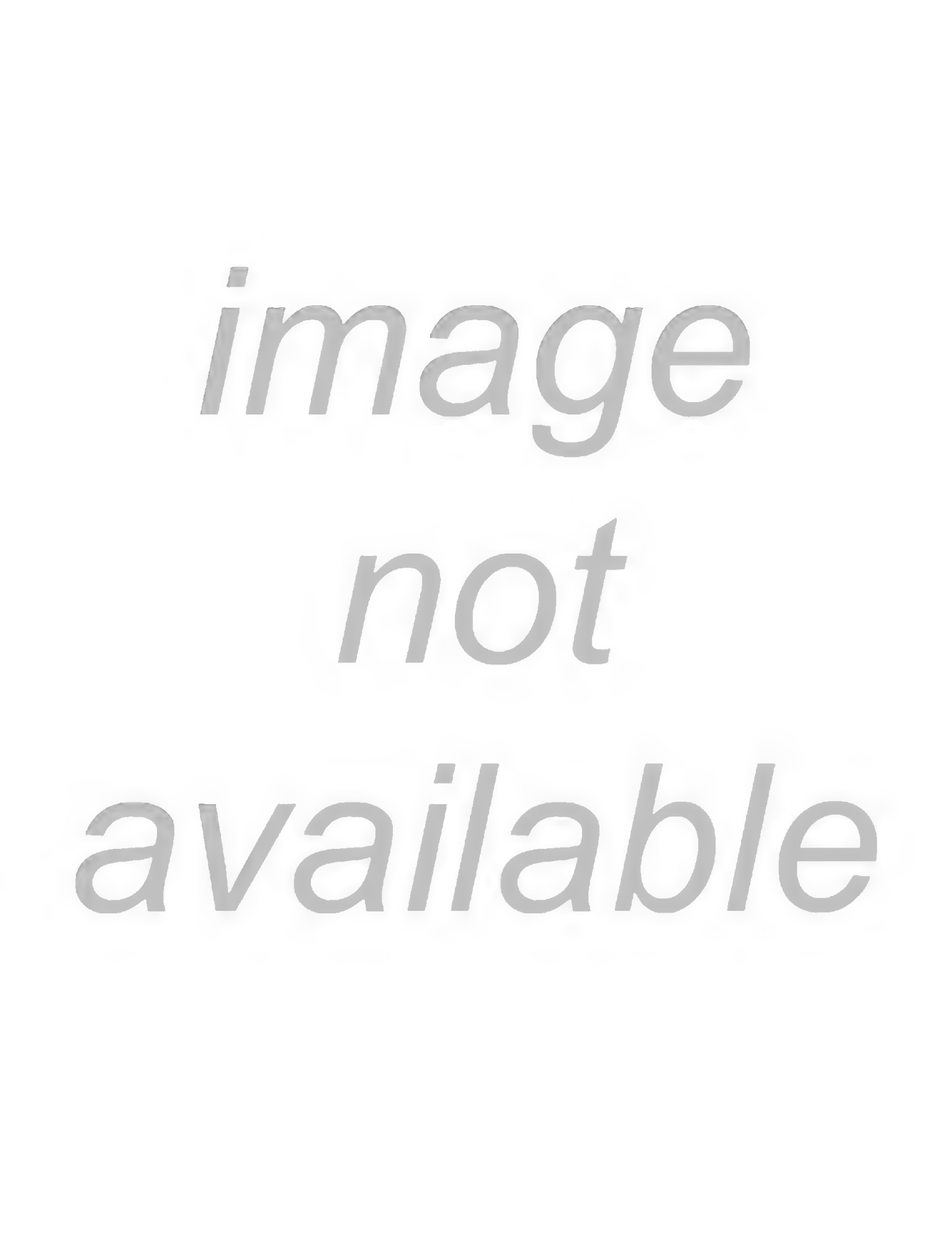


image
not
available

$$a_2 = -\frac{\varkappa'\varkappa_3}{2}Q_{111}+2\mu^2\varepsilon'\varepsilon_3 Q_{100}+\mu\varkappa_3\varepsilon' Q_{110}+\mu\varkappa'\varepsilon_3 Q_{101}$$

$$+\frac{2\varkappa'\varkappa_3\varepsilon'\varepsilon_3}{\varkappa_3\varepsilon'-\varkappa'\varepsilon_3}\mu Q_{100}+\varkappa'\varkappa_1 Q_{210}+16\mu^2\varepsilon'\varepsilon_1 Q_{200}+4\mu\varkappa_1\varepsilon' Q_{210}$$

$$-4\mu\varkappa'\varepsilon_1 Q_{201}-8\frac{\varkappa'\varkappa_1\varepsilon'\varepsilon_1}{\varkappa'\varepsilon_1+\varkappa_1\varepsilon'}\mu^2 Q_{200}+3\varkappa'\varkappa_1 Q_{320}-3\varkappa_3\varkappa_4 Q_{320}$$

$$-54\mu^2\varepsilon_1\varepsilon_2 Q_{300}+54\mu^2\varepsilon_3\varepsilon_4 Q_{300}-9(\varkappa_1\varepsilon_2+\varkappa_2\varepsilon_1)\mu Q_{310}$$

$$+9(\varkappa_3\varepsilon_4+\varkappa_4\varepsilon_3)\mu Q_{310}+27\frac{\varkappa_1\varkappa_2\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varkappa_1\varepsilon_2+\varkappa_2\varepsilon_1}\mu Q_{300}-27\frac{\varkappa_3\varkappa_4\varepsilon_3\varepsilon_4}{\varkappa_3\varepsilon_4+\varkappa_4\varepsilon_3}\mu Q_{300}$$

$$a_3 = \tfrac{3}{2}\varkappa_1{}^2 Q_{330}\,\tfrac{3}{2}(\varkappa_1{}^2-\varkappa_3{}^2)Q_{320}+27\mu^2(\varepsilon_3{}^2-\varepsilon_1{}^2)Q_{300}+9\mu(\varkappa_3\varepsilon_3-\varkappa_1\varepsilon_1)Q_{310}$$
$$+\frac{27}{4}\mu Q_{300}(\varkappa_1\varepsilon'-\varkappa_3\varepsilon_3)$$

wo $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ ... $\varkappa_4$ der Reihe nach die Coefficienten der vier ersten Cosinns in Gl. (31) bedenten, nnd

$$\varepsilon' = \frac{\varkappa'}{(1-\varsigma')\mu} \qquad \varepsilon_1 = \frac{\varkappa_1}{1-\varsigma} \qquad \varepsilon_2 = \frac{\varkappa_2}{1-\mu\varsigma'} \qquad \varepsilon_3 = \frac{\varkappa_3}{\lambda-(1-\varsigma)}$$

$$\varepsilon_4 = \frac{\varkappa_4}{\lambda-(1-\mu\varsigma')} \quad \text{ist.}$$

Behufs Integration der Gl. (32) entwickeln wir die Cosinns nach Potenzen von χ, wodnrch, nnter Vernachlässignng des Qnadrats, wird:

$$\frac{d^2\chi}{dv_0{}^2}+\Phi_0\chi = \Phi_1 \tag{33}$$

$$\Phi_0 = a_1\cos[(\delta+2\mu\varsigma')v_0-3B+2\Gamma']+2a_2\cos[(\delta+\varsigma+\mu\varsigma')v_0-3B+\Gamma+\Gamma']$$
$$+[3a_3\cos[(\delta+2\varsigma)v_0-3B+2\Gamma]$$

$$\Phi_1 = -a_1\sin[\quad\ ,,\quad\ ]-a_2\sin[\quad\ ,,\quad\ ]$$
$$-a_3\sin[\quad\ ,,\quad\ ]$$

Integrirt man znnächst nnter Vernachlässigung des in χ mnltiplicirten Gliedes, so erhält man

$$\chi = \frac{a_1}{(\delta+2\mu\varsigma')^2}\sin\alpha_1+\frac{a_2}{(\delta+\varsigma+\mu\varsigma')^2}\sin\alpha_2+\frac{a_3}{(\delta+2\varsigma)^2}\sin\alpha_3$$

Setzt man diesen Wert in $\Phi_0\chi$ ein, zieht wieder die Winkel znsammen, nnd integrirt von neuem, so wird

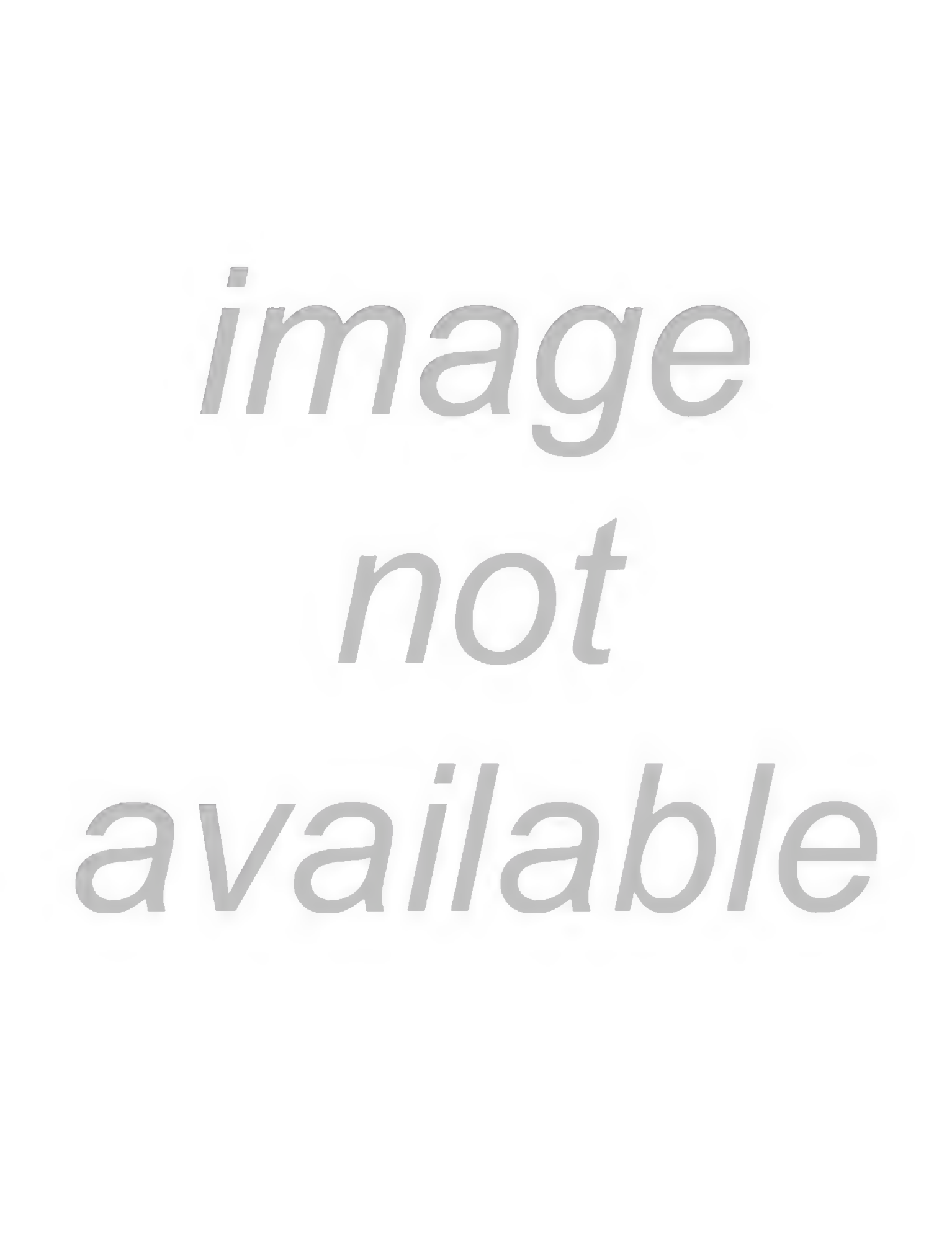


image
not
available

IX.

Durch die bisherigen Betrachtungen ist die Bewegung des Planeten in seiner momentanen Bahnebene bestimmt; es erübrigt noch die Bewegung der Bahnebene selber zu untersuchen.

Aus der Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{\mu_1 z}{r^3}=\frac{\partial\Omega}{\partial z}$$

erhält man durch Einführung der Breite b, $z=r\sin b=r\beta$

$$r\frac{d^2\beta}{dt^2}+\frac{2dr}{dt}\frac{d\beta}{dt}+\left(\frac{d^2r}{dt^2}+\frac{\mu_1}{r^2}\right)\beta=\frac{\partial\Omega}{\partial z}=\frac{c}{r^4}U$$

wo

$$U=\frac{r^3}{c}\frac{\partial\Omega}{\partial z}\quad\text{ist.}$$

Ersetzt man, gemäss den Gl. (3) und (6_1) t durch v_0, so wird

$$\frac{d^2\beta}{dv_0^2}-\frac{1}{1+S}\frac{dS}{dv_0}\frac{d\beta}{dv_0}+(1+S)^2\frac{r^3}{c}\left(\frac{d^2r}{dt^2}+\frac{\mu_1}{r^2}\right)\beta=(1+S)^2U$$

und da

$$\frac{d^2r}{dt^2}+\frac{\mu_1}{r^2}=r\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\frac{\partial\Omega}{\partial r}$$

ist, erhält man, indem man v durch seinen Wert $v_0+\chi$ ersetzt:

$$\frac{d^2\beta}{dv_0^2}-\frac{1}{1+S}\frac{dS}{dv_0}\frac{d\beta}{dv_0}+\left\{1+\frac{2d\chi}{dv_0}+\left(\frac{d\chi}{dv_0}\right)^2+(1+S)^2\frac{r^3}{c}\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right\}\beta-(1+S)^2U=0$$

Erinnert man sich nun der Relationen

$$\frac{r^3}{c}\frac{\partial\Omega}{\partial r}=\mu_1\frac{r^3}{c}\left\{-\frac{r}{\Delta^3}+r'\cos H\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r'^3}\right)\right\}$$

$$U=\mu_1\frac{r^3}{c}\left\{-\frac{r}{\Delta^3}\beta+\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r'^3}\right)z'\right\}$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\cos H}=\mu' rr'\left\{\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r'^3}\right\}$$

so sieht man, dass

$$(1+S)^2\frac{r^3}{c}\frac{\partial\Delta}{\partial r}\beta-(1+S)^2U=(1+S)^2\frac{r^2}{c}\frac{\partial\Omega}{\partial\cos H}\left(\beta\cos H-\frac{z'}{r'}\right)$$

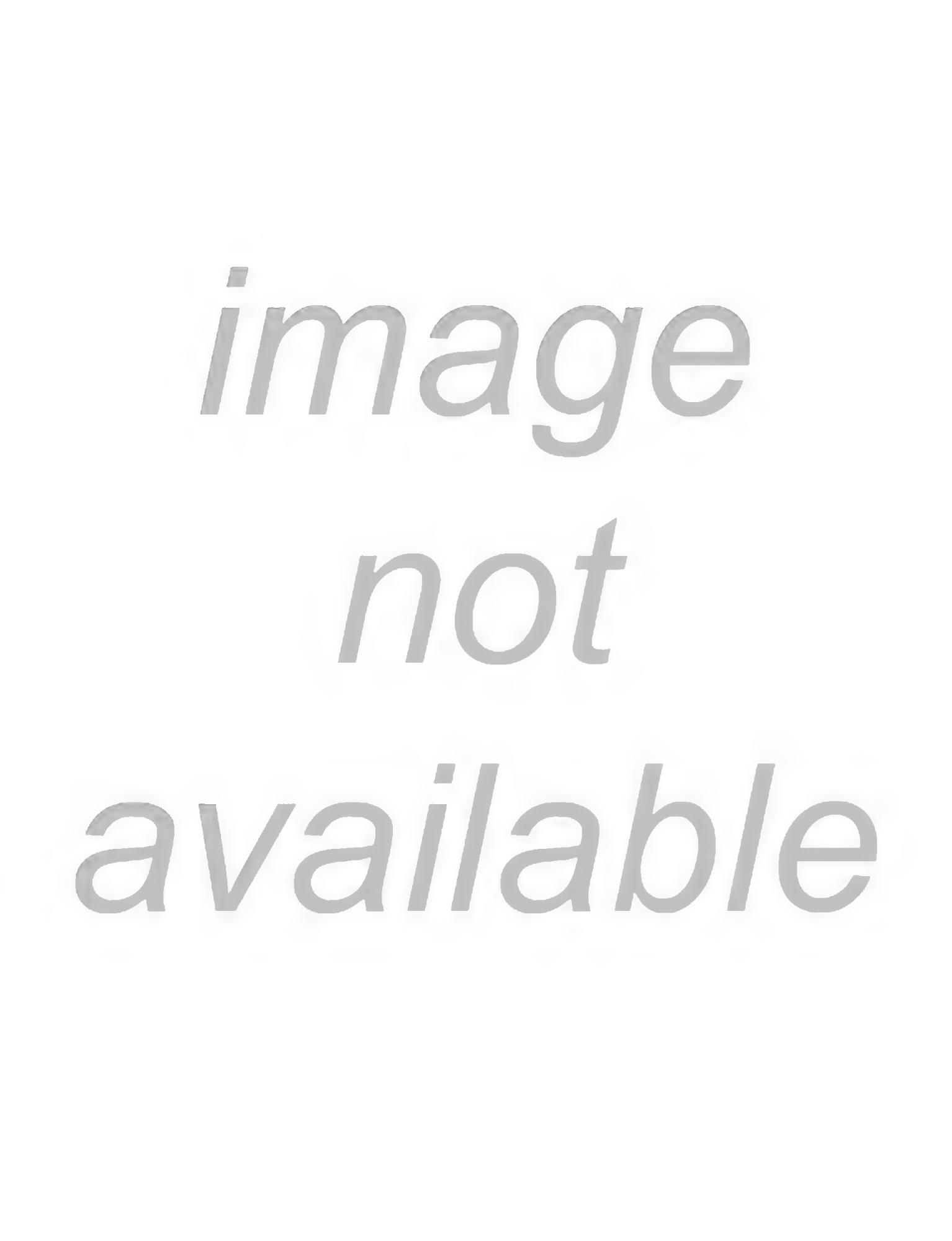


image
not
available

$$\lambda v_0 - 3B = 2\frac{\pi}{2K}x$$

$$q = \frac{\beta^{(1)}(1-q^2)}{4\lambda^2}$$

$$\frac{4\left(\frac{\pi}{2K}\right)}{\lambda^2}(1+\beta^{(0)}) - k\Gamma_0^{(2)} = 1 - k^2\,\mathrm{sn}^2 i\omega$$

so erhält man wieder die Lamé'sche Differentialgleichung

$$\frac{d^2\delta}{dx^2} - [2k\,\mathrm{sn}^2 x - 1 - k^2\,\mathrm{sn}^2 i\omega]\,\delta = w \qquad (37)$$

wo w als von der zweiten Ordnung der Masse fortgelassen werden kann. Das Integral der Gl. (37) ist

$$\delta = C_1 \frac{H(x+i\omega)}{\Theta(x)} e^{-\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x} + C_2 \frac{H(x-i\omega)}{\Theta(x)} e^{\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x}$$

Man führe die neuen Constanten J, Σ und ν ein durch die Gleichungen

$$C_1 = \frac{J}{2}\frac{1}{\sqrt[4]{q}} e^{i\Sigma - i(\nu-\frac{1}{2})B - i\frac{3}{2}B - \frac{\pi}{2K}\omega}$$

$$C_2 = \frac{J}{2}\frac{1}{\sqrt[4]{q}} e^{-i\Sigma + i(\nu-\frac{1}{2}) + i\frac{3}{2}B - \frac{\pi}{2K}\omega}$$

$$\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)} = i\frac{\pi}{2K}\tfrac{3}{2}(\nu - \tfrac{1}{2})$$

so wird nach Ausführung der in V. angegebenen Transformationen

$$\delta\Theta(x) = Je^{-\frac{\pi}{2K}\omega}\sin[\Sigma - 3B - v_0(1-\mu)(\nu-2)] + Je^{\frac{\pi}{2K}\omega}\sin[(1-\mu)(\nu+1)v_0 - \Sigma]$$

und da

$$\frac{1}{\Theta(x)} = 1 + 2q\cos[\lambda v_0 - 3B] \ldots \text{ ist,}$$

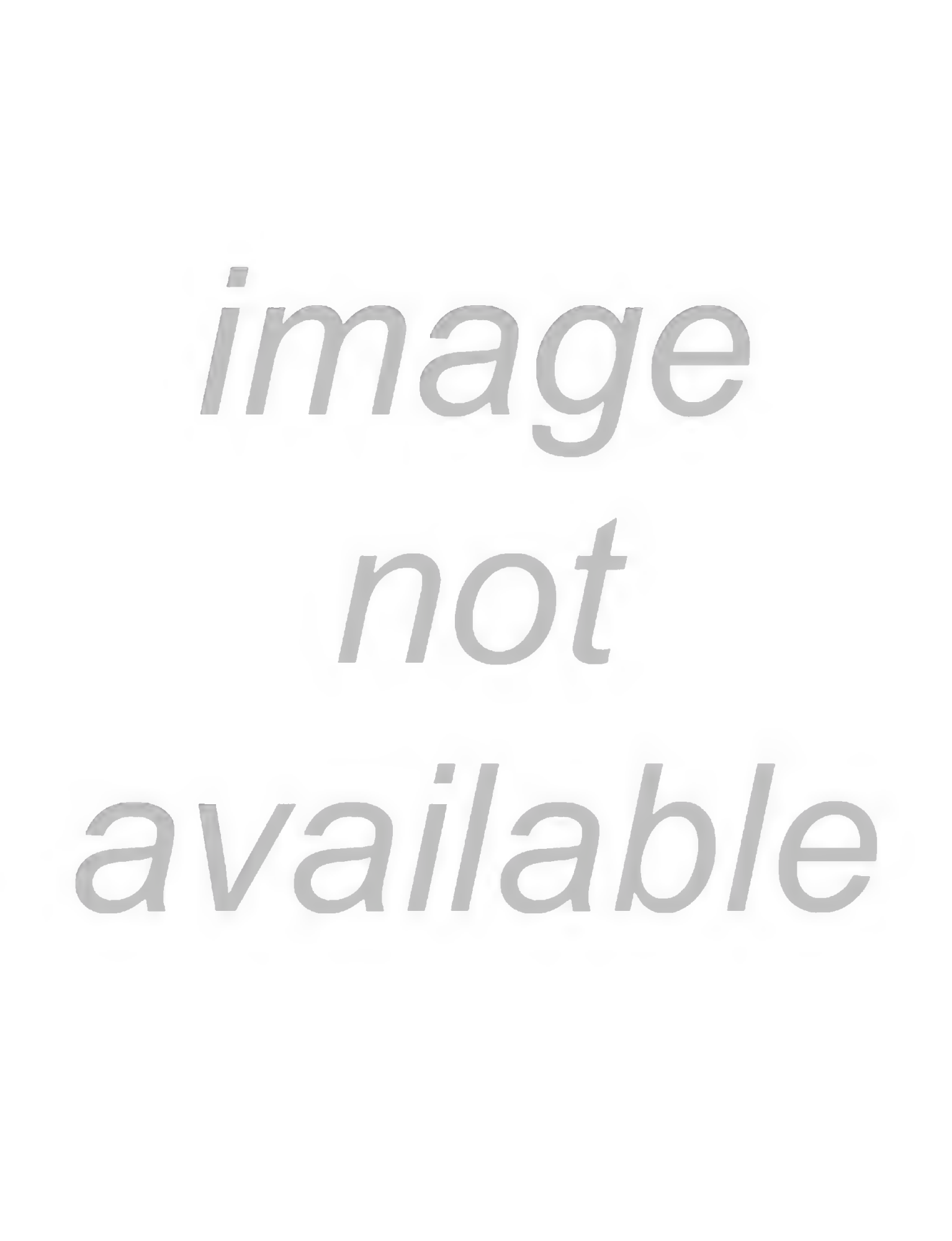


image
not
available

XIX.

Eigenschaften gewisser Punkttripel auf der Cissoide.[1]

Von

K. Zahradnik.

I.

Berührungstripel.

Die Gleichung der Cissoide in Parameterdarstellung lautet:

$$x = \frac{a}{1+u^2}$$
$$y = \frac{a}{u(1+u^2)} \qquad (1)$$

Die Gleichung der Verbindungslinie zweier Punkte u_1, u_2 ist:

$$(1+u_1^2+u_1u_2+u_2^2)\,x - u_1u_2(u_1+u_2)\,y - a = 0$$

welche für $u_1 = u_2 = u$ in die Gleichung der Tangente im Punkte u, nämlich

$$(1+3u^2)\,x - 2u^3y - a = 0 \qquad (2)$$

übergeht. Die Berührungspunkte[2] u_1, u_2, u_3 der aus dem Punkte $P(x, y)$ an die Cissoide gelegten Tangenten bilden das dem Punkte

---

1) Siehe in diesem Archiv meine diesbezüglichen Arbeiten: Rationale ebene Curven Teil 56, pg. 114; Beitrag zur Theorie der Cissoide T. 57, pg. 335; Weiterer Beitrag zur Theorie der Cissoide T. 62 pg. 443.

2) Punkt u d. ist, dessen Parameter gleich u ist.

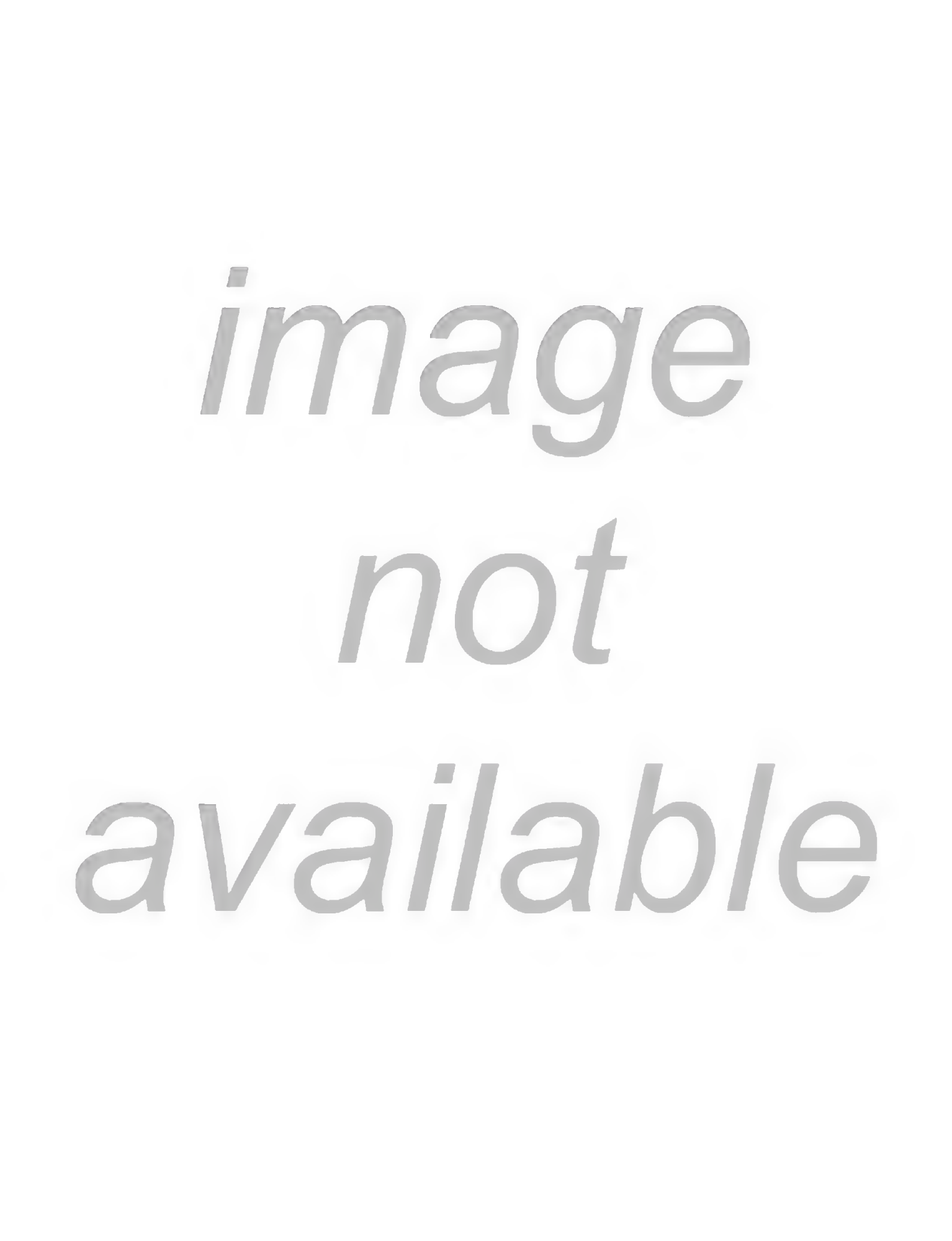


image
not
available

$$\xi - a + i\eta = -\frac{a^2}{2}\,\frac{x+\frac{a}{2}+iy}{y^2+\left(x+\frac{a}{2}\right)^2}$$

aus welcher Gleichung wir nach Kürzung mit dem Zähler erhalten:

$$(\xi - a + i\eta)\left(x+\frac{a}{2}-iy\right) = -\frac{a^2}{2} \tag{5}$$

Setzen wir nun

$$\zeta = \xi + i\eta$$
$$z = x - iy$$

so können wir die Gleichung (5) schreiben[1]):

$$\zeta z + \frac{a}{2}\zeta - az = 0 \tag{6}$$

Aus dieser Gleichung erhellt, dass jedem Punkte z nur ein Punkt ζ und umgekehrt entspricht. Die Gleichung (6) ist nämlich in Bezug auf ζ und z linear, und wir erhalten

$$\zeta = \frac{az}{z+\frac{a}{2}}, \qquad z = \frac{\frac{a}{2}\zeta}{a-\zeta} \tag{6'}$$

Wir können aber auch direct aus Gl. (6) die Coordinaten von P mittelst der Coordinaten von S ausdrücken. Es ist nämlich

$$x+\frac{a}{2}-iy = -\frac{a^2}{2}\,\frac{1}{\xi-a+i\eta} = -\frac{a^2}{2}\,\frac{\xi-a-i\eta}{(\xi-a)^2+\eta^2}$$

somit

$$x+\frac{a}{2} = -\frac{a^2}{2}\,\frac{\xi-a}{(\xi-a)^2+\eta^2}$$
$$y = -\frac{a^2}{2}\,\frac{\eta}{(\xi-a)^2+\eta^2} \tag{7}$$

Somit haben wir bewiesen, dass die angeführte quadratische Verwandtschaft eine rationale ist, und aus der Form der Gleichung (6) erhellt, dass sie eine Kreisverwandtschaft ist, d. i. die zugehörigen Punkte P und S entsprechen sich durch Inversion.

---

1) Es besteht somit $\zeta = f(z)$. Die Curven, welche P beschreibt, stehen mit den Curven, welche der zugeordnete Punkt I beschreibt, in isogonaler Verwandtschaft, d. i. schneiden sich unter demselben Winkel. Siehe Sieber: Ueber die graphische Darstellung imaginärer Functionen. Crelle Bd. 55, pg. 228, 243.

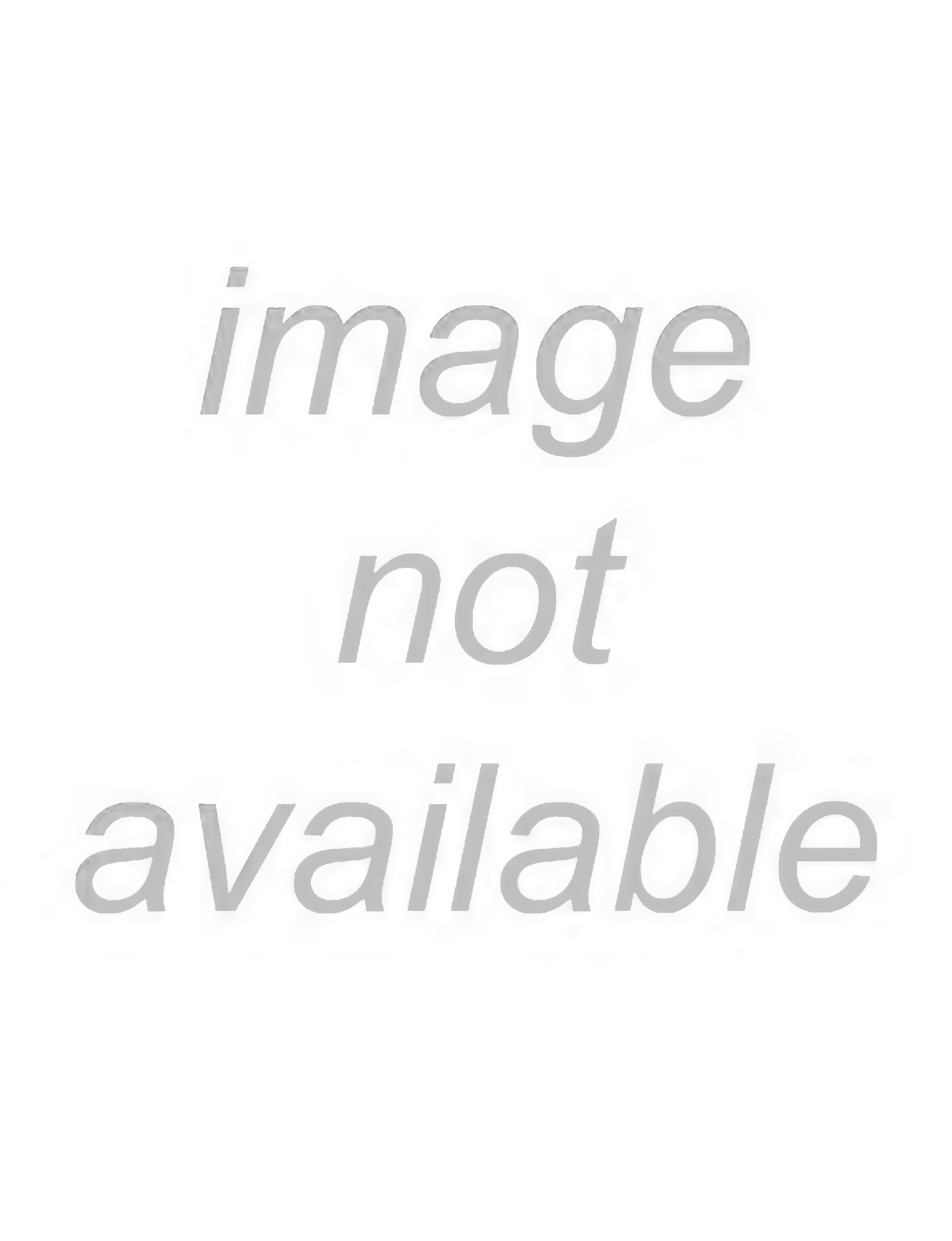


image
not
available

$$O_p P \equiv z' - re^{-i\varphi}, \quad O_s S \equiv \zeta' = \varrho e^{i\psi}$$

somit:

$$O_p P . O_s S \equiv r\varrho e^{i(\psi-\varphi)} = \frac{a^2}{2} e^{i\pi}$$

woraus

$$\psi = \pi + \varphi, \qquad r\varrho = \frac{a^2}{2}$$

in Uebereinstimmung mit (8) folgt, da

$$O_p P \equiv OP_1$$
$$O_s S \equiv OS' \equiv -OS_1$$

Auch direct können wir die Relation

$$O_p P . O_s S = -\frac{a^2}{2}$$

dartun; es ist nämlich

$$\overline{O_p P}^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2$$
$$\overline{O_s S}^2 = (\xi - a)^2 + \eta^2$$

somit wegen (4) und (7) auch

$$\overline{O_s S}^2 = \frac{\left(-\frac{a^2}{2}\right)^2}{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + y^2} = \frac{\left(-\frac{a^2}{2}\right)^2}{\overline{O_p P}^2}$$

woraus sofort folgt:

$$\overline{O_p P} . \overline{O_s S} = -\frac{a^2}{2}$$

Für die Praxis können wir die Construction bedeutend vereinfachen. Wir können O_p als Inversionscentrum nehmen; wir erhalten so $P \equiv P_1$, und die Construction von S_1 und somit von S ist wie früher. Somit haben wir die Verwandtschaft [1]) zwischen P und S vollständig erklärt und können somit die allgemeinen Resultate, welche für die quadratische Transformation gelten, hier verwenden. Beschreibt z. B. P eine Curve n-ter Ordnung und m-ter Classe, so beschreibt der entsprechende Punkt S eine Curve $2n$-ter Ordnung und $(2n-m)$-ter Classe, welche die Hauptpunkte des Systemes S zu

1) Ueber diese Transformation siehe Salmon-Fiedler: Höhere ebene Curven pg. 363, Kegelschnitte 2. Aufl. pg. 536, Bellavitis: Teoria della figure inverse e loro uso nella geometria elementare. Ann. delle scienze del regno Lombardo-Veneto 1836 T. VI., wie auch die Arbeit Liouville-s in dessen Journale Bd. XII.

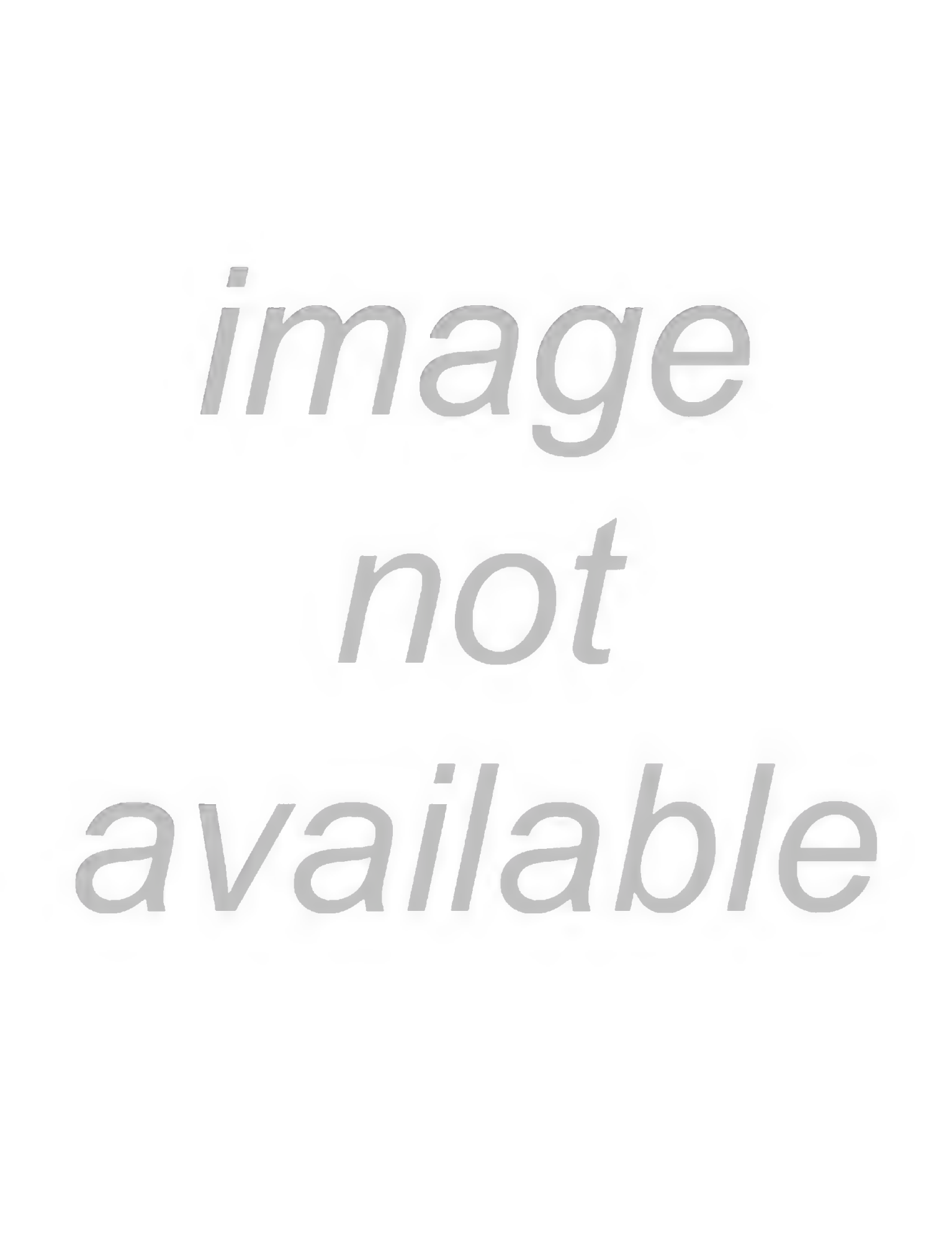


image
not
available

so erhalten wir mittelst ähnlicher Reductionen, wie wir sie schon anderorts in diesem Archiv entwickelten

$$p_1(\xi^2+\eta^2)+\frac{a}{p_3}(1+p_1^2-p_2)\xi-\frac{a}{p_3}(p_1p_2-p_3)\eta-\frac{a^2}{p_3}=0 \qquad (9)$$

Führen wir nun mit den Gleichungen (3) die Bedingung ein, dass das Dreieck $u_1u_2u_3$ ein Berührungsdreieck des Poles P ist, so erhalten wir die Gleichung seines Umkreises

$$\xi^2+\eta^2+a\frac{4y^2+9x^2}{3x(x-a)}\xi+a\frac{2y}{3x}\eta-a^2\frac{4y^2}{3x(x-a)}=0 \qquad (10)$$

Die Coordinaten ξ_1, η_1 seines Mittelpunktes C sind:

$$\xi_1=-\frac{a}{2}\frac{4y^2+9x^2}{3x(x-a)}$$
$$\eta_1=-\frac{a}{2}\frac{2y}{3x} \qquad (11)$$

Aus diesen Gleichungen folgt, dass der Pol P in quadratischer Verwandtschaft mit dem Mittelpunkte des Umkreises seines Berührungsdreieckes steht. Wir wollen jetzt beweisen, dass diese Verwandtschaft eine rationale ist, d. i. dass jedem Punkte P der Ebene der Cissoide mittelst dieser Transformation nur ein Punkt C entspricht und umgekehrt. Aus den Gleichungen (11) folgt nämlich

$$x=\frac{2a^2\xi_1}{12\eta_1^2+2a\xi_1+3a^2}$$
$$y=\frac{-6a\xi_1\eta_1}{12\eta_1^2+2a\xi_1+3a^2} \qquad (12)$$

womit die Behauptung als erwiesen erscheint.

Im Punktsysteme P vereinigen sich zwei Hauptpunkte in unendlicher Ferne, und der dritte Hauptpunkt liegt im Coordinatenanfang. Das Punktsystem C hat zwei imaginäre Hauptpunkte $\left(0, \frac{a\sqrt{-1}}{2}\right)$. $\left(0, \frac{-a\sqrt{-1}}{2}\right)$, und der dritte Hauptpunkt ist in unendlicher Entfernung. Wir wollen jetzt zeigen, wie wir die Coordinaten dieser Hauptpunkte finden können. Unsere Transformation ist eine quadratische, d. i. der Geraden in einem Systeme entspricht ein Kegelschnitt im anderen Punktsysteme. Nun ist die Gerade durch zwei Punkte bestimmt, durch welche sie hindurch geht. Da nun den Kegelschnitt fünf Punkte bestimmen, da ferner jeder Geraden in einem Punktsystem ein ganz bestimmter Kegelschnitt im anderen

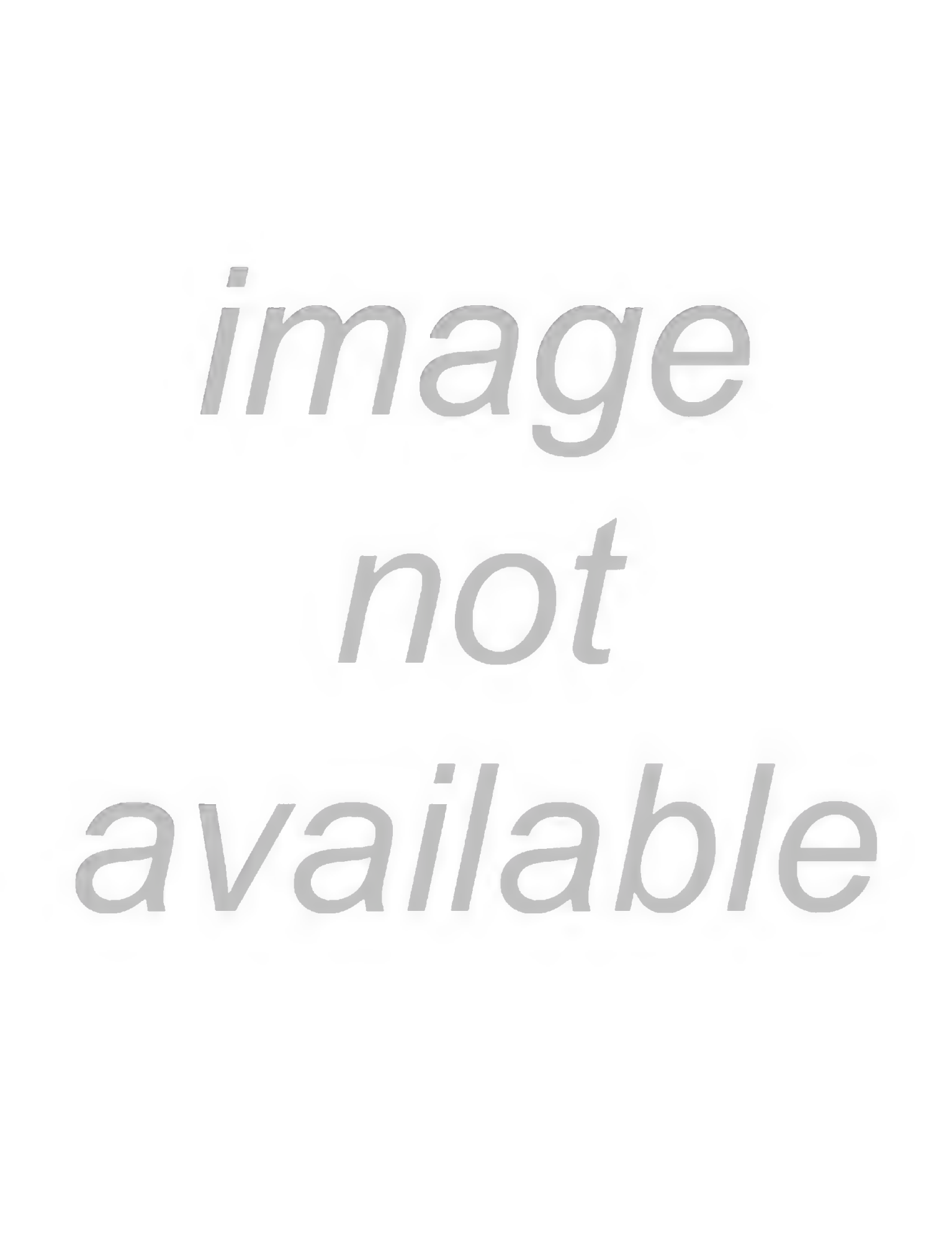


image
not
available

Auf dieselbe Weise können wir von den Gleichungen (11) ausgehen. Die Elimination von y giht:

$$3x[(12\eta_1^2+2a\xi_1+3a^2)x-2a^2\xi_1]=0 \qquad (14)$$

Da sich nun zwei Kegelschnitte in vier Punkten schneiden, und die Gleichung (14) nur vom zweiten Grade in x ist, so folgt, dass zwei Wurzeln unendlich gross sind, und eine den Wert $x=0$ hat.

Die vierte Wurzel ist

$$x=\frac{2a^2\xi_1}{12\eta_1^2+2a\xi_1+3a^2}$$

Die zugehörigen Ordinaten sind somit:

$$y=\infty \quad \text{für} \quad x=\infty$$
$$y=0 \quad \text{„} \quad x=0$$
$$y=\frac{-6a\xi_1\eta_1}{12\eta_1^2+2a\xi_1+3a^2} \quad \text{„} \quad x=\frac{2a^2\xi_1}{12\eta_1^2+2a\xi_1+3a^2}$$

Wir erkennen wieder, dass drei von den Schnittpunkten von der Lage des Punktes $(\xi_1\,\eta_1)$ unabhängig sind, und der vierte Schnittpunkt gibt den dem Punkte $(\xi_1,\ \eta_1)$ entsprechenden Punkt (xy).

Somit haben wir wieder diese Verwandtschaft vollständig bestimmt, und könnten nun der allgemeinen Resultate uns bedienen, welche die Theorie[1]) der quadratischen rationalen Verwandtschaft darbietet.

Ueber die Verwandtschaft vierten Grades zwischen dem Schwerpunkte und Mittelpunkte des Umkreises des Berührungsdreieckes.

4. Durch den Pol P wird eindeutig die Lage des Schwerpunktes S sowie des Mittelpunktes C des Umkreises des zugeordneten Berührungsdreieckes; da nun durch den Punkt S oder C auch der Punkt P eindeutig gegeben ist, so folgt, dass auch S mit C in einer eindeutigen Verwandtschaft stehen muss. Den Grad der Verwandtschaft bestimmen wir folgendermassen: Der Geraden von S entspricht

---

1) In Bezug auf die Theorie der quadratischen rationalen Verwandtschaft siehe Salmon-Fiedler: Höhere ebene Curven pg. 359. Weyr Ed.: Analytische Untersuchung der quadratischen Verwandtschaft. Schlömilch Zeitschrift. 1869 pg. 445. Reye Th.: Geometrische Verwandtschaft zweiten Grades. ibid. Teil XI, pg. 4, sowie dessen Geometrie der Lage. 2. Aufl. Hannover. Magnus: Aufgaben aus d. anal. Geometrie d. Ebene. pg. 229. Schiaparelli: Sulla Transformazione geometrica delle figure ed in particolare sulla Transformazione iperbolica. Mem. d. Accad. di Torino Ser. II. Tomo XXI.

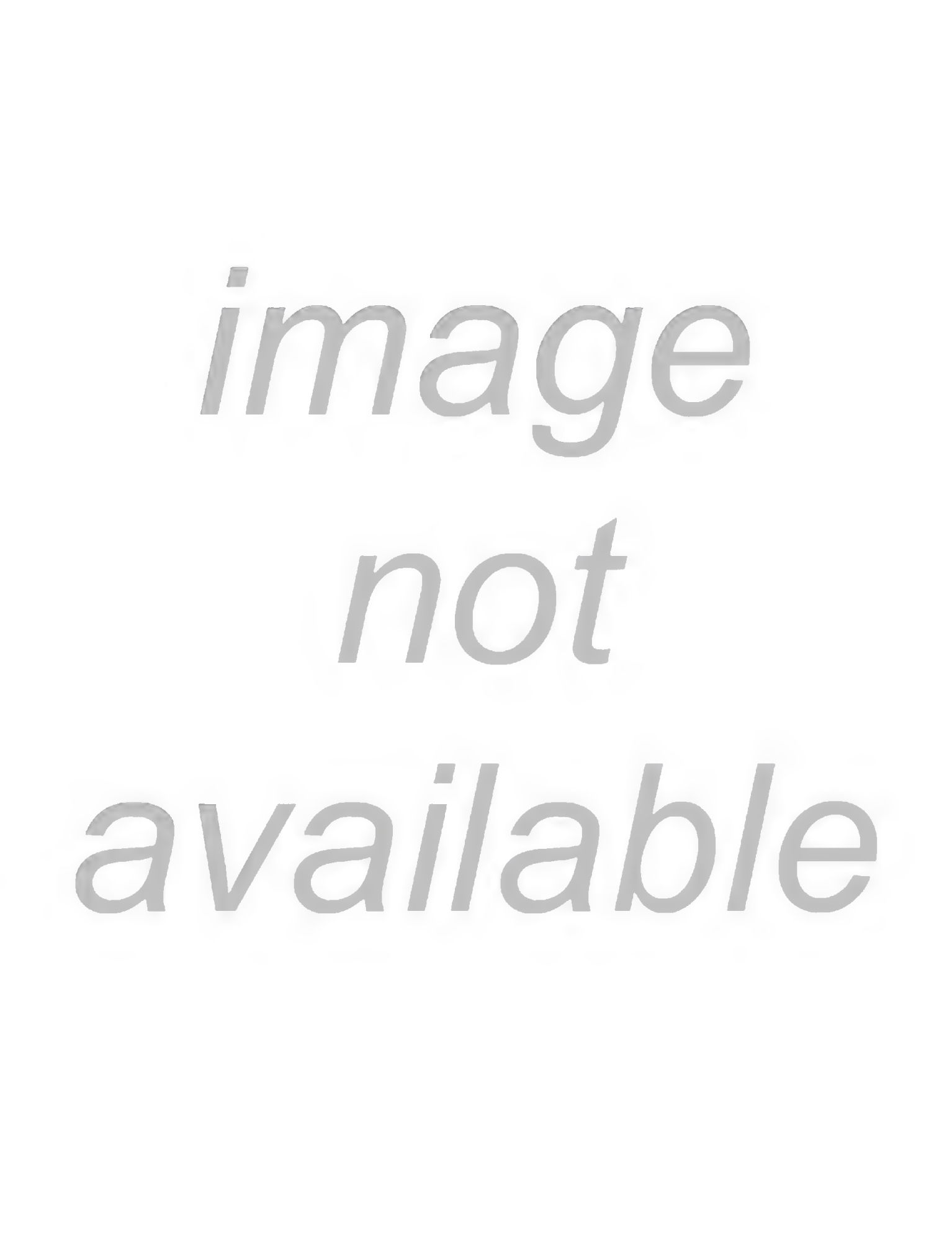


image
not
available

In diese Gleichungen sind nur die Werte für ξ, η, ξ', η' einzuführen, und wir bekommen sogleich die Coordinaten von H und C' als Functionen der Coordinaten des Poles P.

Fassen wir etwas allgemeiner die Aufgabe auf. Es sei λ das Teilverhältniss des Punktes M in Bezug auf die Punkte C und S, nämlich

$$\frac{CM}{SM} = \lambda$$

Die Coordinaten des Punktes M sind in diesem Falle

$$x_1 = \frac{\xi_1 - \lambda\xi}{1-\lambda}$$

$$y_1 = \frac{\eta_1 - \lambda\eta}{1-\lambda}$$

Führen wir nun die Werte für ξ, η, ξ_1, η_1 ein und schreiben:

$$K \equiv y^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2$$

so erhalten wir

$$x_1 = \frac{a}{\lambda - 1} \cdot \frac{(4y^2 + 9x^2)\,K + 6\lambda x\,(x-a)\left(y^2 + \left[x + \frac{a}{2}\right]x\right)}{3x\,(x-a)\,K}$$

$$y_1 = \frac{a}{\lambda - 1} \cdot \frac{x\,(K - 3ax)}{3\,x\,K} \qquad (16)$$

Beschreibt nun der Pol P irgend eine Curve $f(x, y) = 0$, so erhalten wir die Gleichung der vom Punkte M beschriebenen Curve, wenn wir aus den Gleichungen (16) und der Gleichung $f(x, y) = 0$ die Coordinaten x, y des Poles P eliminiren.

Beschreibt nun P eine rationale Curve n-ter Ordnung, so beschreibt jeder Punkt der Geraden $\overline{SC}$, welche den Namen der Euler'schen Geraden führt, eine rationale Curve $4n$-ter Ordnung, ausgenommen $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$, d. i. die Punkte s und S beschreiben eine rationale Curve $2n$-ter Ordnung.

Jeder Lage von P entspricht eine ganz bestimmte Euler'sche Gerade E, als Verbindungslinie $\overline{SC}$. Sind nun x_1, y_1 Coordinaten des veränderlichen Punktes der Geraden E, so ist

$$E \equiv \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & a \\ y^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)x & -\frac{a}{2}y & y^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 \\ 4y^2 + 9x^2 & 2y(x-a) & -6x(x-a) \end{vmatrix} = 0 \qquad (17)$$

die Gleichung dieser Geraden. Beschreibt nun P die Curve

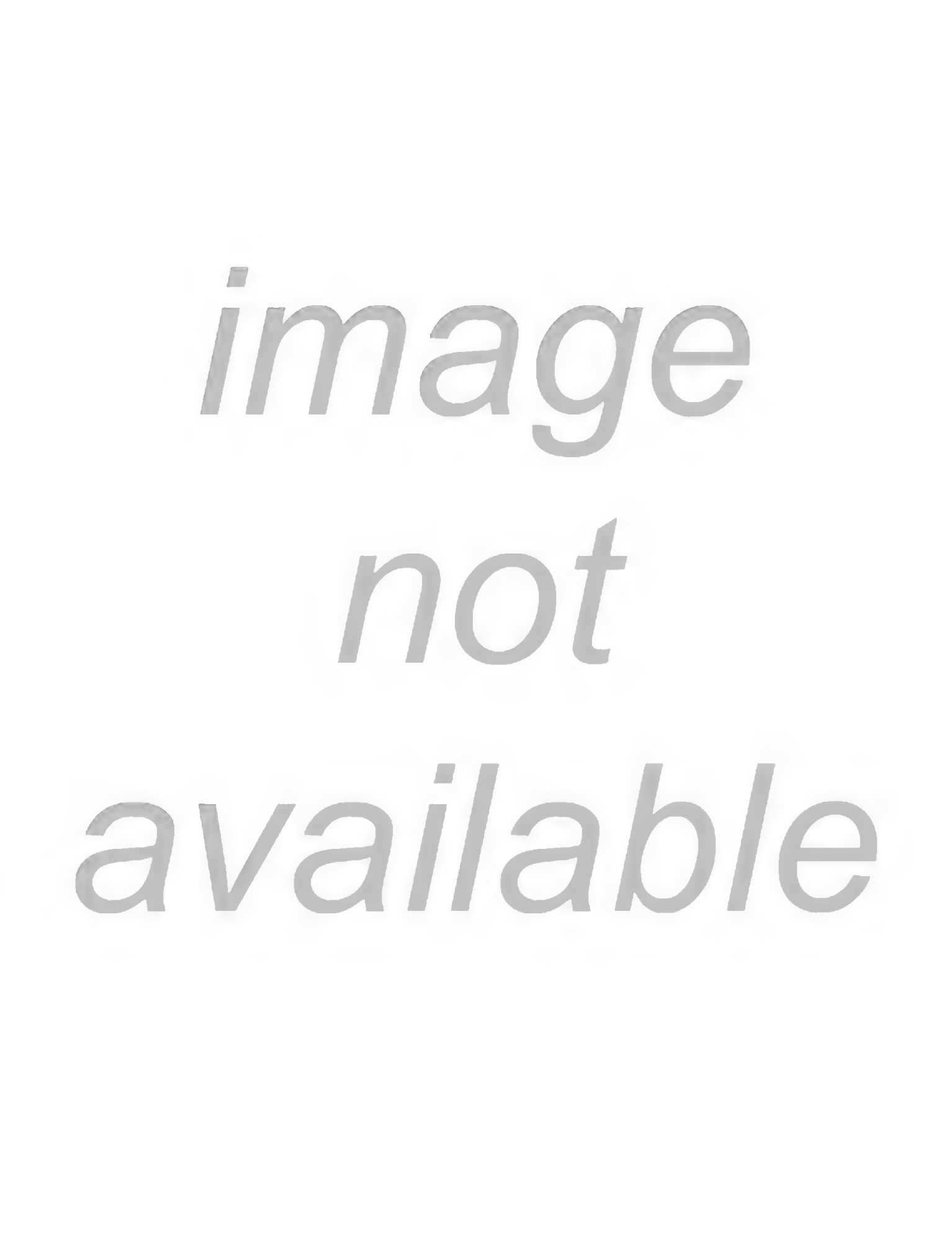


image
not
available

$$\begin{vmatrix} \frac{dK}{dx} & \frac{dK}{dy} \\ \frac{dF}{dx} & \frac{dF}{dy} \end{vmatrix} = 0 \qquad (20)$$

die Parameter x, y eliminiren.

Am einfachsten ist der Fall, wo die Polcurve eine rationale Curve ist; statt $F(x, y) = 0$, können wir hier schreiben

$$x = \frac{\varphi(t)}{f(t)}$$

$$y = \frac{\psi(t)}{f(t)}$$

wo φ, ψ, f ganze Functionen n-ten Grades des Parameters t sind. Die Gleichung des Kreises K ist hier von der Form

$$K \equiv \Phi(\xi, \eta, t) = 0$$

welche Gleichung von $2n$-tem Grade in t und quadratisch in ξ und η ist. Die gleich null gesetzte Discriminante dieser Gleichung in Bezug auf den Parameter t gibt die Gleichung der Enveloppe des Kreissystems, welcher der gegebenen rationalen Polcurve n-ter Ordnung entspricht.

Die besagte Discriminante ist $4(2n-1)$ten Grades in ξ und η, d. i. Envoloppe ist in diesem Falle eine Curve $4(2n-1)$-ter Ordnung. Den einfachsten Fall erhalten wir hier für $n = 1$, d. i. wenn der Pol eine Gerade beschreibt, wo die entsprechende Enveloppe eine Curve 4-ter Ordnung ist. Sei

$$y = bx + c$$

die Gleichung der Geraden, Gl. (20) lautet in diesem Falle:

$$\begin{vmatrix} \frac{dK}{dx} & \frac{dK}{dy} \\ -b & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Statt zu differentiren und dann zu eliminiren, können wir umgekehrt früher aus $K = 0$ und der Gleichung der Polgeraden die Grösse y eliminiren und dann differentiren.

Die Elimination gibt:

$$K \equiv 3x(x-a)(\xi^2+\eta^2) + [9x^2 + 4(bx+c)^2]\xi + 2a(bx+c)(x-a)\eta - 4a^2(bx+c)^2 = 0$$

oder geordnet nach den Potenzen von x:

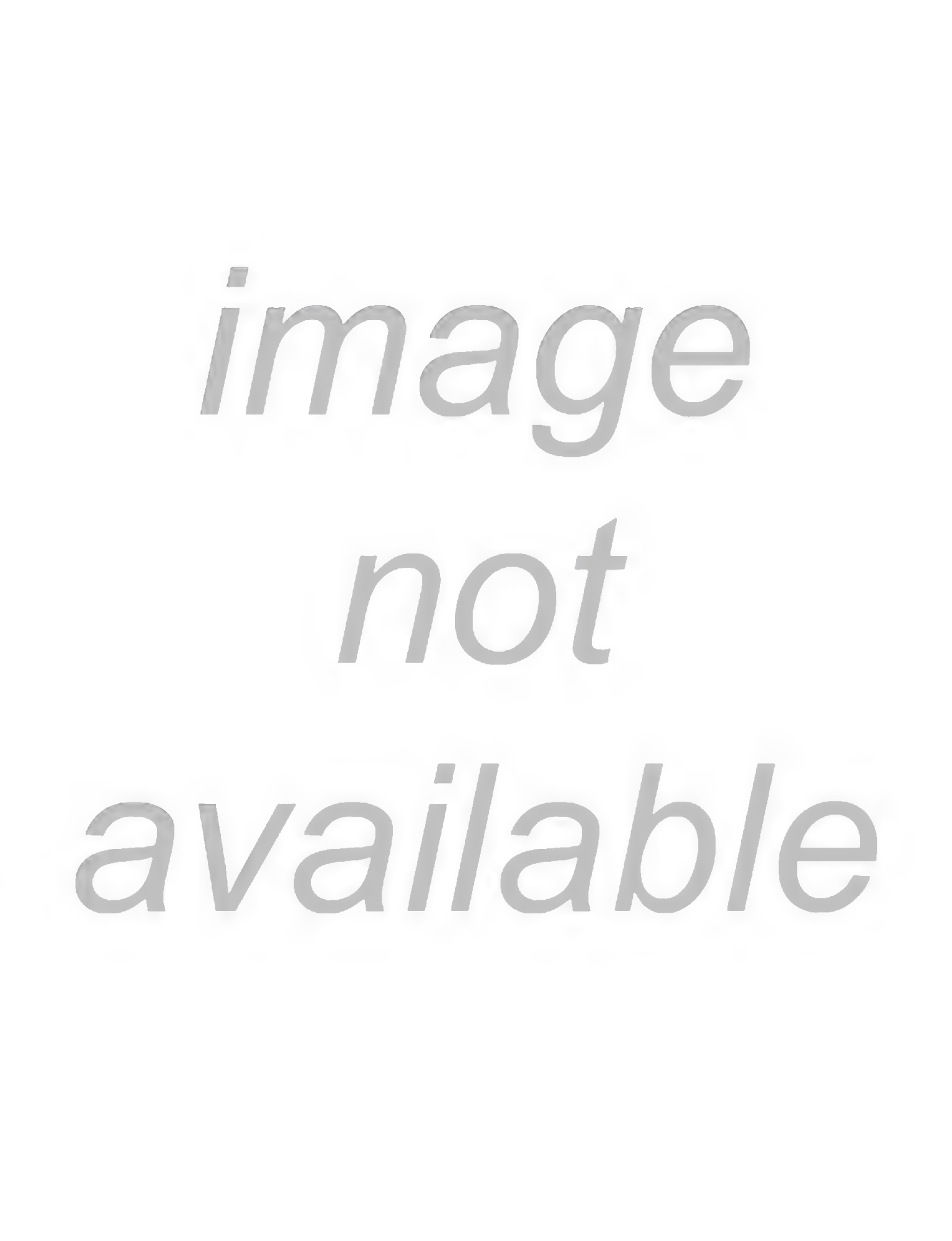


image
not
available

Kehren wir nun zur Gleichung (22) zurück; ausgeschrieben lautet sie:

$$9a(\xi^2+\eta^2)^2+12(ab+c)(-4c\xi+a\eta)(\xi^2+\eta^2)+48ac(ab+2c)\xi^2 \\ +72a^2c\xi\eta+(4ac^2+8a^2bc+4a^2b^2)\eta^2+144a^2c^2\xi=0 \quad (24)$$

Aus dieser Gleichung erkennen wir, dass die Enveloppe eine Curve vierter Ordnung ist, welche die imaginären unendlich fernen Kreispunkte zu Rückkehrpunkten hat, und die Ordinatenaxe im Coordinatenanfange berührt; somit ist die Enveloppe ein Descartes'sches Oval. Geht die Polgerade durch den Rückkehrpunkt der Cissoide, so ist $c=0$, und die Enveloppe zerfällt in zwei identische Kreise, deren Gleichung

$$\xi^2+\eta^2+\tfrac{8}{3}ab\eta=0$$

Schneller kommen wir zur Gleichung (24), wenn wir die Punkte der Polgerade parametrisch ausdrücken. Ist die Polgerade:

$$mx+ny-p=0$$

so ist

$$x=\frac{p}{m+nt}$$

$$y=\frac{pt}{m+nt}$$

und die Gleichung $K=0$ geht nach Einsetzung obiger Werte für x und y über in

$$t^2[4ap\xi-2a^2n\eta-4a^2p]+t[-3an\rho^2+2a(p-am)\eta] \\ +[3(p-am)\rho^2+9ap\xi]=0$$

wo der Kürze wegen

$$\rho^2=\xi^2+\eta^2$$

Die Discriminante nach t gleich null gesetzt, nämlich

$$a[-3n\rho^2+2(p-am)\eta]^2+24[-2p\xi+an\eta+2ap][(p-am)\rho^2+3ap\xi]=0$$

gibt uns wieder die Gleichung der Enveloppe. Diese Gleichung stimmt natürlich mit der Gleichung (24) überein, wenn wir $m=-b$, $n=1$, $p=c$ setzen, d. i. von gleicher Form der Gleichung der Polgeraden ausgehen.

Da nun $M=0$, $N=0$, $P^{1})=0$ Gleichungen dreier Kreise sind, welchen die imaginären unendlich fernen Kreispunkte somit gemeinschaftlich zukommen, folgt aus der Gleichung

---

1) $P=0$ besteht aus der Geraden

$$2c\xi-a\eta-2ac=0$$

und aus der unendlich fernen Geraden, auf welcher die unendlich fernen imaginären Kreispunkte liegen.

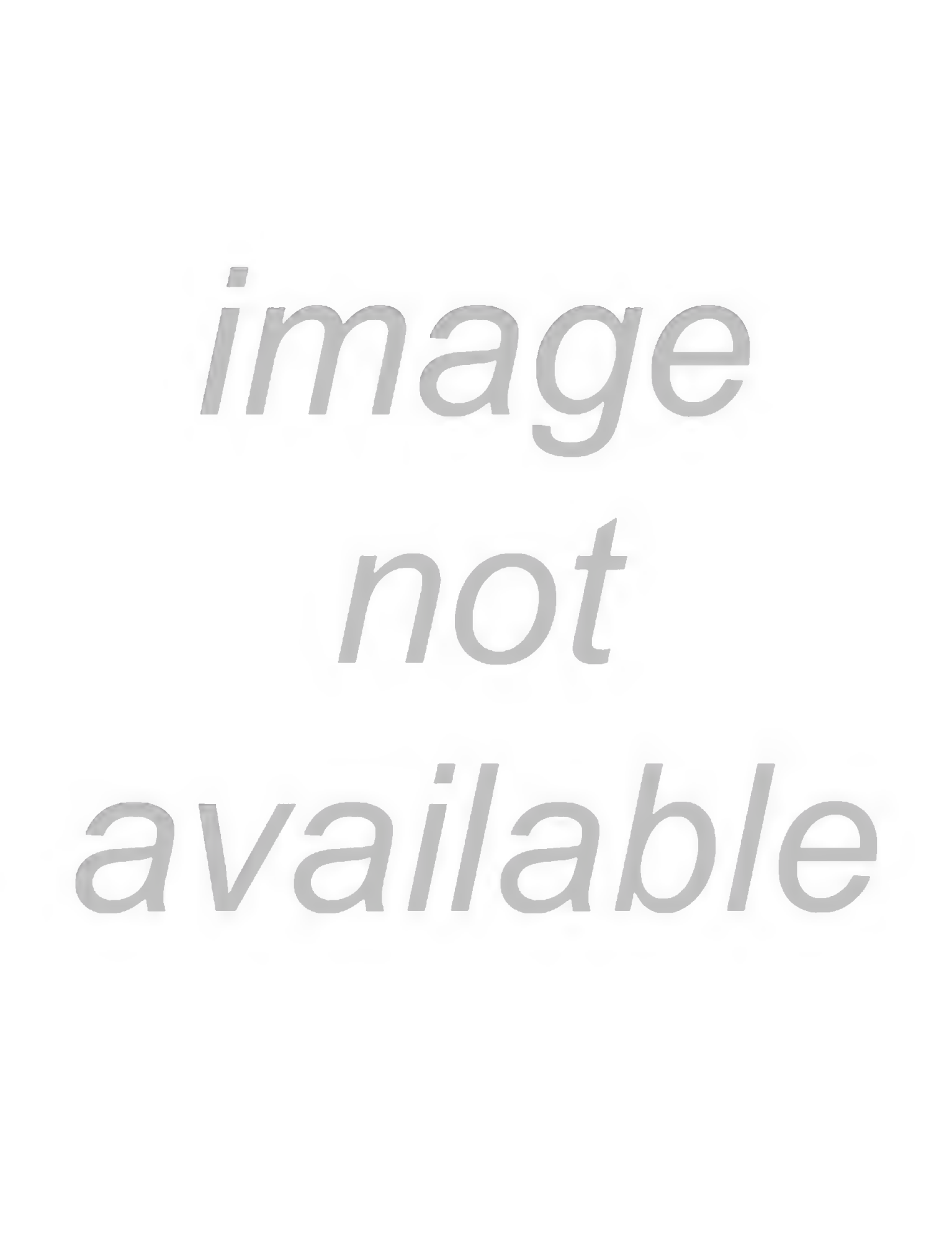


image
not
available

$$\xi = \frac{x_1 + 2x}{2}$$

$$\eta = \frac{y_1 + 2y}{2}$$

wo x, y die Coordinaten des Poles sind, dessen Parameter t, und x_1, y_1 die Coordinaten der dritten Ecke mit dem Parameter

$$u_1 = -\frac{t}{2}$$

Mit Rücksicht auf diese Werte erhalten wir wegen

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{3}{2}t \\ p_2 &= 0 \\ p_3 &= -\frac{t^3}{2} \end{aligned} \tag{25}$$

nach Kürzung mit dem Factor (t^2+1):

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{1+u_k^2} = 6\,\frac{t^2+2}{(t^2+1)(t^2+4)}$$

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{u_k(1+u_k^2)} = -6\,\frac{t}{(t^2+1)(t^2+4)}$$

somit sind die Coordinaten des Schwerpunktes

$$\begin{aligned} \xi &= 2a\,\frac{t^2+2}{(t^2+1)(t^2+4)} \\ \eta &= -2a\,\frac{t}{(t^2+1)(t^2+4)} \end{aligned} \tag{26}$$

Die Schwerpunktscurve ist somit für gegebene Cissoide als Polcurve eine rationale Curve vierter Ordnung. Dieselbe ist eine geschlossene Curve und hat im Anfangspunkte einen Rückkehrpunkt entsprechend dem Parameter $t = \infty$. Die unendlich fernen Punkte haben als Parameter

$$t_1 = \sqrt{-1}, \quad t_2 = -\sqrt{-1}$$

$$t_3 = 2\sqrt{-1}, \quad t_4 = -2\sqrt{-1}$$

Es bestimmen aber je zwei der Parameter, nämlich t_1 und t_4, dann t_2 und t_3 denselben Punkt und zwar den unendlich fernen imaginären Kreispunkt, d. h. die Curve hat die unendlich fernen imaginären Kreispunkte zu ihren Doppelpunkten. Dieselbe ist von der fünften Classe. Wir erhalten die Gleichung der Curve in der Form $F(\xi, \eta) = 0$, wenn wir den Parameter t aus der Gl. (26) eliminiren, nämlich

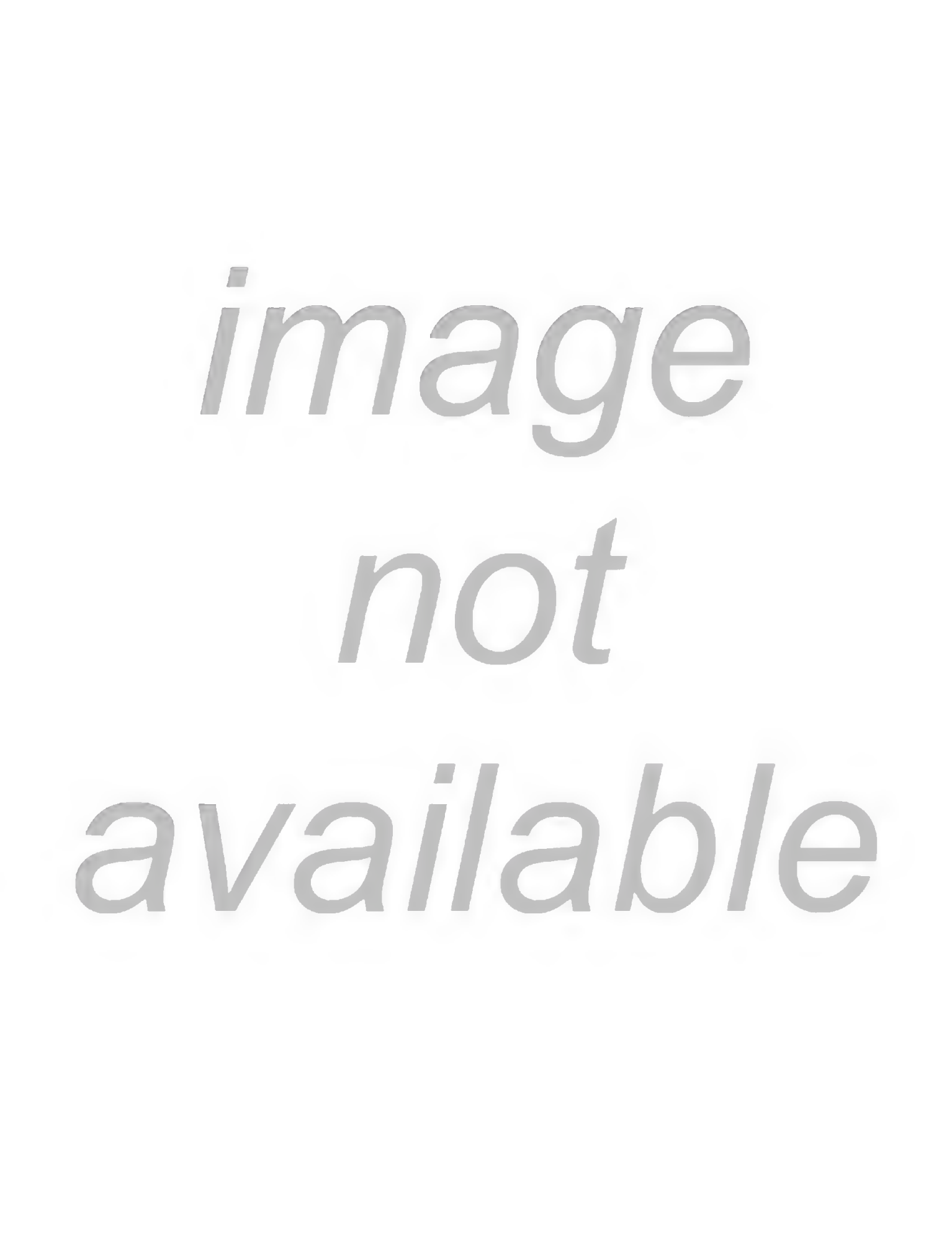


image
not
available

Für die Gleichung dieses Kreises ist mit Rücksicht auf die Werte (25):

$$K_t \equiv 3t^4(\xi^2+\eta^2) - a(4+9t^2)\xi - 2at^2\eta + 4a^2 = 0 \qquad (27)$$

Den weiteren Schnittpunkt von K_t mit der Cissoide erhalten wir leicht, denn die Summe der Parameter der Schnittpunkte eines Kreises mit der Cissoide ist gleich null. Somit ist

$$u' = -\frac{3t}{2} = -3u$$

der Parameter dieses vierten Schnittpunktes.

Aus der Gleichung $K_t = 0$ folgt, dass durch jeden Punkt in der Ebene vier berührende Kreise gehen, und jeder von ihnen schneidet die Cissoide im Punkte, der den Berührungspunkt des betreffenden Kreises zu seinem Tangentialpunkt hat.

Wir fanden früher, dass der die Cissoide im Punkte t berührende Kreis K_t dieselbe in weiteren zwei Punkten schneidet, deren Parameter $-\frac{t}{2}$, $-\frac{3}{2}t$ sind. Ihre Verbindungslinie hat zur Gleichung:

$$6t^3y + (4+7t^2)x - 4a = 0$$

und die Enveloppe dieser Verbindungslinien ist eine zur Cissoide affine Curve. Der Durchschnitt der Verbindungslinie mit der Cissoide ist ein zum Pole P in Bezug auf die X-Achse symmetrischer Punkt; sein Parameter somit gleich $2t$.

Die Coordinaten des Mittelpunktes von $K_t = 0$ sind

$$\xi_1 = \frac{a}{2}\cdot\frac{4+9t^2}{3t^4}$$
$$\eta_1 = \frac{a}{3t} \qquad (28)$$

Beschreibt der Pol die gegebene Cissoide, so beschreibt der Mittelpunkt des Umkreises des ihm zugeordneten Berührungsdreieckes eine rationale Curve vierter Ordnung und fünfter Classe (mit einem dreifachen Punkte im Unendlichen, der durch Vereinigung zweier Doppelpunkte und eines Rückkehrpunktes entstanden ist). Ihre Gleichung erhalten wir in der Form $F(\xi, \eta)$ durch Elimination von t aus den Gleichungen (28); sie lautet:

$$27\eta_1^2(a^2+4\eta_1^2) - 2a^3\xi_1 = 0$$

Was die Construction des Mittelpunktes C betrifft, construiren wir zuerst im Punkte P der Cissoide eine Tangente, welche die Curve im Punkte u_1 schneidet. Die Normale in P schneidet die Senkrechte im Halbirungspunkte von $\overline{Pu_1}$ im gesuchten Punkte C.

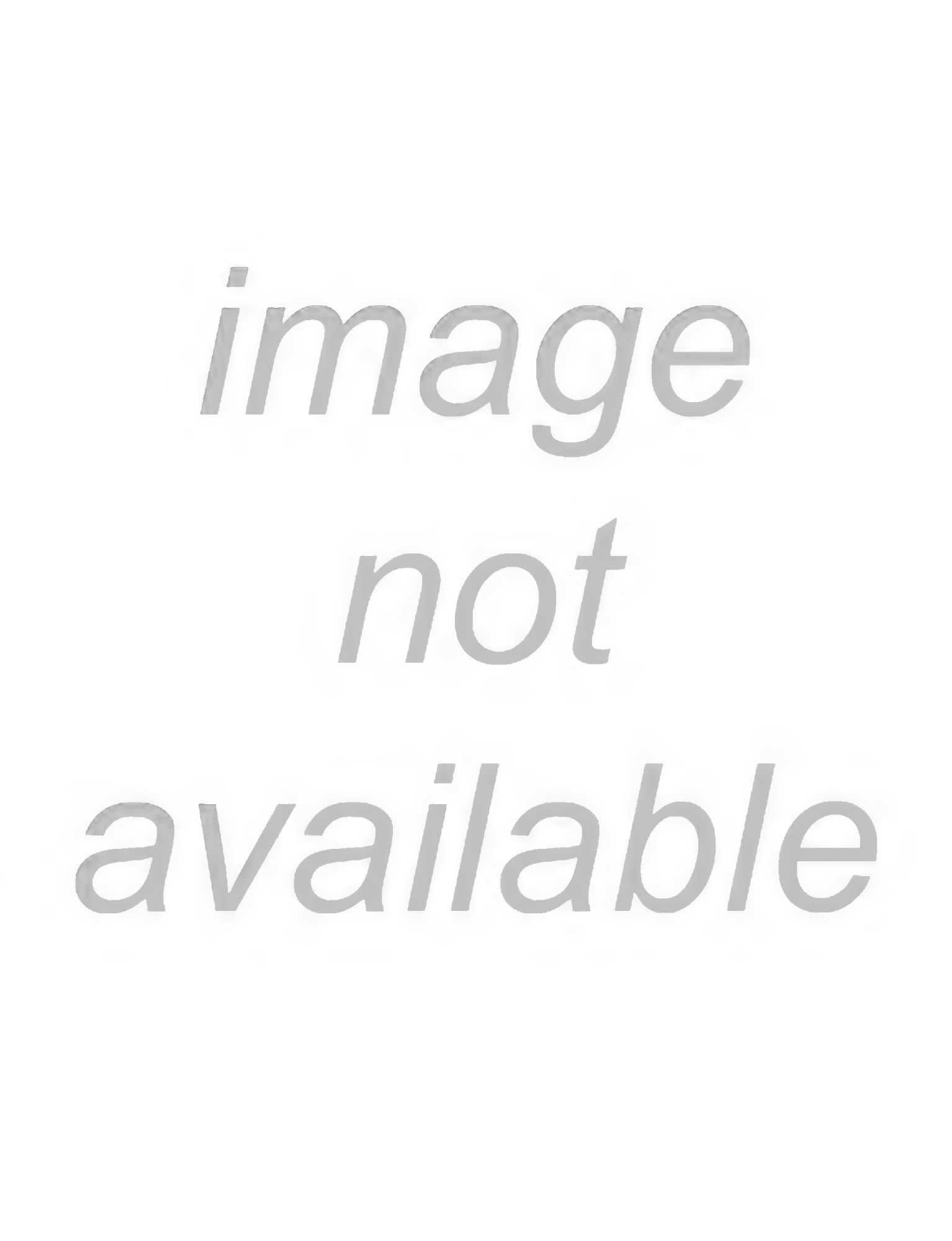


image
not
available

Liegt der Punkt (x, y) auf der Cissoide, und ist u' sein Parameter, so repräsentirt dieser Punkt u' selbst einen Fusspunkt. Aus einem Punkte der Cissoide können wir somit nur drei Normalen fällen; die Parameter dieser Fusspunkte erhalten wir, wenn wir die Werte für x, y in die Normalengleichung einführen. Wir erhalten so:

$$u(1+3u^2)+2u^4u'-(1+2u^2)(1+u'^2)u'=0 \tag{5}$$

Nach Kürzung mit dem Factor $u-u'$, welcher dem Punkte x, y als Fusspunkte selbst entspricht, können wir die Gleichung schreiben

$$2u'u^3+(3+2u'^2)u^2+u'u+(1+u'^2)=0 \tag{6}$$

Diese Gleichung gibt uns die Parameter der aus dem Punkte u' gefällten Normalen (den Punkt u' nicht mitgerechnet, da wir mit diesbezüglichem Factor gekürzt haben); zwischen den Parametern bestehen folgende Relationen:

$$\begin{aligned} p_1 &= \Sigma u_1 = -\frac{3+2u'^2}{2u'} \\ p_2 &= \Sigma u_1u_2 = -\tfrac{1}{2} \\ p_3 &= \Sigma u_1u_2u_3 = -\frac{1+u'^2}{2u'} \end{aligned} \tag{7}$$

Die Gleichung (6) hat nur eine reale Wurzel.

Dass die Gleichung (6) immer zwei complexe Wurzeln hat, können wir so beweisen, indem wir zeigen, dass das Dreieck der Fusspunkte imaginär ist. Sind nun u_1, u_2, u_3 die Wurzeln der Gleichung (6), so erhalten wir für das Dreieck $\Delta = u_1u_2u_3$:

$$2\Delta = \begin{vmatrix} \frac{a}{1+u_1^2} & \frac{a}{u_1(1+u_1^2)} & 1 \\ \frac{a}{1+u_2^2} & \frac{a}{u_2(1+u_2^2)} & 1 \\ \frac{a}{1+u_3^2} & \frac{a}{u_3(1+u_3^2)} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{a^2p_1}{\prod_{k=1}^{3} u_k(1+u_k^2)} \cdot \begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_1^2 \\ 1 & u_2 & u_2^2 \\ 1 & u_3 & u_3^2 \end{vmatrix}$$

Nun ist:

$$\prod_{k=1}^{3} u_k(1+u_k^2) = p_3([1-p_2]^2+[p_1-p_3]^2)$$

und nach einiger Reduction

$$\begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_1^2 \\ 1 & u_2 & u_2^2 \\ 1 & u_3 & u_3^2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 3 & p_1 & p_2 \\ p_1 & p_2 & 3p_3 \\ -p_1^2+4p^2 & 3p_3 & p_1p_2 \end{vmatrix}$$

somit mit Rücksicht auf die Gleichungen (7):

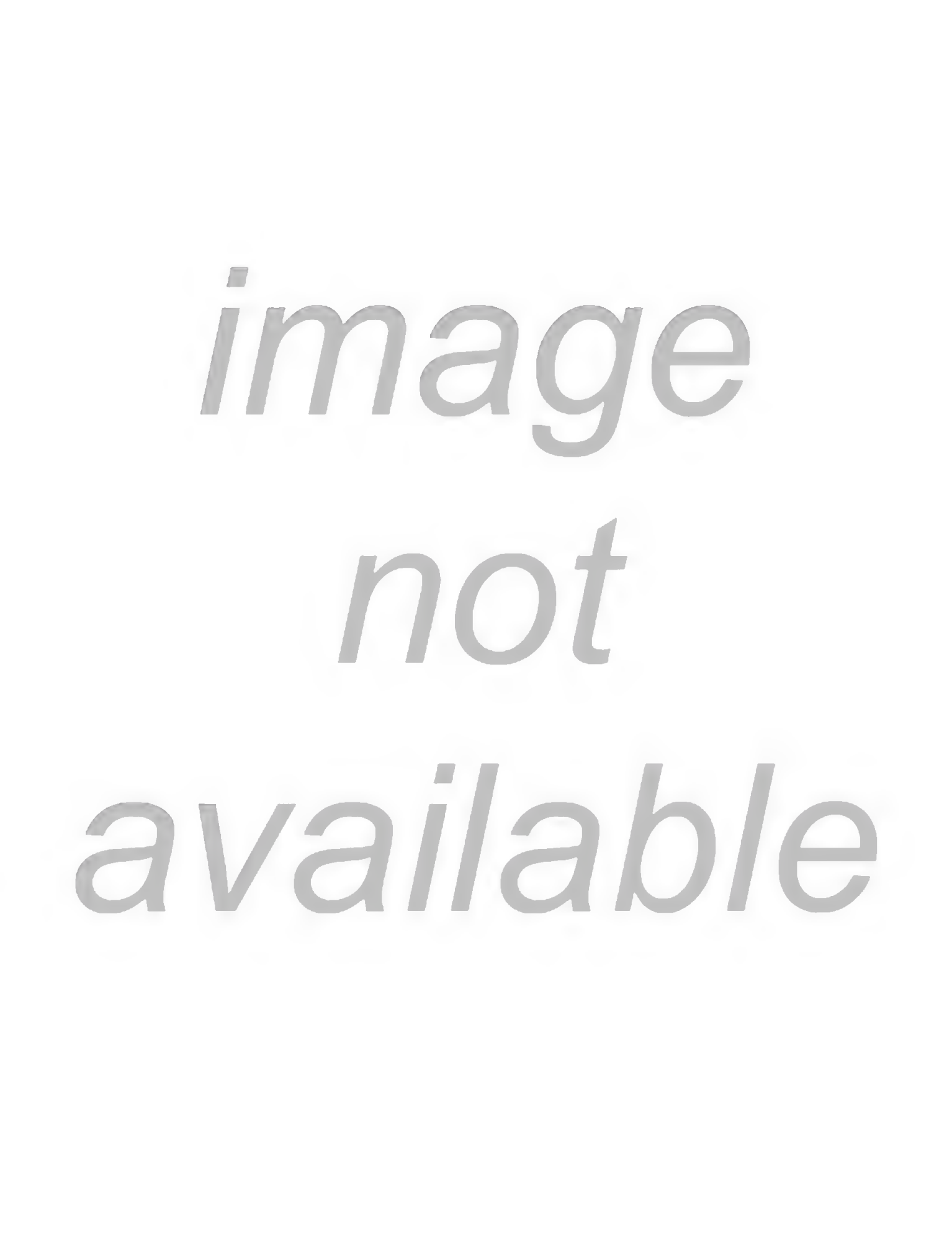


image
not
available

$$9\xi_1^2(\xi_1^2+\eta_1^2)-3a\xi_1(\xi_1^2+24\eta_1^2)+16a^2\eta_1^2=0 \qquad (10)$$

Wir erkennen leicht, dass die Curve zwischen $\xi_1=0$ und $\xi_1=\frac{a}{3}$ liegt, und ihr Flächeninhalt ist

$$p=\frac{4a^2}{9}\int_0^\infty \frac{u^4\,du}{(1+u^2)^3(4+u^2)}=\frac{7}{3}\pi\left(\frac{a}{18}\right)^2$$

Mittelpunkt des Umkreises.

Wir fanden (1, 9) für die Gleichung des Umkreises, der einem Dreiecke umgeschrieben ist, dessen Ecken auf der Cissoide liegen:

$$p_1(\xi^2+\eta^2)+\frac{a}{p_3}(1+p_1^2-p_2)\xi-\frac{a}{p_3}(p_1p_2-p_3)\eta-\frac{a^2}{p_3}=0$$

Drücken wir nun mittelst der Gleichungen (7) die Bedingung aus, dass das Dreieck ein Fusspunktsdreieck ist, so erhalten wir:

$$(1+u^2)(3+2u^2)(\xi^2+\eta^2)+a[9+14u^2+4u^4]\xi+au\eta-4a^2u^2=0 \qquad (11)$$

Die Coordinaten des Mittelpunktes sind

$$\xi_2=-\frac{a}{2}\frac{9+14u^2+4u^4}{(1+u^2)(3+2u^2)}$$

$$\eta_2=-\frac{a}{2}\frac{u}{(1+u^2)(3+2u^2)}$$

Verlegen wir den Anfangspunkt in den Punkt $(-a, 0)$, so gehen die vorstehenden Gleichungen über in

$$\xi_2'=-\frac{a}{2}\frac{3+4u^2}{(1+u^2)(3+2u^2)}$$

$$\eta_2'=-\frac{a}{2}\frac{u}{(1+u^2)(3+2u^2)} \qquad (12)$$

Der Ort der Mittelpunkte der Umkreise ist somit eine rationale Curve vierter Ordnung und wie wir uns leicht überzeugen können fünfter Classe. Sie besitzt nämlich, ausser zweien unendlich fernen Doppelpunkten in den Kreispunkten, einen realen Rückkehrpunkt im Anfangspunkte der Coordinaten O'. Die ganze Curve ist endlich gelegen auf linker Seite der Y-Achse von $\xi_2'=0$ bis $\xi_2'=-\frac{a}{2}$.

Das Kreissystem $K_u=0$ bei veränderlichem u hüllt eine Curve zehnter Ordnung ein.

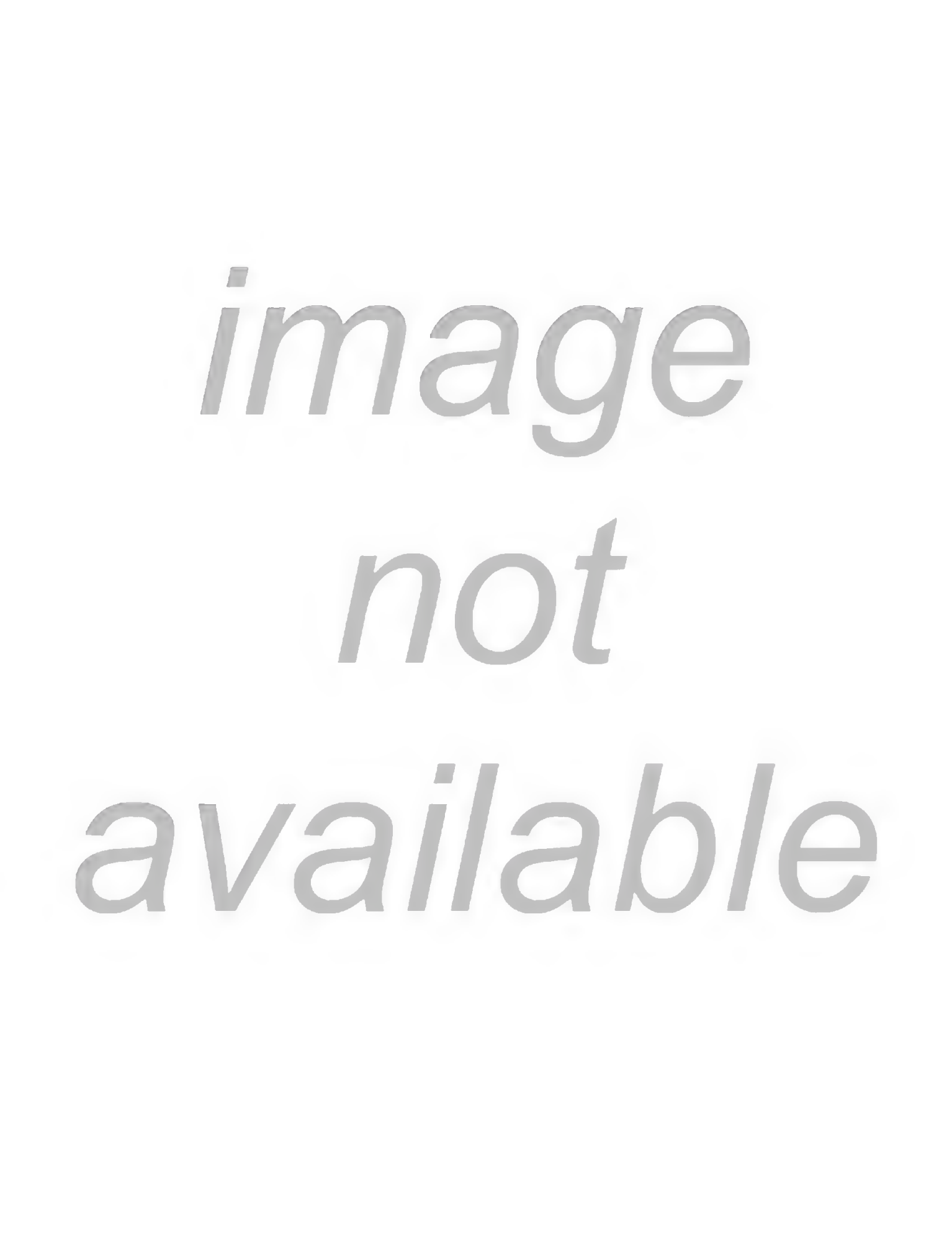


image
not
available

II.

2. Nehmen wir nun an, dass die Sehne $A_1 A_2$ eine Function ihrer Richtung ist; dann beschreibt der Punkt C_3 bezüglich C_3' eine Curve (C_3) bezüglich (C_3'), welche wir nun näher untersuchen wollen.

Schreiben wir für jetzt $\varkappa$ statt R als den Halbmesser des Kreises K. Nach der Annahme ist

$$A_1 A_2 = f(\varphi) \tag{1}$$

die Polarcoordinaten von C_3 mit S als Pol seien ϱ, θ, so ist (Fig. 1)

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \theta \tag{2}$$

wegen

$$B_2 C_3 = \varkappa_3 = \sqrt{\varkappa^2 - \tfrac{1}{4} f^2(\varphi)}$$

ist die Polargleichung von (C_3)

$$\varrho = \frac{\varkappa + \sqrt{\varkappa^2 - \frac{1}{4}\left[f\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right]^2}}{2} \tag{3}$$

Was den Ort von C_3' betrifft, ist wegen $\varphi = \theta_1 - \frac{\pi}{2}$

$$\varrho_1 = \frac{\varkappa - \sqrt{\varkappa^2 - \frac{1}{4}\left[f\left(\theta_1 - \frac{\pi}{2}\right)\right]^2}}{2}$$

dass der Ort (C_3) mit dem Orte (C_3') congruent ist, erkennen wir schon aus der Gleichungsform. Ferner ersehen wir aus (3), dass die Curve (C_3) eine Konchoide von der Curve (E)

$$\varrho' = \tfrac{1}{2}\sqrt{\varkappa^2 - \tfrac{1}{4}\left[f\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right]^2}$$

ist, deren Vectoren wir nur um $\frac{\varkappa}{2}$ zu verlängern haben, um (C_3) zu bekommen.

Dass $2\varkappa > f\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ d. i. $2\varkappa > A_1 A_2$ sein muss, ist geometrisch ersichtlich.

3. Als besonderen Fall wollen wir annehmen

$$f(\varphi) = 2m \sin\varphi + 2n \cos\varphi$$

Hier ist (E) Fusspunktcurve einer Ellipse der Halbaxen

$$a = \frac{\varkappa}{2}$$

$$b = \tfrac{1}{2}\sqrt{\varkappa^2 - m^2 - n^2}$$

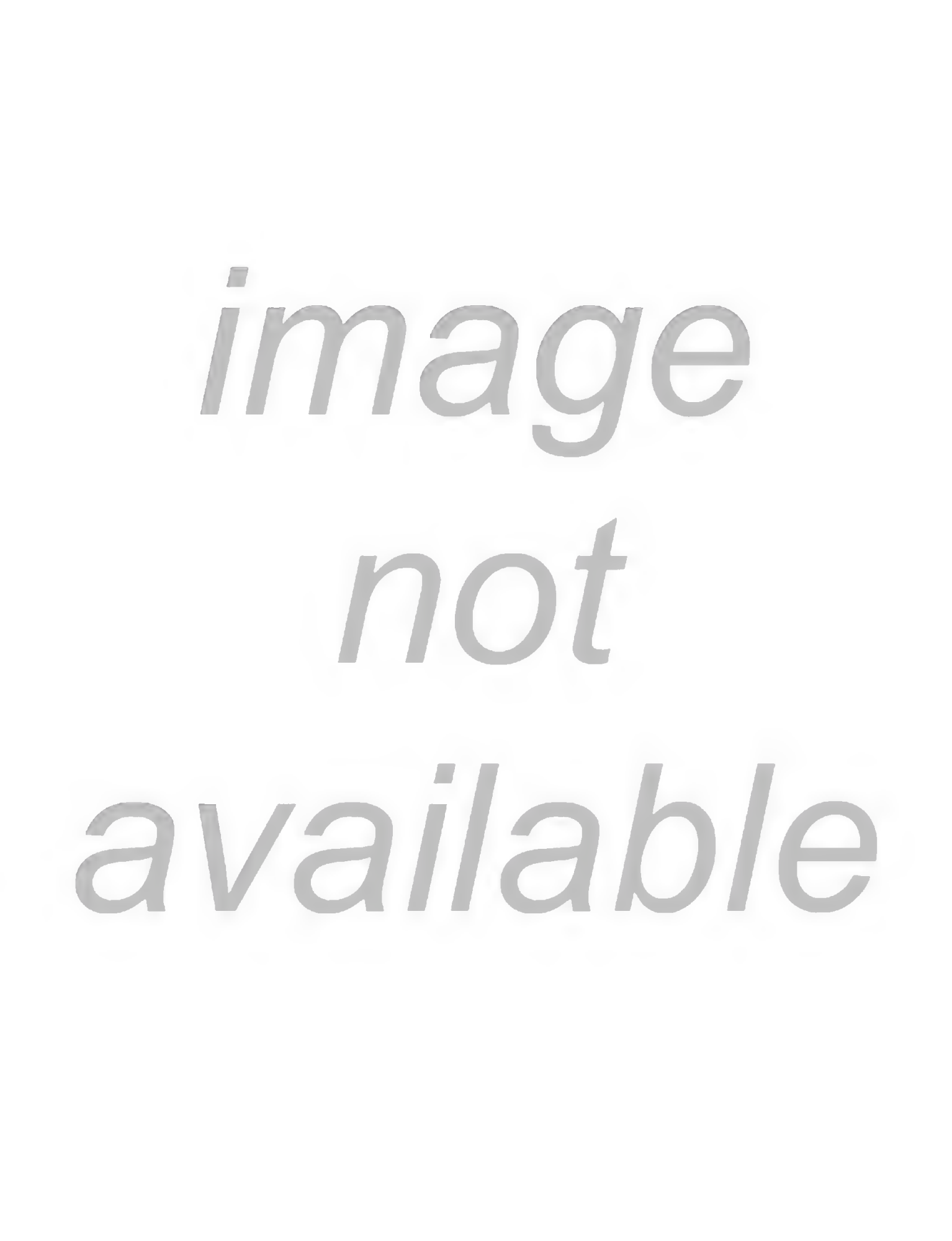


image
not
available

$$\beta_h + \beta_\varkappa = \alpha_i, \qquad h \gtrless \varkappa \gtrless i = 1, 2, 3$$

woraus

$$\sum_{h=1}^{3} \beta_h = \frac{\pi}{2} \quad \text{oder} \quad \alpha_h + \beta_h = \frac{\pi}{2} \tag{1}$$

Der Kürze wegen sei

$$2s = \Sigma a, \quad 2\sigma = \Sigma \sin\alpha$$

somit wegen

$$a_h = 2R \sin\alpha_h \tag{2}$$

$$\frac{s}{\sigma} = 2R, \quad \Sigma \sin\alpha = \frac{s}{R} \tag{3}$$

5. Aus dem verallgemeinerten Pythagoreischen Satze

$$a_1^2 = a_2^2 + a_3^2 - 2a_2 a_3 \cos\alpha_1$$

erhalten wir (2):

$$\sin^2\alpha_1 = \sin^2\alpha_2 + \sin^2\alpha_3 - 2\sin\alpha_2 \sin\alpha_3 \cos\alpha_1$$

woraus durch cyklische Vertauschung der Indices und Summation:

$$\Sigma \sin^2\alpha = 2\Pi \sin\alpha \, \Sigma \cot\alpha \tag{I}$$

Mit Rücksicht auf die bekannte Formel

$$\Sigma \sin^2\alpha = 2(1 + \Pi \cos\alpha)$$

können wir dieselbe schreiben

$$\Sigma \cot\alpha = \Pi \cot\alpha + \Pi \operatorname{cosec}\alpha \tag{II}$$

wo sich die Summation und Multiplication wie auch im folgenden auf die drei Winkel des Dreieckes erstreckt.

6. Die Formel

$$a_3 = a_1 \cos a_2 + a_2 \cos\alpha_1$$

geht über nach (2) in

$$\sin\alpha_3 = \sin\alpha_1 \cos\alpha_2 + \sin\alpha_2 \cos\alpha_1$$

woraus wir wieder durch cyklische Vertauschung der Indices und Summation erhalten

$$\Sigma \sin\alpha = \Sigma \sin\alpha_h \cos\alpha_\varkappa \qquad h \gtrless \varkappa = 1, 2, 3 \tag{III}$$

oder

$$\Sigma \sin(\alpha_h + \alpha_\varkappa) = \Sigma \sin\alpha_h \cos\alpha_\varkappa$$

7. Für den Flächeninhalt des Dreieckes gelten bekanntlich:

$$\Delta_a = \frac{a_1 a_2 a_3}{4R} = \frac{a_h a_\varkappa}{2} \sin\alpha_i \qquad h \gtrless \varkappa \gtrless i = 1, 2, 3 \tag{4}$$

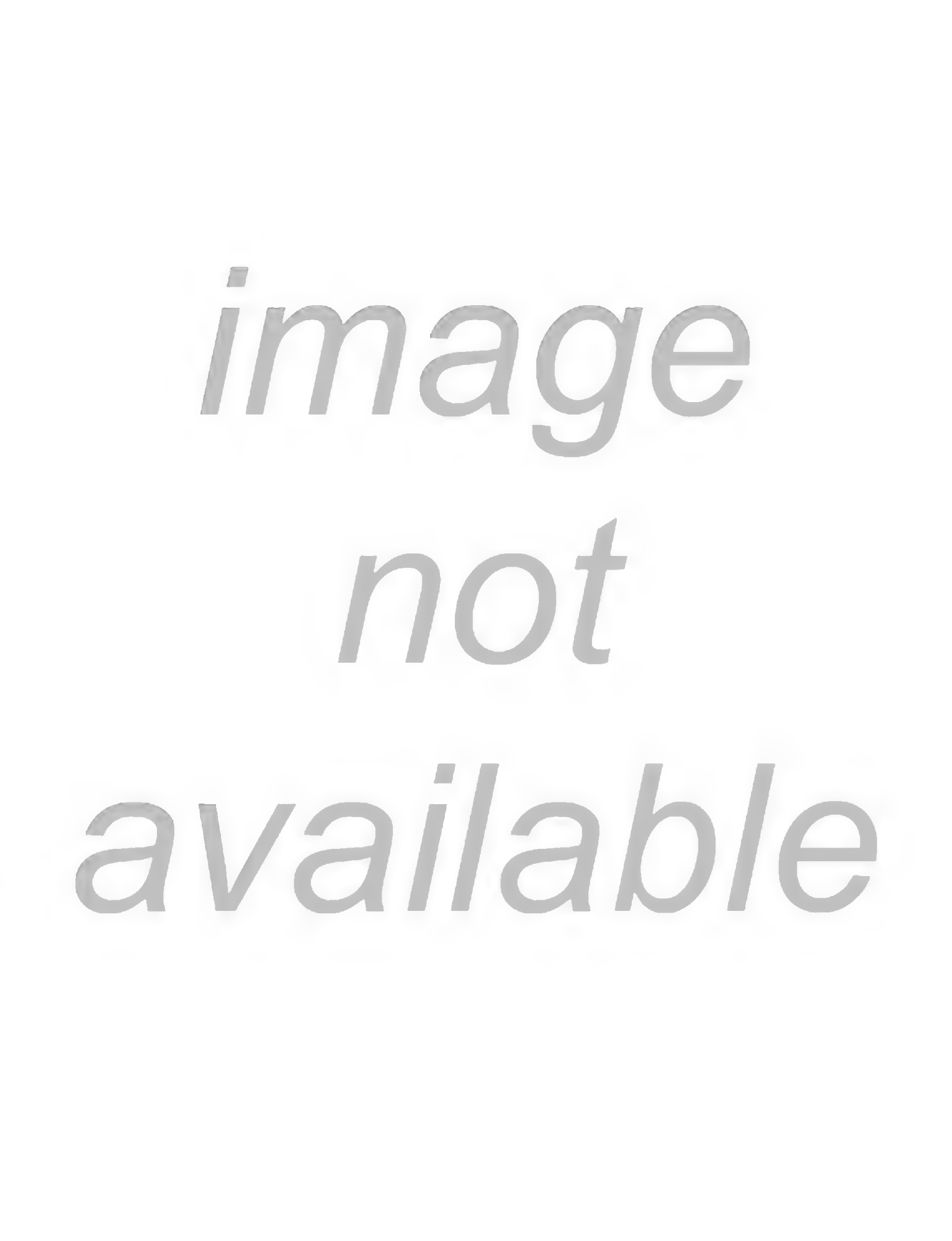


image
not
available

$$Rh_1h_2h_3 = 2rr_1r_2r_3 \tag{16}$$

Aus den Gleichungen (6) folgt:

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{r_k} = \sum_{k=1} \frac{s-a_k}{\Delta_a} = \frac{s}{\Delta_a}$$

was den Satz von Steiner[1])-Bobilier ausdrückt, nämlich:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \tag{17}$$

Ferneres erhalten wir aus den Gleichungen (6)

$$r_1 + r_2 + r_3 - r = \Delta_a \left(\frac{1}{s-a_1} + \frac{1}{s-a_2} + \frac{1}{s-a_3} - \frac{1}{s} \right)$$

nun ist aber wegen $s = \Sigma a$ der Ausdruck in den Klammern gleich

$$\frac{a_1 a_2 a_3}{\Delta_a^2} = \frac{4R}{\Delta_a}$$

womit sich der zweite Satz von Bobilier[2]) ergibt:

$$4R = r_1 + r_2 + r_3 - r \tag{18}$$

Aus den Gleichungen (11) und (12) folgt:

$$\frac{r}{2R} = \frac{\Pi \sin \alpha}{\Sigma \sin \alpha}$$

was mit Hülfe der bekannten Relation

$$\Sigma \sin \alpha = 4 \Pi \cos \frac{\alpha}{2}$$

in

$$\frac{r}{R} = 4 \Pi \sin \frac{\alpha}{2} \tag{19}$$

übergeht.

8. Es sei $SB_k = \varrho_k$, wo

$$\varrho_k = R \sin \beta_k = R \cos \alpha_k = \frac{a_k}{2} \cot \alpha_k \tag{20}$$

Für den Flächeninhalt von Δ_b erhalten wir:

$$\Delta_b = \tfrac{1}{2} \Sigma \varrho_k \varrho_\varkappa \sin B_k S B_\varkappa \qquad k \gtrless \varkappa = 1, 2, 3$$

Nun ist

$$\text{Wkl. } B_k S B_\varkappa = \pi - \alpha_i, \qquad \Delta_a = 4 \Delta_b$$

somit

$$\Delta_a = R^2 \Pi \cos \alpha \, \Sigma \operatorname{tg} \alpha$$

was mit (9) verglichen gibt:

---

1) J. Steiner's Werke I. Bd. pg. 214.

2) Erschien in Gergonne-Annales des math. Conf. Steiner l. c.

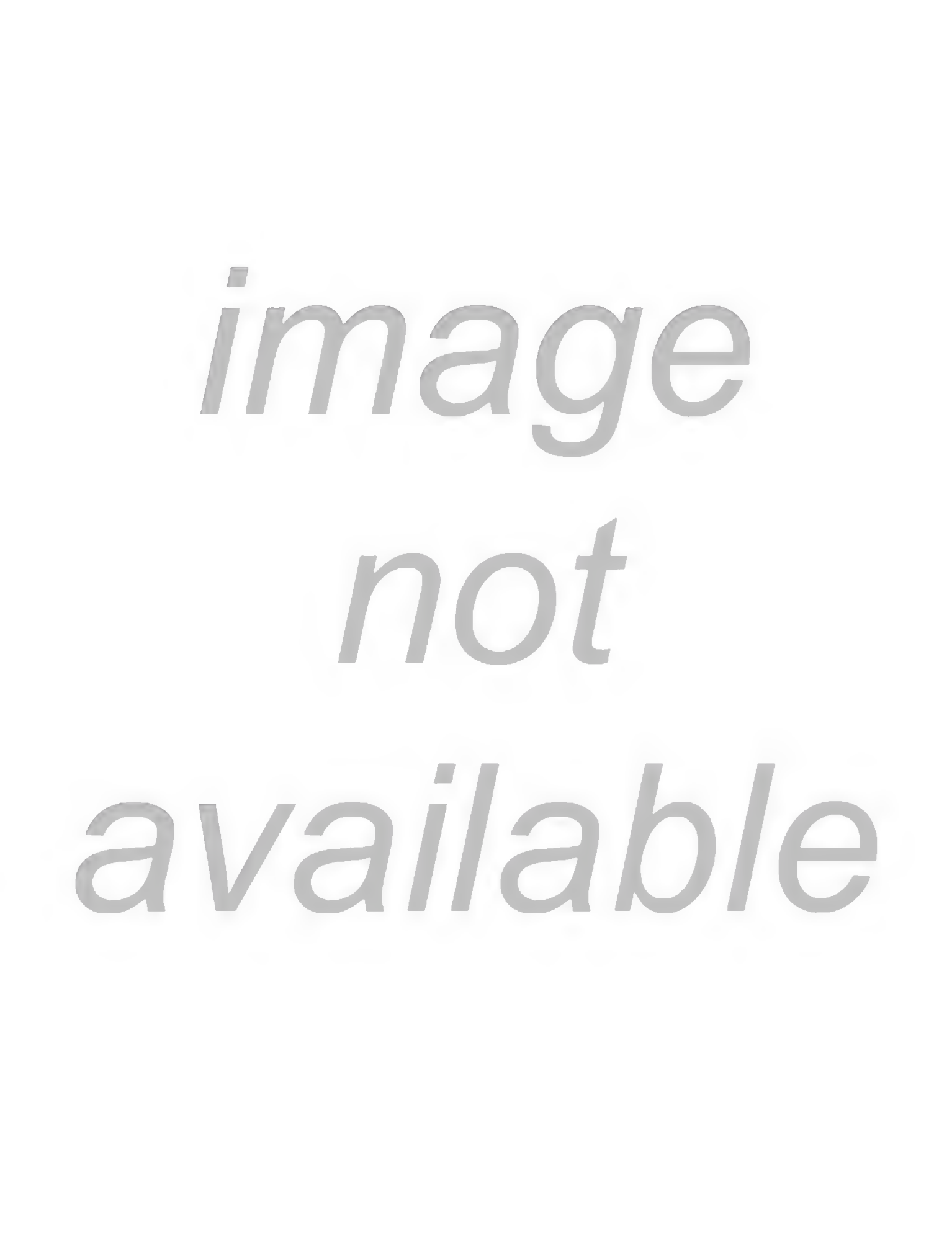


image
not
available

Relationen am Δ_c'.

10. Für den Flächeninhalt des Dreieckes Δ_c' erhalten wir:

$$\Delta_c' = \tfrac{1}{2} \Sigma \varkappa_1 \varkappa_2 \sin \alpha_3 = \frac{R^2}{2} \Sigma \sin^2 \frac{\alpha_1}{2} \sin^2 \frac{\alpha_2}{2} \sin \alpha_3$$

$$= R^2 \Pi \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \Sigma \cot \frac{\alpha}{2} \tag{23}$$

oder wegen

$$4 \Sigma \sin \frac{\alpha_1}{2} \sin \frac{\alpha_2}{2} \cos \frac{\alpha_3}{2} = \Sigma \sin \alpha = 4 \Pi \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\Delta_c' = R^2 \Pi \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{R^2}{8} \Pi \sin \alpha \tag{24}$$

Durch Vergleichung der Formeln (23) und (24) ergibt sich:

$$\Sigma \cot \frac{\alpha}{2} = \Pi \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} \tag{IX}$$

Ferner folgt aus (24) mit Rücksicht auf (9):

$$\Delta_a = 16 \Delta_c'$$

ähnlich aus (21) und (24):

$$\frac{\Delta_c}{\Delta_c'} = \Sigma \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \Pi \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

Die Dreiecke $\Delta_d = D_1 D_2 D_3$ und $\Delta_d' = D_1' D_2' D_3'$ sind congruent. Ihr Flächeninhalt ist

$$\Delta_d = \frac{R^2}{2} \Sigma \sin \alpha$$

somit gilt wegen (10) und (12):

$$\frac{\Delta_d}{\Delta_a} = \frac{R}{2r} = \frac{\Sigma \sin \alpha}{\Sigma \sin 2\alpha}$$

IV.

11. Im Artikel 8 zeigten wir, dass

$$SB_h = \varrho_h = R \cos \alpha_h$$

somit gilt

$$\Sigma \varrho = R \Sigma \cos \alpha = R + 4R \Pi \sin \frac{\alpha}{2}$$

und wegen (19):

$$\Sigma \varrho = R + r$$

12. Nach dem Artikel 7 und 9 besteht

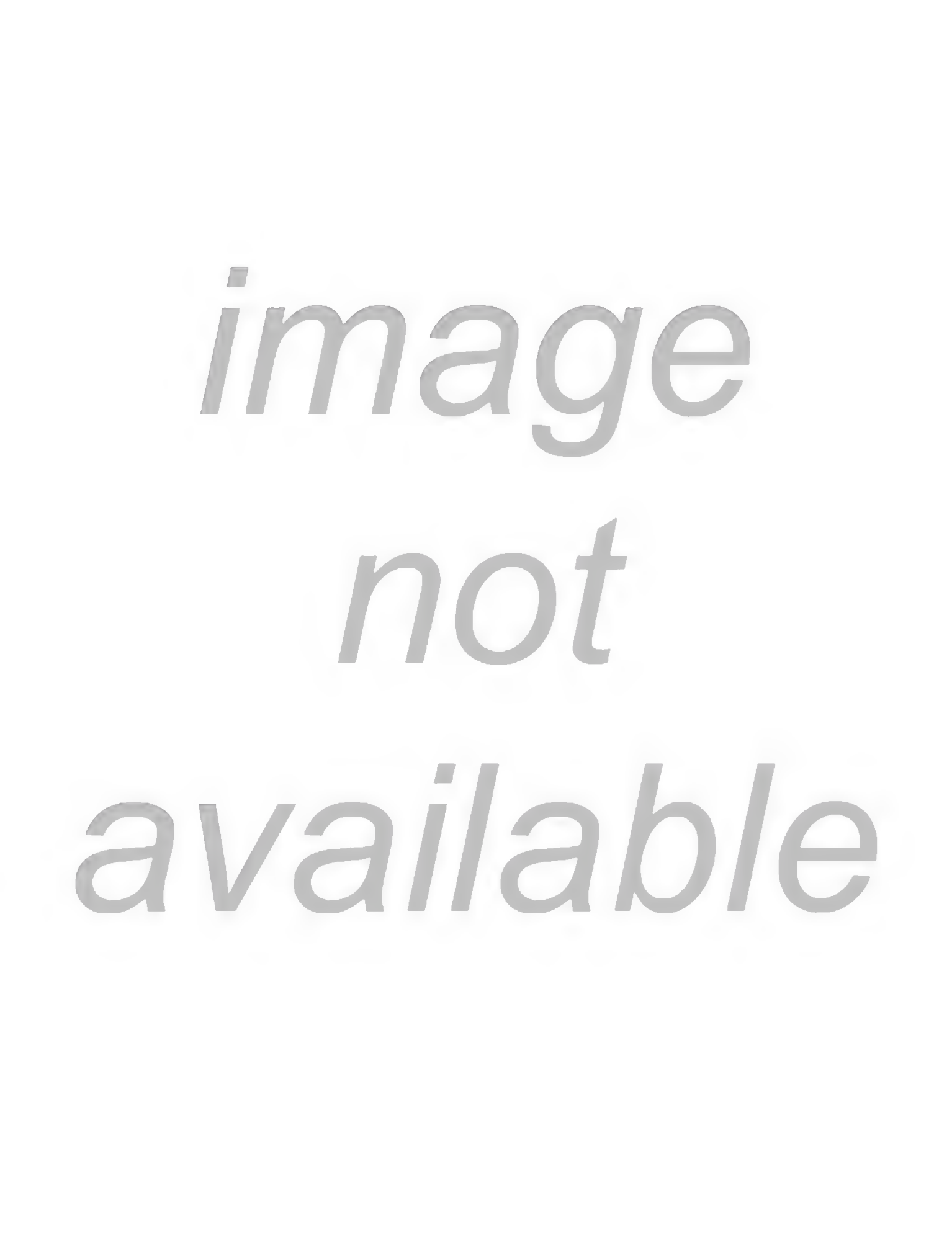


image
not
available

XXI.

Ueber magische Quadrate.

Von

Felix Clauss.

Die Aufgabe $x.x$ Zahlen von $1p - x^2p$ (wobei p ein beliebiger Factor) in ein Quadrat von $x.x$ Feldern so einzuzeichnen, dass die Summe aller Glieder je einer der x wagerechten oder senkrechten Reihen oder einer der beiden Diagonalen dieselbe ist, zerfällt nach dieser Methode in zwei Hauptgruppen, je nachdem die Basis x eine gerade oder ungerade ist.

Die Grösse der jedesmaligen Summe bestimmt sich, da x Reihen vorhanden, mit Hilfe der arithmetischen Progressionen nach der Formel: $S = \frac{1p + x^2p}{2} \cdot \frac{x^2}{x}$ oder: $S = \frac{x}{2}(1 + x^2)p$. Der Einfachheit halber soll in folgenden Ausführungen der constante Factor p, den man ja jedem Endergebniss nur anzufügen hat, weggelassen werden. Die Aufstellung der Zahlen geschieht nun vollständig symmetrisch.

I. Die Basis x eine gerade Zahl.

Das erste Glied der ersten wagerechten Reihe heisst 1; das letzte x. Demnach lautet in ders. Reihe das zweite 2; das vorletzte $x-1$, das dritte 3 u. s. w. Das erste Glied der zweiten (wager.) Reihe lautet demnach $x+1$; das letzte $2x$; die übrigen Glieder ders. Reihe: $x+2$; $x+3$ u. s. w. $2x-2$; $2x-1$. Ebenso verhalten sich die folgenden Reihen. — In der letzten heisst das letzte Glied x^2; demnach das vorletzte x^2-1; ... das $x$letzte (d. h. das erste) Glied der letzten Reihe x^2-x+1 u. s. w. Ebenso findet man das letzte Glied der vorletzten Reihe x^2-1x; das erste Glied ders. Reihe x^2-2x+1 u. s. w. u. s. w. — (vergl. die am Schlusse angefügte Tafel).

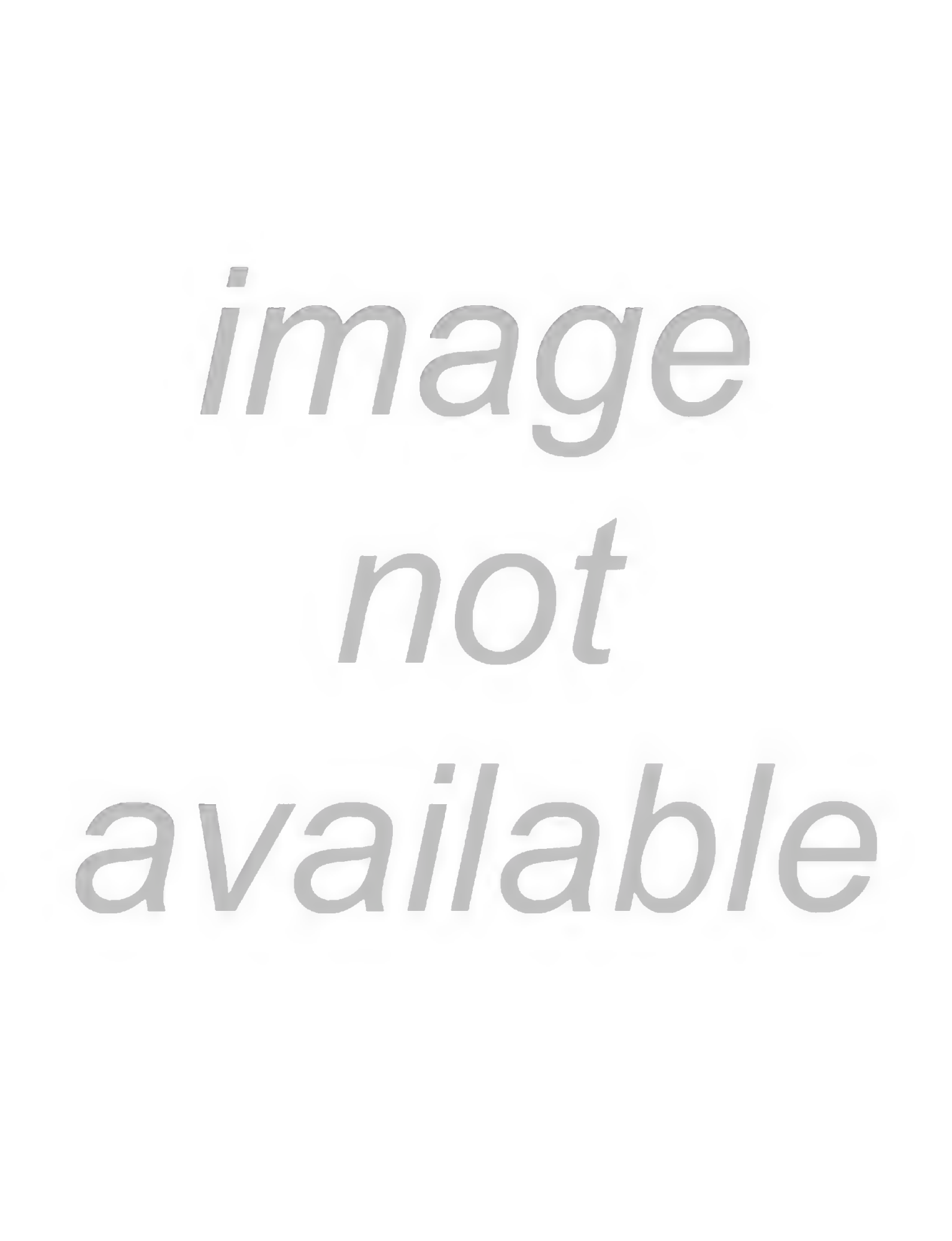


image
not
available

A. Ist die Basis x eine durch vier teilbare Zahl, so erhält man in jeder Reihe $\frac{x}{4}$ mal die Summe $2(1+x^2)$ d. h. $\frac{x}{2}(1+x^2)$ w. z. b. w.

B. Ist die Basis x eine gerade, aber nicht durch vier teilbare Zahl, so wird zuletzt allemal nur ein einzelnes Quadrat übrig bleiben, das man nach folgenden Regeln zu behandeln hat.

Die Summe aller Glieder einer jeden Reihe der inneren Quadrate beträgt nach den obigen Ausführungen $(1+x^2)\cdot\frac{x-2}{2}$. Von dem äussersten Quadrate müssen demnach ausser den Eckzahlen je zwei sich direct gegenüberliegende Glieder zus. allemal $\frac{x}{2}(1+x^2)-(1+x^2)\frac{x-2}{2}$ d. h. $1+x^2$ betragen. Dieses ist aber die Summe je zwei sich einander diametral gegenüberliegender Zahlen; die Aufgabe wird also gelöst sein, wenn nur zwei aneinanderstossende Seiten des äussersten Quadrates aus den noch vorhandenen Zahlen so gebildet sind, dass die Summe je ihrer Glieder $\frac{x}{2}(1+x^2)$ beträgt, und jede Reihe allemal nur e i n e der sich einander diametral gegenüberliegenden Zahlen enthält. Die einzelnen Glieder der beiden anderen Quadratseiten müssen dann die Diametralzahlen ihrer direct gegenüberliegenden Zahlen sein.

Die beiden zu bildenden Seiten des äussersten Quadrates seien die untere und die rechte Quadratseite. Man bildet sie nun folgendermassen: Zunächst vertauscht man in beiden Diagonalen die Endglieder mit einander. Die übrigen ungeraden Glieder ausser den letzten $\frac{x-6}{4}$ ungeraden Gliedern der unteren Reihe, die durch die letzten $\frac{x-6}{4}$ ungeraden Glieder der oberen Quadratseite ersetzt werden, also das dritte, fünfte, siebente u. s. w. Glied behalten auf beiden Seiten ihren Platz bei; während die geraden Glieder der unteren Seite, also das zweite, vierte, sechste u. s. w. Glied durch die geraden Glieder der rechten Seite, und die geraden Glieder der rechten Seite durch die ungeraden Glieder der oberen Seite (ausser natürlich der Eckzahl) ersetzt werden; nur dass an Stelle der letzten $\frac{x-6}{4}$ ungeraden Glieder der oberen Seite, die ja schon verwertet sind, die letzten $\frac{x-6}{4}$ ungeraden Glieder der unteren Quadratseite treten. Ist dies alles

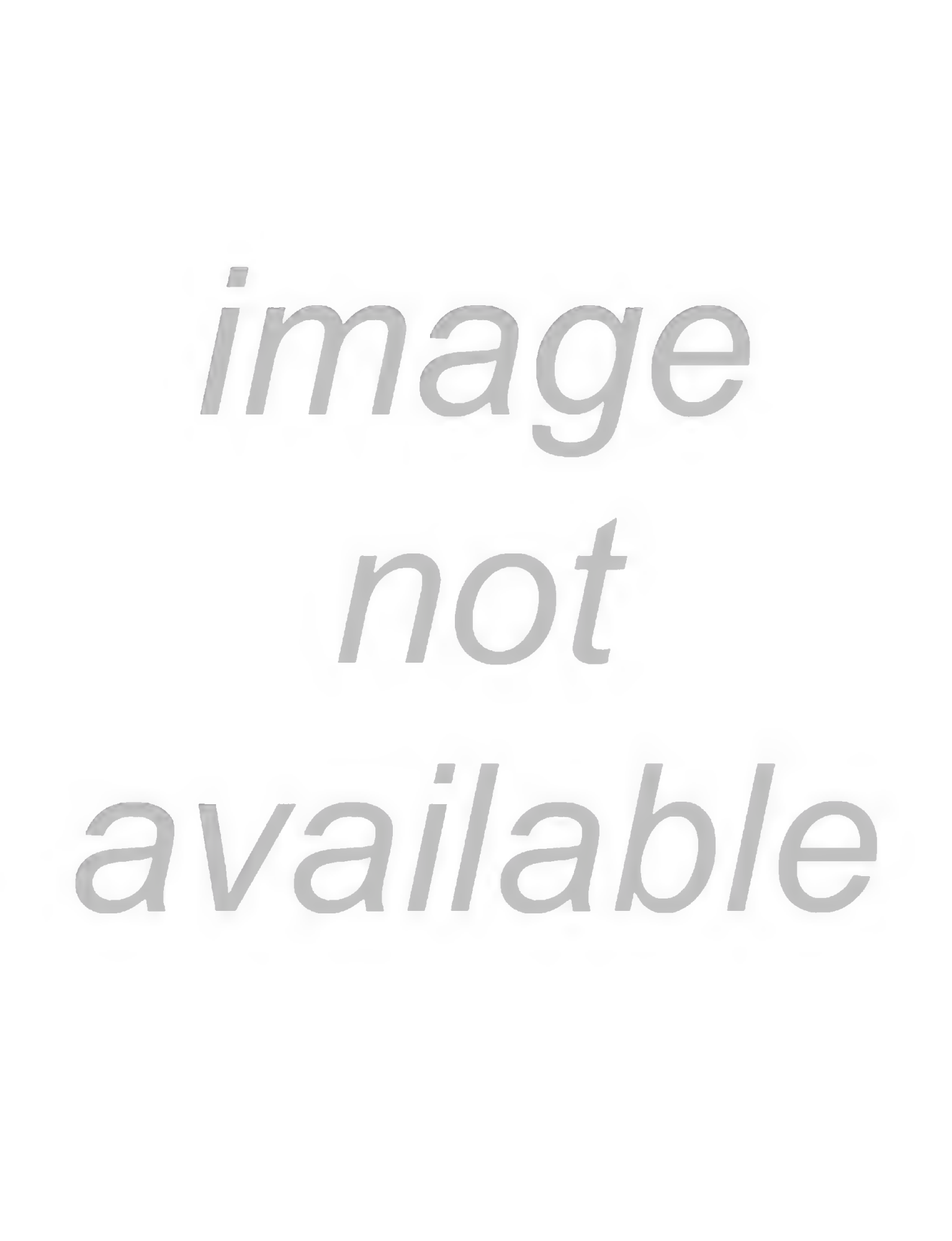


image
not
available

das vorletzte Glied der ersten wagerechten Reihe, also $x-1$; deren Summe mithin $\frac{3+x-1}{2} \cdot \frac{x-2}{2}$ beträgt. Hierbei ist jedoch $\frac{x-6}{4}$ mal die Differenz zweier sich direct gegenüberliegenden Glieder einer senkrechten Reihe, die, wie sofort aus der Symmetrie der Aufstellung erhellt, x^2-x beträgt, zu wenig genommen, was nun zur Gesamtsumme noch zu addiren ist.

Es ergiebt sich daher für die rechte Quadratseite die Summe:

$$S = x^2-x+1+\left(\frac{x}{2}+1\right)x+\frac{3x+x^2-x}{2}\cdot\frac{x-2}{2}+\frac{3+x-1}{2}\cdot\frac{x-2}{2}+\frac{x-6}{4}(x^2-x)$$

$$= (4x^2-4x+4+2x^2+4x+2x^2+x^3-4x-2x^2+2x+x^2-4-2x$$
$$+x^3-6x^2-x^2+6x):4$$

$$= \frac{2x+2x^3}{4} \quad \text{oder:} \quad \frac{x}{2}(1+x^2) \quad \text{w. z. h. w.}$$

II. Die Basis x eine ungerade Zahl.

Die Anstellung der $x.x$ Zahlen geschieht ebenso wie bei den Quadraten mit gerader Basis, nur dass noch in jeder Reihe das mittlere Glied besonders auszudrücken ist; und zwar ist dieses allemal gleich der halben Summe des Anfangs- und Endgliedes einer jeden Reihe. In der ersten wagerechten Reihe wird es also, da das erste Glied 1, das letzte Glied x heisst, $\frac{1+x}{2}$; in der letzten wagerechten Reihe, da das erste Glied x^2-x+1, das letzte x^2 heisst, $\frac{2x^2-x+1}{2}$ lauten. Ebenso berechnet sich das mittlere Glied der ersten senkrechten Reihe aus 1 und x^2-x+1 als $\frac{x^2-x+2}{2}$; das der letzten senkrechten Reihe aus x und x^2 als $\frac{x+x^2}{2}$. (vergl. die am Schlusse angefügte Tafel).

Bei der Verschiebung der einzelnen Zahlen ist nun namentlich zu beachten, dass man jedes um den Mittelpunkt sich gruppirende Quadrat einzeln nach den im folgenden aufgestellten Formeln zu behandeln hat. Sie teilen sich in Quadrate mit ungeraden Grundzahlen, deren Basis um eins vermehrt eine durch vier teilbare Zahl, und solche, deren Basis um eins vermindert eine durch vier teilbare Zahl ist.

A. Die Basis x um eins vermehrt eine durch vier teilb. Zahl.

I). Die vier Eckzahlen und die vier je in der Mitte einer Seite stehenden Zahlen, kurz Mittelzahlen genannt, verschieht man so, dass

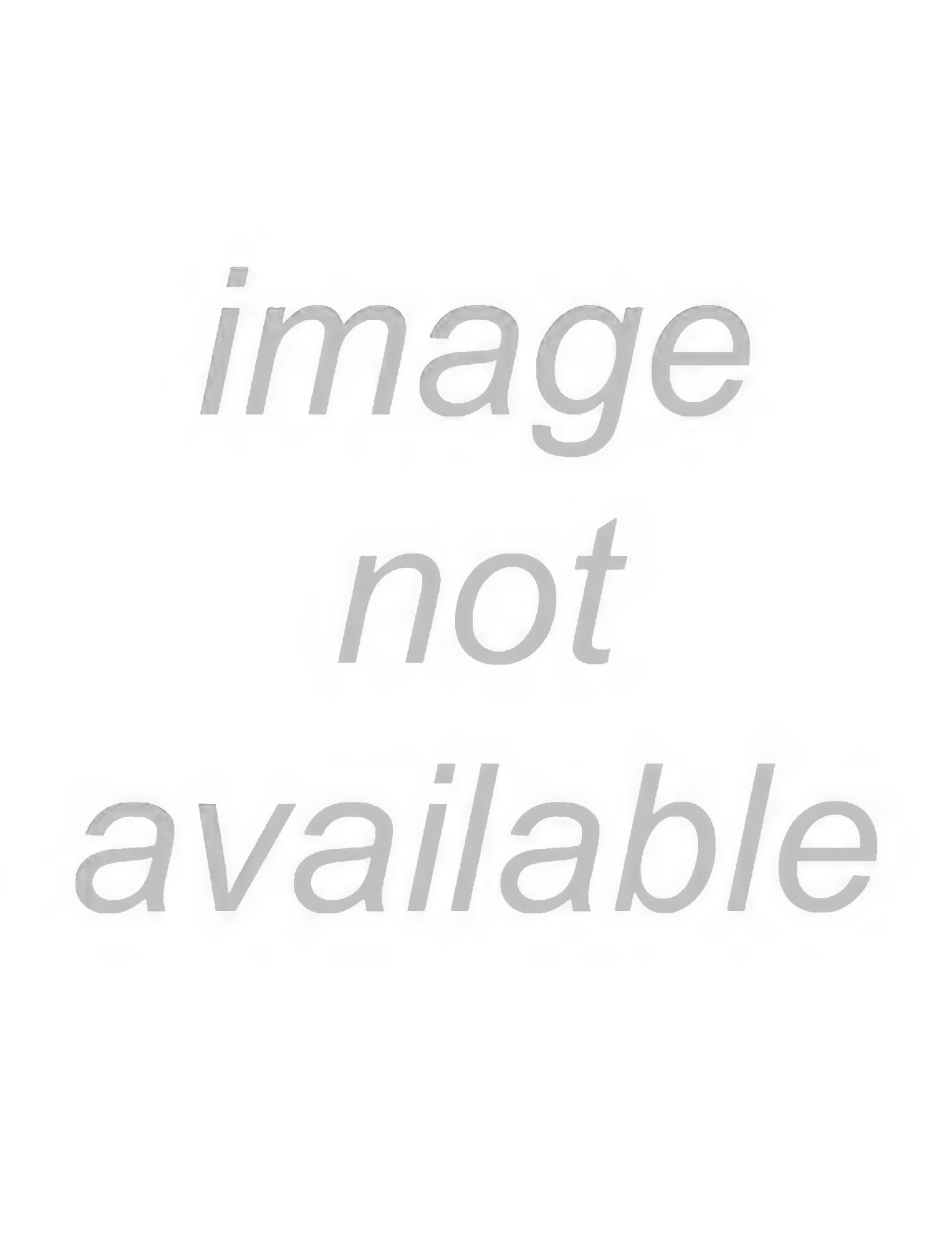


image
not
available

3). die rechte Mittelzahl d. h. $\frac{x+1}{2}.x$;

4). eine arithm. Reihe von $\frac{x-3}{2}$ Gliedern, deren Anfangsglied das zweite Glied der letzten wagerechten Reihe d. h. x^2-x+2; deren Endglied das $\left(\frac{x+1}{2}-1\right)$ Glied der letzten Reihe d. h. $\frac{2x^2-x+1}{2}-1$; deren Summe mithin $\frac{x^2-x+2+\frac{2x^2-x+1}{2}-1}{2}.\frac{x-3}{2}$ beträgt. — Hierbei ist jedoch $\frac{x-3}{4}$ mal die Differenz zweier sich senkrecht gegenüberliegenden Glieder d. h. $\frac{x-3}{4}(x^2-x)$ zuviel genommen, was von der Gesamtsumme wieder abzuziehen ist —

5). eine arithm. Reihe von $\frac{x-3}{2}$ Gliedern, deren Anfangsglied das vorletzte Glied der letzten wagerechten Reihe d. h. x^2-1; deren Endglied das $\left(\frac{x+1}{2}+1\right)$. Glied der letzten wagerechten Reihe d. h. $\frac{2x^2-x+1}{2}+1$; deren Summe mithin $\frac{x^2-1+\frac{2x^2-x+1}{2}+1}{2}.\frac{x-3}{2}$ beträgt. — Hierbei ist jedoch $\frac{x-3}{4}$ mal die Differenz zweier sich senkrecht gegenüberliegenden Glieder d. h. $\frac{x-3}{4}(x^2-x)$ zuviel genommen, was von der Gesamtsumme wieder abzuziehen ist

Die obere Qnadratseite besteht also aus:

$$S=\frac{2x^2-x+1}{2}+1+\frac{x+1}{x}.x+\frac{x^2-x+2+\frac{2x^2-x+1}{2}-1}{2}.\frac{x-3}{2}$$

$$-\frac{x-3}{4}(x^2-x)+\frac{x^2-1+\frac{2x^2-x+1}{2}+1}{2}.\frac{x-3}{2}-\frac{x-3}{4}(x^2-x)$$

$$=(8x^2-4x+4+8+4x^2+4x+4x^3-3x^2+3x-12x^2+9x-9-2x^3+8x^2$$
$$-6x+4x^3-x^2+x-12x^2+3x-3-2x^3+8x^2-6x):8$$

$$=\frac{4x+4x^3}{8}\text{ d. h. }\frac{x}{2}(1+x^2)\quad\text{w. z. b. w.}$$

Die linke Qnadratseite:

1). die untere Mittelzahl d. h. $\frac{2x^2-x+1}{2}$;

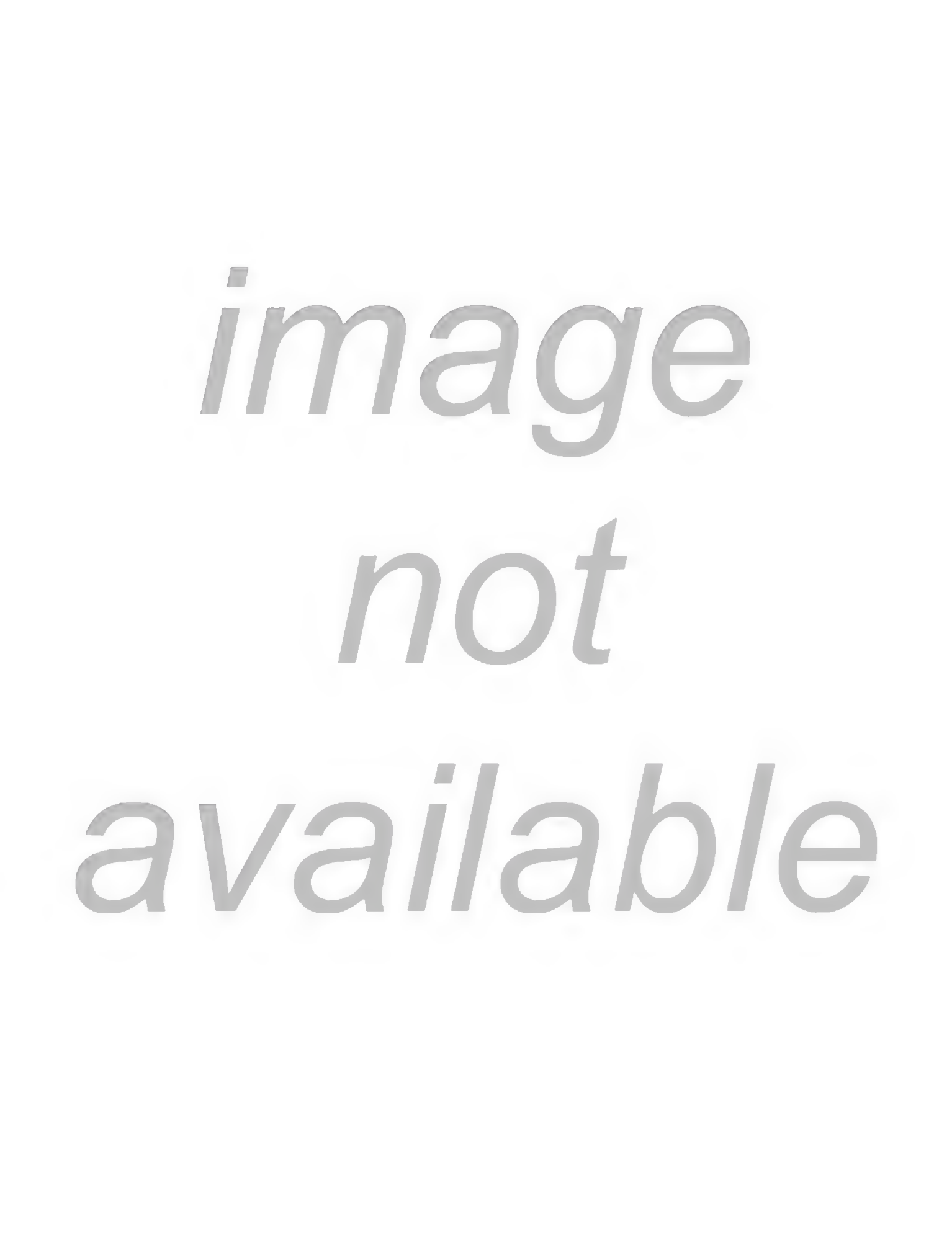


image
not
available

In den beiden anderen Quadratseiten ist jedes Glied das ursprüngliche Diamentralglied seines gegenüberliegenden Gliedes, also allemal das Snpplement zn $1+x^2$. Bezeichne ich nun die entsprechenden Glieder der gegenüberliegenden Reihe mit α, β, γ, δ u. s. w., so erhalte ich für jede der beiden vorliegenden Quadratseiten $1+x^2-\alpha+1+x^2-\beta+1+x^2-\gamma$ n. s. w.; im ganzen jedoch $x(1+x^2)-(\alpha+\beta+\gamma+\ldots)$. $\alpha+\beta+\gamma+\ldots$ gehen aber zusammen $\frac{x}{2}(1+x^2)$; mithin ist die Snmme der einzelnen zn addirenden Glieder:

$$x(1+x^2)-\frac{x}{2}(1+x^2)=\frac{x}{2}(1+x^2) \quad \text{w. z. h. w.}$$

B. Die Basis x um eins vermindert eine durch vier teilhare Zahl.

I). Jede Eckzahl vertauscht man mit einer benachbarten Mittelzahl, doch so, dass man immer von jeder Ecke ans die gleiche Richtnng beihehält; als Figur dargestellt (die Bogen gehen die Riehtnng an, in der die Vertauschung geschieht):

$$\begin{matrix} r & s & t \\ u & v & w \\ x & y & z \end{matrix} \quad \text{uud:} \quad \begin{matrix} u & t & s \\ r & v & z \\ y & x & w \end{matrix} \quad \text{oder:} \quad \begin{matrix} r & s & t \\ u & v & w \\ x & y & z \end{matrix} \quad \text{und:} \quad \begin{matrix} s & r & w \\ x & v & t \\ u & z & y \end{matrix}$$

II). Die zweiten und vorletzten, die dritten und drittletzten u. s. w. Zahlen der heiden wagerechten und senkrechten Reihen behandele man nach denselhen Formeln wie dieselben Zahlen der Quadrate, deren Basen um eins vermehrt durch vier teilbare Zahlen sind (vergl. II. A. IIa); nnr dass man hier nach diesem Principe auf jeder Seite allemal nur $\frac{x-1}{4}$ nebeneinanderstehende Zahlen behandelt.

III). Auf jeder Seite werden dann uoch zu heiden Seiten der Mittelzahl je $x-\left(3+2.\frac{x-1}{4}\right)$ d. h. $\frac{x-5}{2}$ Zahlen übrig bleiben, von denen man, jedech nur auf zwei aneinanderstossenden Qnadratseiten, noch je zwei sich einander entsprechende Zahlen mit einander zn vertauschen hat, so dass dann je zwei sich einander erst diametral gegenüherliegende Zahlen sich nun direct gegenüherliegen, znsammen also allemal die Summe $1+x^2$ ergehen.

Es enthalten demnach:
die obere Qnadratseite:

1). die linke Mittelzahl d. h. $\frac{x^2-x+2}{2}$,

2). die rechte ohere Eckzahl d. h. x;

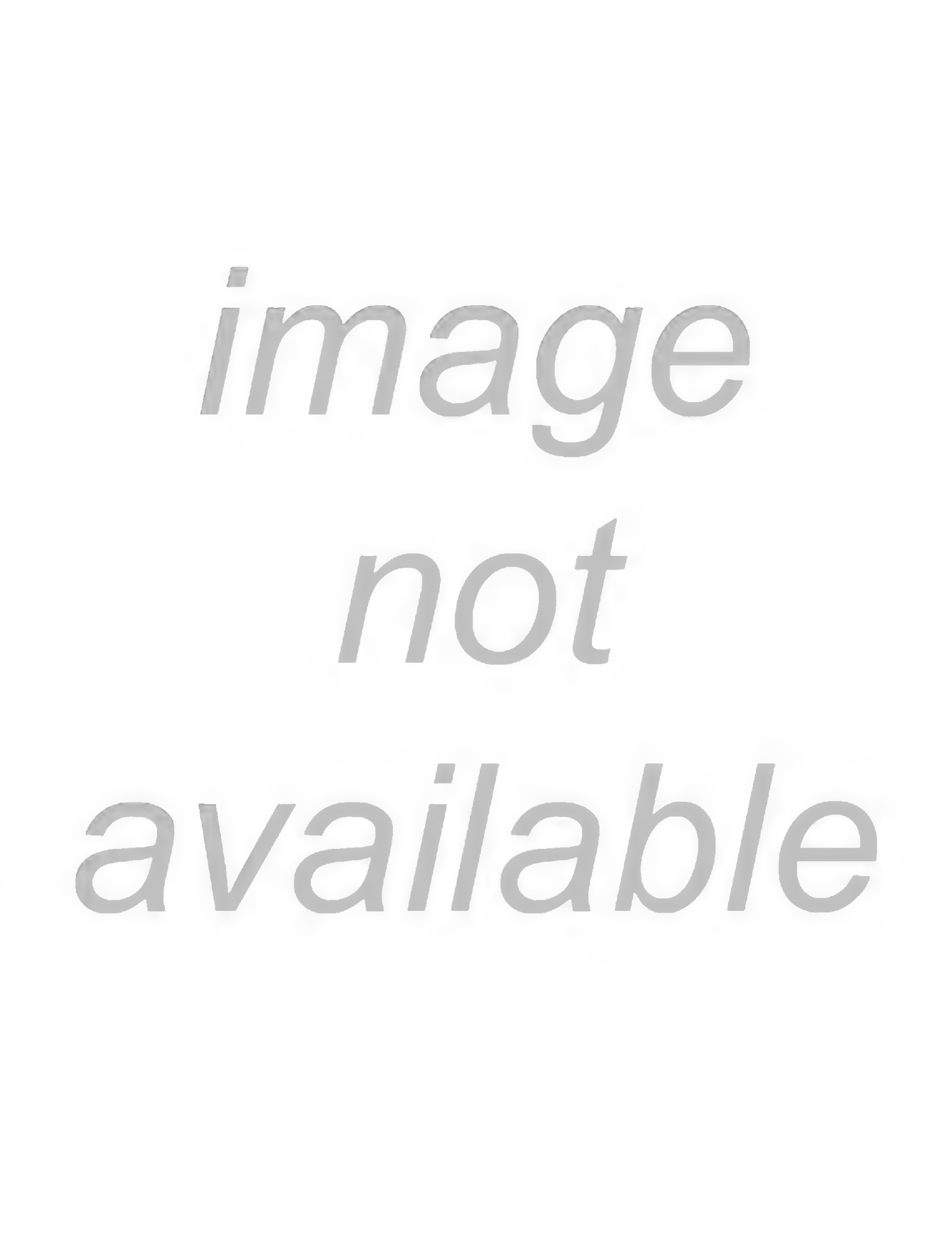


image
not
available

Die linke Qnadratseite:

1). die linke Mittelzahl d. h. $\frac{x^2-x+2}{2}$;

2). die linke obere Eckzahl d h. 1;

3). die untere Mittelzahl d. h. $\frac{2x^2-x+1}{2}$;

4). eine arithmetische Reihe von $\frac{x-3}{2}$ Gliedern, deren Anfangsglied das zweite Glied der letzten senkrechten Reihe d. h. $2x$; deren Endglied das $\left(\frac{x+1}{2}-1\right)$te Glied der letzten senkrechten Reihe d. h. $\left(\frac{x+1}{2}-1\right).x$; deren Summe mithin $\frac{2x+\left(\frac{x+1}{2}-1\right).x}{2}\cdot\frac{x-3}{2}$ beträgt. Hierbei ist jedoch $\frac{x-5}{4}$ mal die Differenz zweier sich wagerecht gegenüberliegenden Glieder, die, wie sofort aus der Symmetrie der Aufstellung der Zahlen erhellt, $x-1$ beträgt, zuviel genommen, was von der Gesamtsumme wieder abzuziehen ist —

5). eine arithmetische Reihe von $\frac{x-3}{2}$ Gliedern, deren Anfangsglied das vorletzte Glied der letzten senkrechten Reihe d. h. x^2-x; deren Endglied das $\left(\frac{x+1}{2}+1\right)$te Glied der letzten senkrechten Reihe d. h. $\left(\frac{x+1}{2}+1\right).x$; deren Summe mithin $\frac{x^2-x+\left(\frac{x+1}{2}+1\right).x}{2}\cdot\frac{x-3}{2}$ beträgt. Hierbei ist jedoch $\frac{x-5}{4}$ mal die Differenz zweier sich wagerecht gegenüberliegenden Glieder d. h. $\frac{x-5}{4}(x-1)$ zuviel genommen, was von der Gesamtsumme wieder abzuziehen ist.

Die linke Quadratseite besteht also aus:

$$S=\frac{x^2-x+2}{2}+1+\frac{2x^2-x+1}{2}+\frac{2x+\left(\frac{x+1}{2}-1\right).x}{2}\cdot\frac{x-3}{2}-\frac{x-5}{4}(x-1)$$
$$+\frac{x^2-x+\left(\frac{x+1}{2}+1\right).x}{2}\cdot\frac{x-3}{2}-\frac{x-5}{4}(x-1)$$
$$=(4x^2-4x+8+8+8x^2-4x+4+x^3+3x^2-3x^2-9x-2x^2+12x-10$$
$$+3x^3+x^2-9x^2-3x-2x^3+12x-10):8$$
$$=\frac{4x+4x^3}{8}$$
$$=\frac{x}{2}(1+x^2)\quad \text{w. z. b. w.}$$

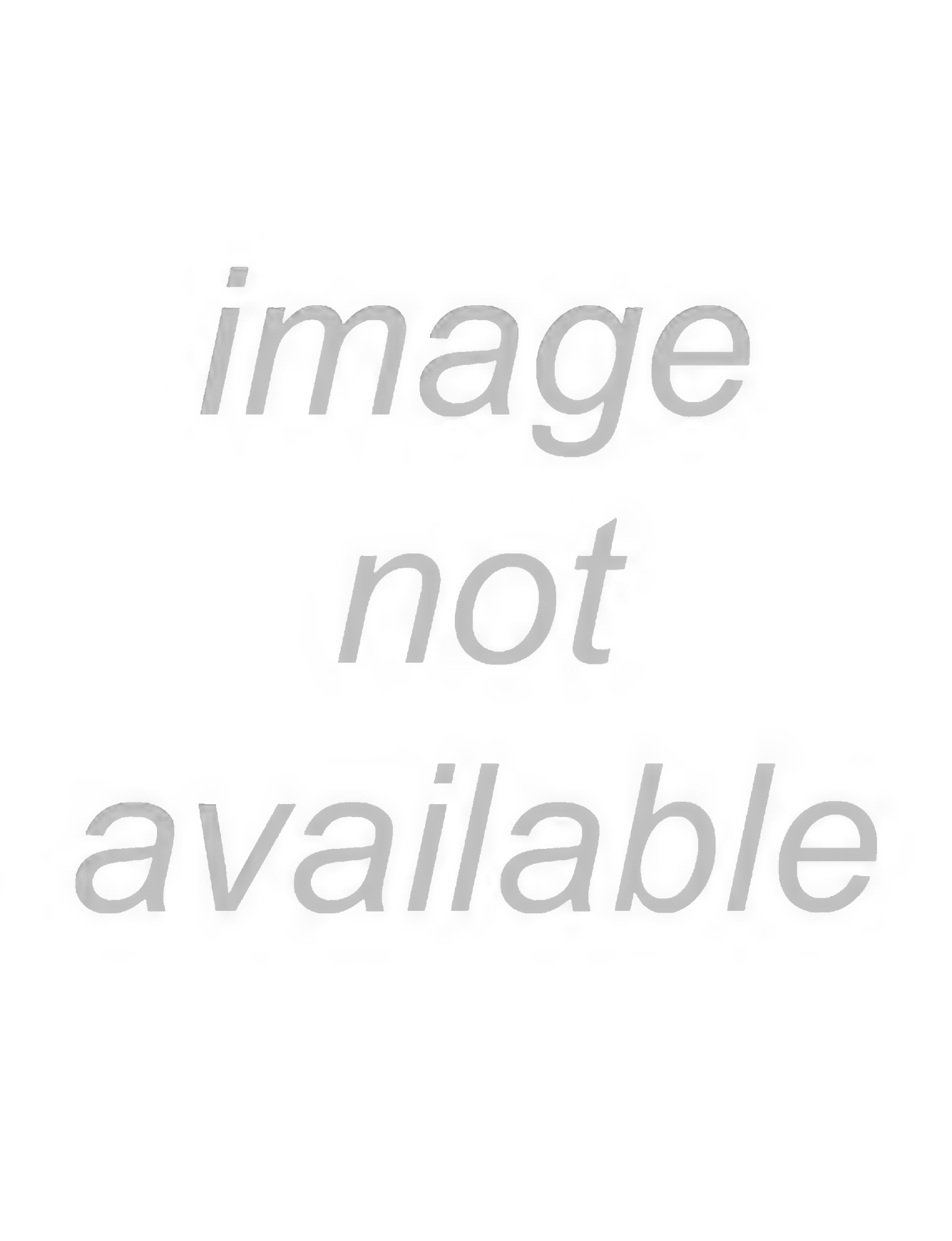


image
not
available

Aufstellung der Zahlen bei Quadraten mit gerader Grundzahl.

1. Glied	2. Glied	3. Glied	4. Glied	$(x-3)$. Glied	$(x-2)$. Gl.	$(x-1)$. Gl.	$x$tes Gl.
1	2	3	4 . . I. Reihe	$x-3$	$x-2$	$x-1$	x
$x+1$	$x+2$	$x+3$	$x+4$ . . II. Reihe	$2x-3$	$2x-2$	$2x-1$	$2x$
$2x+1$	$2x+2$	$2x+3$	$2x+4$ . . III. Reihe	$3x-3$	$3x-2$	$3x-1$	$3x$
$3x+1$	$3x+1$	$3x+3$	$3x+4$ . . IV. Reihe	$4x-3$	$4x-2$	$4x-1$	$4x$
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
x^2-4x+1	x^2-4x+2	x^2-4x+3	x^2-4x+4 . . viertletzte Reihe . .	x^2-3x-3	x^2-3x-2	x^2-3x-1	x^2-3x
x^2-3x+1	x^2-3x+2	x^2-3x+3	x^2-3x+4 . . drittletzte Reihe . .	x^2-2x-3	x^2-2x-2	x^2-2x-1	x^2-2x
x^2-2x+1	x^2-2x+2	x^2-2x+3	x^2-2x+4 . . vorletzte Reihe . . .	x^2-1x-3	x^2-1x-2	x^2-1x-1	x^2-1x
x^2-1x+1	x^2-1x+2	x^2-1x+2	x^2-1x+4 . . letzte Reihe . . .	x^2-3	x^2-2	x^2-1	x^2

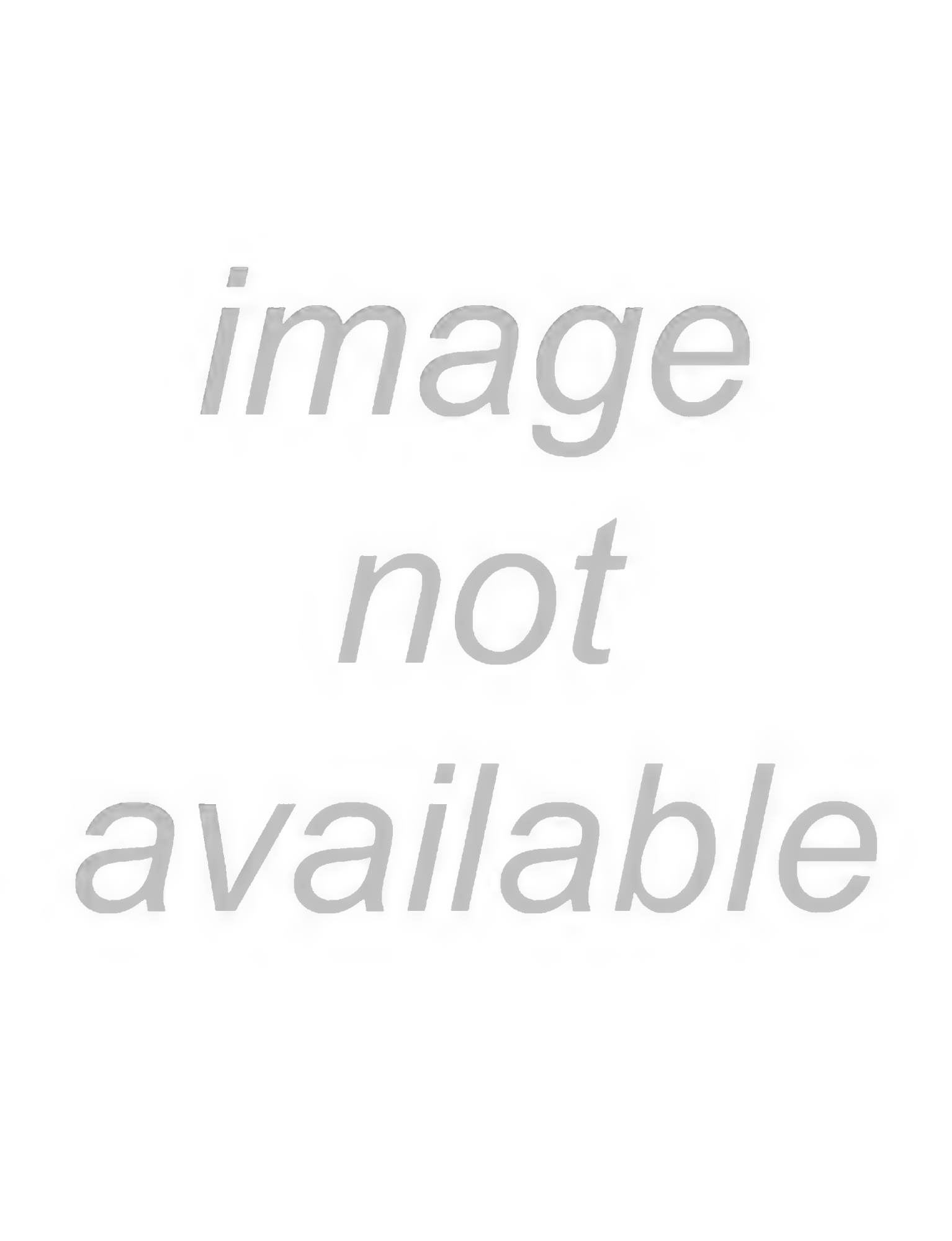


image
not
available

und zwar liegt dieser Punkt[1]) auf der Euler'schen Geraden ebensoweit vom Mittelpunkte M des Umkreises für das primäre Dreieck entfernt, nur nach entgegengesetzter Richtung, als der Höhenschnittpunkt: H. Auch sind dann $HSM\mathfrak{S}$ vier harmonische Punkte ebenso wie $HNSM$, wenn N der Mittelpunkt des durch die Seitenmitten und die Höhenfusspunkte XYZ gehenden Feuerbach'schen Kreises ist. Des letzteren Berührungspunkte mit dem Inkreise und den Ankreisen seien: $\mathfrak{T}\mathfrak{T}'\mathfrak{T}''\mathfrak{T}'''$, während $TT'T''T'''$ die vier Tarry'schen Punkte der secundären Dreiecke sind.

Der Tarry'sche Punkt ist der eine[2]) Endpunkt des Tarry'schen Durchmessers, dessen Richtung durch den Punkt Q bestimmt wird, und zwar verhalten sich die Abstände des Punktes Q von den Seiten des secundären Dreiecks umgekehrt wie die Kuben dieser Seiten[3]). Es gilt nun der folgende, zwei Gruppen merkwürdiger Dreieckspunkte die des Fenerbach'schen Kreises und die des Brocard'schen Winkels mit einander verknüpfende Satz, der auch über die fortrückende Bewegung des Feuerbach'schen Tangentialpunktes auf dem Inkreise bei verändertem primären Dreieck Aufschluss giebt:

III) Der Berührungspunkt: $\mathfrak{T}$ des Feuerbach'schen und des Inkreises für das primäre Dreieck, der Mittelpunkt L des Lemoine'schen und Brocard'schen Kreises und der Tarry'sche Punkt: T[4]) liegen auf einer Ge-

1) Bewegt sich C auf dem Umkreise M mit Radius r, so liegt $\mathfrak{S}$ auf einem Kreise aus M mit Radius r, wobei $MM' = 2\mathfrak{S}M$ ist. Vgl. Zelbr. Archiv der Math. u. Phys. 2. Reihe Teil II. pag. 324.

2) Welcher? kann auf mehrfache Art entschieden werden; durch Satz III) z. B., oder auch dadurch, dass man von den Ecken des secundären Dreiecks auf die Seiten des Brocard'schen Dreiecks Lote fällt. Die Ecken: $\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_3$ des Brocard'schen Dreiecks entstehen auf dem Brocard'schen Kreise durch die Winkelhalbirenden des primären Dreiecks. $D_1D_2\mathfrak{D}_3 = D_2D_1\mathfrak{D}_3 =$ etc. ist dann der Brocard'sche Winkel ϑ. Der andere Endpunkt des Tarry'schen Durchmessers sei: E, beide auf Kreis J.

3) Man construirt Q, indem man die durch die Ecktransversale $D_1\mathfrak{S}$, ... auf Seite D_2D_3 ... entstehenden Abschnitte vertauscht und so den Gegenpunkt 2ter Art von $\mathfrak{S}$ herstellt. Der Gegenpunkt erster Art, indem die durch die Ecktransversale entstehenden Teilwinkel vertauscht werden, wird der Schwerpunkt des secundären Dreiecks. Bei dieser Spiegelung an den Winkelhalbirenden des secundären Dreiecks werden die Seiten des primären 3 Parabeln, der Kreis J selbst wird eine Curve 4ter Ordnung, die jedoch in die ∞ entfernte Gerade und die Seiten des secundären Dreiecks zerfällt. Vier Punkte entsprechen sich selbst. Das Strahlenbüschel, dessen Strahlen zum Grebe'schen Durchmesser senkrecht stehen, verwendet sich in ein Büschel Kegelschnitte, die durch $D_1D_2D_3$ und E gehen, etc.

4) Die Punkte L und T sind zunächst in Bezug auf das inbeschriebene secundäre Dreieck zu nehmen.

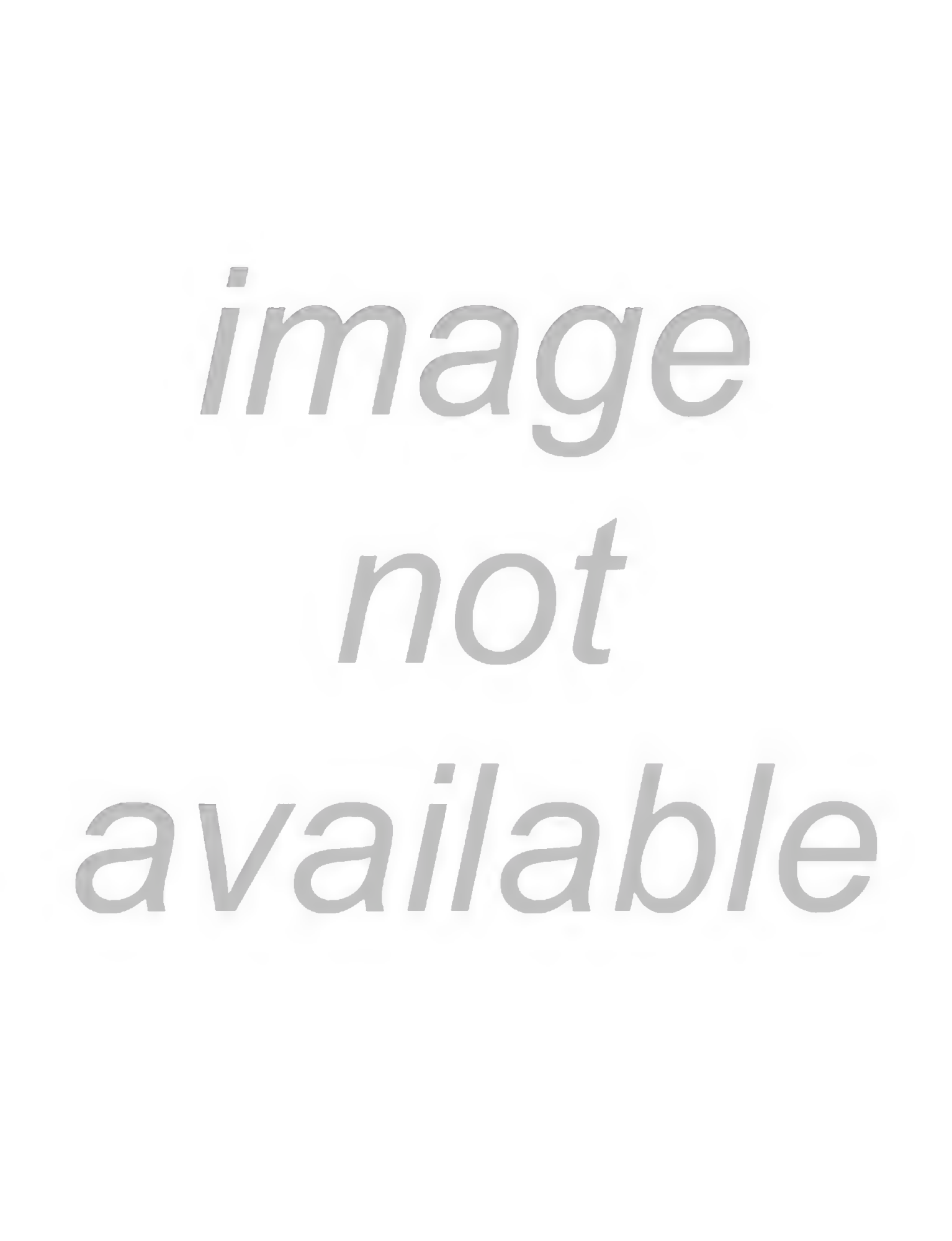


image
not
available

$\{r\cos\alpha,\ r\cos\beta,\ r\cos\gamma\}$ und H

$$\left\{\frac{a^4-(b^2-c^2)^2}{8aF},\ \frac{b^4-(a^2-c^2)^2}{8bF},\ \frac{c^4-(a^2-b^2)^2}{8cF}\right\}$$

benutzt werden,

$$\mathfrak{B}_1:\mathfrak{B}_2:\mathfrak{B}_3=\frac{\sigma_1}{a}:\frac{\sigma_2}{b}:\frac{\sigma_3}{c},\quad \text{worin}$$

$$\sigma_1=\xi\eta\zeta a+\frac{u}{2}\xi(\eta^2+\eta\zeta+\zeta^2)-\frac{u^2}{4}\eta\zeta$$

σ_2 und σ_3 ein entsprechender Ausdruck ist. Nun kann aber bei der Determinante das erste und letzte Glied von σ_1, σ_2, σ_3 als Proportionalanteil der andern Zeilen fortgelassen werden und man erhält die Determinante:

$$\triangle=\begin{vmatrix} a, & b, & c \\ \eta\zeta, & \zeta\xi, & \xi\eta \\ \xi(\eta^2+\eta\zeta+\zeta^2), & \eta(\zeta^2+\zeta\xi+\xi^2), & \zeta(\xi^2+\xi\eta+\eta^2) \end{vmatrix}$$

Indem sieb der Factor $\mathfrak{N}=\eta\zeta+\zeta\xi+\xi\eta$ absondern lässt, bleibt die Identität:

$$\xi^2(\eta^2-\zeta^2)+\eta^2(\zeta^2-\xi^2)+\zeta^2(\xi^2-\eta^2)=0$$

übrig, es gebt also die Gerade $J\mathfrak{G}$ durch $\mathfrak{S}$, ebenso $J'\mathfrak{G}'$, $J''\mathfrak{G}''$, $J'''\mathfrak{G}'''$.

Beweis für III.

Die Abstände l_1, l_2, l_3 des Mittelpunktes L dos Lemoine'scben oder des Brocard'seben Kreises verbalten sich wie:

$$\frac{1}{a}\left(\frac{u}{2}+\xi\right)+\tau_1:\frac{1}{b}\left(\frac{u}{2}+\eta\right)+\tau_2:\frac{1}{c}\left(\frac{u}{2}+\zeta\right)+\tau_3$$

worin aber $\tau_1\,\tau_2\,\tau_3$ als Proportionalanteile der folgenden Zeile bei der Determinante untordrückt werden können [1]).

---

1) l_1 selbst nämlich wird:

$$\frac{F}{u\mathfrak{N}}\left(\frac{3\xi\eta\zeta}{a}+\frac{3u}{2a}\eta\zeta+\frac{\xi}{a}(\eta-\zeta)^2\right)$$

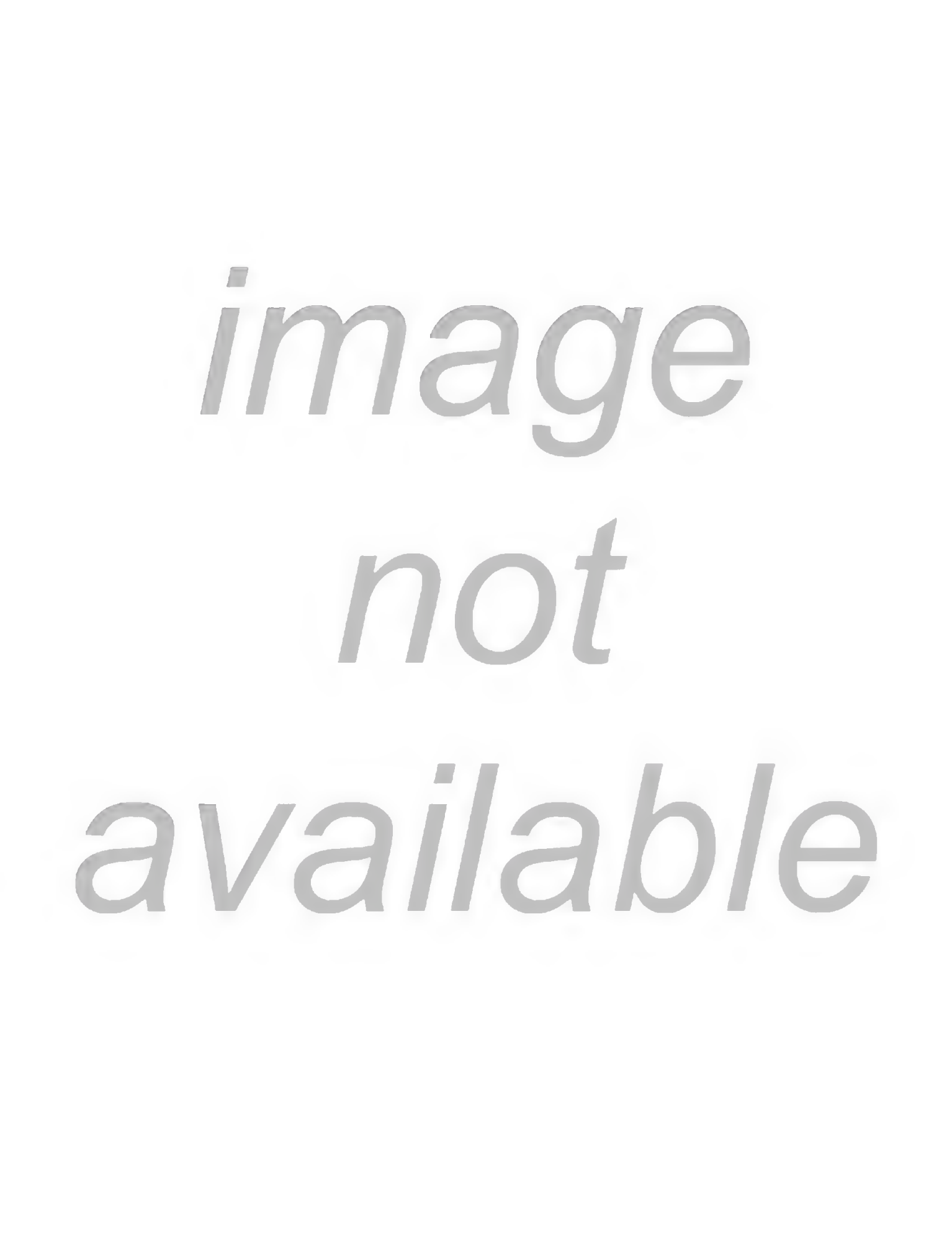


image
not
available

$$m.\nabla =$$

$$\begin{vmatrix} b+c) & , & c+a & , & a+b \\ [b(b-a)-c(c-a)]^2 & , & [c(c-b)-a(a-b)]^2 & , & [a(a-c)-b(b-c)]^2 \\ [ab(b-a)+ac(c-a)]^2, & & [bc(c-b)+ba(a-b)]^2, & & [ca(a-c)+cb(b-c)]^2 \end{vmatrix}$$

Durch Subtraction und Addition der Colonnen zu einander erhält man hieraus auch:

$$m' \nabla =$$

$$\begin{vmatrix} a^2 & , & b^2 & , & c^2 \\ a(c(c-b)-a(a-b))(a(a-c)-b(b-c)), & & b(-)(-), & & c(-)(-) \\ (c(c-b)+a(a-b))(a(a-c)+b(b-c)), & & (+)(+), & & (+)(+) \end{vmatrix}$$

Die zweite Zeile kann $a(c-a)(a-b)\eta\zeta, \ldots, \ldots$ oder $a^2\xi\eta\zeta - abc\,\eta\zeta, \ldots, \ldots$ geschrieben werden und geht im Proportionalanteile der ersten Zeile verändert einfach in: $\eta\zeta$, $\xi\eta$, $\eta\xi$ über, die letzte Zeile endlich, in ähnlicher Art [1]) verändert, wird: $a^2(\eta\zeta + bc - b\eta - c\zeta) - abc(\eta + \zeta), \ldots, \ldots$ und da $\eta + \zeta = a$, $\xi + \xi = b$, $\xi + \eta = c$ ist, kann dafür: $a^2(\eta\zeta - b\eta - c\zeta), \ldots, \ldots$ oder auch $-a^2\mathfrak{R}$, $-b^2\mathfrak{R}$, $-c^2\mathfrak{R}$ gesetzt werden.

Mithin verschwindet ∇ identisch und liegen somit die Punkte $\mathfrak{T}LT$ auf einer Geraden.

J. Hermes.

2.

Momentaner Bewegungszustand eines in der Praxis viel angewandten Mechanismus.

Man stelle sich vor zwei Ebenen, von denen jede mit einem curvenförmigen Schlitz von gleicher Breite versehen ist. Beide Ebenen drehen sich auf einer festen Ebene; die eine, welche den Schlitz MN enthält, um den Punkt A, die andere, welche den Schlitz UV besitzt, um den Punkt B. In den Raum zwischen den beiden Schlitzen denke man sich einen cylindrischen Stift mit kreisförmiger Basis gesteckt, dessen Radius genau die Breite jedes Schlitzes hat. Ferner

---

1) $\frac{1}{2}(c^2+a^2-b(c+a)) = (c+a)\eta - ac$ und $\frac{1}{2}(b^2+a^2-c(b+a)) = (a+b)\zeta - ab$. Wird multiplicirt, so ist in dem Product das Glied $+(ab+bc+ca)\eta\xi$ wegen des Factors $ab+bc+ca$ ohne Einfluss auf den Wert der Determinante m'. ∇ und fällt mithin fort.

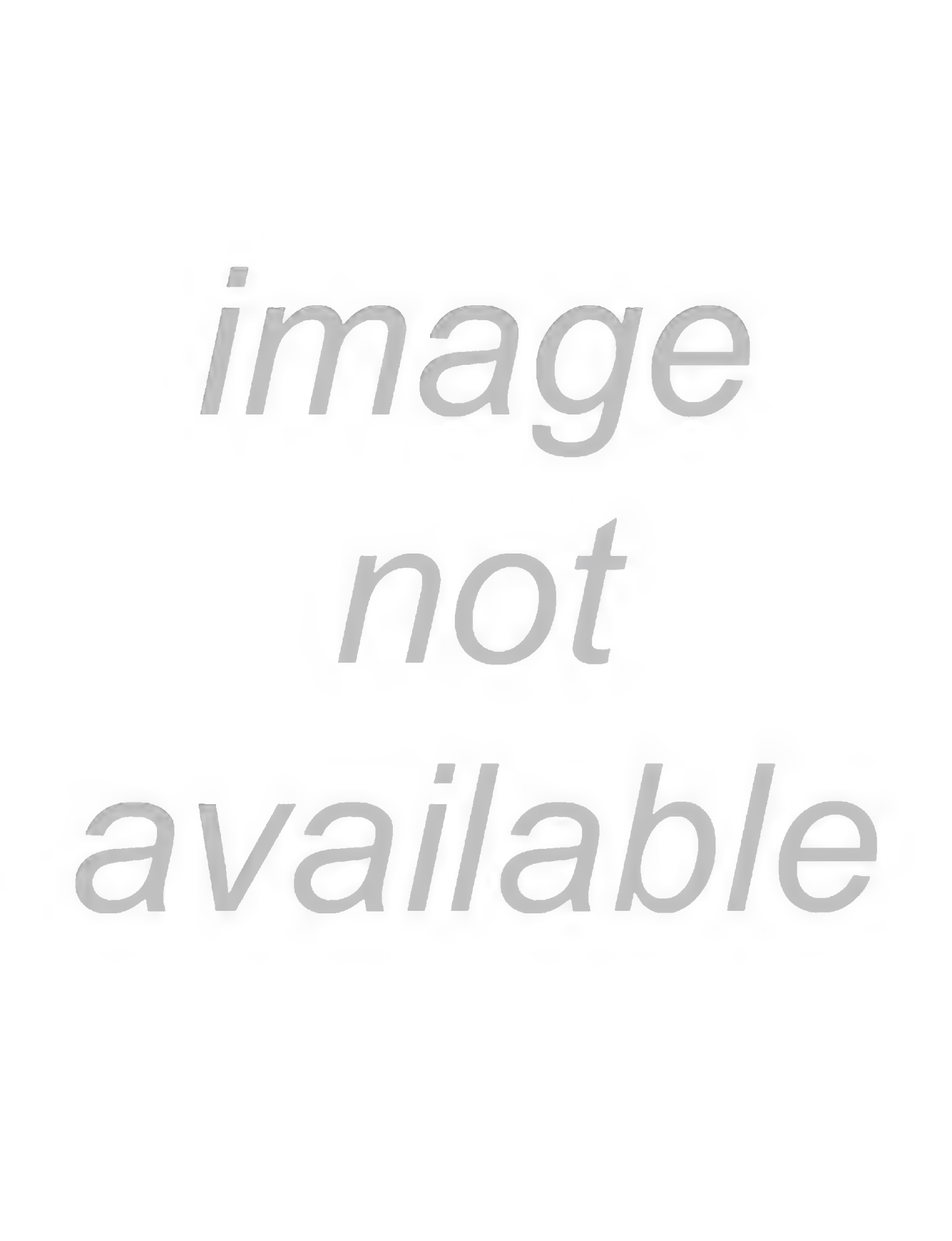


image
not
available

Curve hat dieselbe Tangente als die vorher construirte der Eingriffslinie. Durch diese Tangente ist bekanntlich der momentane Bewegungszustand der Stangen (Glieder) CE und ED vollkommen bestimmt.

Der Mechanismus in Fig. 2., welcher als sechsgliederige Cylinderkette in der Maschinenwissenschaft bekannt ist, findet Anwendung bei der Quintenzwaage, bei einer besondern Art der Stephenson'schen Locomotivsteuerung, bei der Hart'schen Geradführung u. s. w.

Man kann nun sagen, dass in Bezug auf die Bewegung des Punktes E der Mechanismus in Fig. 1. mit dem Mechanismus in Fig. 2. momentan identisch ist. Sind die Punkte C und D in beiden Figuren zugleich die Krümmungsmittelpunkte der Curven MN und UV, so sind beide Mechanismen in Bezug auf die Bewegung des Punktes E doppelt momentan identisch, d. h. die von E beschriebenen Curven beider Mechanismen haben dieselben Krümmungsradien. Die Construction dieser Krümmungsradien werden wir in einer späteren Abhandlung geben. Sind endlich die Curven MN und UV Kreise und die Punkte C und D beider Figuren derselben ihre Mittelpunkte, so sind beide Mechanismen in Bezug auf die Bewegung des Punktes E absolut und continuirlich identisch. Interessant ist der Specialfall, wenn die Schlitze geradlinig sind, und deren Mittellinien durch die Punkte A und B hindurchgehen, es fallen dann die Punkte C und D in die Unendlichkeit (Fig. 3.) und die von E beschriebene Curve ist die feste Polcurve einer beweglichen Ebene, deren Punkte F und G um A und B Kreise beschreiben. Um die Tangente an die Polcurve zu zeichnen, braucht man nur EQ zu ziehen und zu EQ die Coordinirte ET zu construiren, letztere ist die verlangte Tangente. Ebenso werden wir in der späteren Abhandlung den Krümmungsradius der Polcurve finden; eine allgemeine Lösung seiner Construction ist meinem Wissen nach bis jetzt noch nicht gegeben worden.

Um, wenn auch nicht die Tangente, sondern die Normale der von E beschriebene Curve (Fig. 1.) zu finden, kann man auch folgendermaassen verfahren: Man bilde die Schnittpunkte L und K der Linie FG mit CE und ED. Hierauf bilde man den Schnittpunkt P der Geraden LA und KB, zieht man nun die Gerade PE, so ist diese die verlangte Normale. (Diese Construction haben wir in der vorher genannten Abhandlung in den Verhandlungen des Vereins z. Beförderung des Gewerbfleisses (Seite 438—439) gegeben.) Es wäre wol interessant, den Zusammenhang dieser Normalenconstruction mit der vorher gegebenen Tangentenconstruction zu finden.

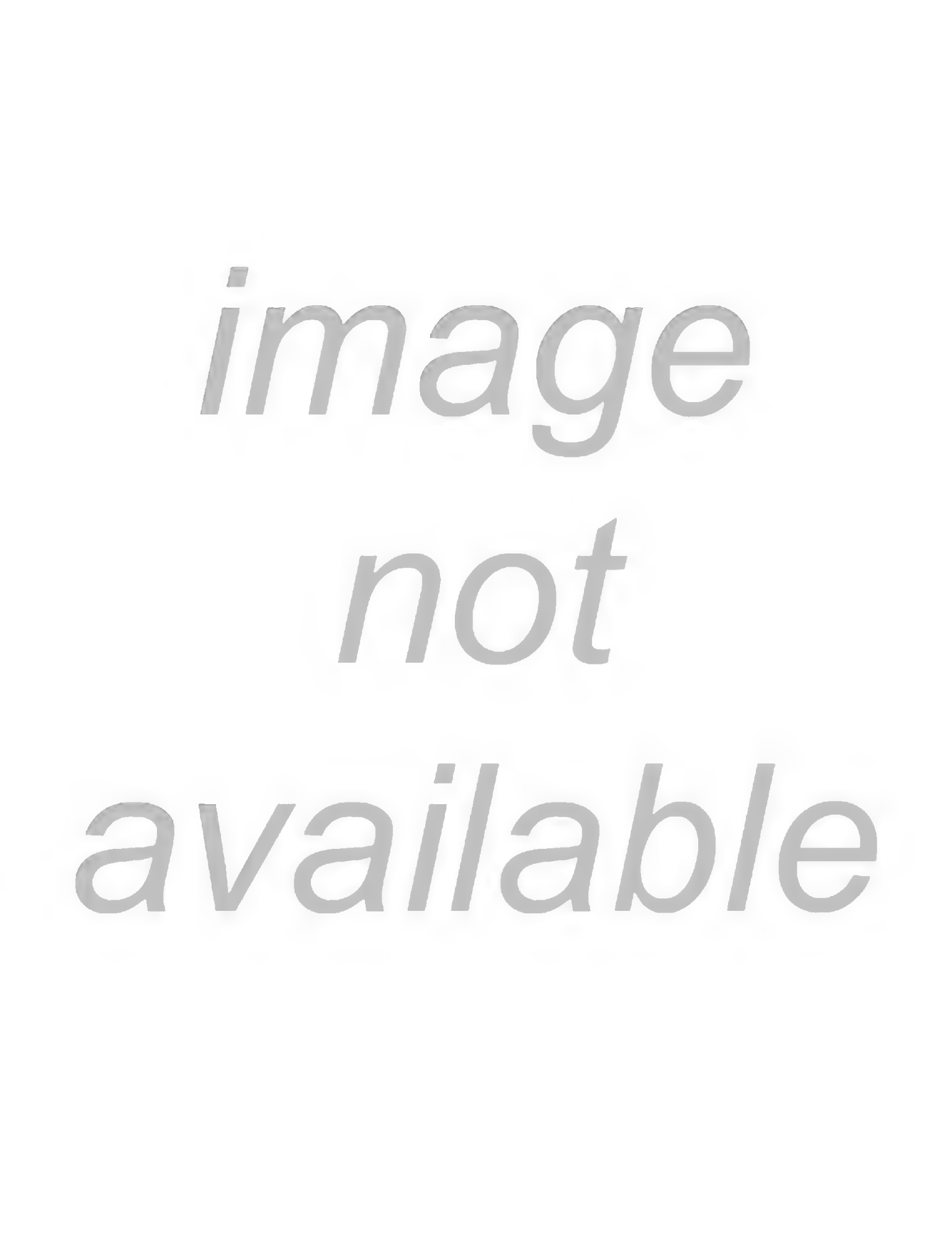


image
not
available

Die Derivirten der beiden Formen

$$f_i = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad g_i = \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial y_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

sind durch die Relationen verbunden:

$$g_i(y_1, y_2, \ldots y_n) = \sum_{k=1,2,\ldots n} f_k(x_1, x_2, \ldots x_n) \cdot c_{ki} = \sum_{k=1,2,\ldots n} f_k(c_{1i}, c_{2i}, \ldots c_{ni}) \cdot x_k$$

Die transformirte Form enthält y_i nicht, wenn $g_i = 0$, also

$$f_k(c_{1i}, c_{2i}, \ldots c_{ni}) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

sind. Dann verschwindet aber die Determinante der quadratischen Form f:

$$D = |\, a_{ik} \,|_{i,k=1,2,\ldots n}$$

Hieraus folgt:

1. Wenn D nicht $= 0$ ist, so kann die Anzahl der Veränderlichen durch lineare Transformation nicht verringert werden;

2. wenn $D = 0$ ist, so ist die Reduction möglich, und zwar können ebenso viele Veränderlichen weggeschafft worden, wie viele linear von einander unabhängige Lösungen das Gleichungssystem:

$$f_i(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

zulässt.

II.

Es seien D und die sämtlichen Diagonalunterdeterminanten bis zum $(m+1)$-ten Grade $= 0$, während die Diagonalunterdeterminante m-ten Grades

$$d = |\, a_{ik} \,|_{i,k=1,2,\ldots m}$$

nicht verschwinde.

$m > 0$, denn wenn die sämtlichen Diagonalunterdeterminanten zweiten $(a_{ii}a_{kk} - a_{ik}^2)$ und ersten (a_{ii}) Grades verschwinden, so verschwinden auch die sämtlichen Elemente von D, dieser Fall kann aber ausgeschlossen werden.

Wir bezeichnen mit $\Delta_{\alpha\beta}$ die Determinante $(m+1)$-ten Grades, die aus d hervorgeht durch Hinzufügung der α-ten Reihe und der β-ten Colonne von D, als $(m+1)$-te Reihe resp. Colonne.

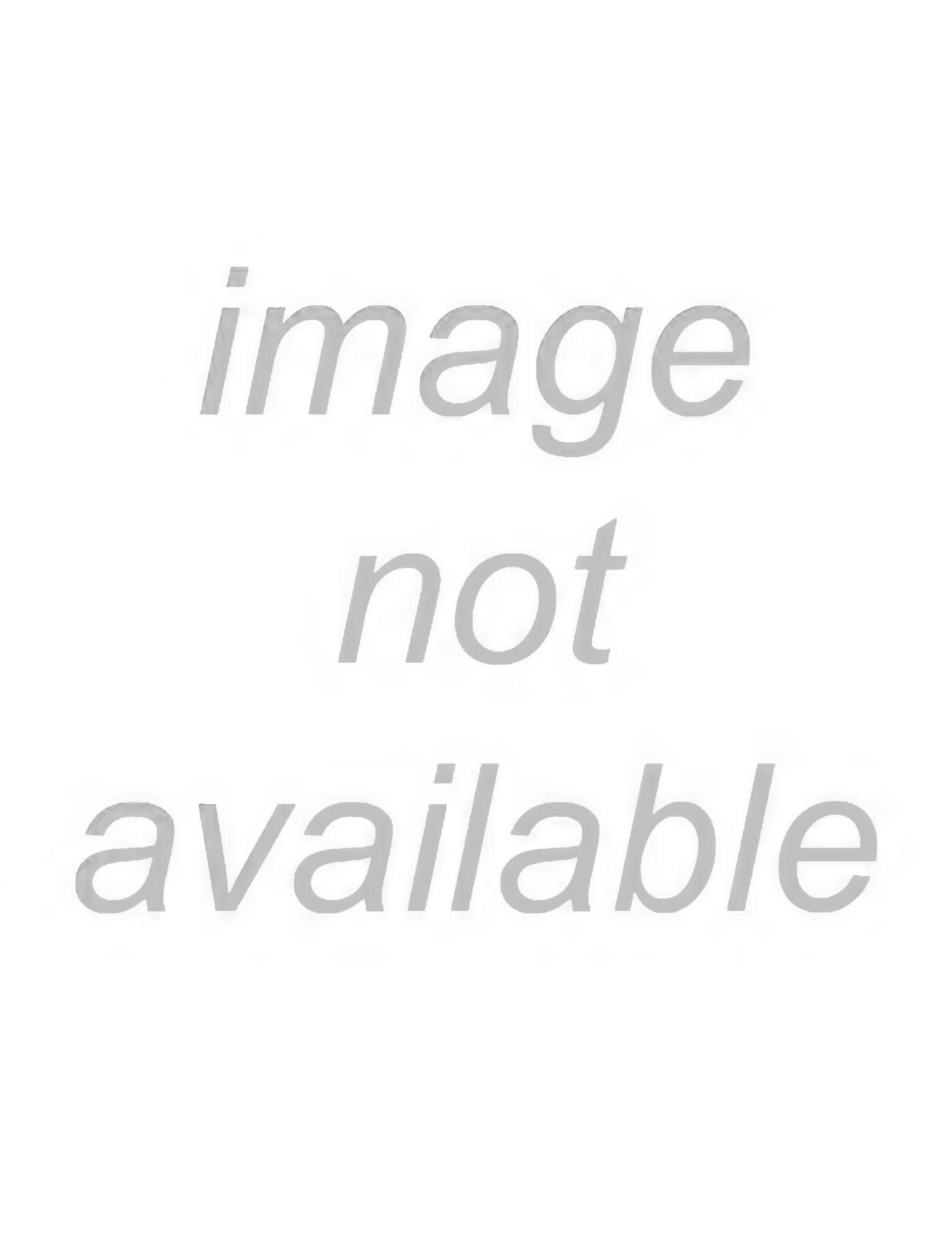


image
not
available

$$g(y_1, y_2, \ldots y_m) = \Sigma a_{ik} y_i y_k$$
$$i, k = 1, 2, \ldots m$$

sein mit der nicht verschwindenden Determinante d. Die Anzahl der Veränderlichen kann also durch lineare Transformation nicht weiter reducirt werden.

Klausenburg (Ungarn) 1887 Juni

Prof. Dr. J. Vályi.

4.

Zur Function $\Gamma(x)$.

Seien a und n ganze Zahlen, dann wird offenbar

$$\lim \Gamma(a+n) = \lim \varrho \Gamma(n) \qquad \lim n = \infty$$

nm

$$\lim \varrho = \lim n(n+1) \ldots (n+a-1) = \lim n^a \left\{1+\frac{1}{n}\right\} \ldots \left\{1+\frac{a-1}{n}\right\}$$

oder

$$\lim \varrho = \lim n^a \qquad \lim n = \infty$$

daraus

$$\lim \Gamma(a+n) = \lim n^a \Gamma(n) \qquad \lim n = \infty$$

nnd

$$\lim \frac{\Gamma(n+a)-\Gamma(n)}{a} = \lim \Gamma(n) \frac{n^a-1}{a}$$

Ersetzen wir nun n durch x, a durch dx, so wird

$$\frac{d\Gamma(x)}{dx} = \Gamma(x) \log x$$

Schreiben wir nun nx an die Stelle von x, so folgt

$$\int \frac{\Gamma'(nx)}{\Gamma(nx)} dnx = \int (\log x + \log n)\, n dx + c$$

oder

$$\log \Gamma(nx) = n\{x \log x - x\} + nx \log n + c$$

nnd demnach

$$\lim \frac{1}{n} \{\log \Gamma(nx) - nx\} = x \log x - x \qquad \lim n = \infty$$

Wir haben also durch ziemlich einfache Betrachtungen eine Reihe von Sätzen gewonnen, die sonst auf einem viel umständlicheren Wege abgeleitet werden.

Prag, im Juni 1887. W. Láska.

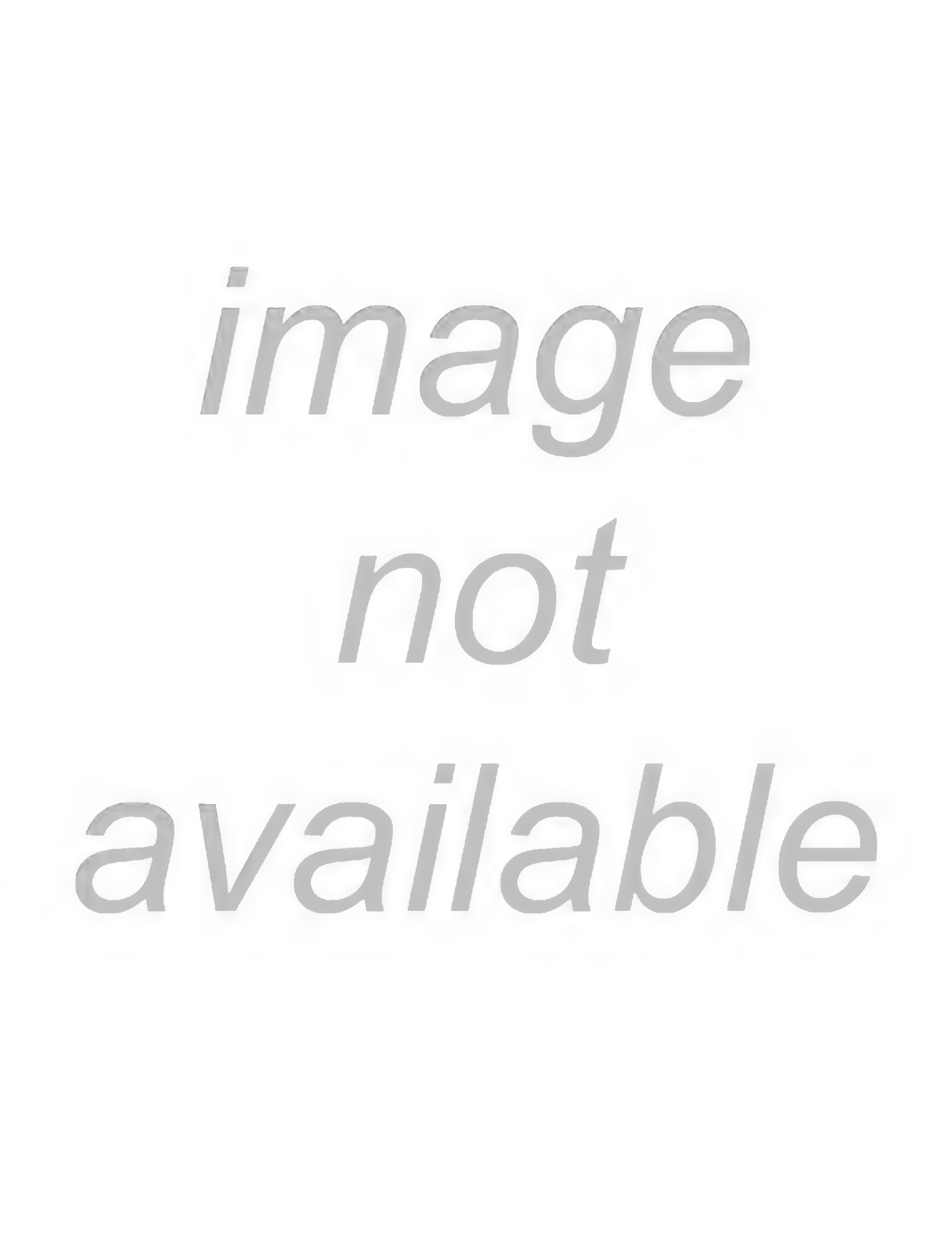


image
not
available

S. Realis: Giovanni Plana, geboren zu Voghera den 8. November 1781, gestorben zu Turin den 29. Januar 1864.

Ch. Henry: Ueber einige ungedruckte Blätter von Lagrange. — Ungedruckte Briefe von Euler an d'Alembert. — Ungedruckte Briefe von Laplace, veröffentlicht mit einer ersten Redaction seiner Methode die Kometenbahnen zu bestimmen und einer Notiz über die Manuscripte von Pingré.

E. Narducci: Ungedruckte Lebensbeschreibungen italienischer Mathematiker, verfasst von Bernardino Baldi.

J. Dupuis: Note über eine geometrische Stelle der Republik des Platon. — Note über eine geometrische Stelle des Menon von Platon. H.

Bibliotheca Mathematica herausgegeben von Gustaf Eneström, Stockholm 1886. E. u. G. Beijer. Berlin, Mayer u. Müller. Paris, A. Hermann. 4^0.

Mit diesem Bande schliesst die erste Reihe der Bibliotheca Mathematica, welche seit 1884 (s. litt. Bericht 11. S. 37) im Anschluss an die Acta Mathematica und in gleichem Format mit denselben erschienen ist. Er besteht aus 4 Numern, deren jede für sich mit dem alphabetischen Verzeichniss der Werke, Abhandlungen und Noten, dann der Recensionen beginnt. Die darin berücksichtigten Journale sind in Nr. 4 aufgeführt. Hierauf folgt ein sachlich eingeteiltes Register der Namen der Verfasser mit Verweisung auf die Numern. Unter den vermischten Notizen ist in Nr. 1. und 2. besonders zu nennen die Kritik, welche B. Boncompagni der Schrift von Maximilien Marie: „Sur l'histoire des sciences mathématiques et physiques" — zuteil werden lässt, indem er derselben zahlreiche Ungenauigkeiten und Mängel in den Angaben nachweist. — L. De Marchi rechtfertigt die Namensangabe „Manrolicio" statt der gewöhnlichen „Maurolico"; doch mag der Name von dem Messiner Mathematiker selbst verändert worden sein; man findet dafür auch Maruli. — Eneström stellt in Nr. 1. 2. und 3. die in Schweden publicirten Schriften von Ausländern und schwedische Uebersetzungen ausländischer Werke zusammen. — S. Günther zieht den Anteil, den Albrecht Dürer an der Begründung der Curventheorie hat, ans Licht. — P. Mansion und G. Eneström geben historische Aufschlüsse über Newton's allgemeine Interpolationsformel. — Ausserdem sind in den einzelnen Numern mehrere Fragen gestellt und 1 Beantwortung gegeben. H.

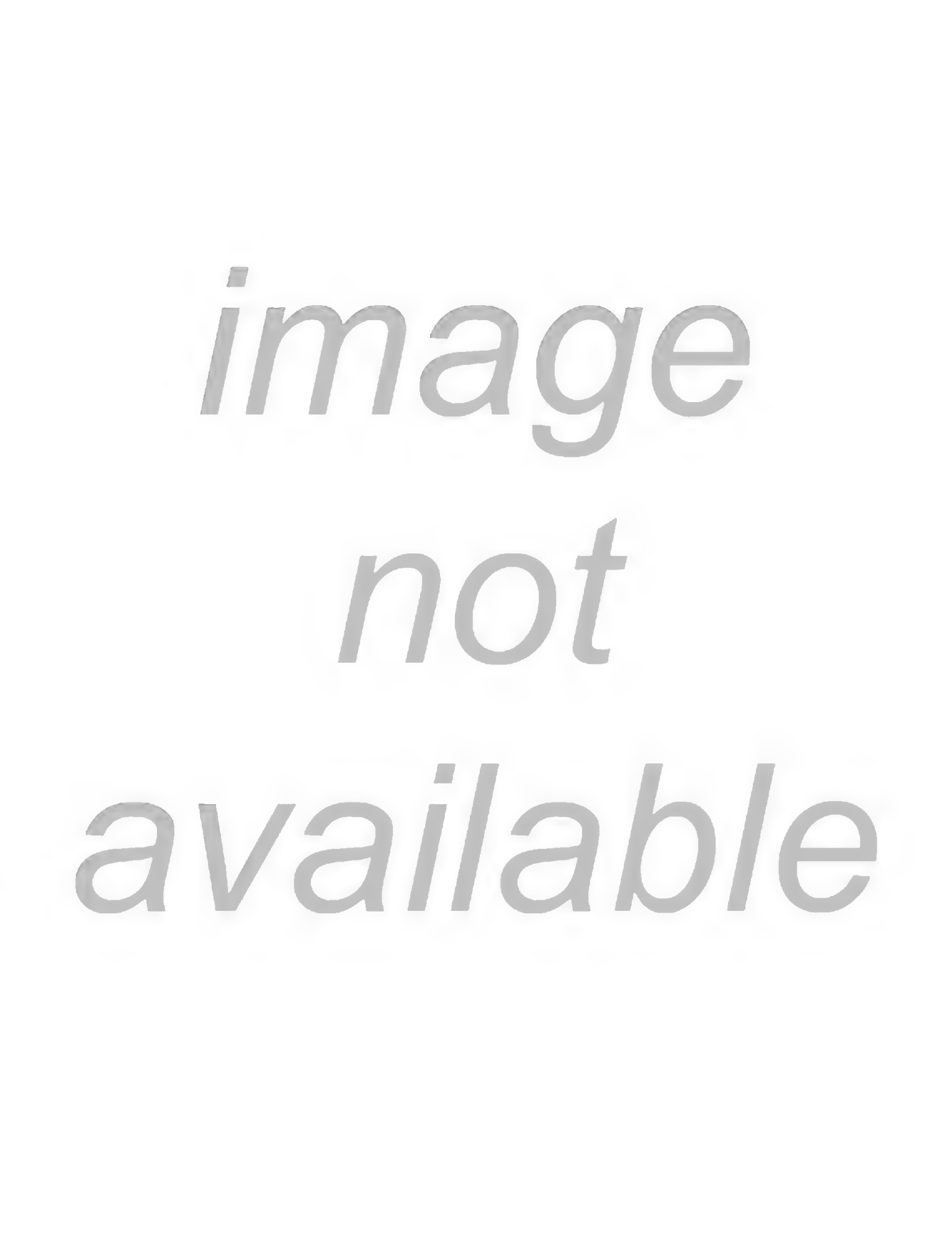


image
not
available

graphischen und mechanischen Hülfsmittel der Rechnung, die Theorie der Beobachtungsfehler, die Ausgleichung derselben nach der Methode der kleinsten Quadratsummen, das Feldmessen, hierzu das Abstecken von Linien zur Längenmessung, die Winkelabsteckung zur Coordinatenaufnahme, die Messtischaufnahme, die Theodolitaufnahme, Polygonmessung und Triangulation, die Bussolenaufnahme, das Entwerfen der Situationspläne und die Flächenberechnung, die Flächenteilung, das Abstecken langer gerader Linien, die Curvenabsteckung.

H.

Anleitung zur Berechnung geodätischer Coordinaten. Von Prof. Dr. Otto Börsch, Sectionschef im Königl. preussischen geodätischen Institut. Mit zwei Figurentafeln. Zweite, vollständig umgearbeitete und vermehrte Auflage. Cassel 1885. A. Freyschmidt. 165 S.

Das Buch setzt, nach der Abfassungsweise zu urteilen, ein gewisses Mass mathematischer und das volle Mass technischer Kenntnisse voraus und gibt dem mit der höhern Geodäsie Vertrauten die zur Praxis erforderlichen factischen Angaben in Grössen und Formeln. Obwol die Titel der Abschnitte: Mathematische Hülfslehren, Erdsphäroid, geodätische u. zw. geographische, rechtwinklig sphäroidische, rechtwinklig sphärische, rechtwinklig ebene Coordinaten, Auflösung einiger geodätischen Aufgaben — auf einen fortschreitenden Entwickelungsgang hindeuten, so findet man die entsprechende Trennung und Ordnung des Stoffs in der Ausführung nicht beobachtet. Möge der Leser entscheiden, ob ihm die gegebenen Erklärungen und die Anordnung des Buchs zum Gebrauche ausreichend scheinen. Die 2. Auflage berichtigt zahlreiche Fehler, die durch die notwendige Eile in der ersten Abfassung entstanden sind.

H.

Erd- und Himmelskunde.

Elemente der theoretischen Astronomie für Studirende bearbeitet von Dr. Karl Israel-Holtzwart, Realgymnasial-Oberlehrer zu Frankfurt a. M. Wiesbaden 1886. J. F. Bergmann. 711 S.

Das Buch ist im echten Sinne für Studirende verfasst, d. h. es gibt nicht Unterweisung in der ausübenden Astronomie, sondern deducirt die Lösung von deren Aufgabe aus mathematischen Principien. Diese Lösung wiederum ist nicht bloss aus den Quellen zusammengestellt, sondern nach eigner Methode des Verfassers verarbeitet und

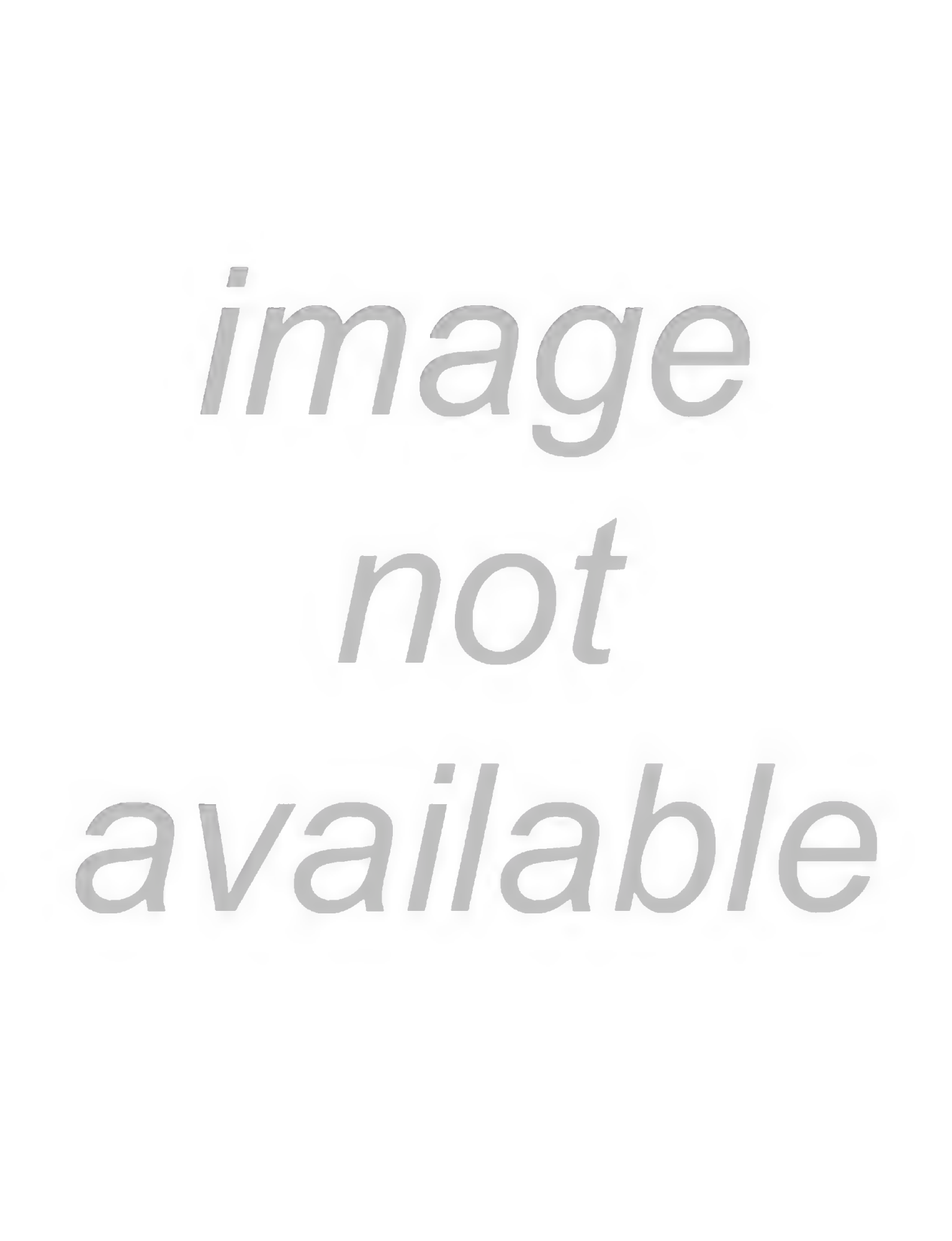


image
not
available

eine andre wird auch hier nicht gesucht. Die Geographie bietet in grosser Mannichfaltigkeit, extensiv und intensiv, quantitative Fragen dar, die der Mathematik zufallen. Es kam nur darauf an die sprechendsten Beispiele hierzu in vielseitigster Weise vorzuführen, was denn auch, mit Beginn in der alten Geschichte (Name „Geometrie" als deutlicher Beleg) geschehen ist. Wir wollen indes nur solche Punkte hervorheben, in welchen disputabele Ansichten des Verfassers enthalten sind. Er führt aus, dass mit der Bezeichnung „Geographie" die Doctrin zu eng gefasst und ihr durch Beschränkung auf die beschreibende Methode ein wesentliches Bildungselement, somit ein grosser Teil des Interesses entzogen werde; er befürwortet daher den umfassenderen Namen „Erdkunde". Da ist es denn zunächst auffallend, dass er von der „Geologie" — ein Wort das als solches gleichbedeutend mit „Erdkunde" ist — gar nicht spricht. Die gewöhnliche Einteilung der Geographie in mathematische, physische und politische wird, als wäre sie nur eben herkömmlich, kaum berührt, und was wir als Gebiet der Geologie betrachten, die Genesis des Erdkörpers, mit in die zur Erdkunde erweiterte Geopraphie gezogen. Die bisherige Spaltung des Lehrstoffs wird verworfen ohne deren praktische Gründe zu erwägen. Dass jede Forschung vor allen Erklärungsideen die Tatsachen ins Auge fassen muss, dass für die Erdkunde die Tatsachen ein sehr weites Gebiet umfassen, und dass dieser Umstand uns nötigt bei der Beschreibung länger zu verweilen als in andern Wissenszweigen, ist ganz unbeachtet geblieben. Zur Rechtfertigung möchte man vielleicht anführen, es handele sich um das Verfahren an Hochschulen, wo eine genügende Kenntniss der zu beschreibenden Gegenstände vorausgesetzt werden könne. Allein einerseits ist von verschiedenem Verfahren für verschiedenen Standpunkt der Hörer gar nicht die Rede; andrerseits liegen zwei kurze Aeusserungen vor, die, da sie nicht näher erläutert sind, ein sehr charakteristisches Licht auf die Auffassung zu werfen scheinen, die dem Auftreten zu Grunde liegen möchte. Die Gestaltung der Erdoberfläche ist zum Theil Werk der Natur, zum Teil Werk der Menschen, infolge dessen verzweigt sich auch die derselben gewidmete Doctrin, und wendet sich der eine Zweig der Physik, der andre der Völkergeschichte zu. Der Verfasser versucht nun auf Seite 2. die Einheitlichkeit der Erdkunde dadurch zu retten, dass er gestützt auf bekannte und berüchtigte Philosopheme die menschliche Tätigkeit für Naturwirkung ansieht. Wir wollen auf den logischen Fehler jener Philosophome, die Verwechselung der vom Menschen geübten Combination der Naturkräfte mit den Naturkräften, nicht eingehen, sondern fragen nur, ob der Verfasser, wenn nach seiner Ansicht die Entstehung von Städten Naturwirkung ist, den Beginn der Wissenschaft solange vertagen will, bis diese Wirkung erkannt ist, und die

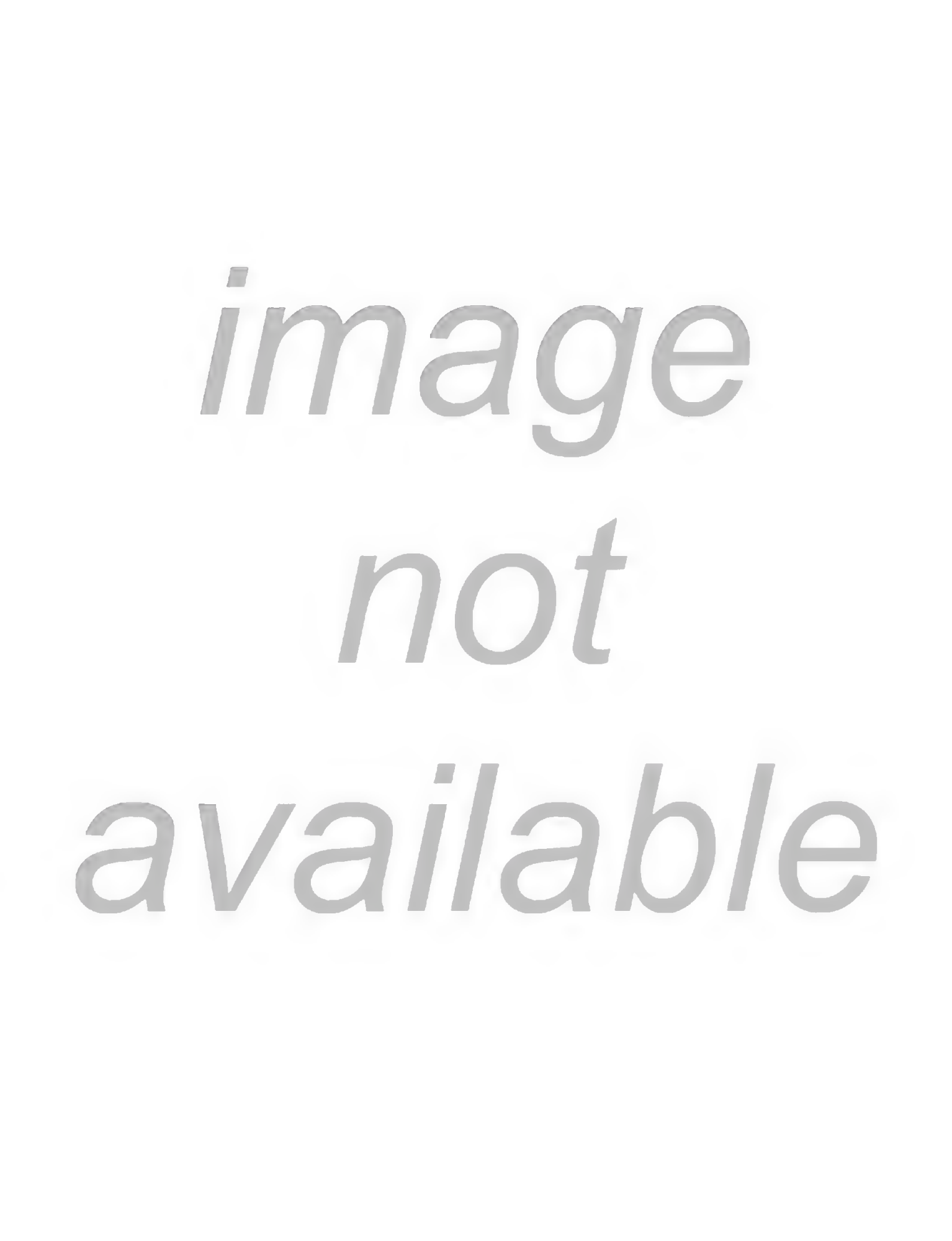


image
not
available

II. Teil das helle, aber auch zum Dunkelmachen eingerichtete Cabinet; der III. Teil die Aufnahme der Himmelsobjecte überhaupt, dann im einzelnen die der Sonne, des Mondes, der Planeten und Kometen, der Fixsterne, der Sternschnuppen, des Nordlichts, der Blitze, der Corona, Chromosphäre und Sonnenflecke, der Fixsternspectra, und zwar werden sowol die Vorschriften für das Verfahren als auch die Berichte über ausgeführte Aufnahmen gegeben. H.

Meteorologische Zeitschrift. Herausgegeben von der Oesterreichischen Gesellschaft für Meteorologie und der Deutschen Meteorologischen Gesellschaft. Redigirt von Dr. J. Hann (Wien, Hohe Warte) und W. Köppen (Hamburg, Seewarte). Dritter Jahrgang 1886. (zugleich XXI. Bd. d. „Zeitschr. d. Oesterr. Ges. f. Met.") Berlin, A. Asher u. Co.

Dieser Jahrgang ist der erste, welcher von beiden Gesellschaften gemeinschaftlich herausgegeben wird Die Zeitschrift erscheint in monatlichen Heften (zu 48 Seiten), deren jedes erst 3 oder 4 Aufsätze, dann eine grössere Anzahl kleinerer Mitteilungen, dann einen Litteraturbericht enthält. Die Aufsätze im vorliegenden Jahrgange sind folgende.

A. Woeikof: Klima an der Lenamündung nach einjährigen Beobachtungen.

O. Jesse: Die auffallenden Abenderscheinungen am Himmel im Juni und Juli 1885.

H. Hildebrandsson: Die mittlere Bewegung der oberen Luftströme.

F. Erk: Der Föhnsturm vom 15. und 16. Oct. 1885 und seine Wirkungen im baierischen Gebirge.

A. Mageissen: Ueber Wellenbildungen in der jährlichen Periode der Lufttemperatur. — Temperaturverhältnisse kommender Jahre.

J. Lizuar: Einfluss des Mondes auf die meteorol. Elemente nach den Beobachtungn zu Batavia. — Das Klima von Batavia.

W. Schaper: Ueber die Bestimmung der magnetischen Inclination mittels Erdinductor und Telephon.

J. Hann: Zur Kenntniss der Verteilung des Luftdruckes auf der Erdoberfläche. — Gewitterperioden in Wien.

H. Hoffmann: Phänologische Studien.

E. Jhne: Karte der Aufblühzeit von Syringa vulgaris in Europa.

P. Schreiber: Einige Umformungen der Formel für barometrische Höhenmessungen zur Verwendung bei Reduction von Baro-

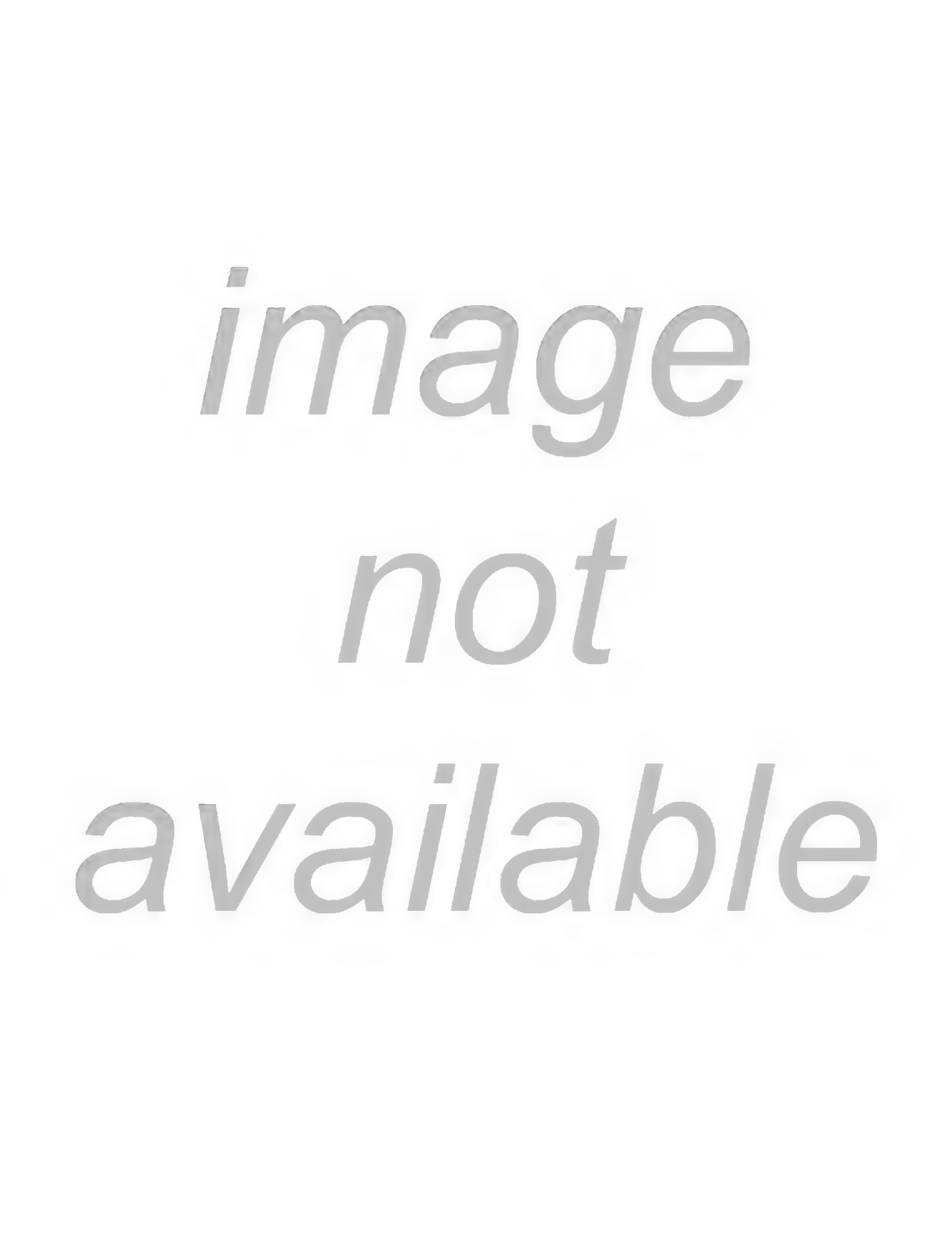


image
not
available

Physik.

Thermodynamique. Par J. Bertraud, de l'Académie Française, Secrétaire perpétuel do l'Académie des sciences. Paris 1887. Gauthier-Villars. 294 S.

Eine neue Bearbeitung der Wärmetheorie nach ihrem heutigen Standpunkt unternimmt dor Verfasser aus dem Gesichtspunkt der strengst möglichen logischen Kritik. Er sagt, man könne in dieser Beziehung nicht alles leisten, aber doch sehr viel bessern und die hauptsächlichen logischeu Mängel beseitigen. Seine logischen Grundsätze hat er nicht formulirt ausgesprochen, sondern nur in Beispielen angedeutet, aus denen sie sich einigermassen abstrahiren lassen. Er rügt es, dass man Ideen als Axiome — sei es als Hypothesen oder als ursprünglich gewiss — betrachtet, in denen notwendige Fragen gar nicht zum Bewusstsein gezogen sind. Hiermit ist in der Tat ein herrschender Fehler der Forschungslogik ans Licht gezogen, der sich aber weit bestimmter bezeichnen lässt, wenn man nur nicht bei der vagen Auffassung des Wesens der Hypothese stehen bleibt, welche darin nichts als eine interimistische Stütze einer noch unfertigen Theorie, statt eines wesentlichen Elements alles exacten Wissens sieht. Theorie hat nur Sinn relativ zur Hypothese, und umgekehrt, und apriori hat nur Sinn in der Anwendung der (empirisch befestigten) Theorie auf die neue Wirklichkeit. Die angebliche Erkenntniss apriori, in welcher der Verfasser die Nennung der wesentlichen Momente vermisst, ist eben nichts als ungeprüfte Meinung. Mit Recht begrüsst man den ersten verbindenden Gedanken (z. B. Descartes: Erhaltung der Kraft, Schiaparelli: Identität von Kometen und Sternschuppen) als grosse Entdeckung. Mit ihm ist der Bacillus, die Universal-Ursache der Erscheinung aufgewiesen und die Hoffnung auf ihre Erklärung erweckt. Aber von da an können Jahrhunderte vergehen, ehe es den Anstrengungen der Forscher gelingt, eine brauchbare Hypothese, d. h. nicht nur im allgemeinen haltbar, sondern auch nach allen Seiten ausschliessend und nur soviel unbestimmt lassend, als im Gedanken durchlaufen werden kann, aufzufinden. Der sehr verbreitete Fehler, um den es sich handelt, ist die Verwechselung jenes verbindenden Gedankens, dem zur Erklärung der Erscheinung das Notwendigste noch fehlt, mit der Hypothese als definitiver Errungenschaft. Im Vorliegenden geht der Verfasser, nachdem er in der Kürze eine Uebersicht über die Wärmethoorie für vollkommene Gase gegeben hat, vom ersten verbindenden Gedanken aus, den er Sadi Carnot zuschreibt, entwickelt zuerst dessen Ideen, dann die Ideen von Robert Mayer und geht dann zu Theoremen, zunächst

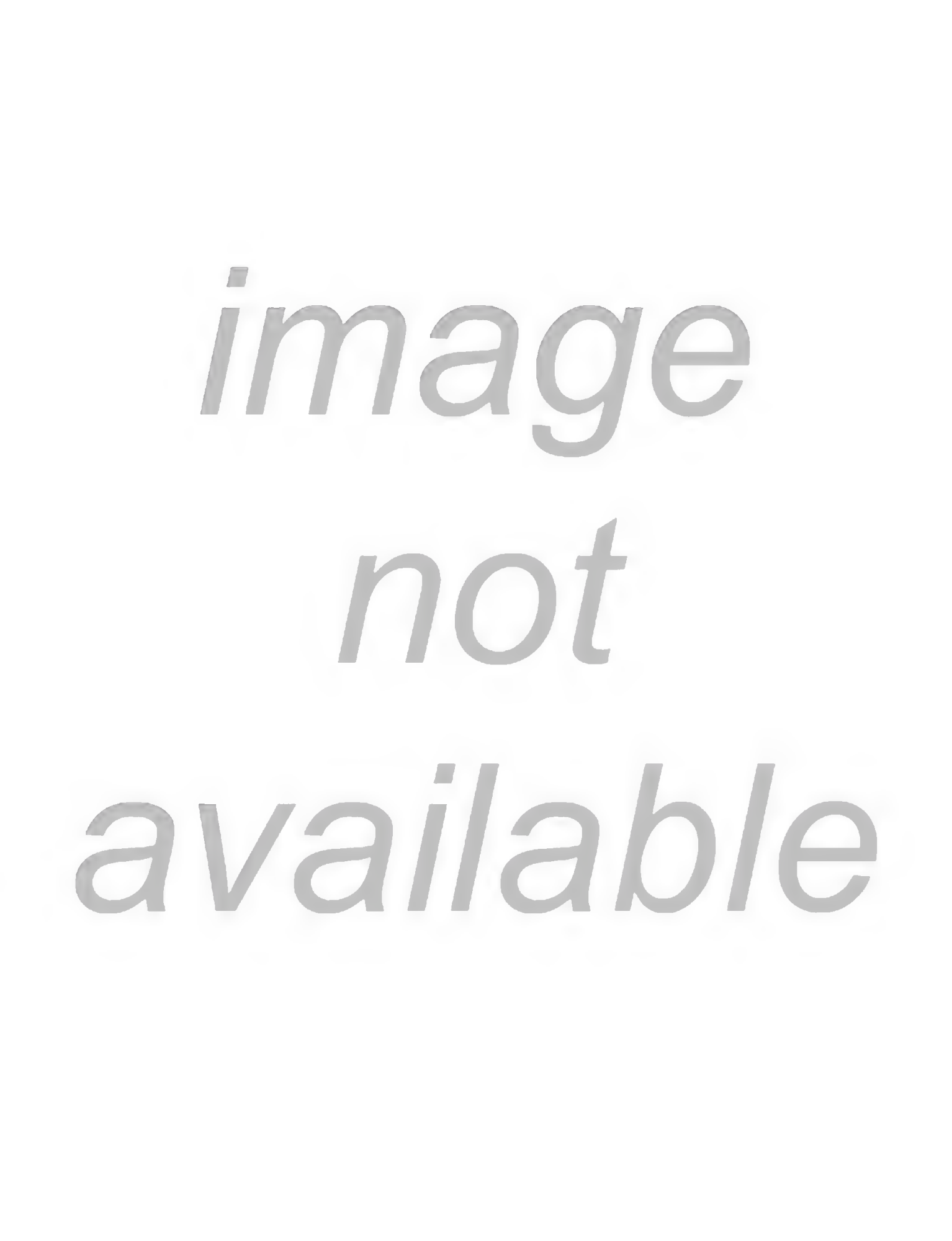


image
not
available

Porto, Antigo Professor na Universidado de Coimbra, Socio de Academia das Sciencias de Lisboa, etc. Vol. VII. Coimbra 1886. Impronsa da Universidade.

Der 7. Band enthält folgendo Abhandlungen und Noten.

E. Cesàro: Arithmetische Bomerkungen. — Auszügo aus einem Briefe an Herrn d'Ocagne. — Bomerkungen übor die Theorie der Roihen.

J. C. d'Oliveira Ramos: Ueber die Zerlegung der Kreisfunciiouen.

Ramos und Casimiro J. de Faria: Ueber die Coefficienten der Formel, welche die Derivirte heliebiger Ordnung dor zusammengesetzton Functionon giht.

M. d'Ocagne: Ueher gewisse Bestimmungen von Grenzwerten; mittlere Grenzwerte zweier Zahlon. — Auszug aus einem Briefe an F. Gomes Teixeira. — Ueher gewisse arithmetische Summationen. — Ueber gewisse symmetrische Functionen; Anwendung auf die Berechnung der Summe gleichhoher Potonzen und Wurzeln einer Gleichung. — Ueber die rectificaheln Ellipsenbogen.

L. F. Marrocas Ferreira: Ueher die Theorie des Hyperboloids.

J. M. Rodrigues: Theorie der Rotation.

H. le Pont: Geometrischo Note. — Neuer Beweis des Ch. Dupin'schen Satzos. - Noto über die Bewegung eines von festem Centrum aus getrichenen materiellen Punktes.

Gino Loria: Note über die Multiplication zweier Determinanten. — Uebor eine Eigenschaft der Determinante einer Orthogonalsuhstitution.

Rodolpho Guimarães: Ueber einen Satz betreffend die Vergloichung von Ellipsonbogen.

J. Bruno de Cabedo: Ueber eine Formol von Taylor.

F. Gomes Toixeira: Anwendungeu dor Formel, welche die Derivirten helichiger Ordnung der Functionen von Functionen giht.

Duarte Leite: Ueber don transcendonten Teil des Integrals einer rationalen Function. H.

American Jonrnal of Mathematics. Simon Newcomb, Editor. Thomas Craig, Associate Editor. Pnhlished under tho Anspices of the Johns Hopkins University. Volume IX. Baltimore 1887. Pnhlication Agency of the Johns Hopkins University.

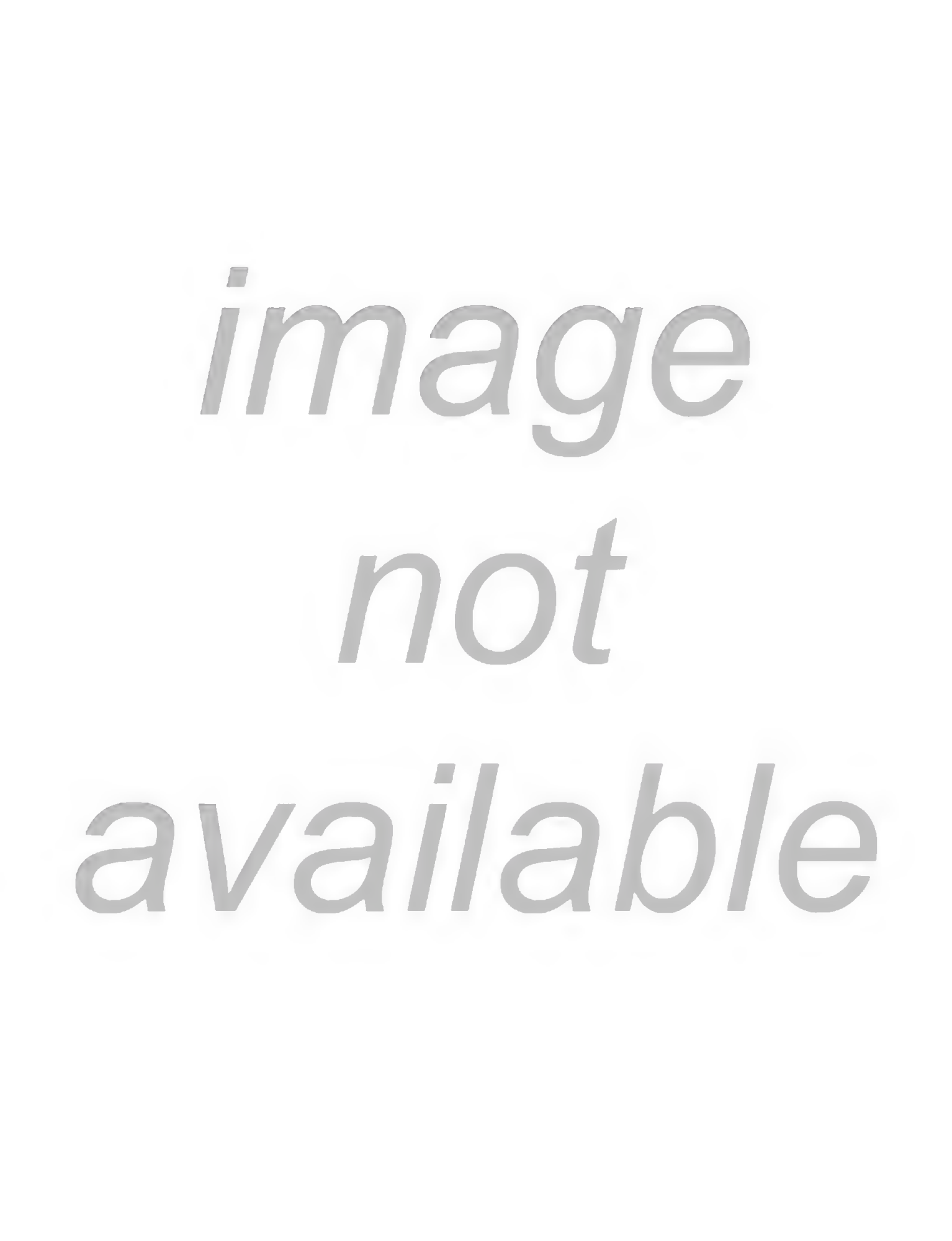


image
not
available

C. G. Knott: Elektrischer Widerstand von Nickel bei hohen Temperaturen. — Elektrische Eigenschaften des hydrogenisirten Palladiums. H.

Nova Acta Regiae Societatis Scientiarum Upsaliensis. Seriei tertiae Vol. XIII. 1886.

Von den im 13. Bande enthaltenen 11 Abhandlungen gehört eine der Mathematik, eine der Physik an; diese sind:

A. Berger: Ueber eine Anwendung der Theorie der binomischen Gleichungen zur Summation einiger Reihen.

K. Ångström: Ueber eine neue Methode absolute Messungen der strahlenden Wärme zu machen, sowie ein Instrument um die Sonnenstrahlung einzuregistriren. H.

Annuaire de l'observatoire de Montsouris pour l'an 1887. Météorologie, agriculture, hygiène. Paris. Gauthier-Villars.

Der diesjährige Band enthält ausser dem Kalender die tabellarischen Resultate der in Paris und auf dem Montsouris gemachten meteorologischen Beobachtungen, insbesondere betreffend die Sonnenstrahlung, Kälte, Wasserdampfspannung, Feuchtigkeit, Lufttemperatur, Regenmenge, Erdmagnetismus und den Wind; ferner die chemische Untersuchung der Luft, des meteorischen und fliessenden Wassers; schliesslich die 9te Abhandlung von Dr. Miquel über die Bacterien der Pariser Luft. H.

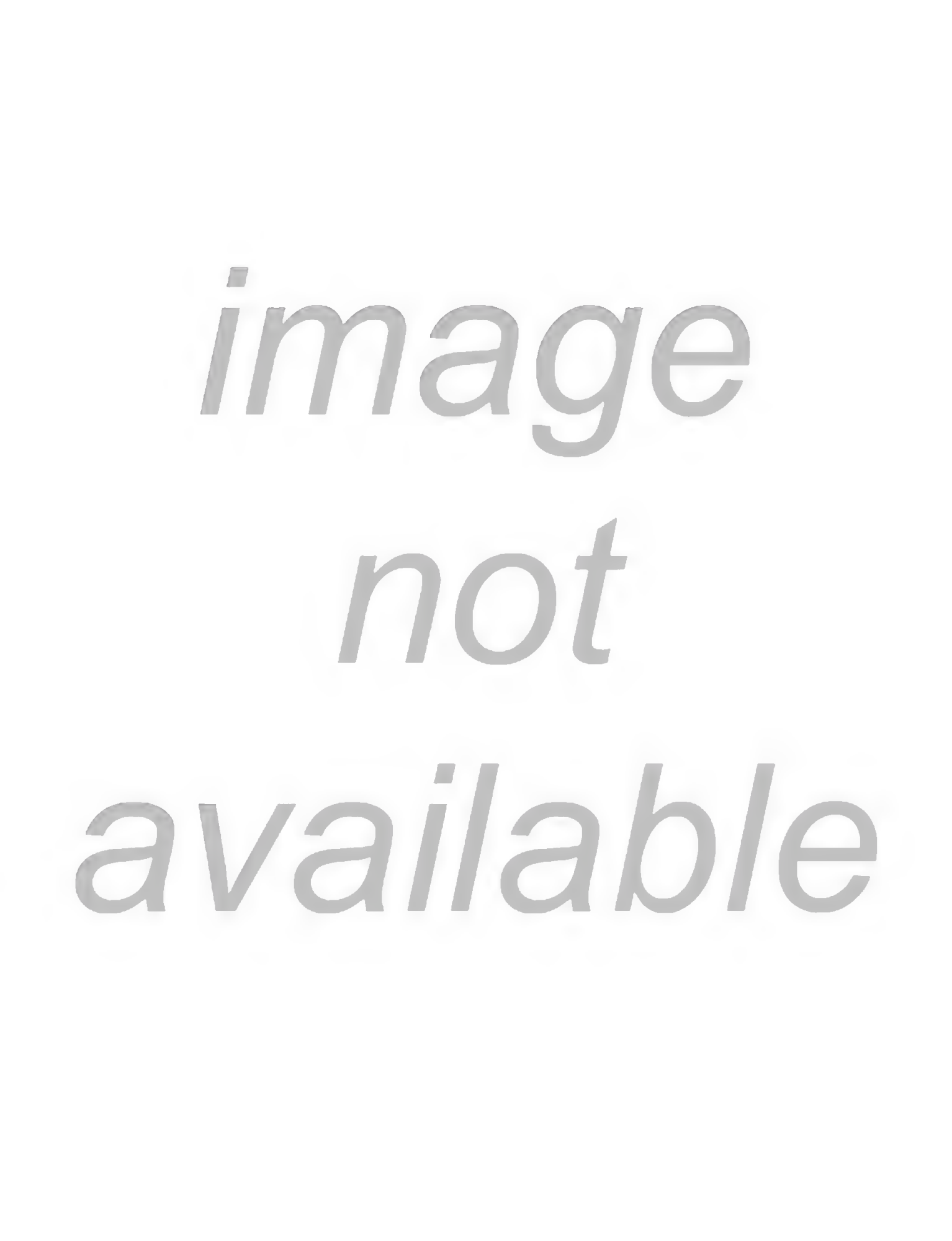


image
not
available

sind, hat 'der Verfasser die entgegengesetzte Wahl getroffen. Man sollte meinen, dass der Ausfall der Bearbeitung den Misgriff deutlich genug an den Tag brächte. Die Operationen werden erst insgesamt, dann einzeln behandelt. In dem Capitel von der einzelnen wird eine alle Fälle umfassen sollende Definition an die Spitze gestellt, eine Definition die vom Begriffsinhalt gar nichts sagt, sondern ihn nur durch Bedingungen umgrenzt, überdies auf keinen Specialfall anwendbar ist, sondern nur verschiedene in Beziehung setzt. Der Schüler wird daher weder aus ihr den Sinn der Operation verstehen lernen, noch, wenn sie ihm bereits bekannt ist, Einsicht gewinnen, ob sie mit seinem Begriffe vereinbar, ob sie richtig oder vielmehr — dass sie falsch ist. Nun werden durch Specialisirung eine Reihe arithmetische Sätze als leichte Folgerungen aus der Definition gezogen, endlich eine Anzahl Beispiele gerechnet. Letztere holen dann leidlich das Versäumte nach und können allenfalls einen Begriff von der Operation geben, sogut er eben in der elementaren Rechenschule gegeben wird. Ein Beispiel einer solchen Definition ist die folgende. (S. 32.) „Multiplication ist das Ableiten einer Zahl (Product) aus zwei oder mehr Zahlen (Factoren), wenn sie von diesen so abhängig ist, dass das Resultat 0 ist, wenn irgend einer der Factoren 0 ist, und dass, wenn an die Stelle irgend eines der Factoren alle seine Summanden einzeln eintreten, die Summe dieser Einzelresultate gleich dem zu suchenden Resultat ist.“ Die Operation des Multiplicirens bleibt hiernach Problem, nicht einmal eine Probe irgend eines Resultats ist aufgestellt; man weiss nur, wenn mehrere Resultate vorliegen und der Bedingung nicht entsprechen, dass mindestens eines falsch sein muss, nicht aber, welches. Die Bedingung ist nur eine Umschreibung der Functionsgleichung $f(x+y) = f(x)+f(y)$ anzuwenden auf jeden Factor. Es ist klar, dass diese Bestimmung der Function nicht ausreicht; es muss auch ein Specialwert gegeben sein, und hierfür ist der aufgestellte Specialwert $f(0) = 0$ gerade der einzig unbrauchbare; überdies ist er ganz überflüssig, da er schon aus $f(x+0) = f(x)+f(0)$ folgt. Demnach bedarf die Definition einer zweifachen Berichtigung. Allein mit der leichten Ergänzung und Beseitigung ist es nicht getan, Es müssten auch alle Folgerungen darnach revidirt werden. Unter den Beweisen stützen sich manche stillschweigend darauf, dass das Product durch die Factoren bestimmt wäre, was zu beweisen gar nicht versucht ist; ein Beweis (Satz 12.) ist geradezu falsch, weil er das Zubeweisende voraussetzt; ausserdem würde der Nachweis des Zutreffens des Specialwerts überall hinzukommen müssen. Im ganzen kann daher fast nichts stehen bleiben. Im Vorwort äussert der Verfasser, die Algebra müsse den Schüler ihre Wahrheiten an sich erkennen lassen. Gesetzt, jene

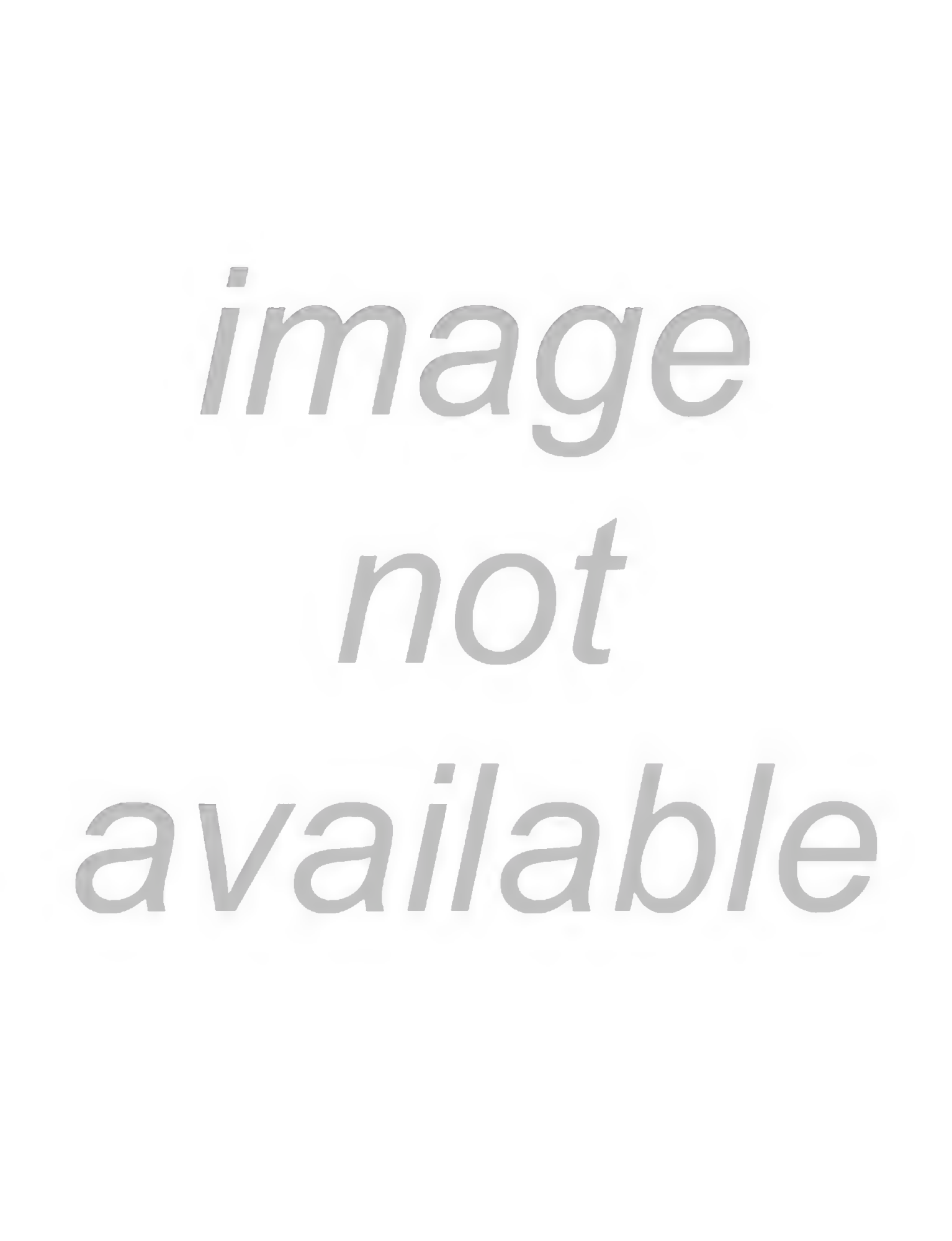


image
not
available

Dednctionen nnd Beweise werden nicbt geführt, überbanpt die logiscbe Tätigkeit nicbt znm Bewusstsein gebracht. Docb wird die Begründnng jeder Lehre am Beispiele derart dargetan, dass die Allgemeingültigkeit vollkommen einlenchtet. Erläuterungs- und Uebungsbeispiele gibt das Bncb in grosser Anzahl. Nach allem erzielt es vollständlge Kenntinss und praktische Fertigkeit. Anf das Studium bat es in keiner Weise hingearbeitet; doch stehen die dadnrch beigebrachten Begriffe mit der Wissenschaft im besten Einklang.

H.

Die Elemente der Geometrie für den Schulnnterricht bearbeitet von H. Seeger, Director des Realgymnasinms zn Güstrow. Mit sechs Fignrentafeln. Wismar 1887. Hinstorff. 211 S.

Die Eigentümlichkeit der vom Verfasser gewählten Lehrmethode giht sich schon in der Anordnnng des Lehrstoffs zu erkennen. Die Hanptabschnitte sind nämlich: Dio geometriscben Grnndgebilde nnd ihre elementaren Eigenschaften; die Lehre von der Aehnlicbkeit; Anwendnng der Algehra anf dio Geomctrie; Bruchstück aus der neneren Geometrie; 6 Anhänge; Aufgaben. Zunächst findet man, dass die Lehre von der Flächengloichheit im Verzeicbniss ganz fehlt. Auf die Congrnenz folgt sogleich die Aehnlichkeit, dann die rechnende Geometrie. Offenbar ergehen sich manche Sätze über Flächengleichheit von selbst ans der Inhaltsrechnung: Dreiecke von gleicher Basis nnd Höhe sind gleich, weil man ihren Inhalt ans beiden berecbnet. Dass indes der Verfasscr ans diesem Grunde das ganze Lehrgebiet der Verwandlung der Fignren für überflüssig gehalten haben sollto, würde kanm glaublich scheinen, wenn nicht weitere Bestätigungen hinznkämen. Sehen wir erst zn, wie mangelhaft der Rechtfertignngsgrund ist. Dass man alle elementaren Arealrelationen nachträglich ans den Inhaltsformeln herleiten kann, sei zngegeben. Unmittelbar evident sind daraus die wenigstens. Soll aber dies der einzige Weg sein, anf dem der Schüler dio ersteren kennen lernt, so entgebt ihm der einfache Znsammonhang, in welchen die constructive Syntbesis dio ganze Reihe von Verwandlungssätzen mit der Congruenzlehre bringt, nnd Grössenbeziebungen, die nach einander dnrch leichte Folgernngen hervorgehen, treten auf als bedingt dnrch die Genanigkeit der Ansmessnng, deren Theorie wieder basirt werden musste auf die complicirte Unterscheidnng der commensurabeln nnd incommensurabeln Linien; überdies entgehen ihm dio constructiven Verwandlnngsanfgaben. Liest man aber die Bebandlnngsweise des Lehrstofls vom 3. Abschnitt an, so kann man nicht weiter daraa zweifeln, dass der Verfasser die Fähigkeit des Construirens wirklich

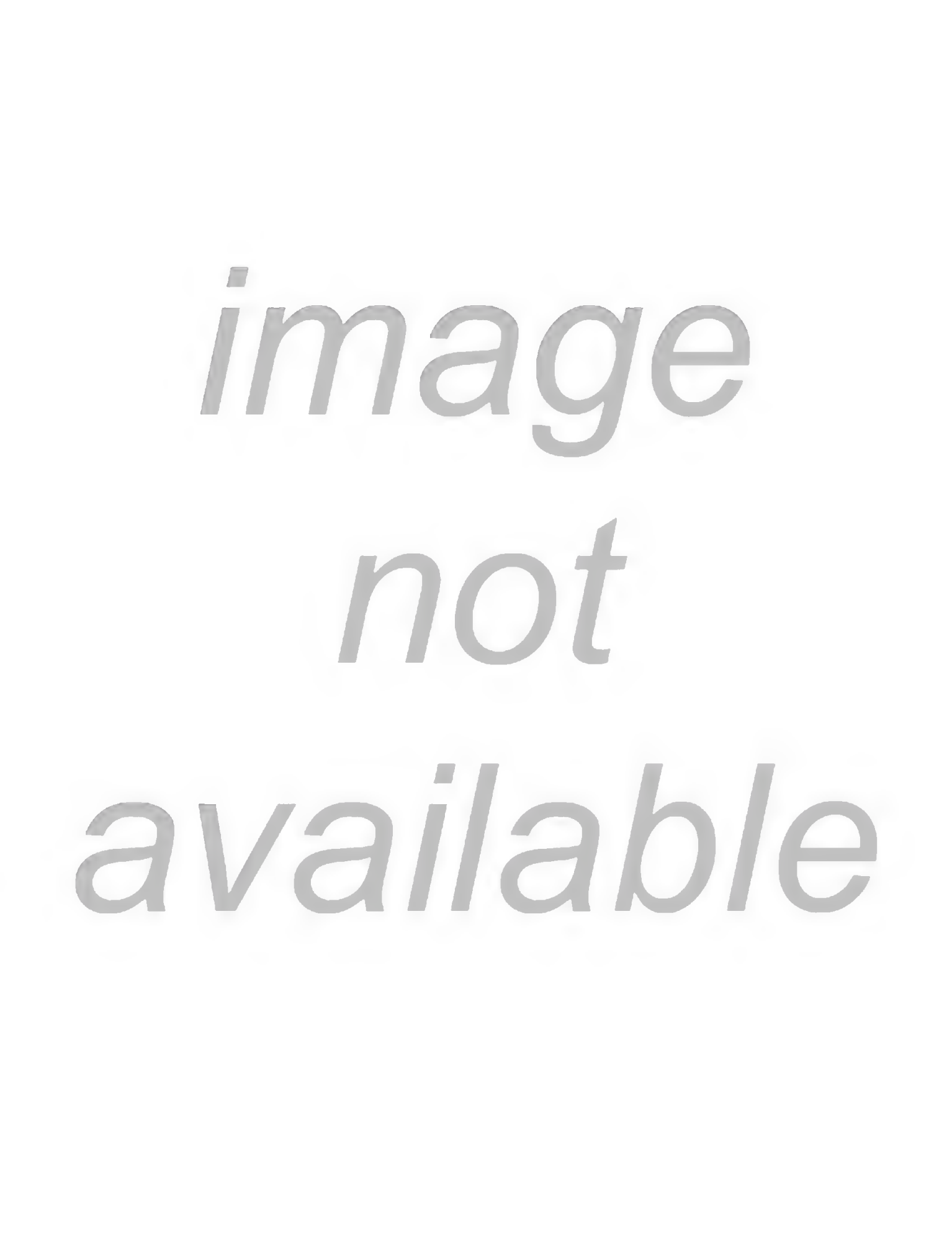


image
not
available

Elemente der reinen Mechanik als Vorstudien für die analytische und angewandte Mechanik und für die mathematische Physik an Universitäten und technischen Hochschulen sowie zum Selbstunterricht. Von Dr. Jos. Finger, o. ö. Professor der reinen Mechanik an der k. k. technischen Hochschule und Docent an der k. k. Universität zu Wien. Mit 200 Holzschnitten. Wien 1886. Alfred Hölder. 792 S.

Die 2 Jahre früher erschienene erste Lieferung ist im 2. litt. Bericht S. 19. besprochen. Wie daselbst bereits erwähnt, ist als oberste Einteilung gewählt die in Mechanik des Punkts und des Punktsystems, dann erst eine jede in Statik und Dynamik. Die Statik des Punktes wird erst für die Ebene, dann für den Raum behandelt, eine Zerlegung die nicht weiter fortgeführt wird, und die bei analytischer Methode sich wol stets als unpraktisch erweisen möchte. Weiter wird die Statik des Punktes eingeteilt in die des freien Punktes und die für feste Fläche oder Linie. Speciell knüpft sich an die Statik der Schwere. Die Dynamik des Punktes wird erst für geradlinige, dann für krummlinige Bewegung behandelt. Die Statik des Punktsystems beschränkt sich auf die Kette, d. h. auf den Fall, wo Spannungen nur zwischen den der Reihe nach folgenden Punkten stattfinden. In den allgemeinen Principien der Mechanik wird nachher Statik und Dynamik in ununterbrochenem Nexus behandelt, also Princip der virtuellen Geschwindigkeiten und Alembert'sches Princip unmittelbar einander folgend entwickelt. Dann geht das Buch ausführlich auf die Mechanik der starren Körper ein, die sich in eine grössere Anzahl allgemeiner und specieller Teile scheidet. Den Schluss bilden die Principien der Hydromechanik. Der Anhang enthält die zum Verständniss der Mechanik notwendigen mathematischen Grundlagen. H.

Methodischer Leitfaden der Physik und Chemie. Für höhere Töchterschulen, Lehrerinnenseminarien und Fortbildungsanstalten. Bearbeitet von Dr. Karl Jansen, Oberlehrer am Realgymnasium zu Düsseldorf. Freiburg i. Br. 1887. Herder. 252 S.

Das Buch ist in 4 Curse geteilt. Von diesen umfasst der erste die Wärme, den Magnetismus, die Reibungselektricität und den Galvanismus, der zweite die allgemeinen Eigenschaften der Stoffe, die Mechanik der festen, der flüssigen und der gasförmigen Körper, der dritte Wellen, Schall und Licht, der vierte ausgewählte Teile der Physik und die Chemie, eine Anordnung die sich der Stufe des Verstandesentwickelung anschliesst. In jedem Capitel wird eine numerirte Reihe von Gesetzen aufgestellt, auf das eine und andre Ge-

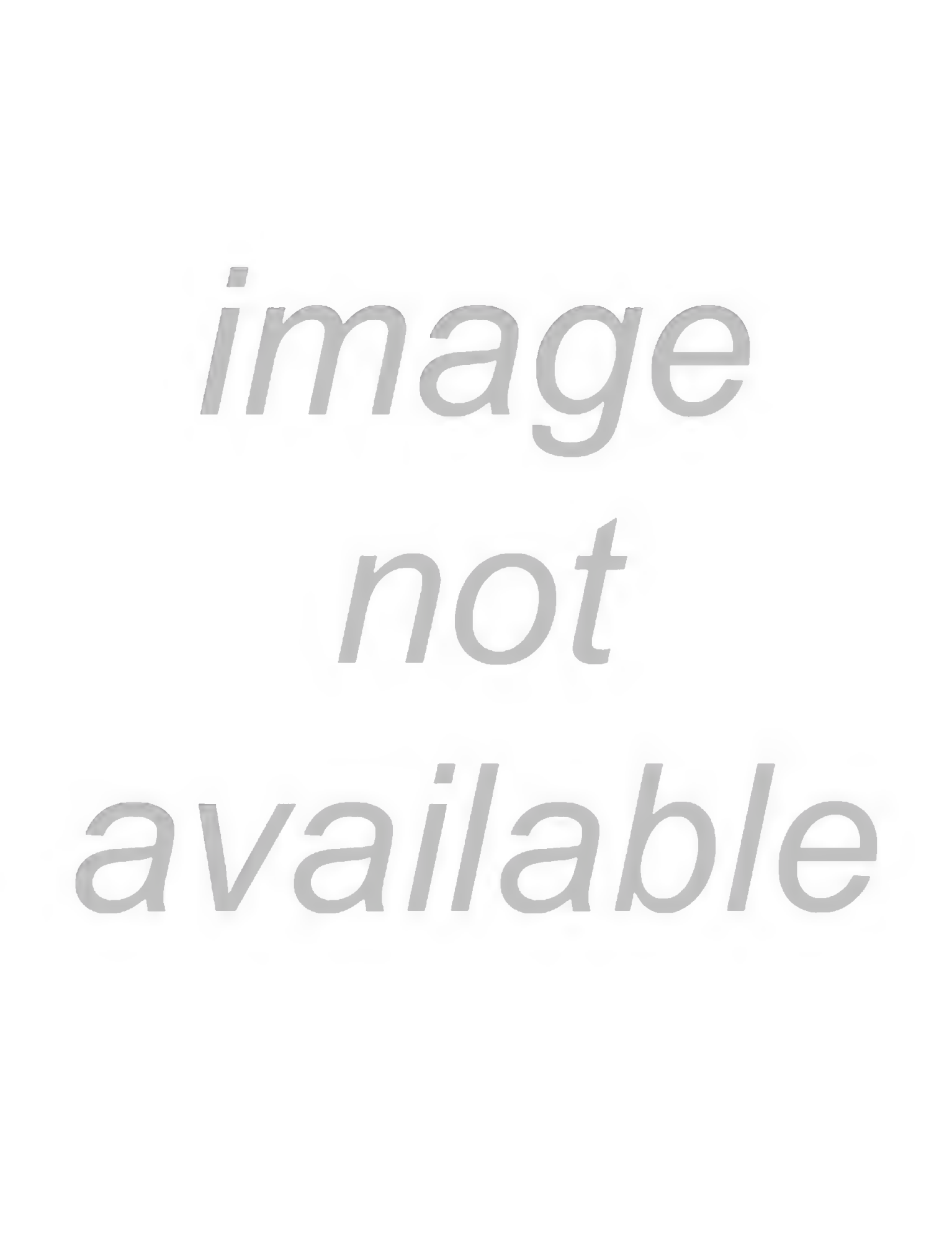


image
not
available

gressionen. Im Anhang stehen Aufgaben für die Determinantenlehre. In 12. Anflage sind die „Beispiele" sehr vermehrt, nnd ist der Anhang hinzugekommen. Lösungen sind nicht angegeben."

H.

Dr. Ernst Kleinpaulsche Anweisnng zum praktischen Rechnen Ein methodisches Handbuch für den Unterricht nnd Selbstunterricht im Rechnen. Fünfte, umgearbeitete nnd erweiterte Anflage. Von Dr. F. Mertens. Bremen 1886. M. Heinsins. 546 S.

Das Buch ist eine methodisch geordnete Sammlung von Fragen nnd Aufgaben znr gründlichen Erlernung nnd Einübung des bürgerlichen Rechnens für Kinder, bei denen man noch keinen Begriff von Zahlen voraussetzen darf. Auch der vorausgeschickte kleine Aufsatz: „Allgemeine Gesichtspunkte" — welcher vielleicht mit der Bezeichnung „Anweisnng" auf dem Titel gemeint ist, sofern dem Vorwort znfolge die neue Ausgabe als Anweisung sich von dem Rechenbnche selbst unterscheiden soll, ist der Hauptsache nach nur Aufzählnng der verschiedenen Seiten, von welchen aus der Begriff der Zahlen nnd Operationen zur Deutlichkeit zu bringen ist, welche man aber aus der Reihenfolge der Uebnngen schon besser nnd vollständiger ersieht. Das Bnch erscheint in 3 Heften. Das erste schreitet in stufenweiser Erweiterung des Zahlengebiets bis 5, 10, 20, 100, 1000 fort nnd fügt auf letzter Stufe die gemeinen nnd Decimalbrüche hinzu. Das zweite Heft übt die Operationen an unbenannten, dann benannten Zahlen, dann Brüchen, das dritte die bürgerlichen und kaufmännischen Rechnungsarten ein. H.

Tabellen.

Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln. Von Theodor Wittstein, Dr. phil. und Professor. Zweite Auflage. Hannover 1887. Hahn. 20 S.

Die 1. Tafel giebt auf 4 Seiten die Logarithmen der Zahlen 100 bis 1899 nebst Differenzen, die 2te auf 2 Seiten die Logarithmen der Summen nnd Differenzen für die der Zahlen, die 3te auf 2 Seiten die trigonometrischen Functionen für die ganzen nnd halben Grade. die 4te auf 6 Seiten die Logarithmen derselben durch die Sechstel Grade, die 5te auf anf 2 Seiten die Antilogarithmen.

H.

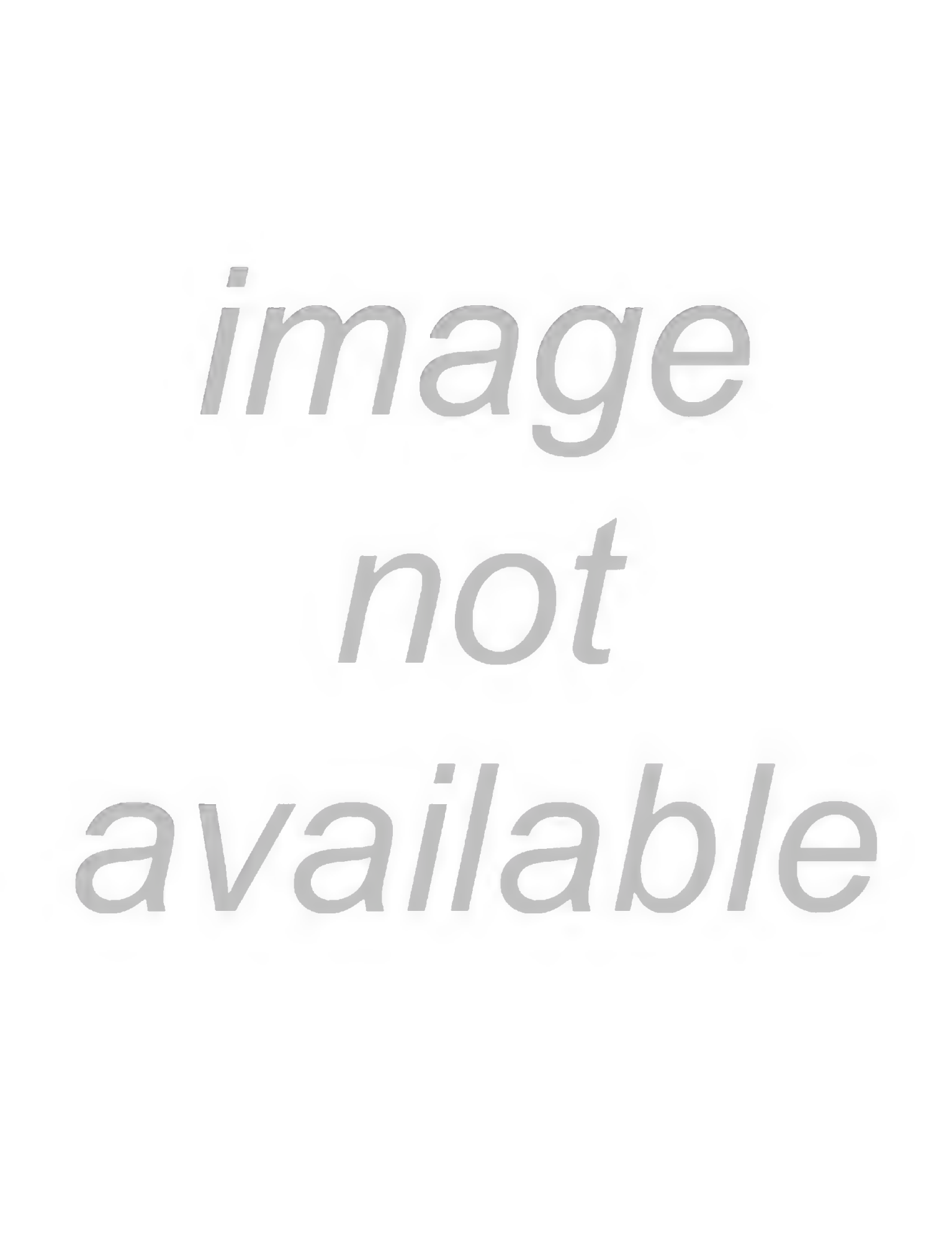


image
not
available

G. Leman: Note betreffend die Untersuchung der Biegungsmomente und Schwerkräfte erzeugt in einem Stabe, der in seinen Enden unterstützt ist und unter dem Einflusse einer bewegten Last sich biegt. 9.

J. Dernyts: Ueber gewisse Reihenentwickelungen. (Bericht). 9. — Ueber die approximative Berechnung gewisser bestimmten Integrale. 11. — Ueber eine Classe conjugirter Vielecke (Bericht). 12. — Ueber einige Eigenschaften der Semiinvarianten. 13.

J. De Tilly: Ueber die Riccati'sche Gleichung und ihre doppelte Verallgemeinerung. 9.

M. da Silva: Ueber eine Frage der Theorie der elliptischen Functionen. 10.

E. Catalan: Aufgaben unbestimmter Analytik. 9. — Mathematische Belustigung. 9. — Ueber eine Classe von Differentialgleichungen. 12. — Bemerkungen über gewisse bestimmte Integrale (Bericht). 13. — Ueber eine numerische Tafel und ihre Anwendung auf gewisse Transcendenten (Bericht). 13. — Bemerkungen über eine trinomische Gleichung. 13.

Jamet: Theorem über die geodätischen Linien der Rotationsflächen.

E. Cesàro: Ueber das Studium der arithmetischen Begebenheiten (Bericht). 11.

C. L. Paige: Ueber die Anzahl der Gruppen, welche höhere Involutionen auf demselben Träger gemein haben. 11. — Ueber die Homographien in der Ebene. 12. — Untersuchungen über das Pentaeder. 13.

Physikalischen Inhalts sind folgende.

Hirn: Experimentelle und analytische Untersuchungen über die Gesetze des Ausflusses und des Stoffes der Gase in Function der Temperatur (Bericht). 9. — Die moderne Kinetik und der Dynamismus der Zukunft (Bericht). 12.

Gérard, Van Weddingen und Jacquet: 3 Mitteilungen zur Verbesserung der Aerostaten (Bericht). 9.

P. De Heen: Ueber die Spannung der gesättigten Dämpfe. Modificationen anzubringen am Gesetz von Dalton. 9. — Bestimmung des Compressibilitätscoefficienten einiger Flüssigkeiten und Variationen dieser Grösse mit der Temperatur. Theoretisches Gesetz der Variationen jenes Coefficienten. 9. — Bestimmung einer empirischen Relation zwischen der Dampfspannung und dem Coefficienten der innern Reibung der Flüssigkeiten. 10. — Note in Betreff einer Arbeit von Robert Schiff über die specifische Wärme der Flüssigkeiten. 12. — Bestimmung der Variationen des Coefficienten der innern Reibung der Flüssigkeiten mit der Temperatur. Theore-

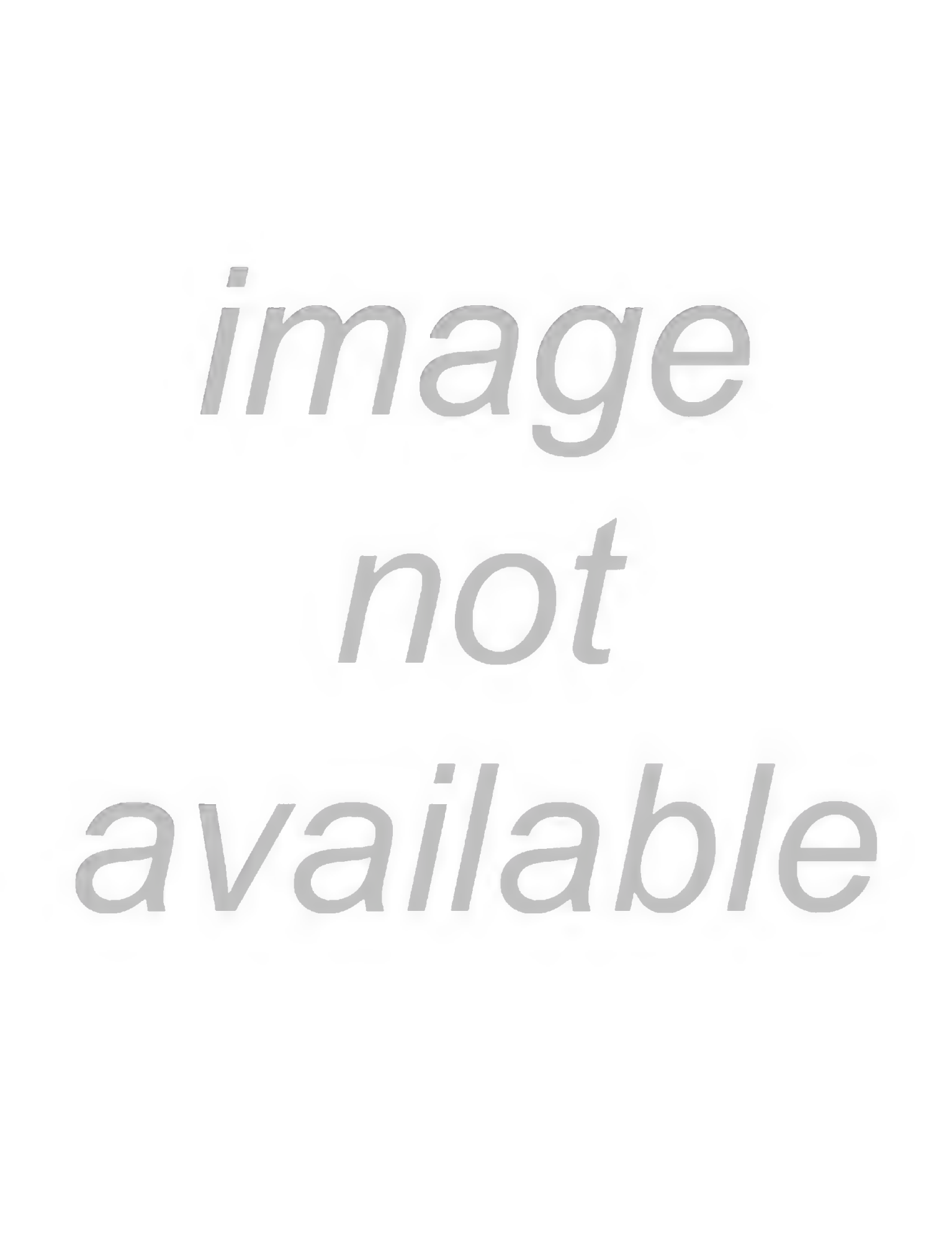


image
not
available

E. Goursat: Ueber ein Problem bezüglich auf Curven doppelter Krümmung.

G. Koenigs: Ueber die Form der Curven constanter Spannung. — Ueber die Curven, deren Tangenten einem linearen Complex angehören. — Ueber die Anwendung gewisser quadratischer Formen in der Geometrie.

P. Garbe: Experimentelle Untersuchungen über die Strahlung.

H. Andoyer: Beitrag zur Theorie der intermediären Bahnen.

M. Brillouin: Fragen der Hydrodynamik. H.

Acta Mathematica. Zeitschrift herausgegeben von G. Mittag-Leffler. 10. Mit Inhaltsverzeichniss der Bände 1—10. Stockholm 1887. F. u. G. Beijer. Berlin, Mayer u. Müller. Paris, A. Hermann.

Der 10. Band enthält folgende Abhandlungen.

J. Hacks: Ueber Summen von grössten Ganzen.

M. A. Stern: Ueber den Wert einiger Reihen, welche von der Function $E(x)$ abhangen.

K. Schwering: Ueber gewisse trinomische complexe Zahlen.

M. Lorch: Ein Satz der Reihentheorie.

G. Kohn: Ueber die Bewegung eines materiellen Punkts auf einer Rotationsfläche.

K. Bohlin: Ueber die Bedeutung des Princips der lebendigen Kraft für die Frage von der Stabilität dynamischer Systeme.

R. Lipschitz: Zur Theorie der krummen Oberflächen. — Beweis eines Satzes aus der Theorie der Substitutionen.

H. Dohriner: Die Minimalflächen mit einem System sphärischer Krümmungslinien.

S. Pincherle: Ueber gewisse durch bestimmte Integrale dargestellte functionale Operationen.

O. Staude: Ueber eine Gattung transcendenter Raumcoordinaten.

L. Lecornu: Ueber die Flächen, welche dieselben Symmetrieebenen besitzen wie eins der regelmässigen Polyeder.

G. Humbert: Ueber die algebraischen Integrale der algebraischen Differentiale.

T. J. Stieltjes: Tafel der Werte der Summen $S_k = \sum_1^\infty n^{-k}$.

J. Weingarten: Zur Theorie des Flächenpotentials.

H. Poincaré: Bemerkungen über die irregulären Integrale der linearen Gleichungen.

G. Koenigs: Ueber eine Classe von Formen von Differentialen und über die Theorie der Systeme von Elementen.

E. A. Stenberg: Ueber einen Specialfall der Lamé'schen Differentialgleichung. H.

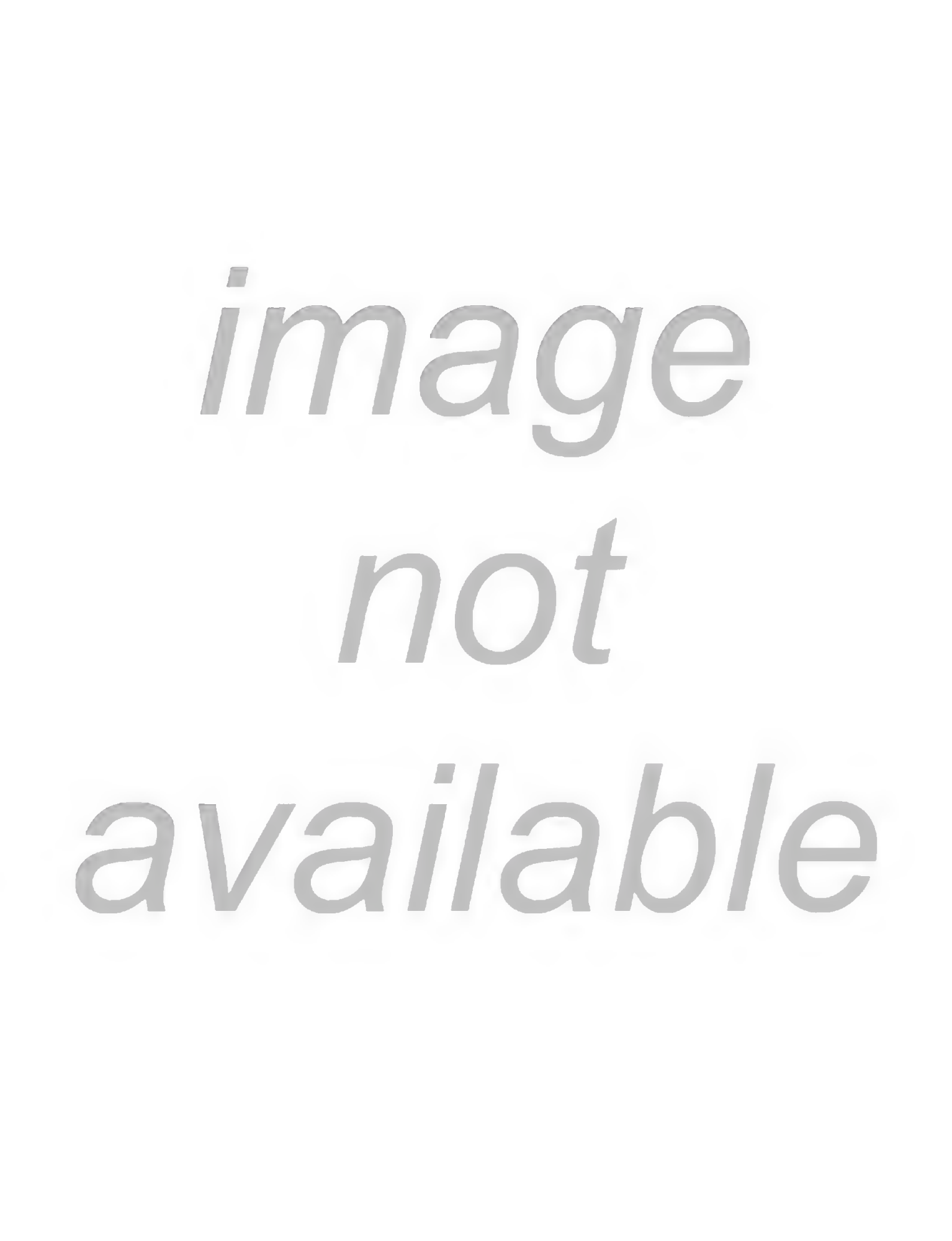


image
not
available

der Portugiesen besser kennt und die Verantwortung dafür auf sich nehmen kann, dass seine Methode für seine Zuhörer die angemessene ist. Der eigentliche Cursus ist davon unabhängig und ohne Bezugnahme darauf; er ist auf Uebermittelung des heutigen Standpunktes der Theorie und besonders auf ausübende Praxis gerichtet, der Vortrag leicht verständlich. H.

Grundriss der Differential- und Integral-Rechnung. I. Theil: Differential-Rechnung. Von M. Stegemann, Dr. phil., weil. Professor an der technischen Hochschule zu Hannover. Fünfte, vollständig umgearbeitete und vermehrte Auflage mit 66 Figuren im Texte herausgegeben von Dr. Ludwig Kiepert, Professor der Mathematik an der technischen Hochschule zu Hannover Hannover 1888. Helwing. 465 S.

Das Buch gehört zu denjenigen Lehrbüchern, welche dem Anfänger das Lernen leicht machen wollen, in der Tat aber es ihm nur leicht machen nicht zu lernen, viel zu treiben ohne darüber ins Klare zu kommen. Der Bearbeiter sagt zwar, dass er zahlreiche Irrtümer, die sich in den früheren Auflagen befinden, richtig zu stellen hatte. Gleichwol ist der bekannte elementare Fehler unberechtigter Umkehrung stehen geblieben. Gleiches kann man für Gleiches setzen, aber nicht umgekehrt: Grössen sind darum nicht gleich, weil ihre Substitution ein Resultat nicht ändert. Dem entgegen wird hier der Satz aufgestellt: endliche Grössen würden durch Addition unendlich kleiner nicht geändert, und zwar geht zur Begründung nichts voraus als eine kurze Erörterung des Begriffs des Grenzwerts, so dass die Behauptung sich bloss auf den Schluss von $\lim(x+\varepsilon) = \lim x$ auf $x+\varepsilon = x$ stützt. Der Fehler ist kein vorübergehender, der sich im Fortgang ausgliche; nein, in ebenso sorgloser Weise geht es weiter. Die ganze Theorie der Unendlichen wird durch ausweichenden, schiefen Ausdruck in ein für den Anfänger undurchdringliches Dunkel gehüllt. Gleich anfangs wird aufgestellt, eine veränderliche Grösse werde unendlich klein, unendlich gross, wenn sie sich der Grenze 0 nähere, bzhw. grösser als jede beliebige Grösse werde. Hiernach würde offenbar die Grösse erst dann unendlich klein, unendlich gross sein, wenn die Grenze 0 erreicht, bzhw. alle Grenzen überschritten wären, d. h. es würde sich ergeben: unendlich kleine Grössen (die nicht null) und unendlich grosse sind überhaupt undenkbar. Der Anfänger wird also sogleich in die alte Sackgasse geführt, in welcher ihm nichts übrig bleibt als auf Selbstdenken und Verstehen der Theorie zu verzichten und die Schlüsse des Lehrers nachzuahmen. Dass wirklich der Verfasser den

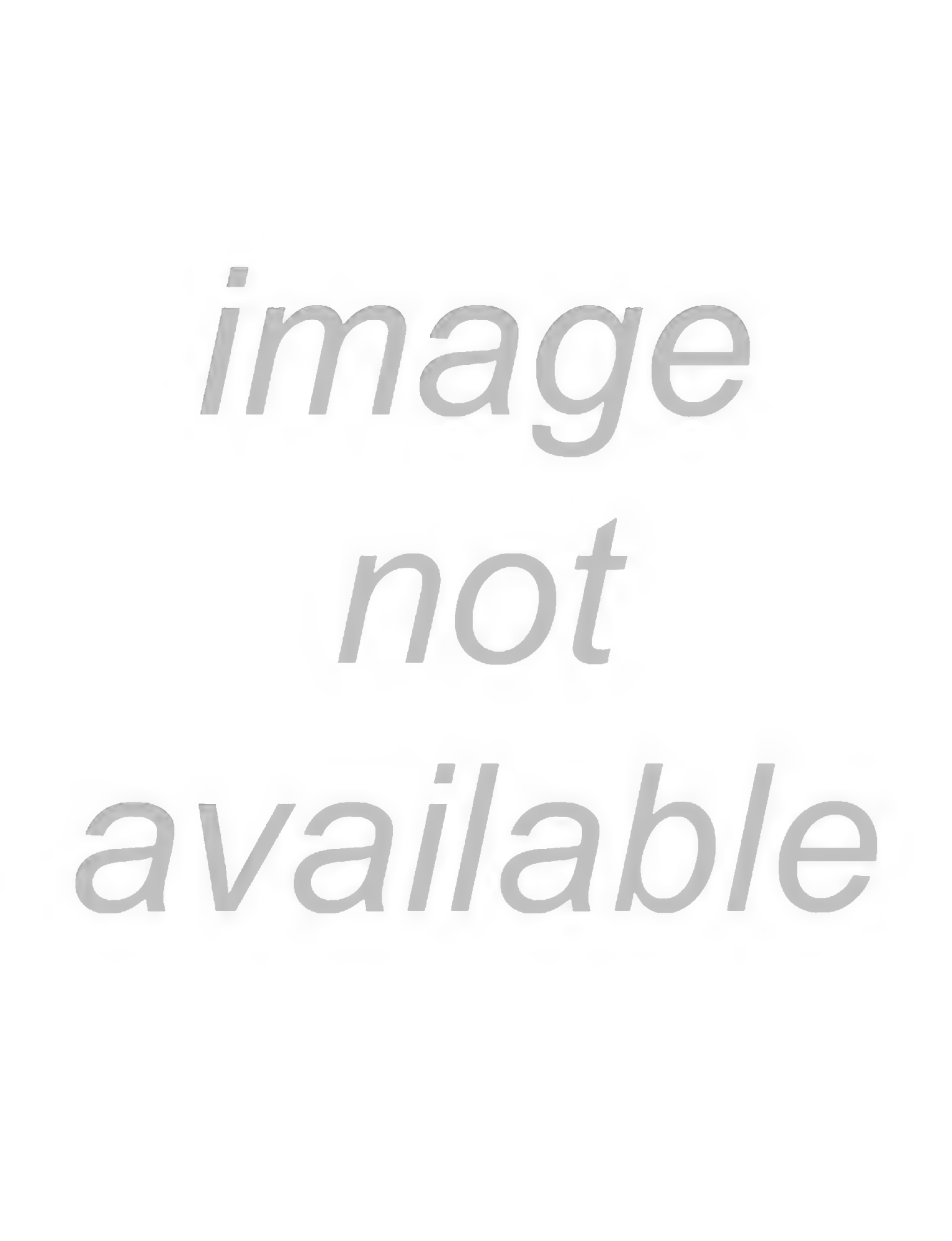


image
not
available

dam. Calcul différentiel et principes de calcul intégral. Paris 1887. Gauthier-Villars. 300 S.

Das Vorliegende ist der Inhalt der Vorlesungen des Verfassers; es lehrt die Principien der Theorie der elementaren Functionen; andere als die in den Elementen vorkommenden Functionen sind also ausgeschlossen; dagegen werden die unabhängigen Variabeln allgemein als complex aufgefasst, ohne Anwendung jedoch der krummlinigen Integrale von Cauchy, ausgehend von der Definition $e^{yi} = \cos y + i \sin y$; $e^z = e^x e^{yi}$, wo $z = x + yi$. Der Beweis für die Regel der Derivation der zusammgesetzten Functionen wird aus den besondern Regeln bezüglich auf Summen, Producte und Exponentialfunctionen abgeleitet, ebenso für den Satz der Inversion der Derivationen ohne Recurs an ein Postulat. Hieraus liessen sich die gesamten Formeln der Differentialgleichung in gleicher Allgemeinheit begründen. Die Abschnitte des Buchs sind: Einleitung, fundamentale Eigenschaften der Derivirten, Integrale und Reihen, Differentiation, Eigenschaften der Functionen, Anhang, ergänzende Noten. Die zwei letzten sind wegen der kurzen Fassung der zwei ersten Abschnitte hinzugefügt. Die drei ersten Capitel des Anhangs enthalten eine historische Skizze der Fortschritte der Analysis des Unendlichen, die Uebersetzung der ersten Artikel von Leibniz und Newton über die Differentialgleichung und eine Notiz über die verschiedenen Auffassungsweisen der Theorie der Unendlichkleinen von Kepler bis Cauchy, worin der Verfasser bewiesen zu haben glaubt, dass schon Leibniz und Newton die Infinitesimalrechnung so verstanden haben wie 150 Jahre später Cauchy. Die zwei folgenden Capitel beweisen das Fundamentalprincip der Grenzmethode: Eine beständig wachsende Variable hat einen endlichen oder „unendlichen Grenzwert". Die Theorie der Grenzwerte ist schon vorher behandelt. Ein Capitel handelt vom Princip der Substitution Unendlichkleiner mit neuer Begründung namentlich in Anwendung auf Rectification, Quadratur, Kubatur. In einem Capitel über die fundamentalen Eigenschaften der Derivirten und den Zusammenhang der Differential- und Integralrechnung wird der Satz bewiesen, dass Functionen von gleicher Derivirter constante Differenz haben, und die Weierstrass'sche Function ohne Differential besprochen. Bei Abfassung des Buchs erklärt der Verfasser die Lehrbücher von Schaar, Catalan, Gilbert, Cauchy, Duhamel, Lipschitz und Schriften von Genocchi, Peano und Darboux zu Rate gezogen zu haben. H.

Die Determinanten in genetischer Behandlung zur Einführung für Anfänger. Von Adolf Sickenberger, Professor am k. Maxi-

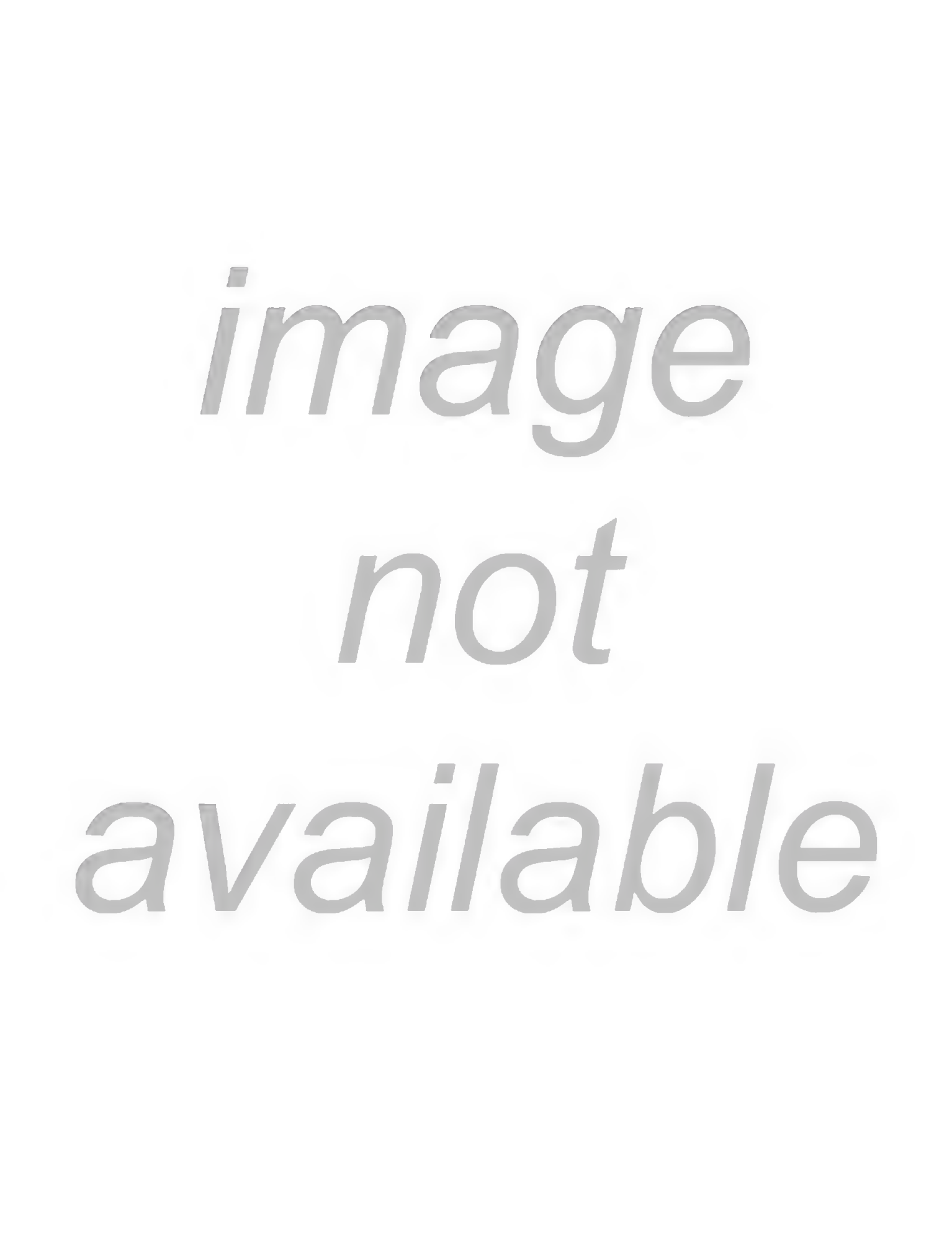


image
not
available

Anwendnng nachfolgt. Die Ausführung hat gezeigt, welche Fragen dabei zu behandeln sind. Hierin allein ist die eigentliche Leistung der Arheit zu sehen; das succcssive Aufsteigen war der Weg, auf dem der Verfasser dazu gelangte, vielleicht der einzige mögliche, wo nicht, wol kaum der empfehlenswerte. Was nun die Verwendung der Methode zur Einführnng der Anfänger betrifft, so ist in vorliegender Bearheitung die Kenntniss der Auflösnng der lineareu Gleichungen nach irgeud einem Verfahren vorausgesetzt, das Ordnungsprincip im Ausdruck der Lösnngen hingegen eoll eben erlernt werden. Der Lehrgang heginnt mit einigen Beohachtungen am System zweier Gleichungen, deren Zweck dem Schüler verhorgen hleibt. Im Fortschritt zum Systeme dreier Gleichungen würde er den Zweck ahnen, wenn die Beohachtungeu analoge wären. Allein hier wird erst nach Reductionen und Discueeionon das Ziel erreicht überhaupt die analoge Form herzustellen, deren Uehereinetimmnng der Schüler, dem die Idee der Anordnung fremd iet, nicht wahrnimmt. Er hat also wiederum keine Aufklärung erhalten, muss Schritt für Schritt dem Vortrage receptiv folgen und hat für den weitern Fortschritt nur den Blick auf unahsehbar ausgedehnte Discussionen, die hei 4 nnd 5 Gleichungen hevorstehen. Ist endlich nach andauornder Aufmerksamkeit das Ziel erreicht, so kann er gewisse Eigenschaften der Determinanten registriren, iet aber in doren Gebrauch zu den einfachen weitreichenden Schlüssen uoch immer nicht eingeweiht und wird eich hei Anwendung mit Zerlegung in Unterdoterminanten behelfen. Wenn man weiss, wie leicht — freilich erst bei einiger Vertrantheit der Schüler mit den Elemeuten der Combinatorik und mit Snbstitutionen — sich sämtliche Hauptsätze der Determinantenlehre ohne alle Deductionsketten durch directe Schlüsse entwickeln lassen, so mnss ee als eine unhilligo Zumutung erscheinen, dass sie sich orst dnrch alle Schwierigkeiten dcs successiven Aufsteigens hindurcharbeiten sollen. Andere Autoreu haben bei Bearbeitung der Determinantenlehre für den Schulgehranch den gleichen Ausgangspunkt wie in dieser Schrift gewählt, verbanden aber damit die Bestimmung für die Mittelclassen der Gymnasien, um die Schüler der Algebra schon am Gewinne teilnehmen zu laesen, ein Gewinn der für sie offenhar ganz illusorisch ist. Der Verfasser hat nach allem nur die höchste Classe im Sinne. Hoppe.

Allgemeine Untersuchungen über die uneudliche Reihe

$$1+\frac{\alpha\beta}{1\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2\gamma(\gamma+1)}xx+\text{ n. e. w.}$$

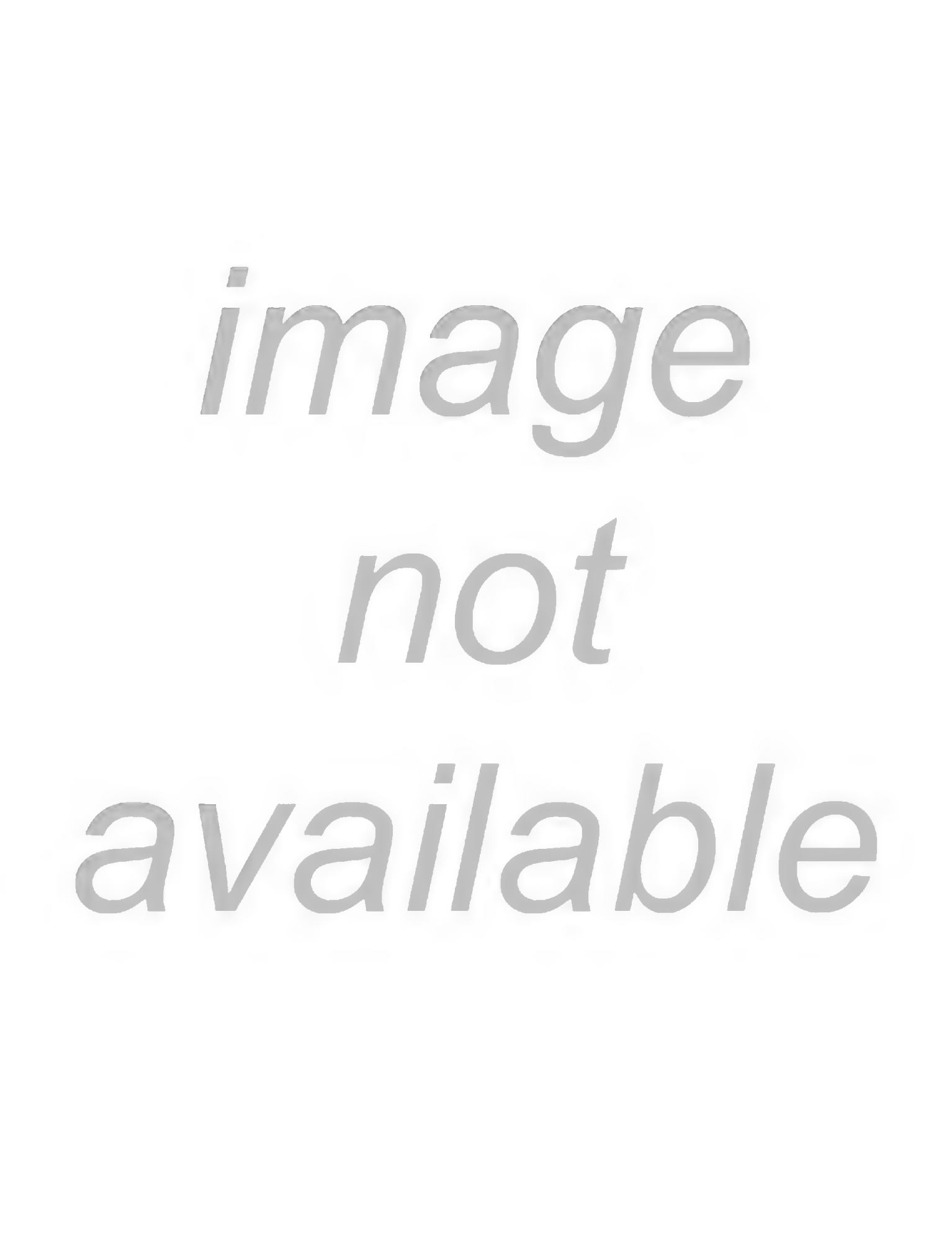


image
not
available

Geometrie.

Cours de géométrie de la Faculté des Sciences. Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal. Par Gaston Darboux, Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences. Première partie. Généralités. Coordonnées curvilignes. Surfaces minima. Paris 1887. Gauthier-Villars. 513 S.

Das Buch behandelt die Theorie der Curven und Flächen in analytisch kinematischer Auffassung, und gehört hiernach der zur Zeit noch am wenigsten vertretenen Classe geometrischer Arbeiten an, die sich in wesentlichem Gegensatze gegen zwei gegenwärtig weit mehr im Vordergrunde stehenden Classen, den synthetischen und algebraischen, d. h. die Gebilde als Construction primitiv gegebener Gleichungen betrachtenden, befindet und ihre verdiente Beachtung neben jenen zu erringen hat. Der kinematische Ausgangspunkt ist allgemeiner gewählt, als es für die geometrische Verwendung erfordert wird. Es ist die momentane Rotation eines Trieders, das mit einem Parameter variirt. Sind p, q, r die Componenten der Rotationsgeschwindigkeit, die sich bekanntlich auch verhalten wie die Richtungscosinus der Rotationsaxe, so sind für festen Scheitel die Richtungscosinus jeder der 3 Triederkanten α, β, γ bestimmt durch das System dreier Differentialgleichungen

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} = \beta r - \gamma q; \quad \frac{\partial\beta}{\partial t} = \gamma p - \alpha r; \quad \frac{\partial\gamma}{\partial t} = \alpha q - \beta p \tag{8}$$

dessen vollständiges Integral durch Orthogonalsubstitution aus jeder speciellen Lösung hervorgeht. Für variirenden Scheitel kommen noch Terme hinzu, deren Berücksichtigung indes jener Integration erst nachfolgt. Wird nun das Trieder von der Tangente, Haupt- und Binormale einer Curve gebildet und durch ein Trieder von gleicher Stellung und festem Scheitel ersetzt, so fällt die Rotationsaxe in die eine Seitenfläche, q verschwindet, und r, p verhalten sich wie die Coincidenzwinkel der Tangente und Krümmungsaxe (mithin wie Krümmung und Torsion). Die 3 Differentialgleichungen sind dann die Fundamentalformeln der Curventheorie, und ihre Integration löst das Problem, aus der gegebenen Relation von Krümmungs- und Torsionswinkel die Curve zu finden. Die Reduction des Problems auf eine imaginäre lineare Gleichung 2. Ordnung war bekannt. Hier wird sie nach gleicher Methode allgemeiner behandelt. Zunächst führt letztere die obigen Bewegungsgleichungen eines beliebigen Trieders auf dieselbe Form zurück, und selbst diese werden vorher erweitert auf die Form

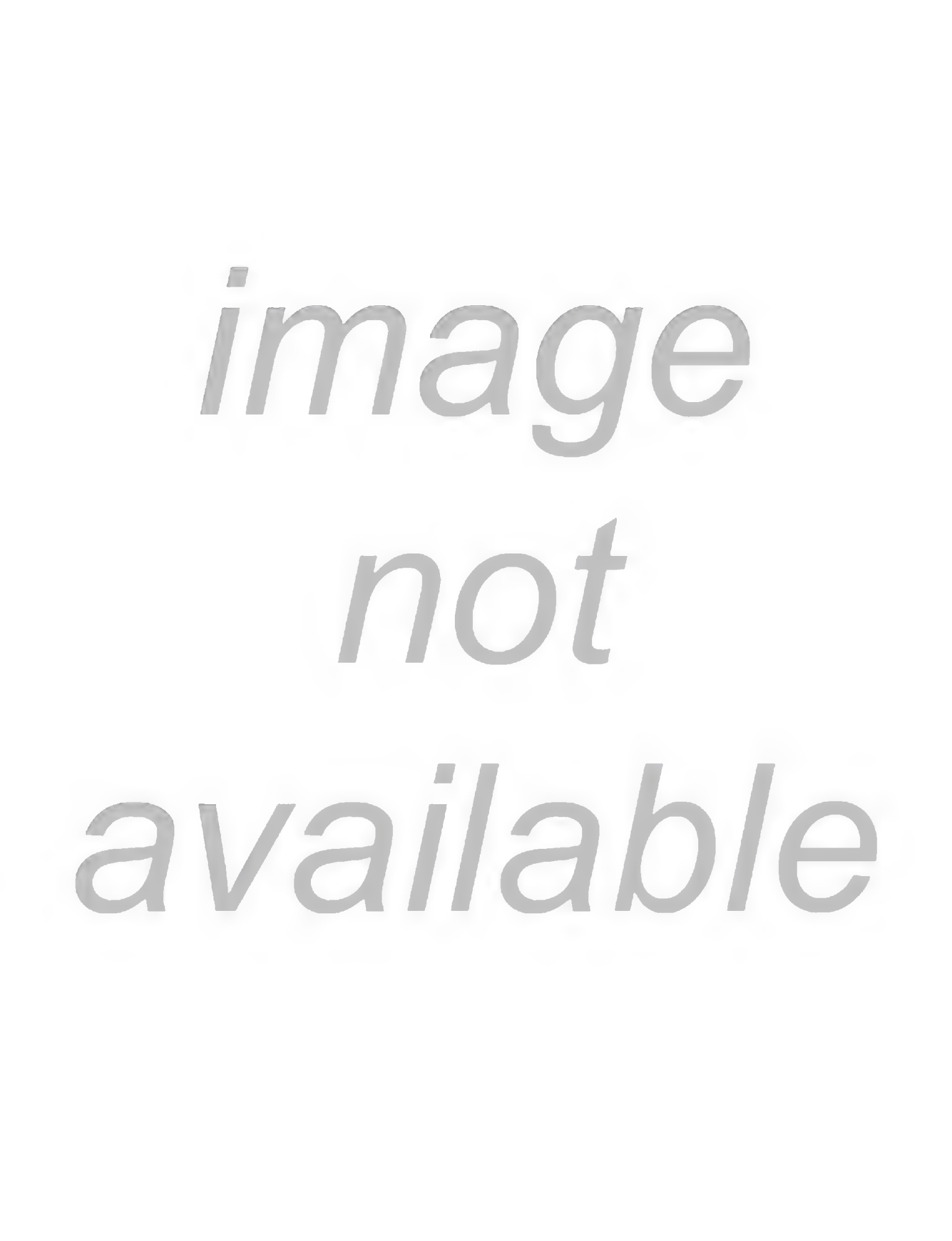


image
not
available

Gleichung der Curve zugezogen. Es folgt weiter der Reihe nach: die quadratische Punkt- und Strahleninvolution, der Kreiskegel, dessen ebene Schnitte, projective Punktreihen und Strahlbüschel, die Kegelschnitte als Erzeugnisse, Flächeninhalt. Mit den einzelnen Sätzen sind viele Uebungen verbunden. H.

Methodik der stetigen Deformation von zweiblättrigen Riemann'schen Flächen Von Fritz Hofmann. Mit vielen in den Text eingedruckten Figuren. Halle a. S. 1888. Louis Nebert. 50 S.

„Riemann'sche Flächen" werden zur Abkürzung die hier allein in Betracht gezogenen Flächen genannt, welche zugleich zweiblättrig, sowie geschlossen sind, aber auch Selbstdurchdringungscurven besitzen. Die erste hier gelöste Aufgabe lautet: einfache Methoden anzugeben, nach welchen eine Riemann'sche Fläche durch stetige Verzerrung identisch gemacht werden kann mit andern, besonders charakteristischen Flächen von einer solchen Beschaffenheit, dass sich auf ihnen die Untersuchung topologischer Fragen besonders übersichtlich gestaltet; für welche insbesondere jener den Riemann'schen Flächen anhaftende missliche Umstand wegfällt, dass die geometrische Vorstellung durch das Auftreten der Selbstdurchdringungscurven gehindert wird. Die zweite gelöste Aufgabe ist die umgekehrte: Methoden anzugeben, welche eine directe Umwandlung einer beliebig vorgegebenen geschlossenen Fläche in eine Riemann'sche Fläche gestatten. H.

Axonometrie und Perspektive in systematischem Zusammenhange dargestellt von Dr. Christian Beyel, Privatdozent am eidgenössischen Polytechnikum in Zürich und Assistent für darstellende Geometrie. Mit 9 Tafeln in Steindruck. Stuttgart 1887. J. B. Metzler. 57 S.

Unter der Bezeichnung „centrische Axonometrie" wird nach Vorgang von Guido Hauck die Axonometrie, Perspective und schiefe Parallelperspective zusammenbegriffen. Bei Behandlung dieses Lehrgebiets, bestimmt für Zeichner, ist die Anwendung von Rechnung mit einigen wenigen Ausnahmen vermieden worden. Die Hauptabschnitte sind: Einleitung, centrische Axonometrie, schiefe Parallelspective. Der Klarheit des Vortrags können wir kein Lob spenden. H.

Ueber den Zusammenhang gewisser topologischer Thatsachen mit neuen Sätzen der höheren Arithmetik und dessen theoretische Be-

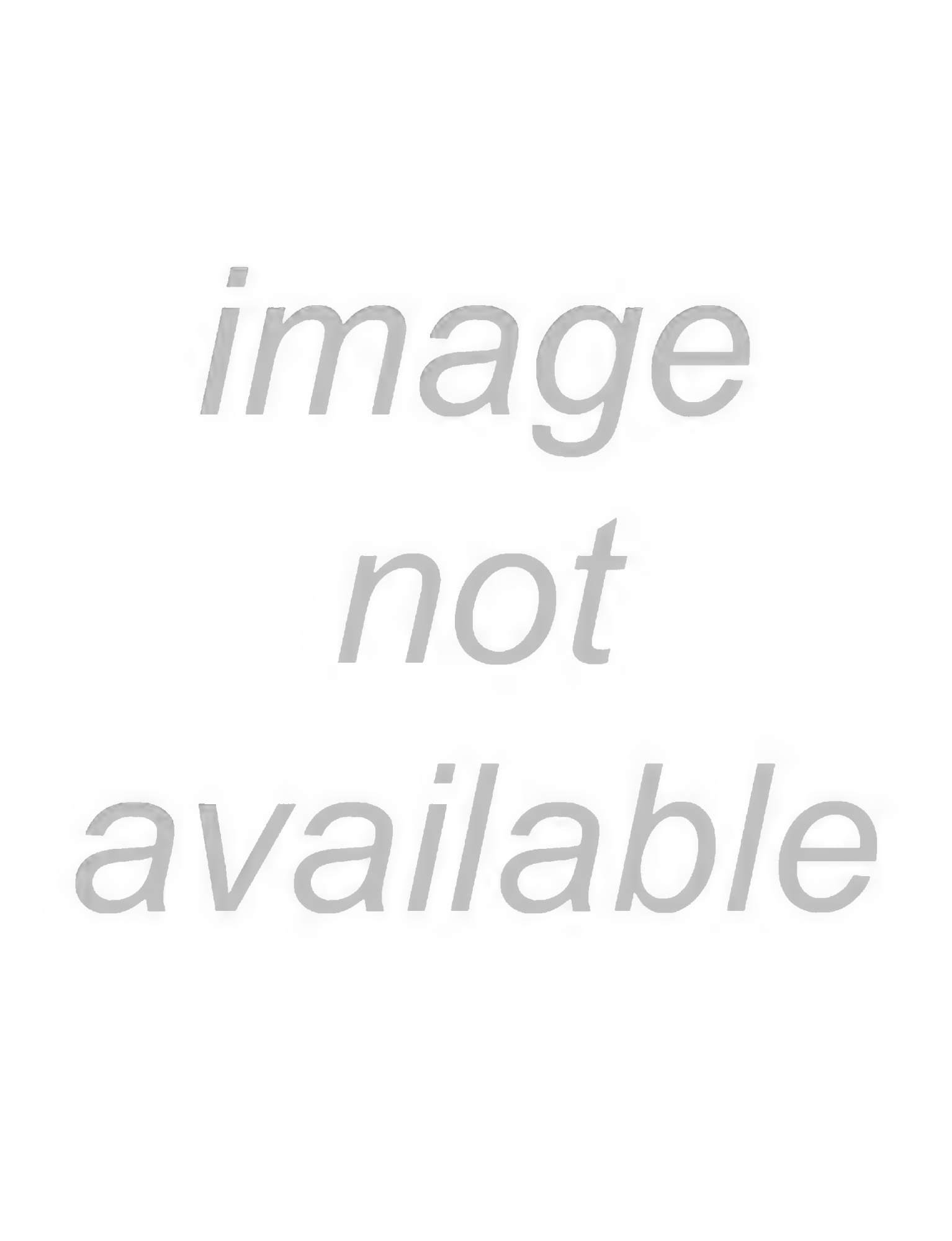


image
not
available

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XIX.

Geschichte der Mathematik.

Annalen, mathematische. Hrsg. v. F. Klein, W. Dyk, A. Mayer, 31. Bd. (4 Hfte.) 1. Hft. Leipzig, Teubner. prcplt. 20 Mk.

Boltzmann, L., Gustav Robert Kirchhoff. Festrede. Leipzig, J. A. Barth. 1 Mk.

Jahrbuch üb. die Fortschritte d. Mathematik, begründet v. C. Ohrtmann. Unter Mitwirkung v. J. Müller u. A. Wangerin. Hrsg. v. M. Henoch u. E. Lampe. 17 Bd. Jhrg. 1885. 1. Hft. Berlin, G. Reimer. 11 Mk.

Methode und Principien.

Dedekind, R., Was sind u. was wollen die Zahlen? Braunschweig, Vieweg & S. 1 Mk. 60 Pf.

Zimmermann, W. F. A., Naturkräfte u. Naturgesetze. 4. Afl. 11.—13. Lfg. Berlin, Dümmler's Verl. à 50 Pf.

Sammlungen.

Baule, A., Sammlung v. Aufgaben d. prakt. Geometrie nebst kurzer Anleitung z. Lösung derselben. Berlin, Springer. Kart. 1 Mk.

Brockmann, F. J., Sammlung v. Aufgaben aus allen Gebieten d. Elementarmathematik nebst Lösgn. od. Lösungsandeutungen. Paderborn, F. Schöningh. 1 Mk.

Budde, W., physikal. Aufgaben f. d. oberen Klassen höh. Lehranstalten. Braunschweig, Vieweg & S. 2 Mk. 50 Pf.

Dohne, F., prakt. Rechenbuch. 1. Tl. 3. Afl. Riga, Stieda's Verl. 1 Mk.

Heis, E., Sammlung v. Beispielen u. Aufgaben aus d. allgem. Arithmetik u. Algebra. 73. Afl. Köln, Du Mont-Schauberg. 3 Mk.

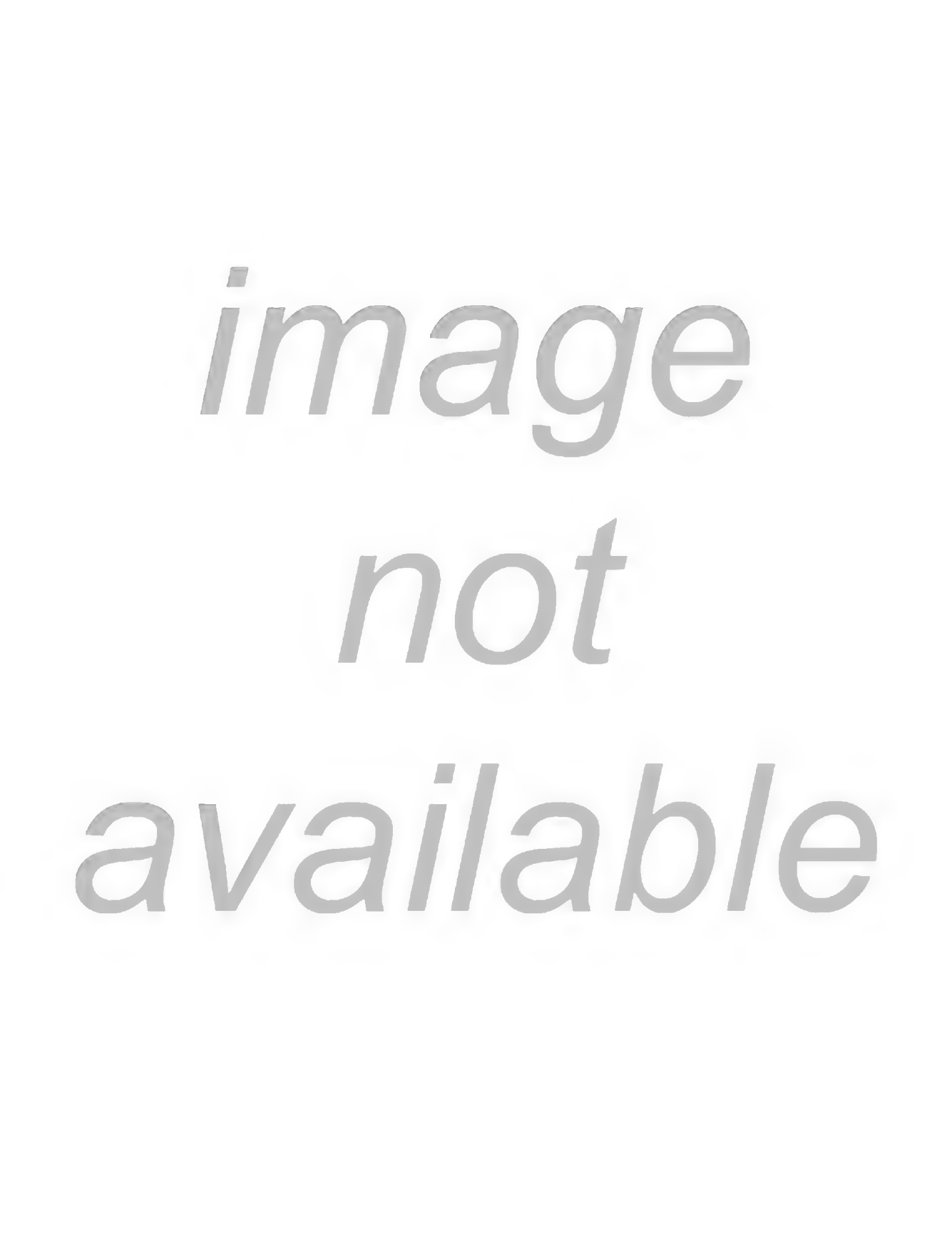


image
not
available

Redlich, A., prakt. Anleitg. z. algebr. Entwickelg u. Lösung der Gleichungen der höh. Grade nebst Uebungsbeispielen. Breslau, Aderholz. 4 Mk.

Schwartz, A., üb. binäre partielle Differential-Gleichungen II. Ordnung. Tübingen, Fues, Verl. 80 Pf.

Sickenberger, A., die Determinanten in genet. Behandlg. z. Einführg. f. Anfänger. 2. Abdr. München, Th. Ackermann. 1 Mk. 60 Pf.

Tödter, H., Auflösungen zu den Anfangsgründen d. Arithmetik u. Algebra. 2. Tl. 4. Afl. Bielefeld, Velhagen & Kl. 50 Pf.

Vandermonde, N., Abhandlungen aus d. reinen Mathematik. In dtschr. Sprache hrsg. v. C. Itzigsohn. Berlin, Springer. 3 Mk.

Geometrie.

Baur, M., synthet. Eintheilung der ebenen Linien III. Ordnung. Stuttgart, Metzler, Verl. 2 Mk. 80 Pf.

Bobek, C., zur Classifikation d. Flächen dritter Ordnung. Wien, Gerold's S. 80 Pf.

Fenkner, H., Lehrbuch d. Geometrie f. d. mathemat. Unterricht an höheren Lehranstalten. 2 Tle. Braunschweig, Salle. 3 Mk. 20 Pf.

Kötter, E., Grundzüge e. rein geometrischen Theorie der algebraischen ebenen Curven. Berlin, G. Reimer. 20 Mk.

Krejči, J., Elemente d. mathemat. Krystallographie in neuer leichtfassl. Darstellung. Hrsg. v. H. Katzer. Leipzig, Opetz. 5 Mk.

Menger, J., Grundlehren d. Geometrie. 3. Afl. Wien, Hölder. 1 Mk. 60 Pf.

Simony, O., üb. den Zusammenhang gewisser topolog. Thatsachen m. neuen Sätzen d. höh. Arithmetik u. dessen theoret. Bedeutung. Wien, Gerold's S. 2 Mk.

Praktische Geometrie u. Geodäsie.

Kalender f. Messkunde pro 1888. v. M. Clouth. 2. Thl. Trier, Lintz. 1 Mk.

Zeitschrift f. Vermessungswesen. Organ d. dtschn. Geometer-Vereins, hrsg. v. W. Jordan. 17. Bd. Jahrg. 1888. (12 Hfte.) 1. Hft. Stuttgart, Wittwer's Verl. prcplt. 9 Mk.

Mechanik.

Bieler, A., Leitfaden u. Repetitorium d. analyt. Mechanik. 1. Tl. Analyt. Statik d. festen Körper. Leipzig, Violet. 1 Mk. 80 Pf.

Wex, G., Ritter v., Hydrodynamik. Leipzig, Engelmann. 6 Mk.

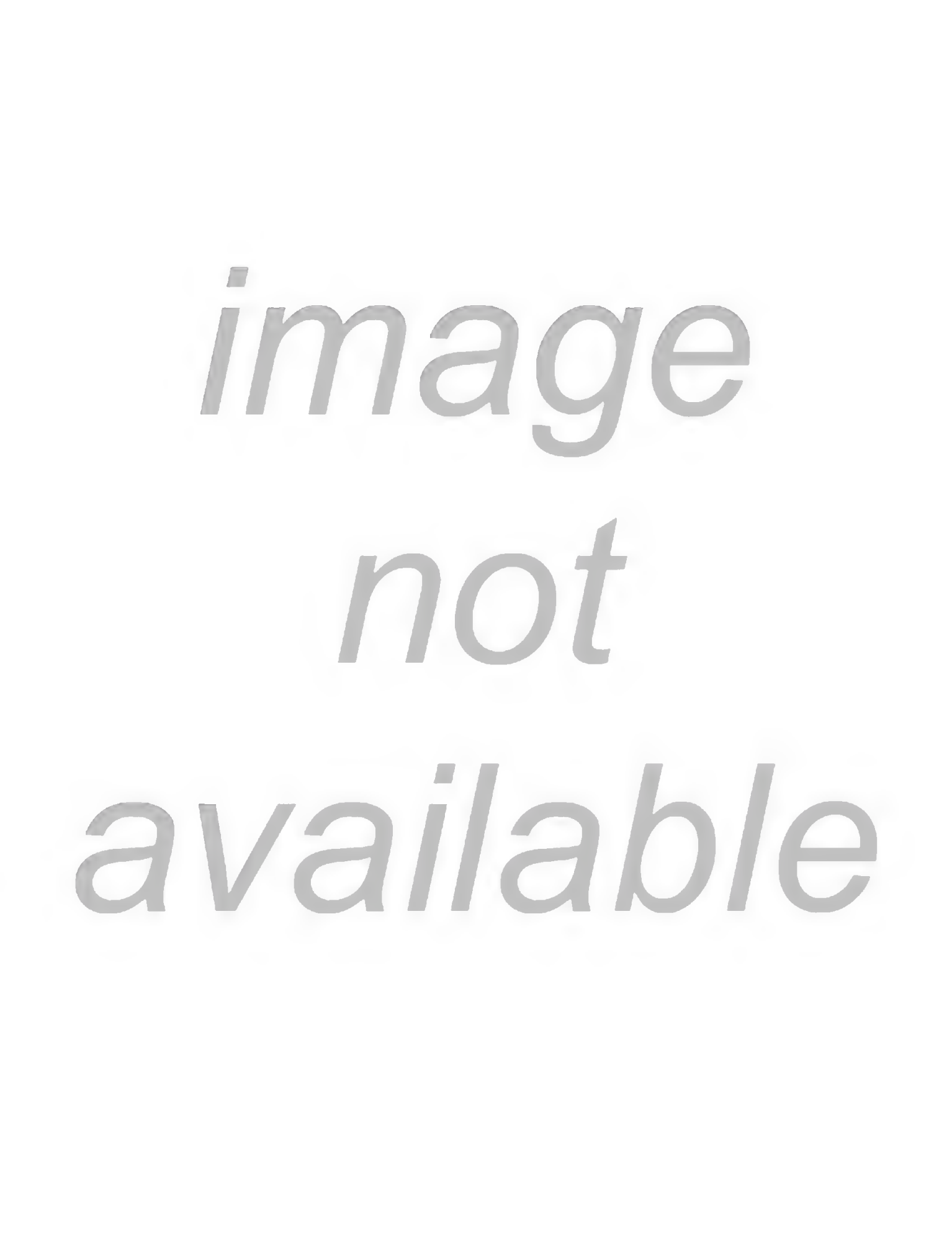


image
not
available

Berwerth, F., das Meteor vom 21. April 1887. Wien, Hölder. 1 Mk.

Encke, J. F., gesammelte mathemat. u. astronom. Abhandlungen. 1. Bd. Allgemeines betr. Rechnungsmethoden. Berlin, Dümmler's Verl. 7 Mk.

Ephemeriden, astronomisch-nautische, f. d. J. 1889. Deutsche Ausg. Red. v. F. Anton. Triest, Schimpff. Geb. 2 Mk. 70 Pf.

Förster, W., Studien z. Astrometrie. Gesammelte Abhandlungen. Berlin, Dümmler's Verl 7 Mk.

Gerst, J., allgem. Methode zur Berechnung der speciellen Elementenstörgn. in Bahnen v. beliebiger Excentricität. Wien, Gerold's S. 60 Pf.

Holetschek, H., üb. die Frage nach d. Existenz v. Kometen-Systemen. Ebd. 45 Pf.

Jahrbuch d. kgl. sächs. meteorolog. Institutes. 1886. 4. Jhrg. 1. Lfg. Chemnitz, Bülz. 10 Mk.

Kalender, astronom. Hrsg. v. der k. k. Sternwarte. Neue Folge. 7. Jhrg. Wien, Gerold's S. 1 Mk. 60 Pf.

Kiessling, J., Beiträge zu e. Chronik ungewöhnl. Sonnen- u. Himmelsfärbungen. Hamburg, Friederichsen & Co. 1 Mk. 20 Pf.

Klein, H. J., Stern-Atlas f. Freunde d. Himmelbeobachtung. Leipzig, E. H. Mayer. 16 Mk.

Laska, V., Studien zur Störungstheorie. 1. Abth. Wien, Gerold's S. 40 Pf.

— zur Theorie d. planetarischen Störgn. Leipzig, Freytag. 16 Pf.

Neumayer, G., die Thätigkeit d. deutschen Seewarte während d. ersten 12 Jahre ihres Bestehens (1875—1888). Hamburg, Friederichsen & Co. 3 Mk.

Niessl, G. v., Bahnbestimmung d. Meteors vom 21. April 1887. Leipzig, Freytag. 50 Pf.

Orff, C. v., telegraph. Längenbestimmgn. f. d. kgl. Sternwarte zu Bogenhausen. 1. Thl. München, Franz'sche Verl. 5 Mk.

Repertorium f. Meteorologie, red. v. H. Wild. 10. Bd. Leipzig, Voss' Sort. 21 Mk. 30 Pf.

Ritzhaupt, F., populäre Himmelskunde. Karlsruhe, Macklot'sche Buchh. 2 Mk. 50 Pf.

Schönfeld, E., Bonner Sternkarten. 2. Serie. Atlas der Himmelszone zwischen 1° n. 23° südl. Declination f. d Anfang d. J. 1855. Als Fortsetzg. d. Bonner Atlas d. nördlich gestirnten Himmels in den J. 1876—1885 auf d. kgl. Sternwarte zu Bonn bearb. 4. (Schluss-)Lfg. Bonn, Marcus. 12 Mk.

Schwarz, B., Bahnbestimmung d. Planeten (254) Augusta. Wien, Gerold's S. 40 Pf.

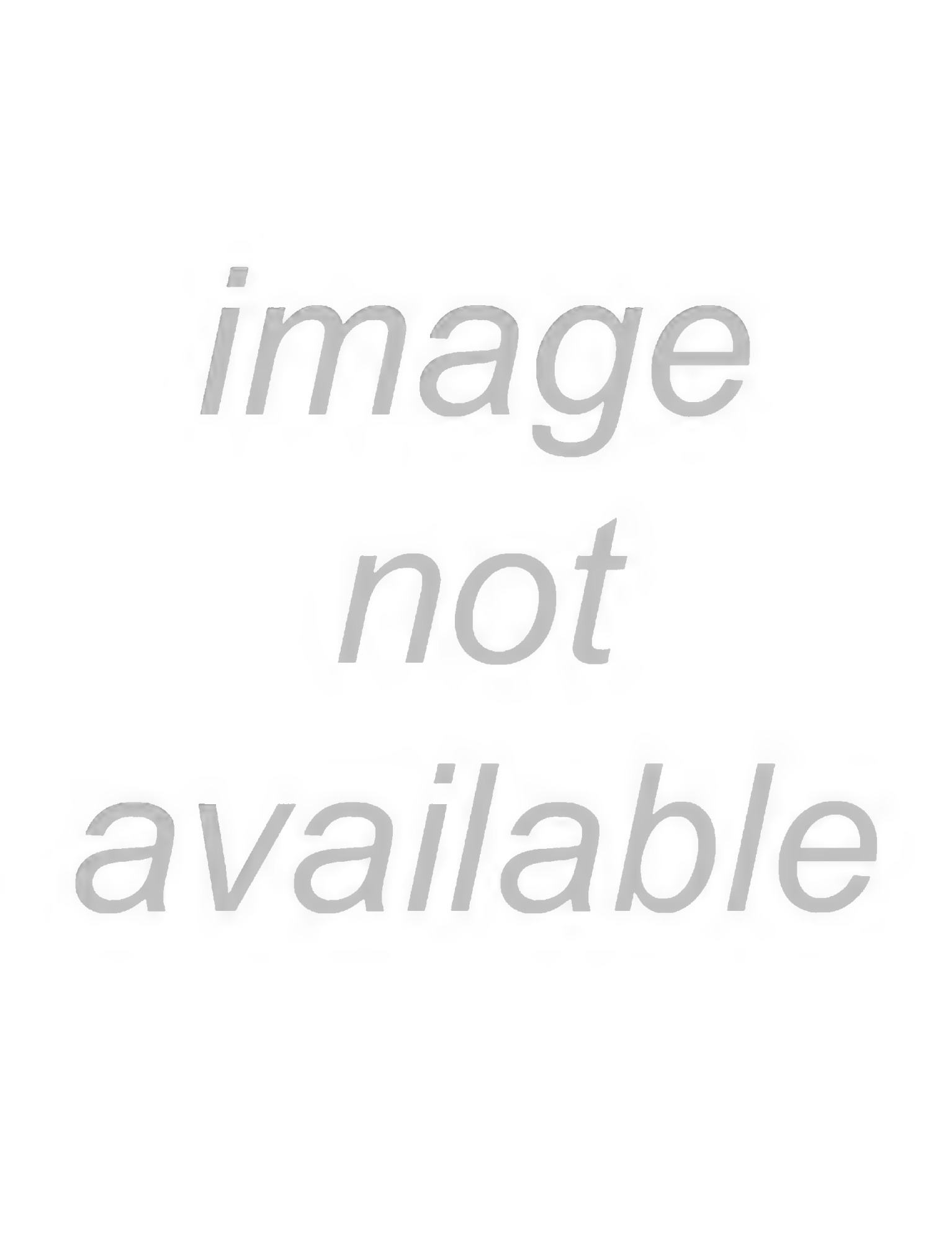


image
not
available

Mascart, E., Handbuch d. statischen Elektricität. Deutsche Bearbeitg. v. J. G. Wallentin. 2. Bd. 2. Abth. Wien, Pichler's Wwe. & S. 7 Mk.; 2. Bd. kplt. 16 Mk.

Physik, prakt. Zeitschrift f. Experimentalphysiker, Studirende d. Physik, Mechaniker, Optiker u. s. w. Hrsg. v. M. Krieg. 1. Jahrg. 1888. (12 Hfte.) 1. Hft. Magdeburg, Faber. prcplt. 6 Mk.

Salomons, D., completes Handbuch üb. die Behandlung v. Accumulatoren. Aus d. Engl. v. J. L. Huber. Rostock, Werther's Verl. Geb. 2 Mk.

Schulze, A., üb. die Bewegung der Wärme in e. homogenen rechtwinkl. Parallelepipedon. Kiel, Lipsius & T. 1 Mk

Stewart, B., Physik. Deutsche Ausg. v. C. Warburg. 4. Afl. Strassburg, Trübner. Geb. 80 Pf.

Streintz, F., Experimentaluntersuchungen üb. die galvan. Polarisation. 3. Abhandlg. Wien, Gerold's S. 25 Pf.

Tumlirz, O., u. A. Krug, die Leuchtkraft u. der Widerstand e. galvanisch glühenden Platindrahtes. Leipzig, Freytag. 30 Pf.

Urbanitzky, A. Ritter v., die Elektricität d. Himmels u. der Erde. 3.—9. Lfg. Wien, Hartleben. à 60 Pf.

Voller, A., üb. die Messung hoher Potentiale m. d. Quadron-Elektrometer. Hamburg, Friederichsen & Co. 2 Mk.

Wassmuth, A., u. G. A. Schilling, üb. e. Methode zur Bestimmg. d. Galvanometerconstante. Wien, Gerold's S. 40 Pf.

Vermischte Schriften.

Abhandlungen d. mathemat.-physikal. Classe d. k. bayer. Akademie d. Wissenschaften. 16. Bd. 2. Abth. München, Franz'sche Verl. 8 Mk.

Acta mathematica. Zeitschrift, hrsg. v. G. Mittag-Leffler. 11. Bd. 1. Hft. Berlin, Mayer & M. prcplt. 15 Mk.

Berichte üb. die Verhandlgn. d. königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. 1887. 1. 2. Leipzig, Hirzel. 2 Mk.

Geerling's Rechenbuch, Hand- u. Hilfsbuch f. höhere u. Subalternbeamte, Militäranwärter u. Praktikanten, welche zum Zweck ihrer Anstellung od. Beförderg. in höhere Anstellungen e. Rechen-Examen abzulegen haben. 3. Afl. Frankfurt a./M., Gestewitz. 1 Mk. 50 Pf.; geb. 2 Mk.

Kleyer's, A., Encyklopädie der gesamten mathemat., techn. u. exacten Naturwissenschaften. 21.—29. Lfg. Stuttgart, Maier. à 1 Mk.

Möbius, A. F., gesammelte Werke. 4. Bd. Hrsg. v. W. Scheibner. Mit e. Nachtrag, hrsg. v. F. Klein. Leipzig, Hirzel. 18 Mk.

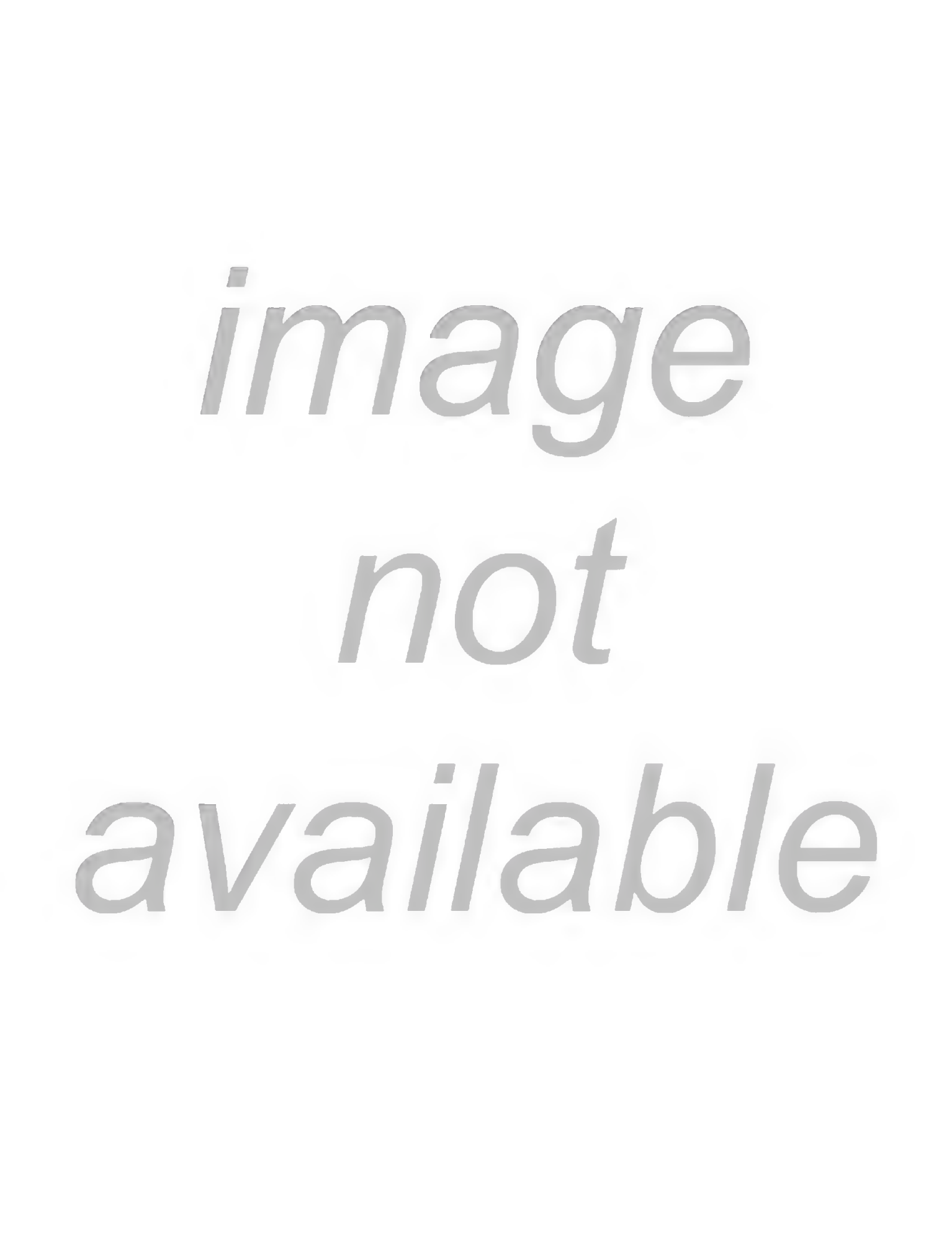


image
not
available

In Fr. Manke's Verlag in Jena erschien und ist durch jede Buchhandlung oder auch direkt zu beziehen:

Die

Lebensgeschichte der Gestirne

in

Briefen an eine Freundin.

Eine populäre Astronomie der Fixsterne

von

M. Wilh. Meyer.

Mit 46 Textillustr., 2 Tafeln u. 1. Titelbild.

Beste Ausstattung.

Geh. 4 Mk., eleg. geb. 5 Mk.

Das **Dresdner Tageblatt** schreibt:

„Der berühmte Verfasser hat nicht etwa Wilhelm v. Humboldts Titel nur adoptirt, sondern es ist ein so erkenntnistiefer, liebenswürdiger Zug in dem ausgezeichneten Buche vorherrschend, dass man es ungern aus der Hand legt und wirklich eingestehen muss: das ist ein geistvolles Werk, so unterhaltend und fesselnd wie belehrend und grössere Gesichtspunkte schaffend. *Wir empfehlen das Buch unter voller Verantwortung aufs wärmste.*"

In unserem Verlage erschien:

Astronomische Geographie.

Ein Lehrbuch angewandter Mathematik

von

Prof. H. C. E. Martus,

Direktor des Sophien-Realgymnasiums in Berlin.

Grosse Ausgabe. 2. Auflage. Mit 100 Figuren im Texte. Geb. *Preis* 7 Mk. 50 Pf.

Dass. **Schul-Ausgabe.** Mit 80 Figuren im Texte. Geh. Preis 2 Mk. 60 Pf.

Leipzig. **C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung.**
(J. Sengbusch.)

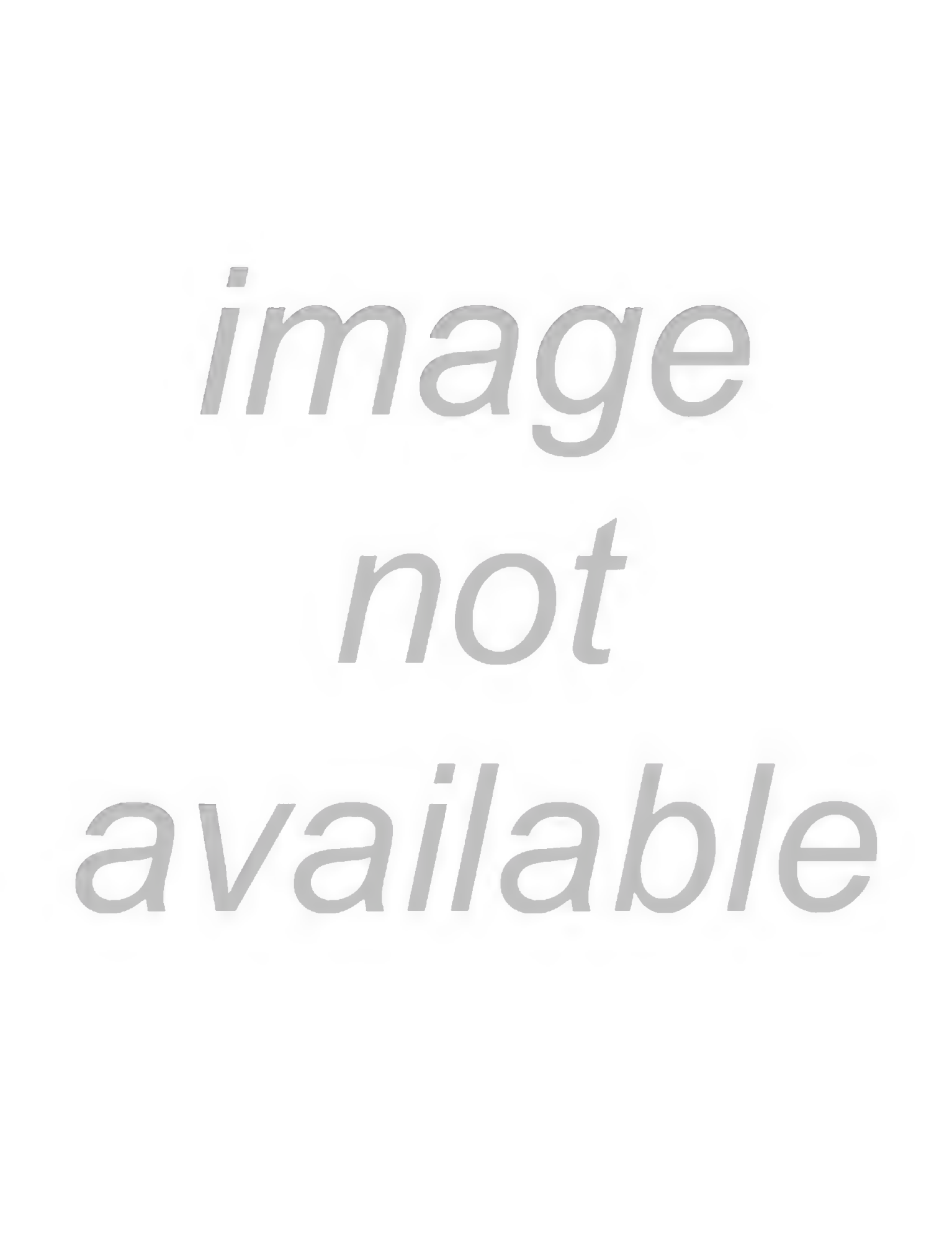


image
not
available

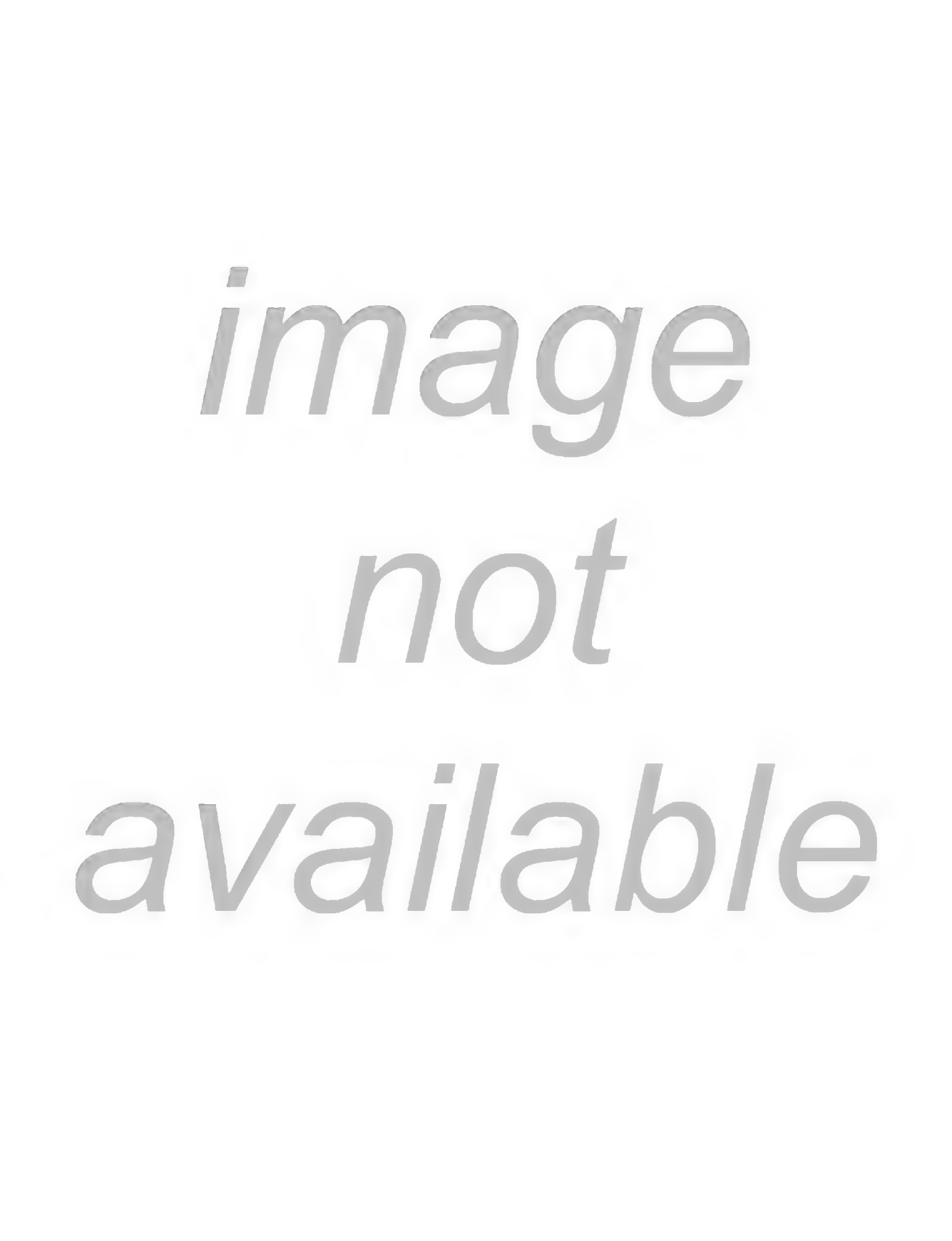


image
not
available

Lehrbuch der Physik,

einschliesslich der Physik des Himmels, der Luft und der Erde. Gemäss der neueren Anschauung und mit den neuesten Fortschritten. Für Gymnasien, Realschulen und andere höhere Lehranstalten. Von Professor **Dr. Paul Reis**, Grossherzogl. Hess. Gymnasiallehrer. Sechste vermehrte und theilweise umgearbeitete Auflage. Mit 410 Holzschnitten im Text und 849 Aufgaben nebst Lösungen.

Preis 8 M. 40 Pf.

„Die vorliegende Auflage des geschätzten Lehrbuches ist als eine bedeutende Erweiterung ihrer Vorgängerin anzusehen. — Erwägt man, dass die Theorien und Entdeckungen der neueren Zeit in allen ihren wesentlichen Punkten dargelegt werden — — so wird man den Ausspruch des Referenten richtig finden, dass das vorliegende Buch manches vielbändige Werk weit hinter sich zurücklässt, und insbesondere dem Physiker vom Fache sich überaus nützlich erweisen wird; — — ganz geschaffen ist das Buch für den Lehrer der Physik und diesem kann es nicht genug empfohlen werden. — — Fassen wir alle Beobachtungen zusammen, die wir beim Studium des Buches gemacht haben, so können wir als sicher hinstellen, dass die vorliegende höchst werthvolle Schrift vollständig den Anforderungen entspricht, die man an eine umfassende, den modernen Anschauungen völlig angepasste und durchweg wissenschaftlich gehaltene Darstellung der physikalischen Disciplinen stellen kann. *(Aus einer Besprechung der 5. Aufl. von Dr. J.G. Wallentin in der Wiener Zeitschrift für d. Realschulwesen.)*

Elemente der Physik,

Meteorologie und mathematischen Geographie. Hülfsbuch für den Unterricht an höheren Lehranstalten. Mit zahlreichen Uebungsfragen und -Aufgaben. Von Professor **Dr. Paul Reis.** Dritte verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 269 Holzschnitten im Text.

Preis 4 M. 50 Pf.

„Alle Vorzüge des „Lehrbuchs" (desselb. Verf.): Klarheit der Darstellung, Correctheit des Dargestellten, überreiche Fülle der Anwendungen und Beispiele sind auch den „Elementen" eigen. Die erstaunlich zahlreichen Fragen und Aufgaben, welche fast jeden Paragraphen beigegeben sind, bilden einen schätzenswerthen Bestandtheil des Buches und können den anregendsten Einfluss auf den Lernenden ausüben."

Centralorgan für Realschulwesen.

„Enthält die Lehren der Physik in einer ungemein compendiösen Form. — — Für besonders werthvoll ist das von vornherein sich kundgebende Bestreben des Verfassers anzuerkennen, den Zusammenhang der Naturkräfte nachzuweisen, wie er sich in dem Gesetze über die Erhaltung der Energie und den Lehren über die Verwandlung der Naturkräfte ausspricht; — eins der vorzüglichsten kleineren Lehrbücher für Gymnasien, Realschulen und ähnliche Lehranstalten." *Pädag. Jahresbericht.*

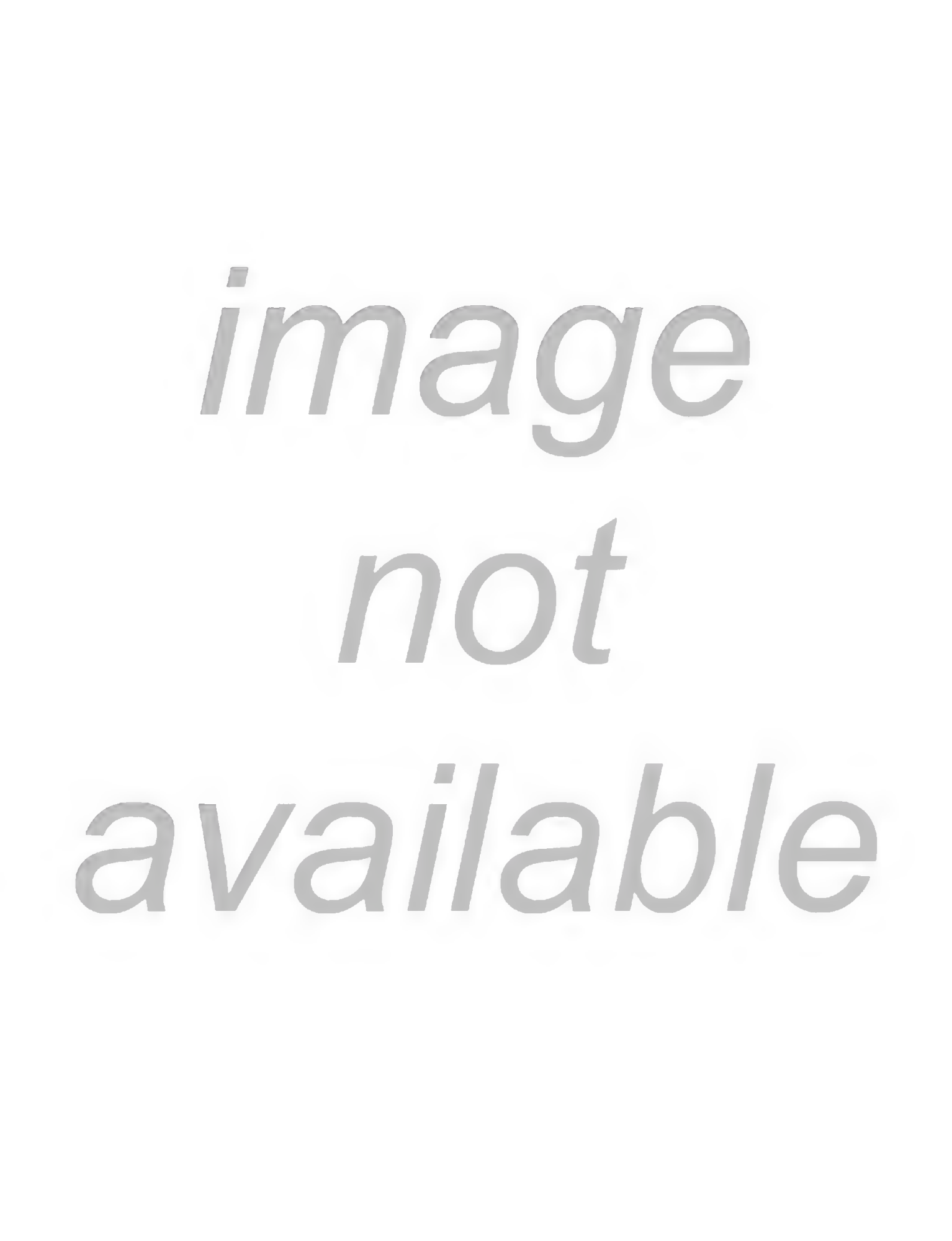


image
not
available

Vorschule der Experimentalphysik.

Naturlehre in elementarer Darstellnng, nebst Anleitung zum Experimentiren und znr Anfertigung der Apparate. Von **Dr. Adolf F. Weinhold,** Professor an den technischen Staatslehranstalten in Chemnitz. Dritte verbesserte und vermehrte Anflage. Mit 427 Holzschnitten nnd 2 Farbentafeln. Preis 10 M. – Gebnnden 11 M. 50 Pf.

„Schon ein flüchtiger Einblick in die „Vorscbule" überzeugt, dass man es mit einem seine Wissenschaft ebenso beherrschenden, wie in der Praxis des Experimentirens erfahrenen Autor zu thun bat. — Das Werk ist nicbt blos eine Vorscbule, nein es ist eine Scbule der Experimentalphysik, wie sie unsere Schnle bisher nicht besass. Für alle Lebrer an Volks- und Mittelschnlen ist es ein ausgezeichnetes Hülfsmittel zur Information beim Unterricht, den gereiften Knaben zeigt es, wie sie ihre Freistunden unterhaltend und belehrend ausfüllen und sich eine Handfertigkeit erwerben können, die den Geist stärkt und von Spielereien abziebt. Es sei darum zur Anscbaffung für Lehrer- und Scbüler-Bihliotheken, zu Prämien für reifere Knaben aufs Wärmste empiohlen." *Deutsche Schulzeitung.*

Analytische Chemie.

Für den Gebrauch im Laboratorium und für das Selbststudium. Von **N. Menschutkin,** Professor an der Universität in St. Petersburg. Unter Mitwirkung des Verfassers übersetzt von Dr. O. *Bach* Zweite verbesserte Auflage. Preis 7 M.; gebund. 8 M. 50 Pf.

„In der Literatur über analytische Chemie nimmt das Werk Menschntkin's unstreitig einen hervorragenden Platz ein. Auf verhältnissmässig kleinem Raume enthält es eine Fülle von Stoff, der sonst meist getheilt und von Specialwerken behandelt wird. Die qualitative und quantitative Bestimmung und Trennnng der Körper (einschliesslich der Massanalyse nnd der Elementaranalyse organischer Körper) findet eingehende Behandlnng; der Gebrauch des Löthrohrs, die Bnnsen'schen Flammenreactionen, die Spectralanalyse, die Berechnung der Analysen n. a. m. sind in besonderen Abschnitten besprochen. Eine Reihe von Beispielen aus der qualitativen Analyse, der quantitativen Gewichts- und Maassanalyse zeigt die Anwendung der gewonnenen allgemeinen Gesetze anf den einzelnen Fall und gibt Anleitung znr Erwerbung der nöthigen Handfertigkeit heim analytischen Arbeiten. Zahlreiche in den Text eingestreute praktische Notizen erleichtern das Arbeiten ungemein und sind namentlich bei der Benutzung des Buches zum Selbststudium von Wichtigkeit." *Naturforscher.*

Die vorstehend angezeigten Werke sind durch alle Buchhandlungen zu beziehen.

Verlag von Quandt & Händel in Leipzig.

Druck von J. B. Hirschfeld in Leipzig.

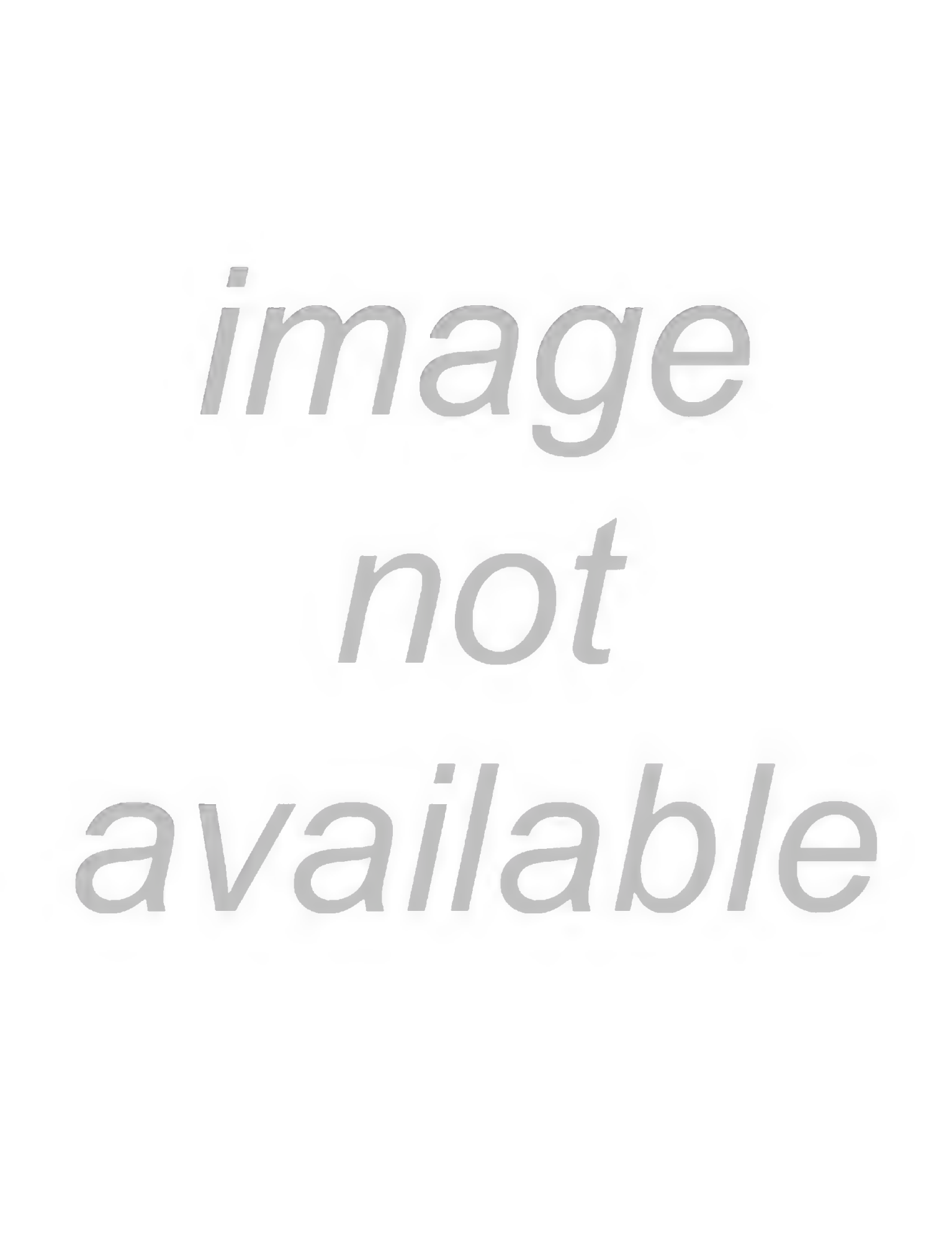


image
not
available

Im Verlage von G. Kreuschmer in *Bunzlau* erschien in 2ter verbesserter Auflage:

Die Hauptsätze der Elementar-Mathematik

zum Gebrauch an höheren Lehranstalten

bearbeitet von

A. F. G. Th. Gauss,

Professor am Kgl. Gymnasium in Bunzlau.

I. Theil: **Arithmetik u. Planimetrie.**

Mit 130 in den Text eingedr. Holzschnitten.

Preis 2.75 *M.*

II. Theil: **Stereometrie u. Trigonometrie.**

Mit 53 in den Text eingedr. Holzschnitten.

Preis 1.40 *M.*

INHALT.

Seite

XIII. Potential einer elliptischen Walze. Von Ulrich Bigler . . 225

XIV. Determinanten bei wiederholter Halbirung des ganzen Winkels. Von J. Hermes. 276

XV. Mittelwerte, die Krümmung ebener Curven und krummer Flächen betreffend. Von Emanuel Czuber. 294

XVI. Ueber die Entwickelung von $e^{-1:(1-x)}$ in eine Potenzenreihe nebst einigen Anwendungen derselben Von Louis Saalschütz. 305

XVII. Bemerkung zu der Formel für das Differential einer Function mehrerer Variabeln. Von R. Hoppe 351

Greifswald, gedruckt bei F. W. Kunike.

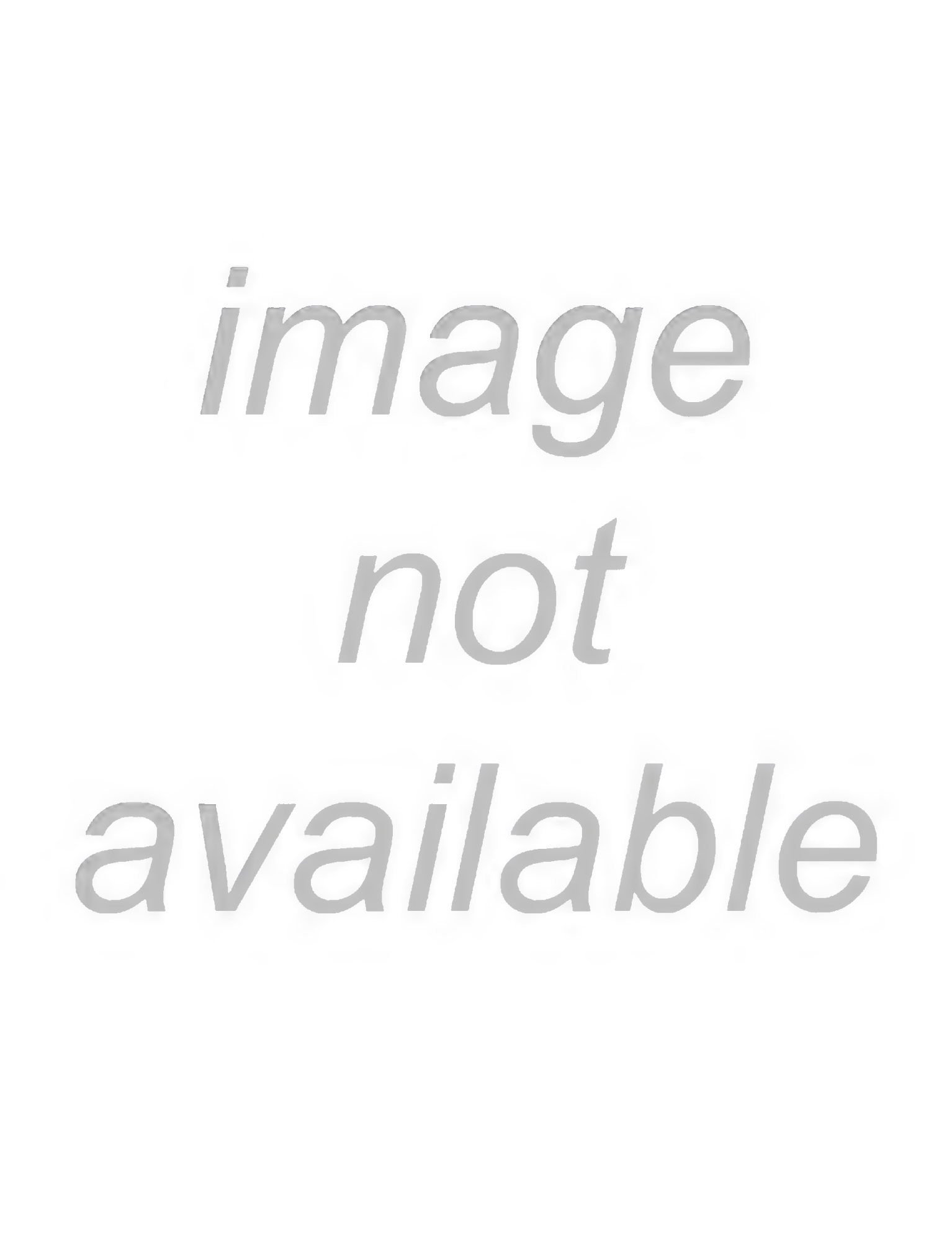


image
not
available

Verlag von **Georg Reimer** in Berlin,
zu beziehen durch jede Buchhandlung.

Die
Fortschritte der Physik
im Jahre 1882.

Dargestellt
von
der physikalischen Gesellschaft zu Berlin.

XXXVIII. Jahrgang.

Zweite Abtheilung, enthaltend: Physik des Aethers.
Redigirt von **Prof. Dr. F. Neesen** und **Dr. E. Rosochatius.**

Preis: 15 Mark.

Dritte Abtheilung, enthaltend: Physik der Erde.
Redigirt von **Prof. Dr. B. Schwalbe.**

Preis: 16 Mark.

Verlag von Winckelmann & Söhne in *Berlin.*

Projektivische Massstäbe.
Ein Hülfsmittel zum Studium
der
synthetischen Geometrie
von

Dr. Felix Buka,
Oberlehrer am städt. Realgymnasium zu Charlottenburg.
Privatdocent an der Kgl. Technischen Hochschule zu Berlin.

—

Mit 2 Tafeln und 2 projektivischen Massstäben.

—

Preis 2 Mark.

Litterarischer Bericht
XXIV.

Mechanik.

Anaytische Mechanik. Von J. L. Lagrange. Dentsch herausgegeben von Dr. H. Servns. Berlin 1887. Julins Springer. 640 S.

Die erste Anflage der Mécauiqne analytique erschien 1788, von der 2. Auflage der 1. Band 1811, der 2te 1815. Der 1. Band und die erste Hälfte des 2ten ist von Lagrange selhst heransgegehen; die Vollendung des 2. Bandes übernahmen Prony, Garnier nnd Lacroix. Eine dritte, von Bertrand veranstaltete nnd mit Anmerknngen versehene Ansgabe erschien 1853—1855. Der gegenwärtigen dentschen Uehersetznng liegt die 2. Ansgahe zngrunde. Ihr vorans geht die Lehensgeschichte des Verfassers, Joseph-Lonis comte de Lagrange, gehoren in Tnrin am 25. Jannar 1736, gestorhen in Paris am 10. April 1813. Der Verfasser derselben ist nicht genannt; als Qnellen sind angeführt: Mém. de l'institnt 1812, Journal de l'Empire 1813, Virey et Potel nnd Cossali. Hieranf folgt das Verzeichniss der Schriften. Lagrange war Stifter der Turiner Akademie, ward 1766 von Friedrich II. an die Akademie in Berlin berufen, nach dessen Tode er sich 1787 nach Paris begab nnd auch während der Revolntion daselbst verblieb. H.

Elemente der Statik. Von L. Poinsot. Antorisirte dentsche Ansgabe. Nach der von Bertrand bearheiteten zwölften Auflage des französischen Originals heransgegehen von Dr. H. Servns. Mit 4 lithographirten Tafeln. Berlin 1887. Jnlins Springer. 173 S.

Das Werk, welches zuerst 1803 erschien, ist schon zweimal ins Deutsche übersetzt, nach der 4. Auflage von Lambert, nach der 5ten von Hartmann. Es enthält in 4 Capiteln die Zusammensetzung der Kräfte und der Kräftepare, die Bedingungen des Gleichgewichts der Systeme von Kräften, die Theorie des Schwerpunkts und die der einfachen Maschinen. Der Herausgeber hat eine kurze Lebensgeschichte des Verfassers vorausgeschickt. Hiernach ist letzterer am 3. Januar 1777 in Paris geboren und am 15. December 1859 ebendaselbst gestorben. Er war von 1806 bis 1824 General-Inspector der Universität, ausserdem war er Lehrer am Polytechnikum und ward Mitglied der Akademie. Zwei Entdeckungen, die seinen Ruhm begründet haben, bezeichnen wesentliche Fortschritte der Wissenschaft: die Theorie der Kräftepare und die der Nutation und Präcession.

H.

Neue Theorie der Reibung. Von N. Petroff, kaiserl. russ. General-Major des Genie-Corps, Professor an der Militär-Ingenieur-Akademie und am technologischen Institute zu St. Petersburg. Mit Genehmigung des Verfassers aus dem Russischen übersetzt von L. Wurzel, kais. russ. Collegienrath, Ingenieur des Ministeriums der Verkehrsmittel. Von der kais. russ. Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg mit dem Lomonosowpreise gekrönte Schrift. Hamburg und Leipzig 1887. Leopold Voss. 187 S.

Die Arbeit zeichnet sich aus durch die ungemeine Beharrlichkeit, mit welcher der Verfasser die Ursachen der grossen Differenzen zwischen allen Theorien und Beobachtungen verfolgt hat. Er beruhigt sich bei keinem ungenau zutreffenden Ergebniss, sondern zieht stets die Verschiedenheit der Umstände, unter denen die abweichenden Resultate gewonnen worden sind, und alle möglichen Einflüsse in die Untersuchung. Allerdings bleiben bis zuletzt unberechenbare Elemente in den Formeln, so dass die Anwendbarkeit nur unter bestimmten Beschränkungen constatirt werden konnte; jedenfalls sind aber die Formeln brauchbarer als die, welche er vorfand. Sein eigentliches Ziel ist, die Reibung zwischen ausreichend geschmierten festen Flächen zu bestimmen. Er fasst, wie es schon vor ihm geschehen ist, den Vorgang in diesem Falle als Reibung von Flüssigkeiten auf. Demzufolge betrifft der grösste Teil seiner Untersuchungen die Reibung von Flüssigkeiten, die durch Röhren, und zwar von kreisförmigem Querschnitt, strömen. Voraus geht die Theorie der Reibung zwischen trockenen Flächen, jedoch nur der Vollständigkeit wegen auf bisherigem Standpunkt. Die hauptsächlichen Schlussfolgerungen, die er aus den Untersuchungen zieht, sind folgende. Sind die Maschinenteile gut an einander geschlossen,

reichlich geschmiert und der Druck nicht übermässig, berühren sich die Metallteile nicht, so ist der Reibungswiderstand das Resultat der inneren Reibung der Schmierschicht, jede Ursache also, welche die innere Reibung dieser Schicht ändert, wird auch den Reibungswiderstand des Maschinenteils ändern. Unter sonst gleichen Bedingungen ist die Reibung der Maschinenteile der Grösse der Berührungsfläche der sich reibenden Teile proportional. Der Reibungswiderstand ist der relativen Geschwindigkeit der sich reibenden Flächen proportional. Er steht in umgekehrtem Verhältnisse zur Dicke der Schmierschicht. Letztere ist bei reichlicher Schmierung der Quadratwurzel aus dem relativen Normaldrucke proportional. Wird die Form der Reibungsflächen durch die Belastung umgestaltet, so verändert sich mit der Dicke der Schmierschicht der Reibungscoefficient. Der Verfasser hat seine theoretischen Resultate mit den Versuchen von Hirn, Kirchweger, Böckelberg und Thurston verglichen und auch selbst umfangreiche Versuche angestellt. H.

Zur Ermittelung des Luftwiderstandes nach der kinetischen Theorie. Von Edmund Toepler, Dr. philos. Wien 1886. Carl Gerold's Sohn. 24 S.

Es wird der Widerstand der Luft gegen die Bewegung einer Fläche, unter der Annahme, dass die Luftmolecüle unabhängig von einander sich in allen Richtungen bewegen, berechnet und als Hauptresultat die Formel gefunden:

$$W(v) = 4P_0\frac{v}{\Omega}$$

wo v die Geschwindigkeit der Fläche, Ω das arithmetische Mittel der Geschwindigkeiten (der Molecüle?) bezeichnet. Wegen allzugrosser Häufung dunkler, mehrdeutiger Ausdrücke und unvollständiger Sätze würden wir nicht im Stande sein mehr über die Schrift zu berichten ohne Gefahr den Gedanken des Verfassers zu verfehlen. H.

Technik.

Die Wirkungsgesetze der dynamo-elektrischen Maschinen. Von Dr. F. Anerbach, Privatdocent an der Universität Breslau. Mit 84 Abbildungen. Wien, Pest, Leipzig 1887. A. Hartleben. 250 S.

Entsprechend dem wirklichen geschichtlichen Entwickelungsgange, demgemäss die Theorie der technischen Verwendung folgend

sich in wenigen Jahren zu einem umfangreichen Wissenszweig entfaltet hat, wird auch hier die Theorie auf ihrem neuesten Standpunkte im Anschluss an die Technik vorgetragen. Die Lehrgegenstände sind der Reihe nach: Batterieströme, Bewegung im magnetischen Felde, magnetelektrische Maschinen, Gesetze der Magnete und Elektromagnete, dynamoelektrische Maschinen im allgemeinen, Beobachtungen an solchen, ihre Theorie, Hauptschlussmaschinen, Nebenschlussmaschinen, Compounndmaschinen, specielle Probleme. Die Abbildungen sind weiss auf schwarzem Grunde. Voraus geht ein Namen- und Sachregister und eine Zusammenstellung der Litteratur. Das Buch bildet den 38. Band von des Verlegers „elektrotechnischer Bibliothek." H.

Die Construction der magnetelektrischen und dynamoelektrischen Maschinen. Von Gustav Glaser-De-Cew. Fünfte, umgearbeitete und vermehrte Auflage von Dr. F. Auerbach, Privatdocent an der Universität Breslau. Mit 80 Abbildungen. Wien, Pest, Leipzig 1887. A. Hartleben. 253 S.

Der Inhalt des Buches ist: Principien und historische Entwickelung, Maschinen für Wechselströme, Maschinen für gleichgerichtete Ströme, und zwar Ringmaschinen, Trommelmaschinen, verschiedene Systeme, Unipolarmaschinen, ferner Constructionsdetails und Hülfsapparate, Anwendung der elektrischen Maschinen zur Erzeugung des elektrischen Lichtes, verschiedene andere Anwendungen, nämlich zur Galvanoplastik, zum Schmelzen und zur Reinmetallgewinnung, zum Telegraphiren, für Laboratorien und medicinische Zwecke und zur Kraftübertragung. Der Anhang enthält Formeln zur Construction von Elektromagneten. Aus den frühern Auflagen ist der Abschnitt über die physikalischen Gesetze weggeblieben, der jetzt durch die gesonderte Ausgabe des vorher besprochenen Buchs „Wirkungsgesetze etc." — vertreten wird. H.

Vademecum für Elektrotechniker. Praktisches Hilfs- und Notizbuch für Ingenieure, Elektrotechniker, Werkmeister, Mechaniker u. s. w. Herausgegeben von E. Rohrbeck, Ingenieur für Elektrotechnik, unter Mitwirkung des Herrn E. Grünwald, Ingenieur. Fünfter Jahrgang des Kalenders für Elektrotechniker. 1888. Mit vielen Holzschnitten. Halle a. S. Wilhelm Knapp. 252 S.

Soviel sich bei blosser Durchsicht des Buches ohne eignen Betrieb urteilen lässt, ist darin in umsichtigster, vielseitigster Weise für alle erdenklichen Anwendungen durch praktisch gearbeitete, aus-

reichende Angaben, beginnend mit dor abstracten Wissenschaft nnd oingehend anf dio speciellen Erfordernisse der Praxis, gesorgt. Anzeigen eventneller Desideraten zur Ergänznng für spätere Jahrgänge würdon sonach nur Sache derer seien, die das Bnch gehranchen.

H.

Zeitschrift für Elektrotechnik. Organ des Elektrotechnischen Vereins in Wien. Redactenr: Josef Kareis. IV. Jahrgang 1886. Wien 1886. Selhstverlag.

Der 4. Jahrgang, der erste welcher im Selhstverlage des Vereins orschoint, enthält folgende Ahhandlnngen nnd Vorträge:

A. v. Waltenhofen: Beiträge znr Anwendnng der Gesetze des Elektromagnetismns. — Torsionsgalvanometer. — Accumulatoren von Farhaky. — Magnetisirnngscurve hei verschiedenen Eisensorten, Anwendung zur Bestimmnng der Härte. — Fröhlich'sche Theorie der dynamoelektrischen Maschinen.

J. Sack: Die elektrischen Uhren.

W. Peukert: Berechnnng der Elektromagnete bei Componnd-Maschinen. — Transformation dor Wärme in elektrische Energie. Bestimmnng des Wirknngsgrades eines Transformators. — Mittlore Intensität des magnetischen Feldes bei Dynamomaschinen.

Rysselberghe: Telephonie anf lange Distanz.

Hammerl: Verhalten ringförmiger Magnete.

R. v. Fischer-Trenonfeld: Militär-Telegraphie.

J. Zacharias: Elektricität als Motor für Land- nnd Wasserfahrzenge.

M. Bnrstyn: Elektrische Zündnng.

H. v. Jüptner: Universal-Elektricitätsmesser.

J. Stephan: Charakteristik einer Wechselstrommaschine.

M. Jüllich: Best. d. Intens. per. veränd. elektr. Ströme.

D. Tnmlirz: Blitzahleitersystem von Melsens.

C. Zickler: Magnetisirnngscnrve.

R. Lewandowski: Nenerungen an Inductionsapparaten.

E. Gérard: Selhstindnction in elektrischen Leitern.

H. Sack: Specifische Indnctionsconstanten von Stahlstäben.

J. Kolhe: Magnetische Kraftlinien.

C. Grawinkel: Ersatz von Telegr. Batterien durch elektrische Maschinen. — Stromarheit in oberird. Telegraphenleitnngen.

Kleiner nnd Hofmeister: Helligkeit nnd Arbeits verbranch elektrischer Glühlampen.

J. Kessler: Normalinstrnment für abs. Messnngen.

F. Bechtold: Elektrische Fenermelder.

F. Drexler: Elektrische Messinstrumente.
J. Moser: Elektr. u. therm. Eigensch. v. Salzlösungen.
Streintz und Anlinger: Galvanische Polarisation des Bleies.
Ausserdem viele kürzere Aufsätze. H.

Erd- und Himmelskunde.

Goonomie (mathematische Geographie) gestützt auf Beobachtung und elementare Berechnung. Für Lehrer, Studirende und zum Selbstunterricht bearbeitet von Dr. Th. Epstein, Lehrer an der Realschule „Philantropin" in Frankfurt a. M. Mit 166 Holzschnitten im Text und 18 Figurentafeln, wovon 12 mit Sternbildern auf blauem Grunde. Wien 1885. Carl Gerold's Sohn. 576 S.

Der Name „Geonomie" soll der bezeichneten Doctrin die Stellung des besondern Teils der Astronomie geben, der sich auf die Erde als Astrou bezieht. Eine eigentümliche Auffassung möchte dadurch kaum ausgedrückt sein, da die mechanische Theorie für die Erde keine andre ist als für die andern Planeten, die tellurischen Vorgänge nicht ohne Zuziehung der übrigen Himmelskörper erklärt werden können, bei Begrenzung des Lehrstoffs aber die gleiche Freiheit bleibt wie in jeder mathematischen Geographie. Die Hauptabschnitte des Buchs sind: Hülfsmittel und Vorbereituugen, Gestalt und Grösse der Erde, Bewegung der Sonne, Uebergang zum Coppercanischen System, der Mond, geonomische Physik, in welchem letzten auch Ebbe und Flut behandelt ist. Besonders ausführlich ist über die Messuugen Auskunft gegeben: es werden nicht bloss die Hülfsmittel und Berechnung erklärt, sondern mehr noch die factischen Messungen, ihre Schicksale und Erfolge mitgeteilt. Die Anwendungen der Mathematik beschränken sich auf die elementare der Schule, welche durch Vortrag einiger Lehren von den Coordinaten und von der Ellipse erweitert wird. Dagegen sind alle Gegenstände der Himmelsdynamik, also auch die Planetenbahnen nur qualitativ in Betracht gezogen, die Kepler'schen Gesetze gar nicht erwähnt. H.

Astronomische Geographie. Ein Lehrbuch angewandter Mathematik. Von Prof. H. C. E. Martus, Direktor des Sophien-Realgymnasiums in Berlin. Mit 100 Figuren im Texte. Zweite Auflage, mit vielen Zusätzen. Leipzig 1888. C. A. Koch. 388 S.

Die 1. Auflage ist im 260. litt. Bericht besprochen. Die gegenwärtige 2. Auflage bringt mehrere Verbesserungen und viele Zusätze, unter andern eine Veranschaulichung der Krümmung der Erdoberfläche; auch sind viele geschichtliche Bemerkungen hinzugefügt, für welche die Geschichte der Astronomie von Rudolf Wolf (in Bern) hauptsächlich als Quelle benutzt worden ist. Da der Gesamtstoff für ein Halbjahr bei 4 wöchentlichen Lehrstunden als zu gross erachtet ward, so hat der Verfasser darauf gerechnet, dass das Capitel über das Erdsphäroid in einem andern Halbjahre im Anschluss an das stereometrische Gebiet behandelt werden könnte. H.

Hydrologische Studien. Von Heinrich Gravé, behördlich autorisirter und beeideter Zivil-Ingenieur, Architekt, Mitglied mehrerer gelehrten Gesellschaften und wissenschaftlichen Vereine, Korrespondent der k. k. geologischen Reichsanstalt, etc. I. Heft. Wien 1887. Alfred Hölder. 59 S.

Diesem 1. Hefte soll eine noch nicht begrenzte Reihe weiterer Hefte folgen. Die darin enthaltenen Arbeiten gehen aus dem im Vorwort dargelegten Gedanken hervor, dass künstliche Anlagen zur Gewinnung von Naturproducten und zur Bekämpfung verderblicher Elemente noch grossenteils ohne gehörige Kenntniss der Wege, auf denen die Natur dem Menschen ihre Gaben zuführt und die Schäden mässigt und ausgleicht, unternommen werden, dass daher der momentane Gewinn beträchtlichen Schaden für die Zukunft nach sich ziehen kann. Die einzelnen Artikel sollen nun der Untersuchung dahin einschlagender Fragen gewidmet sein. Das 1. Heft enthält 2 Artikel. Der erste gibt eine Uebersicht über die Höhenmessungen in einem Teile Oesterreichs, namentlich ausgehend auf die Bestimmung der Höhen der Pegel österreichischer Flüsse, und stellt die Resultate zusammen. Der zweite, „Studien über die Bildung und Ergibigkeit der Quellen", geht hauptsächlich auf den Durchgang des Wassers durch Steinarten ein und erörtert die Veränderungen, welche der natürliche unterirdische Wasserlauf durch künstliche Ableitung des Wassers erleiden muss. H.

Wetter-Telegraphie und Sturmwarnungen in Nordamerika. Von J. G. Hagen, S. J. Separat-Abdruck aus den „Stimmen aus Maria-Laach". Freiburg i. Br. 1886. Herder. 49 S.

Die Schrift berichtet über die Veranstaltungen, welche von Seiten der Vereinigten Staaten zum Schutze der Landesproductien, des Handels und der Seefahrt gegen zerstörende Wettervorgänge durch Anwendung der Telegraphie und der Signale getroffen worden sind.

Ihre 3 Abschnitte behandeln einzeln geschichtliche Entwickelnng des Wetterdienstes, dessen Organisation nnd Tätigkeit. Die Schntzmassregeln begannen 1819, mehrten nnd erweiterten sich, his 1870 auf Betrieh des Brigade-Generals Alhert J. Myer eine Organisation ins Leben trat, welche ganz nnter militärischer Verwaltnng stand, aber anch von vielen andern Seiten Unterstützung fand. Von ihr giengen täglich 3 mal Wetter-Bnlletins ans, die anfangs an 24 Städte telegraphirt wurden, hald nachher anch Wetterprognosen; das Eintreffen angesagter Stürme stieg von 70 proc. mit der Zeit auf 88 proc. Die Tätigkeit der Institution dehnte sich bald anf immer mehr Ziele ans: auf dem Wiener Meteorologen-Congress 1873 gewann Myer die Mitwirknng aller enropäischen Staaten nnd Culturstaaten aller Erdteile zn dem Plane gleichzeitige Beohachtnngen anznordnen. Die neneste Geschichte meldet von Rückgang der Erfolge, an dem die Wendung der öffentlichen Meinnng znnächst gegen die Nordpolfahrten, dadurch vermittelt gegen alle Unternehmnngen zugunsten der Institntion schnld war. Die 2 letzten Ahschnitte enthalten Specialien. H.

Astronomischer Wandkalender für das Jahr 1888. Gezeichnet von P. Manojlovits, königl. serhischer Vice-Consul. Text von Dr. K. Zelhr. Wien 1888. Carl Gerold's Sohn.

Die Gesamttafel hesteht ans 3 Himmelskarten, die sich über die Zone der Ekliptik erstrecken nnd die Bahnen der Sonne, der Planeten und die Oerter des Voll- und Nenmondes, hei festen Fixsternen, im Lanfe des Jahres 1888 darstellen. Tabellarisch stehen darnnter die Himmelserscheinungen für jeden Tag. H.

Meteorologische Zeitschrift. Heransgegehen von der Oesterreichischen Gesellschaft für Meteorologie nnd der Dentschen Meteorologischen Gesellschaft. Redigirt von Dr. J. Hann (Wien, Hohe Warte) und Dr. W. Köppen (Hamhurg, Seewarte). Vierter Jahrgang 1887 (zngl. XXII. Bd. d. Zeitschr. der Oesterr. Ges. für Met.) Berlin, A. Asher n. Co.

Der 4. Band enthält folgende Ahhandlnngen:

Biermann: Zum Klima der Kanarischen Inseln.

Kleiher: Periodische Schwankungen der Atmosphäre zwischen beiden Halbkngeln der Erde.

Lang: Beohachtnng der Schneehedeckung.

Grossmann: Zur synoptischen Karte d. nordatlant. Oc.

Ohermayer: Beobachtungsstation auf dem Gipfel des Sonnblick.

Hann: Geschichte der met. Station auf dem Sonnblick. — Beobachtungen daselbst. — Beobachtungen der österr. Polarstation auf Jan Mayen.

Erk: Verticale Verteilung des Niederschlags am Nordabhange der hairischen Alpen.

Ekholm und Hagström: Höhe der Wolken im Sommer zu Upsala.

Draenert: Küstenklima der Provinz Pernambuco.

Hellmann: Jährliche Periode der Niederschläge in den deutschen Mittelgebirgen.

Láska: Gewitter in Prag.

Hugo Meyer: Untersuchungen über das Sättigungsdeficit. — Häufigkeit gegebener Temperaturgruppen in Norddeutschland.

Hoffmann: Phänologie und Wetterprognose.

Fritz: Resultate der Polarlichtbeobachtungen.

Woeikof: Zum Klima von Korea.

Reimann: Gewittererscheinungen im schlesischen Gebirge.

Neumayer: Magnetische Landesaufnahme von Frankreich.

Köppen: Einiges über Wolkenformen. — Gewitter vom 13. bis 17. Juli 1884. — Hann's Atlas der Meteorologie.

Vettin: Einwirkung der bar. Minima und Maxima auf die Richtung des Wolkenzuges.

Upton: Met. Beobachtungen bei Sonnenfinsternissen.

Brückner: Ueber die Zählung der Regentage.

Ule: Beob. der Wassertemperatur in der Saale bei Halle.

Thirring: Zum Klima von China.

Weihrauch: Met. Beob. zu Fort Rae.

Seidl: Temperaturverteilung im Gebiete der Karawanken.

Müller: Ueber Verluste äusserer Energie bei der Bewegung der Luft.

Linss: Ueber einige die Wolken- und Luftelektricität betreffende Probleme.

Wachlowski: Die Niederschlagsverhältnisse in der Bukowina.

Brandis: Regen und Wald in Indien.

Buys-Ballot: Ueber simultane Beobachtungen.

Volger: Quellentheorie auf meteorologischer Basis.

Angustin: Jährliche Periode des Windes.

Werner Siemens: Zur Frage der Luftströmung. H.

Vermischte Schriften.

Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg. Nr. 5. ausgegeben 1885. Redigirt von Krüss, Ahlhorn und Bock. Nr. 7.

ausg. 1887. Red. v. Wagner, Koldewey und Bock. Nr. 8. ausg. 1888. Red. v. Koldewey, Hoppe und Bock.

Der Inhalt von Nr. 6. ist im 15. litt. Ber. S. 38. aufgeführt.

In Nr. 5., 7. und 8. sind folgende Vorträge (Referat) und Abhandlungen mitgeteilt.

Hoppe: Historische Mitteilungen zur Elektricitätslehre und Potentialtheorie. 5.

F. H. Reitz: Ueber den Mareograph für den Hafen von Marseille. 5.

Köpcke: Ueber die Reihe $\sum_{1}^{\infty} \sin(n!x\pi)$. 5.

Bock: Hydrodynamik nach dem Hamilton'schen Princip. 5. — Ueber eine neue zahlentheoretische Function. 6. 7.

Schulze: Zur Geschichte der hypergeometrischen Reihe. 5.

Keferstein: Beitrag zur Theorie des Billardspieles. 5 — Eine Methode zur Bestimmung der primitiven Wurzeln der Congruenz $g^{p-1} \equiv 1 \bmod p$, für einen reellen Primzahlmodul p 8.

P. Jaerisch: Zur Theorie der Lamé'schen Functionen. 7.

Köpke: Ueber das Princip von der Condensation der Singularitäten bei Hankel und Dini. 8.

Koldewey: Ueber einige Entwickelungen aus der Theorie der Deviation der Compasse an Bord eiserner Schiffe 8.

E. Liebenthal: Das Potential des Ellipsoids. 8. H.

Proceedings of the Canadian Institute, Toronto. Being a continuation of the „Canadian Journal" of science, literature and history. Third series Vol. IV. [Whole No. Vol. XXII. No. 146.] Toronto 1887. The Copp. Clark Company, limited.

Der 4. Band, bestehend aus 2 Heften, enthält die in 21 Sitzungen gehaltenen Vorträge. Keiner derselben berührt mathematische oder physikalische Gegenstände. H.

Bulletin de la Société Mathématique de France. Publié par les Secrétaires. (Red. G. Humbert.) Tome XV. Paris 1887. Au siége de la Société.

Der 15. Band enthält folgende Abhandlungen.

O. Callandrean: Ueber die Entwickelung der Functionen in Reihen nach der Maclaurin'schen Formel im Falle einer reellen Variabeln.

Demartres: Ueber die Totalkrümmung der Flächen. — Ueber einen Punkt der Flächentheorie.

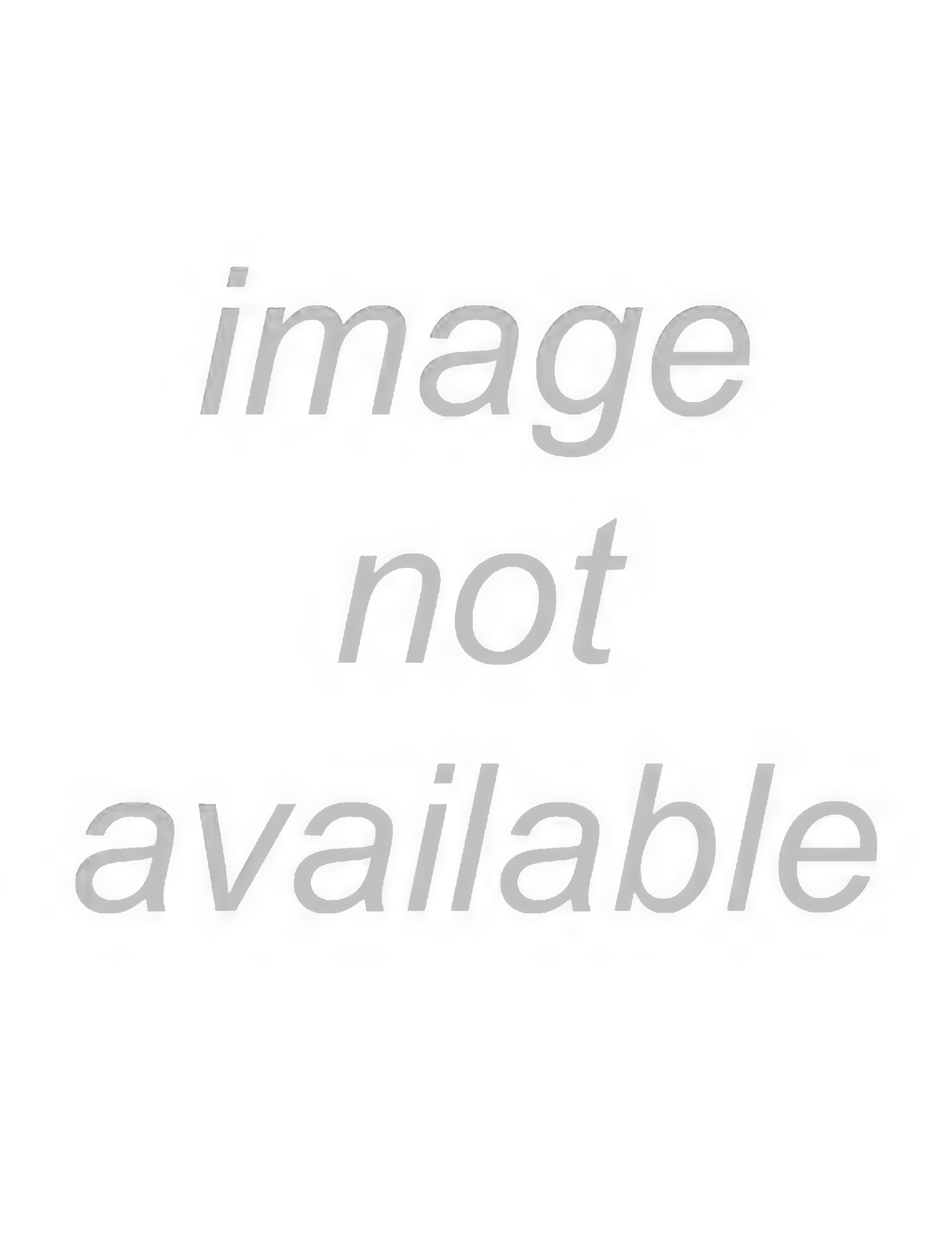


image
not
available

versité de Liège, Membre de la Société royale des sciences de Liège, avec la collaboration de plusienrs Professeurs belges et étrangers. Tome septième, année 1887. Gand 1887. Ad. Hoste. Paris, Gauthier-Villars.

Der 7. Band enthält folgende Anfsätze.

Mister: Eigenschaften der Agnesi'schen Curven.

E. Vigarié: Ueber die complementaren Punkte.

Tucher: Ueber den triplicatorischen Kreis.

J. Casey: Eigenschaften dreier ähnlichen Figuren.

Cesáro: Bemerkungen zur infinitesimalen Geometrie.

P. H. Schoute: Ueber die Normalen des Winkels α.

E. Catalan: Ueber die Dividirbarkeit der Zahlen.

E. Lucas: Ueber die neunte vollkommene Zahl.

Laisant: Verschiedene Formulirungen einer einzigen Eigenschaft.

A. Servis: Ueber die Umkehrbarkeit der linearen Transformation. — Geometrische Interpretation der quadratischen birationalen Transformation. — Geometrische Interpretation der speciellen quadratischen birationalen Transformation. — Ueber die vollkommenen Zahlen.

G. de Longchamps: Ueber die Rectification einiger bemerkenswerten Curven.

C. Bergmans: Sätze über die Parabel.

J. Neuberg: Roberts'sche Kugel. — Transmutationen eines Dreiecks.

M. d'Ocagne: Die cyklischen Coordinaten. Einige Eigenschaften des Dreiecks.

Van Dorsten: Anwendung der Eigenschaften dreier ähnlichen Figuren.

M'Cay: Ueber die Kiepert'sche Hyperbel.

P. Manslon: Weierstrass'sche stetige Function ohne Differential. (Auszug.)

Fr. Dernyts: Lineare Erzeugung einiger Curven zu vielfachen Elementen.

Emmerich: Constructionsprobleme bezüglich auf die Geometrie des Brocard'schen Kreises.

Schoentjes: Ueber eine Erzeugungsweise der hyperbolischen Spirale.

Hierzu kommen zahlreiche Lösungen in diesem Journal gestellter Aufgaben. H.

Atti della Reale Accademia dei Lincei. Anno CCLXXXIV. 1887. Serie quarta. Rendiconti pubblicati per cura dei Segretari. Volume III. Roma 1887. V. Salvucci.

Der 3. Band enthält folgende mathematische Arbeiten.

Ricci: Ueber die covariante Derivation zu einer quadratischen Differential-Form.

Visalli: Ueber die Correlationen (in 2 Räumen von 3 Dimensionen), welche 12 Elementar-Bedingungen genügen. — Ueber die von 2 Fundamentalformen 2. Gattung erzeugten Figuren, unter denen eine vielfache Correspondenz besteht.

Pieri: Ueber das Correspondenz-Princip in einem beliebigen linearen n dimensionalen Raume.

Brioschi: Ueber die hyperelliptischen Functionen σ.

Bianchi: Ueber die doppelt unendlichen Strahlensysteme. — Ueber Weingarten's Systeme in den Räumen constanter Krümmung.

Pincherle: Construction neuer geeigneter analytischer Ausdrücke zur Darstellung von Functionen durch eine unendliche Anzahl einzelner Punkte. — Ueber die Vergleichung der Singularitäten zweier analytischen Functionen.

Volterra: Ueber die linearen Differentialgleichungen. — Ueber die Functionen, welche von anderen Functionen abhangen. — Ueber eine Erweiterung der Riemann'schen Theorie der Functionen complexer Variabeln.

Abetti: Begriffe der christlichen Kopbten und Abessinier vom Kalender.

Cantoni: Conjecturen über die Wirkung in die Ferne.

Segre: Ueber die algebraischen Mannichfaltigkeiten, die von einer einfach unendlichen Reihe von Räumen gebildet werden.

Besso: Einige partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung.

Siacci: Ueber die Winkel des weitesten Wurfes (bei Luftwiderstand). H.

Transactions of the Wagner Free Institute of Science of Philadelphia. Published under the direction of the Faculty. Vol. I. Philadelphia 1887.

Diese neue Zeitschrift ist der Erforschung des Inlandes in Hinsicht auf Zoologie, Botanik und Geologie gewidmet. Das Institut ist 1855 von William Wagner (gestorben im Jan. 1885) gegründet und wird verwaltet von einem Curatorium und einer Facultät bestehend aus 4 Professoren, die seit 1885 regelmässig Vorlesungen für freies Publicum halten. H.

Annuaire pour l'an 1888, publié par le Bureau des Longitudes. Avec des notices scientifiques. Prix: 1 fr. 50 c. Paris 1888. Gauthier-Villars et Fils.

Depnis le 7 messidor an III, le Bureau des Longitudes n'a jamais laissé passer nne année sans publier son Annnaire. Outre les données pratiques qni forment le fonds invariable de ce recueil, celni qui vient de paraître contient des articles beaucoup plus étendus, do véritables Traités, snr les Monnaies, la Statistiqne, la Minéralogie, la Météorologie, etc. Il renferme de plns nne éloqnente et magistrale étnde de M. Janssen sur l'Age des étoiles; nne Notice dans laquelle M. l'Amiral Monchez, Directenr de l'Observatoire, a réuni tous les renseignements relatifs à l'exécntion de la Carte photographiqne du Ciel, dont il a été le promotenr; des Notes de M. Cornu sur les Calendriers et sur la Constrnction des cadrans solaires; enfin, le captivant récit d'nn voyage accompli par M. d'Abbadie en Orient, pour mesurer des coordonnées magnétiqnes, en dépit des ignorances et des manvais vonloirs rencontrés dans cette lointaine expédition.

Ganthier-Villars et Fils.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XV.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Jahrbuch üb. d. Fortschritte der Mathematik, begründet v. C. Ohrtmann, hrsg. unter besond. Mitwirkg. v. F. Müller u. A. Wangerin v. M. Henoch u. E. Lampe. 16. Bd. Jahrg. 1884. 1. Hft. Berlin, G. Reimer. 10 Mk.

John, F., üb. d. Einführg. d. allgem. Zahlzeichen in die Mathematik. Wien, Pichler's W. & S. 70 Pf.

Methode und Principien.

Henner's J. F., Lehrgang d. Rechenunterrichts m. gleichmässiger Berücksichtg. d. Kopf- u. Zifferrechnens. 17. Afl. Ansbach, Seyheld's B. 3 Mk. 60 Pf.

Müller, H., besitzt d. heut. Schulgeometrie noch d. Vorzüge d. Euklidischen Originals? Eine Betrachtg. Metz, Scriba. 30 Pf.

Zimmermann, W. F. A., Naturkräfte u. Naturgesetze. Ein allgem. verständl. Handbuch d. Physik. 4. Afl. v. B. Dürigen. 4. u. 5. Lfg. Berlin, Hempel. à 50 Pf.

Lehrbücher.

Gallien, K., Lehrbuch der Mathematik f. höh. Schulen. 3. Tl. Stereometrie u. Trigonometrie. Berlin, Weidmann. 1 Mk.

Lieber, H., u. F. Lühmann, Leitfaden d. Elementar-Mathematik. 1. Tl. Planimetrie. 5. Afl. Berlin, Simion. 1 Mk. 50 Pf.

Sammlungen.

Hoffmann, J., u. J. Klein, Rechenbuch f. Seminaristen u. Lehrer. 8. Afl. Düsseldorf, Schwann'sche Verl. 3 Mk.; geb. 3 Mk. 50 Pf.

Kleyer, A., vollständ. gelöste Aufgaben-Sammlung a. allen Theilen d. Rechenkunst etc. 284.—303. Hft. Stuttgart, Maier. à 25 Pf.

Martus, H. C. E., mathemat. Aufgaben z. Gebrauche in d. obersten Klassen höh. Lehranstalten. 2. Tl. Ergebnisse. 6. Afl. Leipzig, C. A. Koch's Verl. 4 Mk. 80 Pf.

Pahnsch, J., Resultate d. arithmet. Aufgaben. 10. Afl. Reval, Kluge's Verl. Kart. 1 Mk. 50 Pf.

Pauli, R., Anweisgn. zur Lösg. der Textaufgaben in Dr. Bardey's Aufgabensammlung. Rastatt, Groiser. 2 Mk. 50 Pf.

Steiner, J., Sammlung v. Maturitäts-Fragen aus d. darstellenden Geometrie. Wien, Hölder. 2 Mk.

Widder, M., Uebungsbuch f. d. Rechnungs-Unterricht d. ersten Lateinklasse (Sexta). 3. Afl. München, Stahl sen. Kart. 1 Mk.

Tabellen.

Gernerth, A., fünfstellige gemeine Logarithmen d. Zahlen u. d. Winkelfunktionen v. 10 zu 10 Secunden, nebst den Proportionaltheilen ihrer Differenzen. 2. Afl. 4. Abdr. Wien, Fr. Beck. Geb. 3 Mk. 40 Pf.

Lothabweichungen. 1. Hft. Formeln u. Tafeln sowie einige numerische Ergebn. f. Norddeutschland. Veröffentlichg. d. kgl. preuss. geod. Instituts. Berlin, Stankiewicz. 9 Mk.

Wittstein, Th., 5stellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln. 12. Afl. Hannover, Hahn'sche Buchh. Geh. 2 Mk.

Tafeln d. Quadrat- u. Kubikzahlen v. 1 bis 1000 u. d. Quadrate u. Kubikwurzeln v. 1 bis 100. 3. Afl. Rudolstadt, Hofbuchdr. 50 Pf.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Adler, A., zur graphischen Auswerthung d. Functionen mehrfacher Veränderlichen. Wien, Gerold's S. 40 Pf.

Büttner, A., die Elemente d. Buchstabenrechnung u. Algebra. 8. Afl. Berlin, Stubenrauch. 2 Mk. 80 Pf.

Féaux, B., Buchstabenrechnung u. Algebra nebst Uebungs-Aufgaben. 5. Afl, besorgt durch A. Luko. Paderborn, Schöningh. 2 Mk. 40 Pf.

Frischauf, J., Convergenz d. Kugelfunction-Reihen. Graz, Leuschner & L. 1 Mk. 25 Pf.

Gauss, C. F., Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate. In dtschr. Sprache hrsg. v. A. Börsche u. P. Simon. Berlin, Stankiewicz. 5 Mk.; geb. 5 Mk. 50 Pf.

Gegenbauer, L., zahlentheoretische Notiz. Wien, Gerold's S. 20 Pf.

Hattendorf, K., Einleitung und Lehre v. den Determinanten. Hannover, Schmorl & v. S. 1 Mk. 20 Pf.

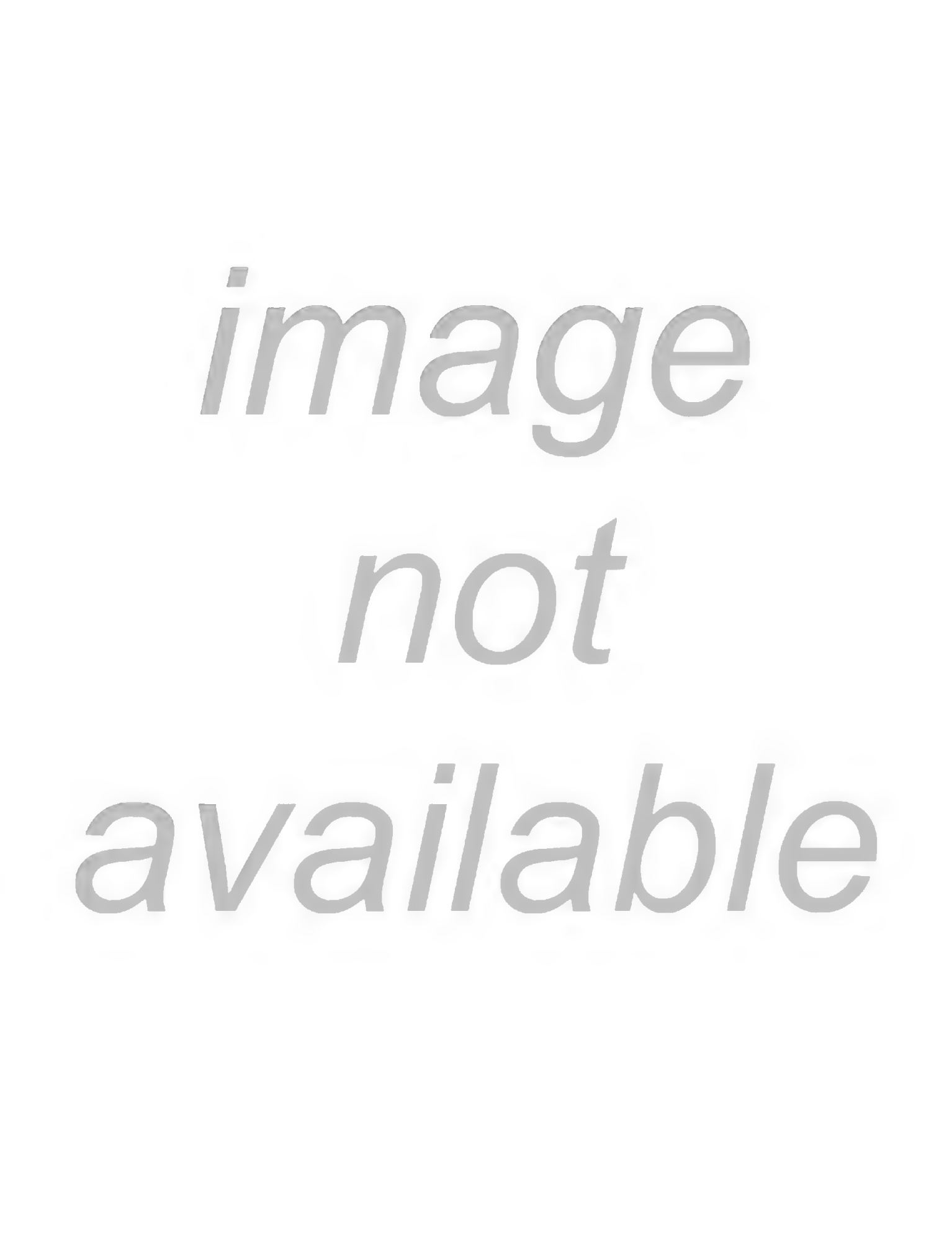


image
not
available

Mechanik.

Harzer, P., Untersuchgn. üb. e. speciellen Fall d. Problems d. drei Körper. Leipzig, Voss' Sort. 4 Mk. 50 Pf.

Poinsot, L., Elemente d. Statik. Autoris. dtsche. Ausg. v. H. Servus. Berlin, Springer. 6 Mk.

Samter, H., Theorie d. Ganssischen Pendels mit Rücksicht auf d. Rotation d. Erde. Berlin, Mayer & M. 1 Mk. 60 Pf.

Struve, H., üb. die allgemeine Bewegungsfigur in Fernröhren. Leipzig, Voss' S. 70 Pf.

Werner, W., Beiträge z. Theorie der Bewegg. e. materiellen Punktes auf Rotationsflächen mit spez. Anwendg. auf Rotationsparaboloid. Leipzig, Lorentz. 1 Mk. 50 Pf.

Technik.

Bibliothek, elektro-technische. 36. Bd. die Anwendung der Elektricität bei registrirenden Apparaten. Von E. Gerland. Wien, Hartleben. 3 Mk.; geb. 4 Mk.

Centralblatt f. Elektrotechnik, erste deutsche Zeitschrift f. Elektricitätslehre. Hrsg. v. F. Uppenborn. 9. Bd. 1887. (36 Nrn.) Nr. 1. München, Oldenbourg. Halbj. 10 Mk.

Förster, W., die physikalisch-technische Reichsanstalt. Ein Beitrag zur Verständigung. Berlin, Springer. 50 Pf.

Grossmann, L., die Mathematik im Dienste d. Nationalökonomie m. Hinweis auf die Theorie u. Lösg. der irreductibilen transcendenten Gleichgn. 1. Lfg. Wien, M. Stern. 5 Mk.

Schellen, H., der elektromagnetische Telegraph, bearb. v. J. Kareis. 6. Aufl. 6. Lfg. Braunschweig, Vieweg & S. 4 Mk.

Zeitschrift f. Elektrotechnik. Red.: J. Kareis. 5. Jahrg. 1887. 1. Hft. Wien, Lehmann & W. prcplt. 16 Mk.

Zeitschrift, elektrotechnische. Red. v. R. Rühlmann u. G. Wabner. 8. Jahrg. 1887. (12 Hfte.) 1. Hft. Berlin, Springer. prcplt. 20 Mk.

Zetzsche, K. E., Handbuch d. elektr. Telegraphie. 3. Bd. (1 Hälfte.) Die elektr. Telegraphie im eng. Sinne. 5. Lfg. Die Telegraphenapparate. Bearb. v. E. Zetzsche. Berlin, Springer. 7 Mk. 40 Pf. 3. Bd.; 1. Hälfte kplt. 25 Mk.

Optik, Akustik und Elasticität.

Falbesoner, H., der Fernpass u. seine Umgebg. in Bezug auf das Glacialphänomen. Wien, Pichler's W. & S. 90 Pf.

Grosse, W., die gebräuchl. Polarisationsprismen m. besond. Berücksichtg. ihrer Anwendg. in Photometern. Clausthal, Grosse. 1 Mk. 60 Pf.

Stein, S. Th., das Licht im Dienste wissenschaftl. Forschung. 2. Afl. 5. Lfg. Die Photogrammetrie, Militärphotographie u. optische Projektionskunst. Halle, Knapp. 4 Mk.

Erd- und Himmelskunde.

Backlund, O., Comet Encke 1865—1885. Leipzig, Voss' Sort. 1 Mk. 30 Pf.

Ergebnisse der meteorolog. Beobachtgn. im J. 1885. Hrsg. v. d. königl. preuss. Meteorolog. Institut durch W. v. Bezold. Berlin, Asher & Co. 20 Mk.

Exner, F., zur Photometrie d. Sonne. Wien, Gerold's S. 25 Pf.

Fischer, A. L., Neues v. d. Sonne. Erfurt, Villaret. 50 Pf.

Fortschritte, die, der Astronomie. Nr. 12. 1886. Leipzig, Mayer. 2 Mk.

— üb. d. prakt. Werth der auf den synoptischen Karten beruhenden allgem. Wetterprognosen. Eine Antwort an Herrn C. Lang in München. Halle, Schmidt's Verl. 50 Pf.

Klein, H., Stern-Atlas f. Freunde d. Himmelsbeobachtg. 2 Lfg. Leipzig, Mayer. 1 Mk. 20 Pf.

Lingg, F., Erdprofil d. Zone v. 31° bis 65° e Br. 1:1,000,000. München, Piloty & M. In kart. Umschlag 20 Mk.; Text 50 Pf.

Looff, F. W., die Himmelskunde in ihrer geschichtl. Entwickelg. u. nach ihrem gegenwärt. Standpunkte. Langensalza, Beyer & S. 2 Mk.

Sirius. Zeitschrift f. populäre Astronomie. Red.: H. J. Klein. 20. Bd. od. Neue Folge. 15. Bd. 1887. (12 Hfte.) 1. Hft. Leipzig, Scholtze. prcplt. 12 Mk.

Sonnenfinsterniss, totale, am 19. Aug. 1887. Berlin, Stankiewicz. 50 Pf.

Vierteljahrsschrift der astronom. Gesellschaft. Hrsg. v. E. Schönfeld u. H. Seeliger. 21. Jahrg. 4. Hft. Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Woeikof, A., die Klimate d. Erde. Nach d. Russ. 2. Tl. Jena, Costenoble. 12 Mk.

Zeitschrift, meteorologische. Hrsg. v. d. österreich. Gesellschaft f. Meteorologie u. d. dtschn. meteorolog. Gesellschaft. Red. v. J. Hann u. W. Köppen. 4. Jahrg. 1887. (12 Hfte.) 1. Hft. Berlin, Asher & Co. prcplt. 20 Mk.

Physik.

Annalen des physikal. Central-Observatoriums. Hrsg. v. H. Wild. Jahrg. 1885. 1. u. 2. Thl. Leipzig, Voss' Sort. 24 Mk.

Behse, W. H., Lehrb. d. Physik f. höhere Bürgerschulen u. technische Lehranstalten. Weimar, B. F. Voigt. 4 Mk. 50 Pf.

Crüger, J., Schule der Physik. 12. Afl. Leipzig, Amelang's Verl. 7 Mk.

Ettingshausen, A. v., u. W. Nernst, üb. d. Hall'sche Phänomen. Wien, Gerold's S. 1 Mk.

Exner, F., u. P. Czermak, üb. unipolare Induction. Wien, Gerold's S. 25 Pf.

Janson, K., method. Leitfaden d. Physik u. Chemie. Freiburg, Herder. 3 Mk.; Einbd. 35 Pf.

Kleyer, A., d. elektr. Erscheingn. u. Wirkgn. in Theorie u. Praxis. 60.—63. Hft. Stuttgart, Maier. à 25 Pf.

Meutzner, P., Lehrbuch d. Physik im Anschluss an Weinhold's physikal. Demonstrationen u. Vorschule d. Experimentalphysik. Leipzig, Fues' Verl. Geb. 2 Mk. 40 Pf.

Porges, C. A., üb. e. Inductionserscheinung. Wien, Gerold's S. 30 Pf.

Vogel, H., Physik. 2. Afl. Leipzig, Ed. Peter's Verl. 1 Mk.; geb. 1 Mk. 20 Pf.

Wild, H., Bestimmung d. Inductionscoefficienten von Stahlmagneten. Leipzig, Voss' S. 1 Mk.

— der magnet. Bifilar-Theodolith. Ebd. 1 Mk. 85 Pf.

Vermischte Schriften.

Abhandlungen d. mathematisch-physikalischen Classe d. königl. bayerischen Akademie d. Wissenschaften. 15. Bd. 3. Abth. München, Franz'sche Verl. 7 Mk.

Berichte üb. d. Verhandlgn. d. königl. sächs. Gesellsch. d. Wissenschaften zu Leipzig. Mathemat.-physik. Classe. 1886. Suppl. Leipzig, Hirzel. 1 Mk.

Förster, W., Sammlg v. Vorträgen u. Abhandlgn. (2. Sammlg.) Berlin, G. Reimer. 6 Mk.; geh. 7 Mk.

Mélanges mathématiques et astronomiques tirés du bulletin de l'Académie impériale des sciences de St.-Pétersburg. Leipzig, Voss' Sort. 1 Mk. 20 Pf.

Sitzungsanzeiger d. kais. Akademie d. Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. Jahrg. 1887. Nr. 1—3. Wien, Gerold's S. preplt. 3 Mk.

Sitzungsberichte der kais. Akademie d. Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. 2. Abth.: Enth. die Abhandlgn. aus d. Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie u. Astronomie. 94. Bd. 1. u. 2. Hft. Ebd. 11 Mk.

Zeitschrift f. mathemat. u. naturwissenschaftl. Unterricht. Hrsg. v. J. C. V. Hoffmann. 18. Jahrg. 1887. (8 Hfte.) 1. Hft. Leipzig, Teubner. preplt. 12 Mk.

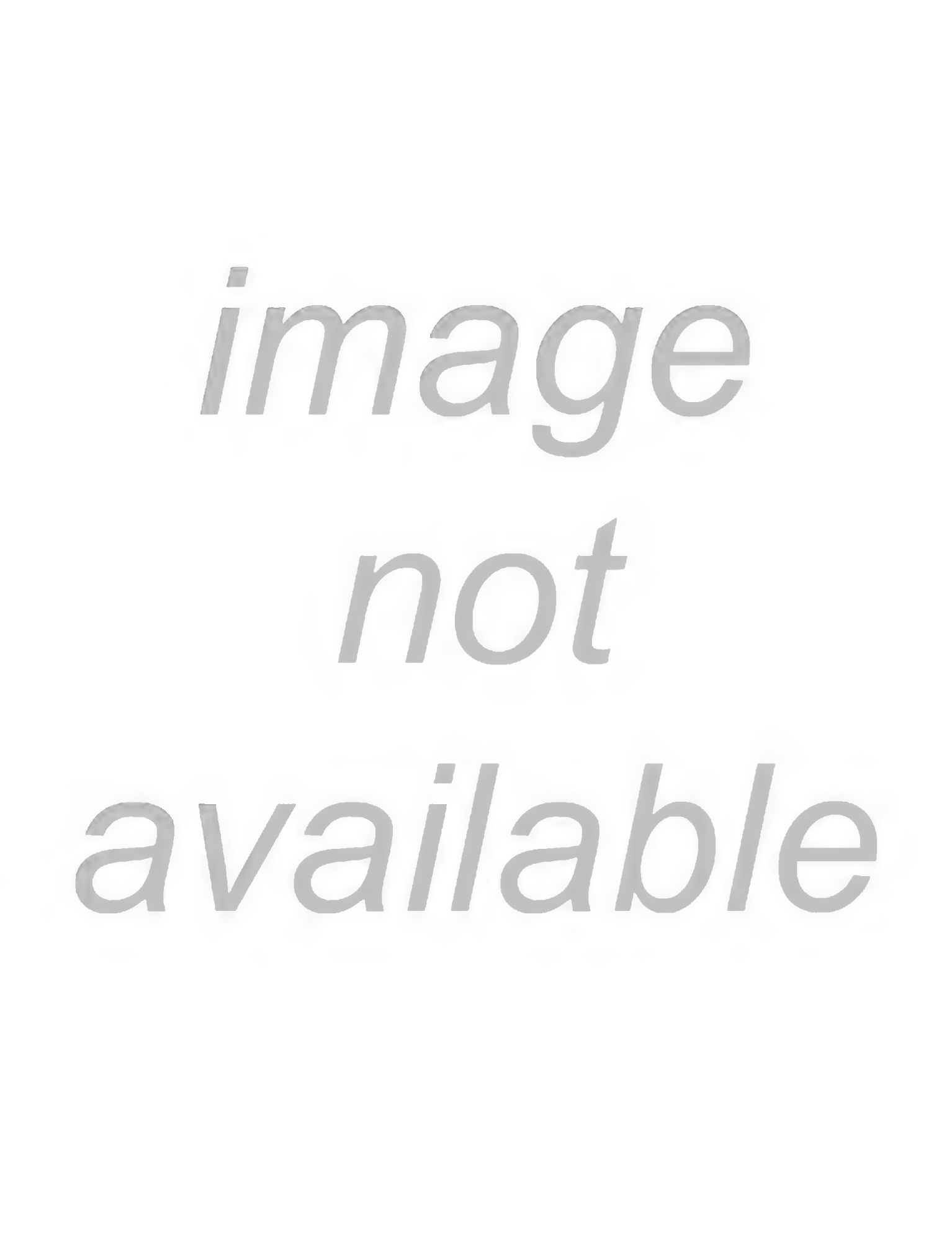


image
not
available

Fig. 1.

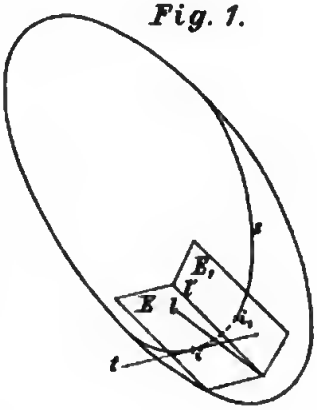


Fig. 3.

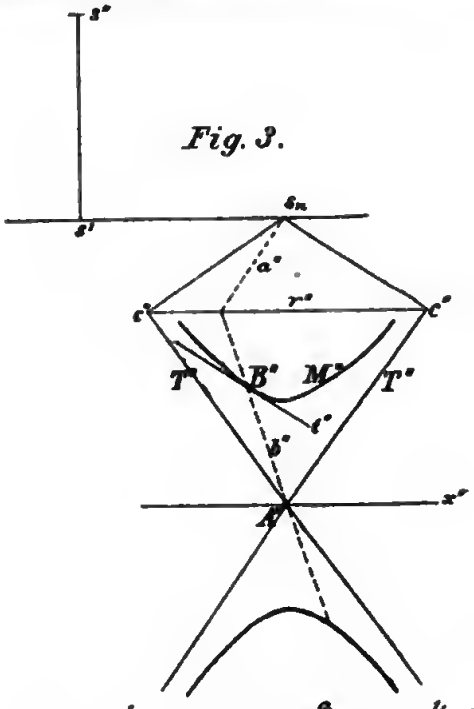
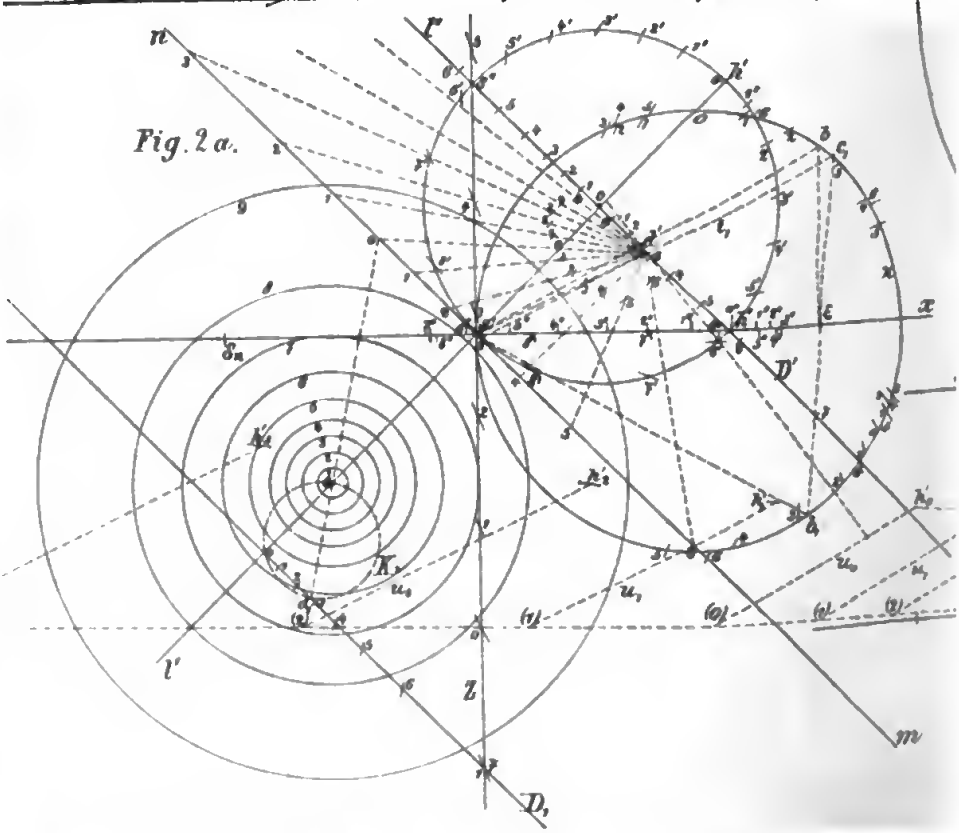
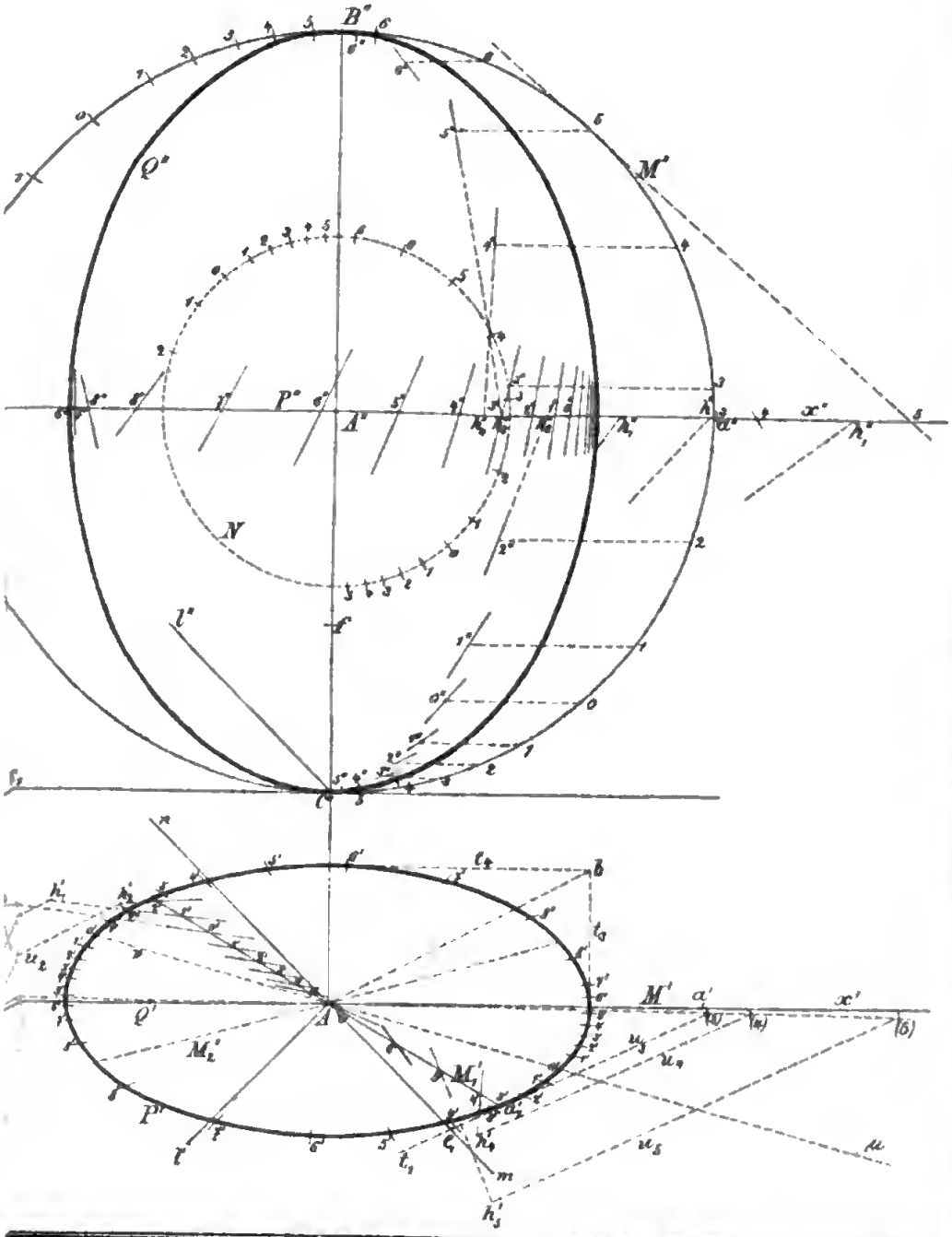


Fig. 2a.



IV. Bazala: Theorie der Isophotentangenten.

Fig. 2.



Lithogr v. F.W. Kunike, Greifswald

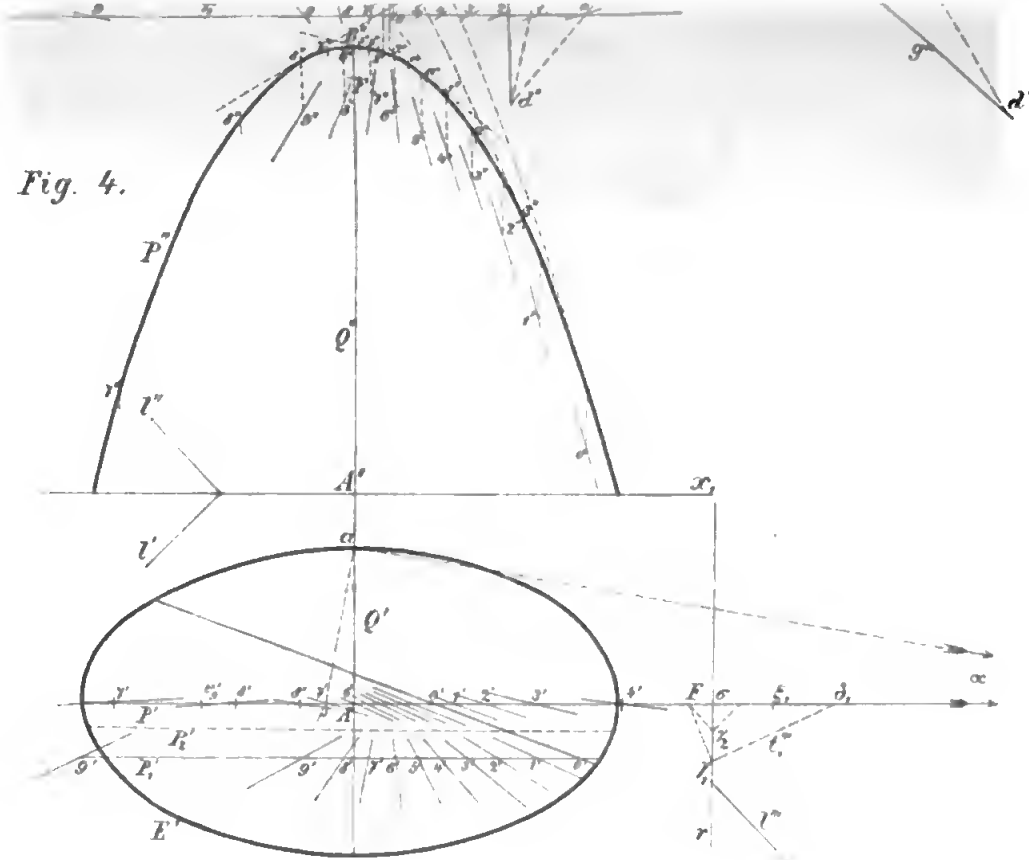


Fig. 4.

IV. Bazala: Theorie der Isopholentangenten

Lithogr v F W Kunicke Greifswald.

Fig. 4a.

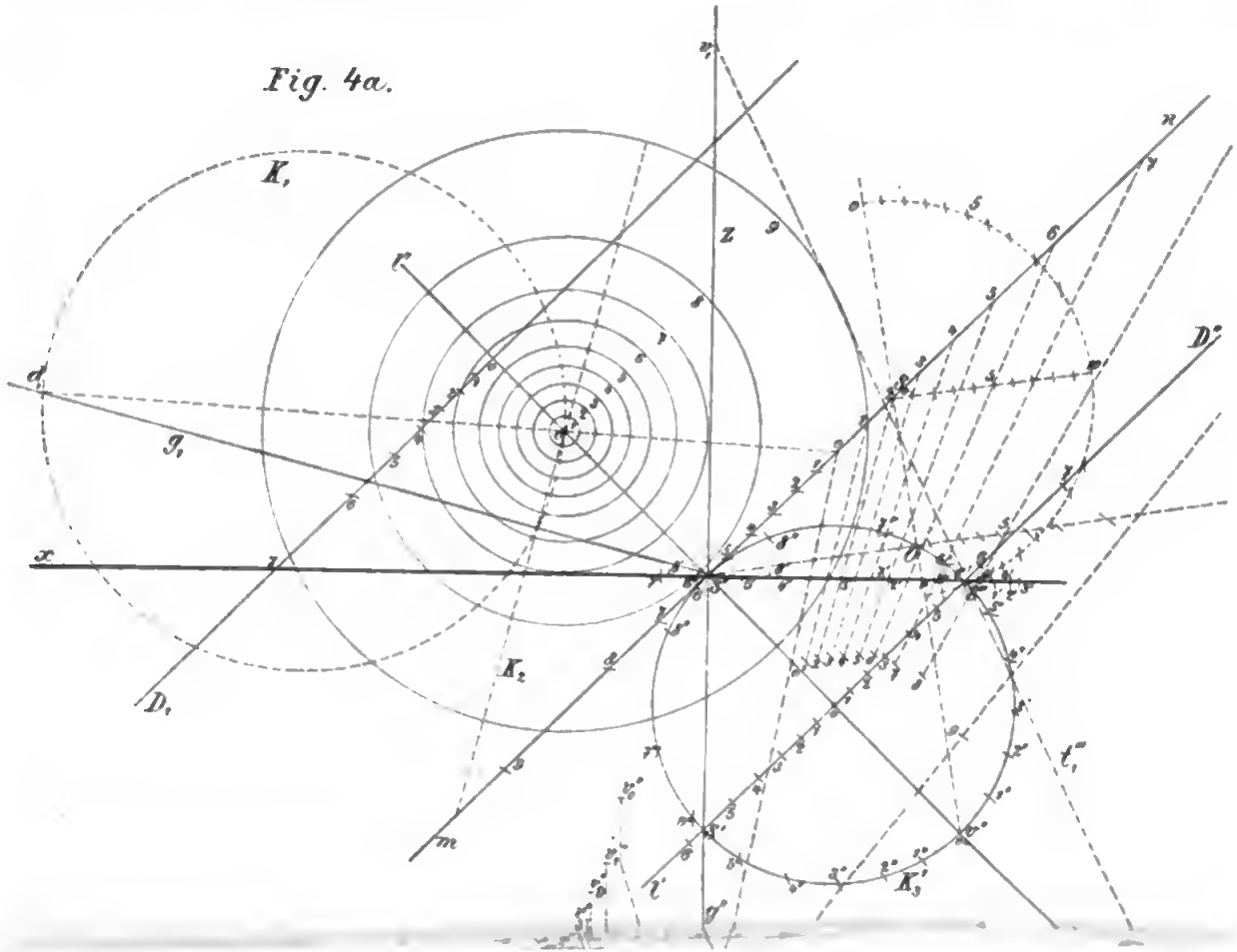


Fig. 5a

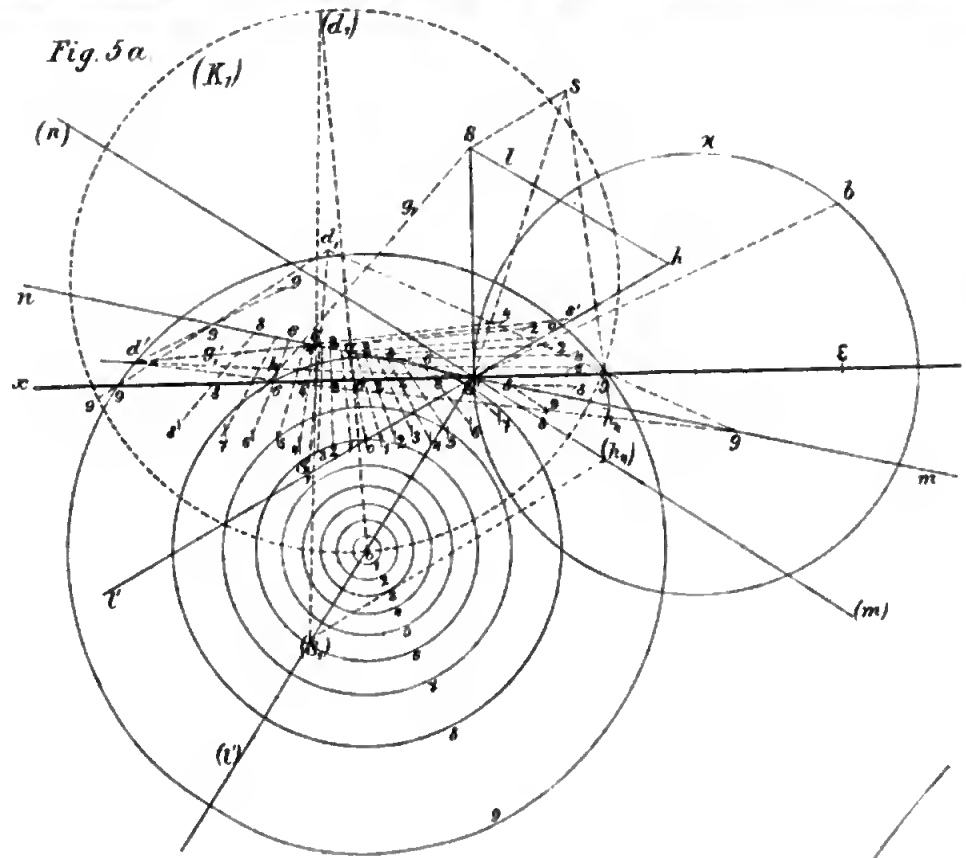
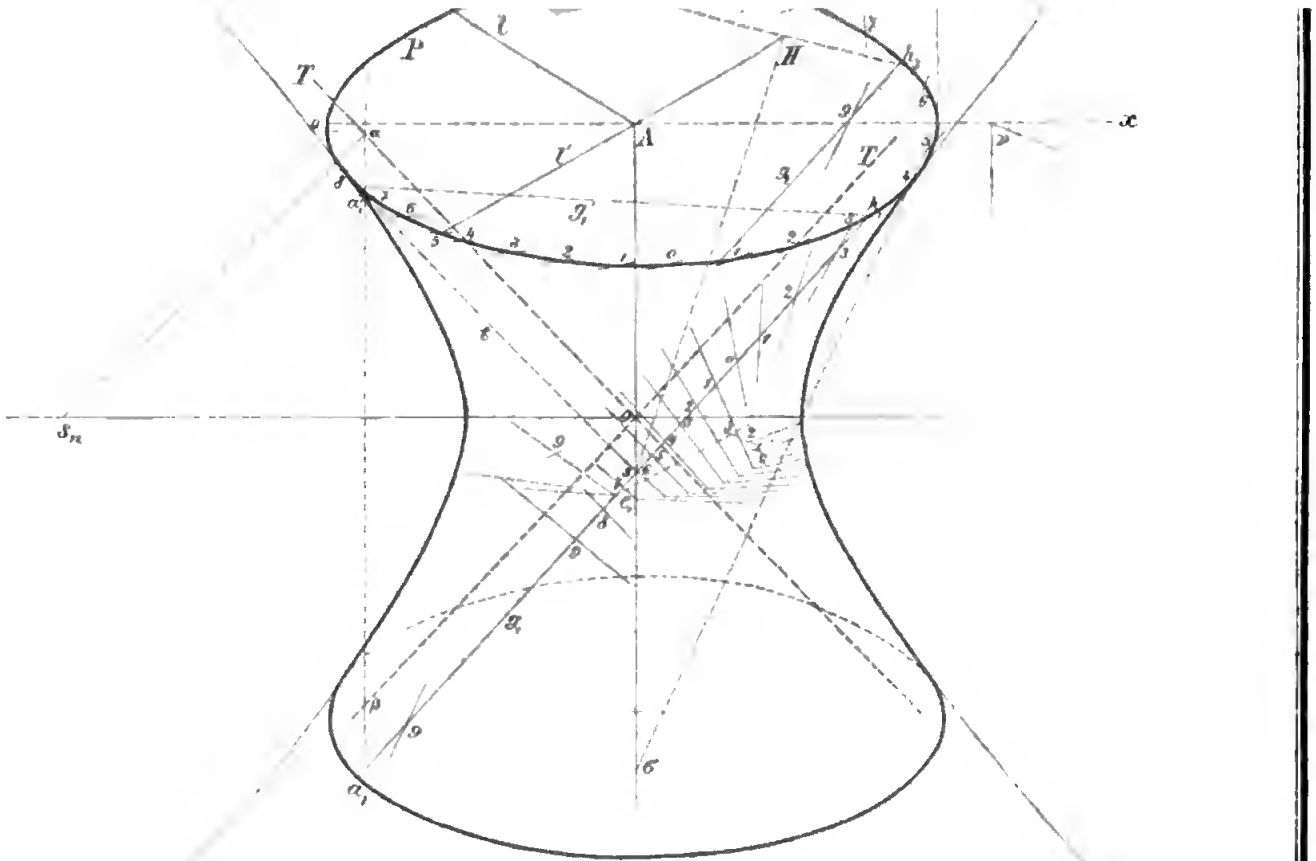


Fig. 5.



IV. Bazala: Theorie der Isopholentangenten.

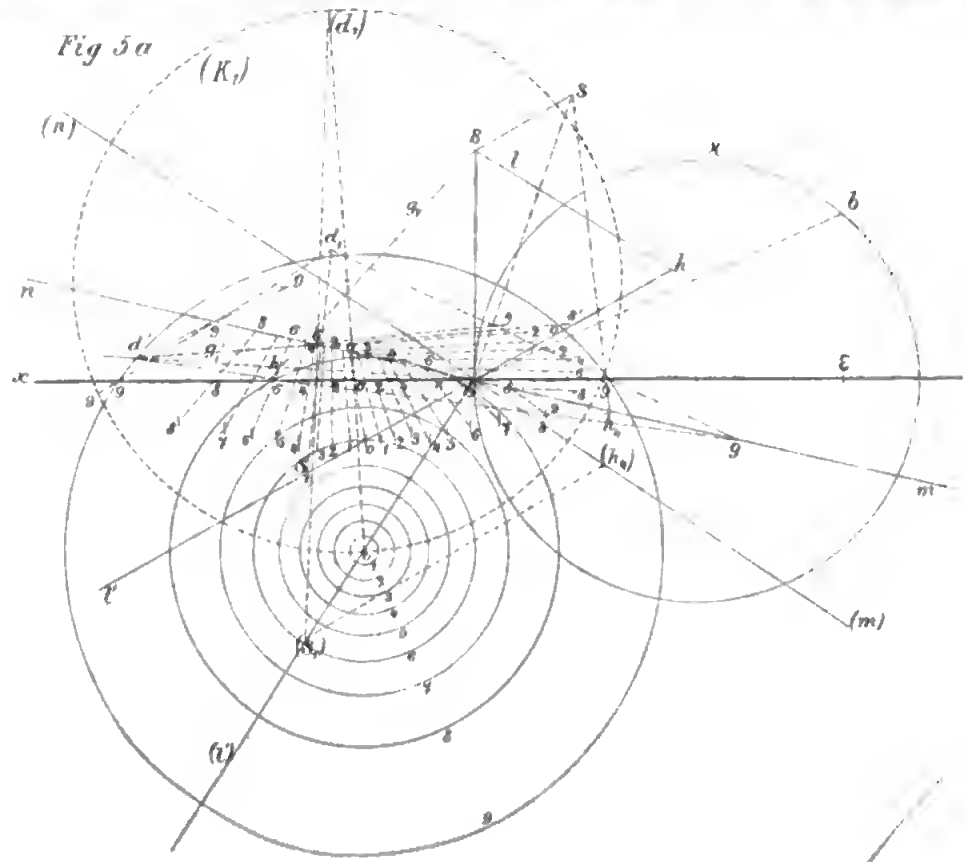
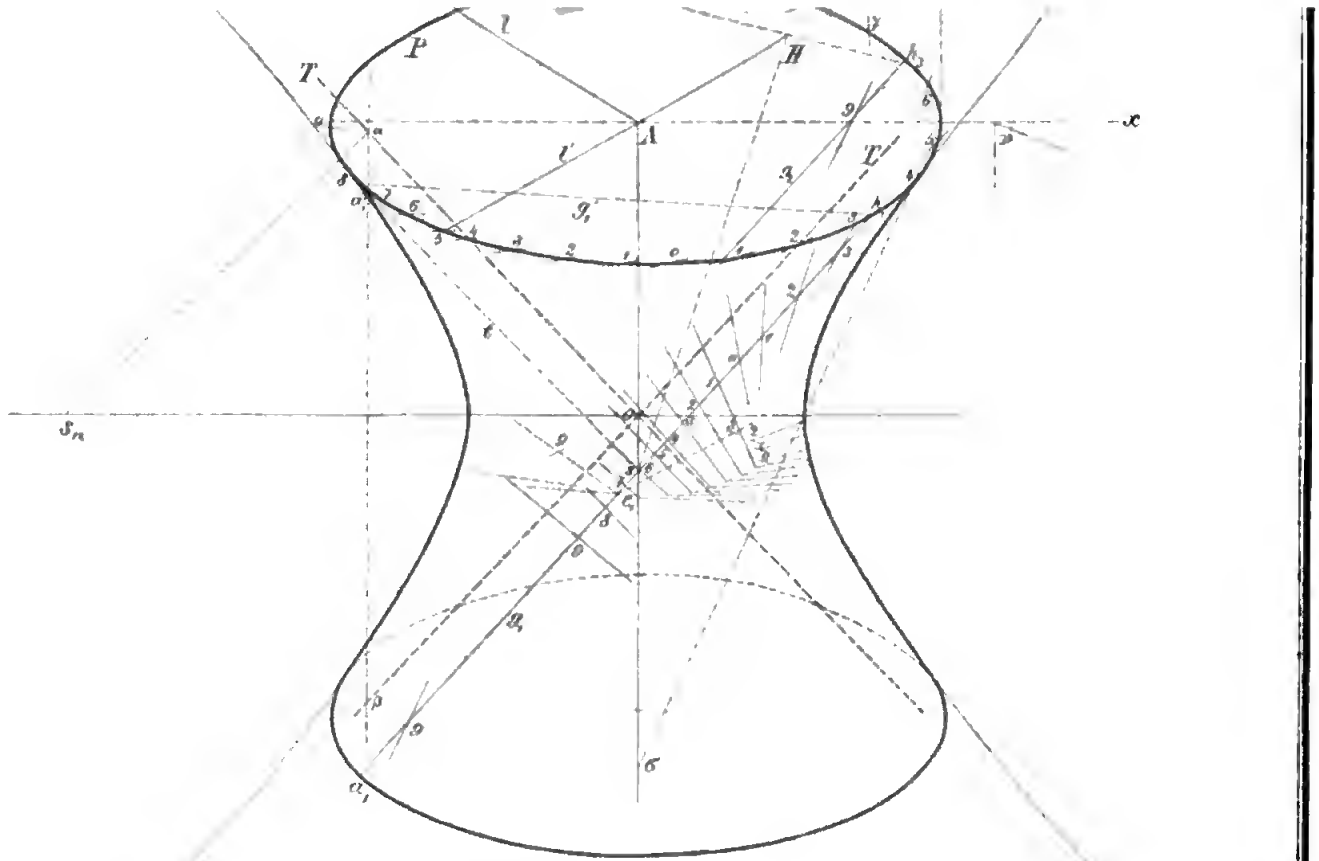


Fig. 5.



W. Bazala: Theorie der Isophotentangenten.

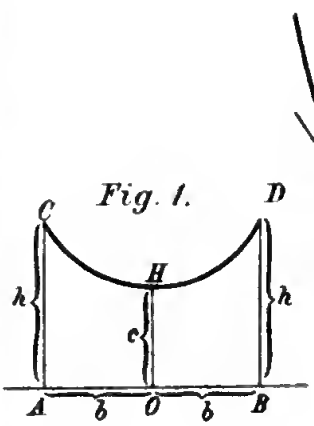


Fig. 1.

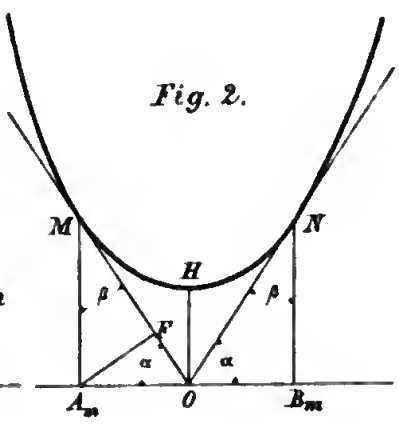


Fig. 2.

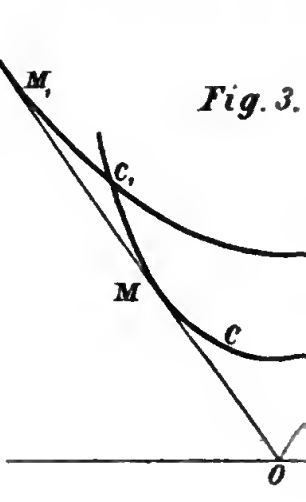


Fig. 3.

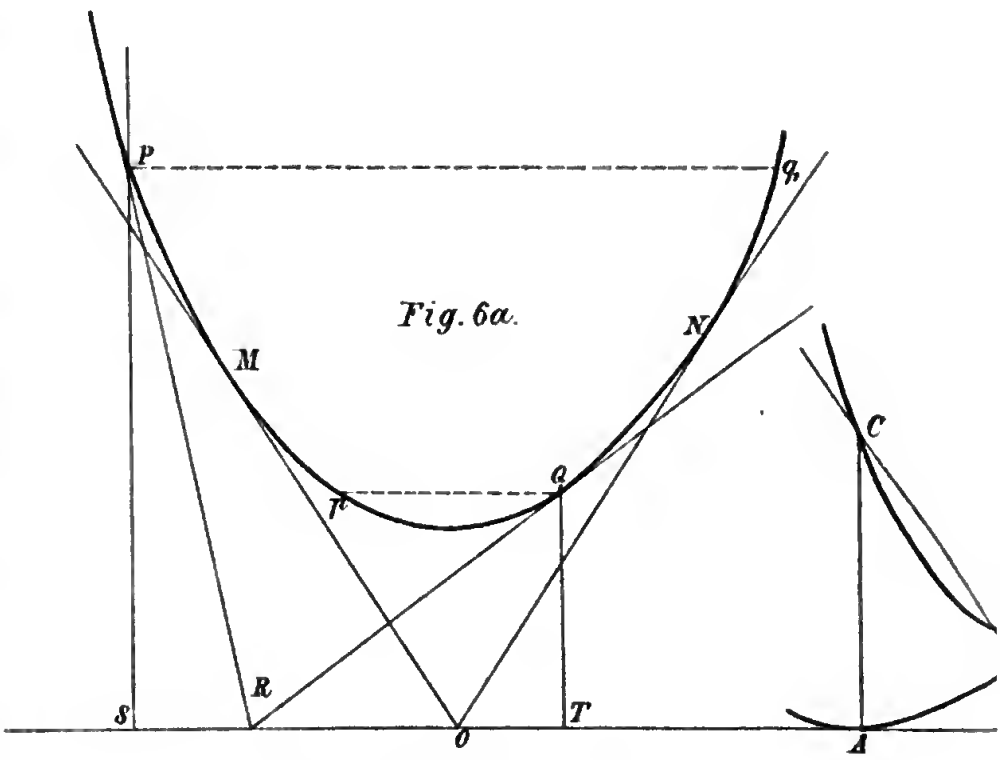


Fig. 6a.

II. Saalschütz: Kleinste Rotationsfläche.

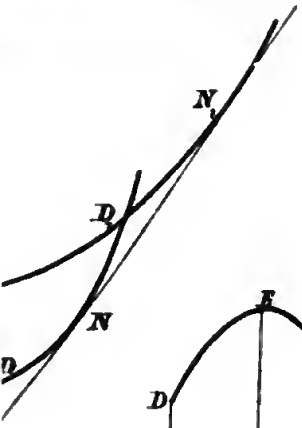


Fig. 4.

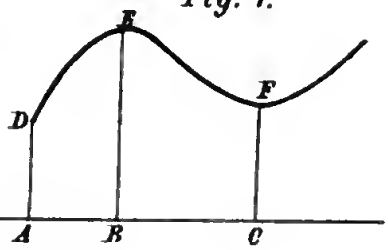


Fig. 5.

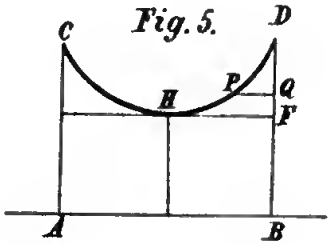


Fig. 6b.

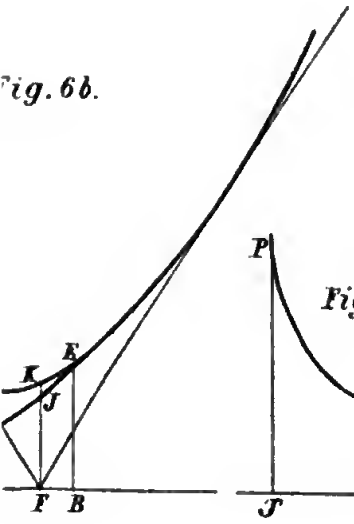


Fig. 7.

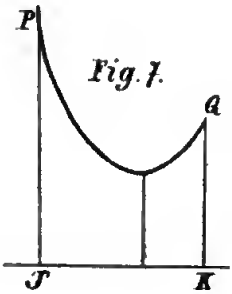
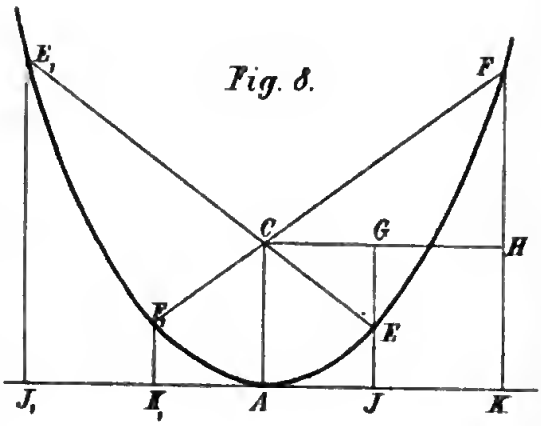
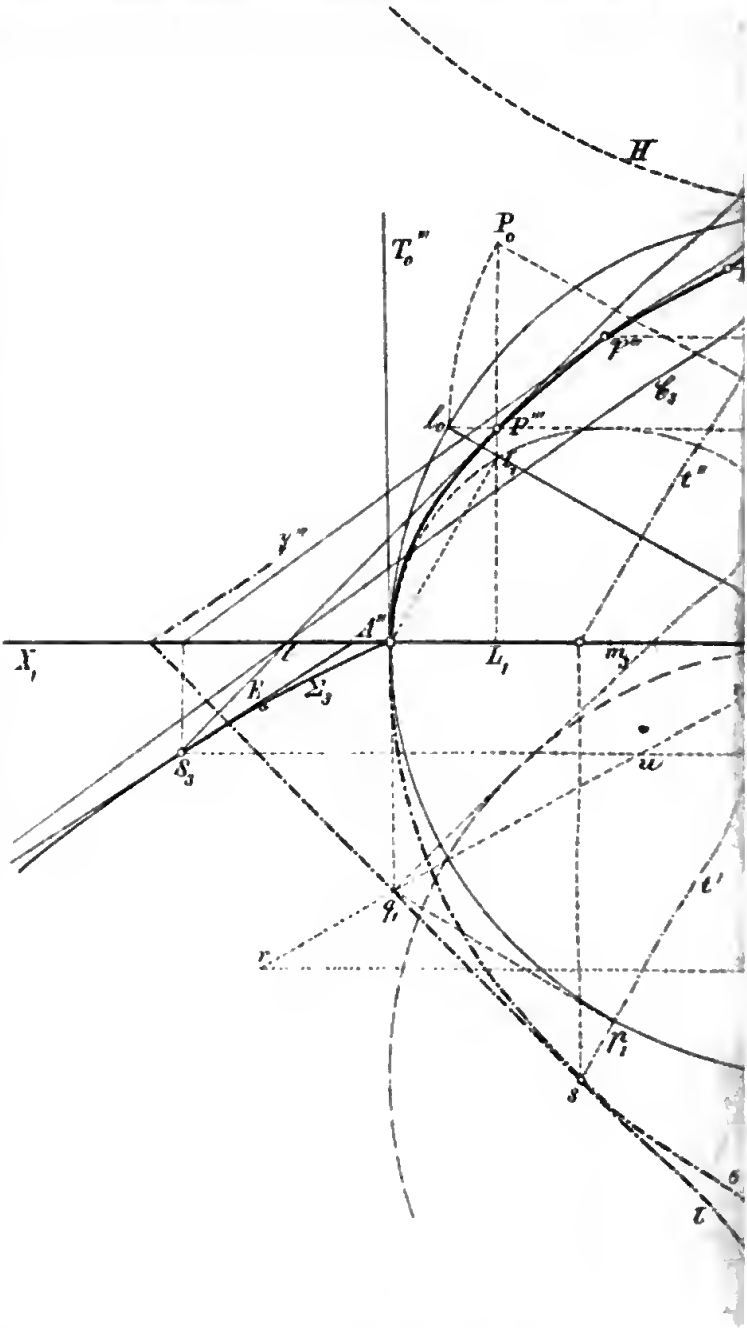


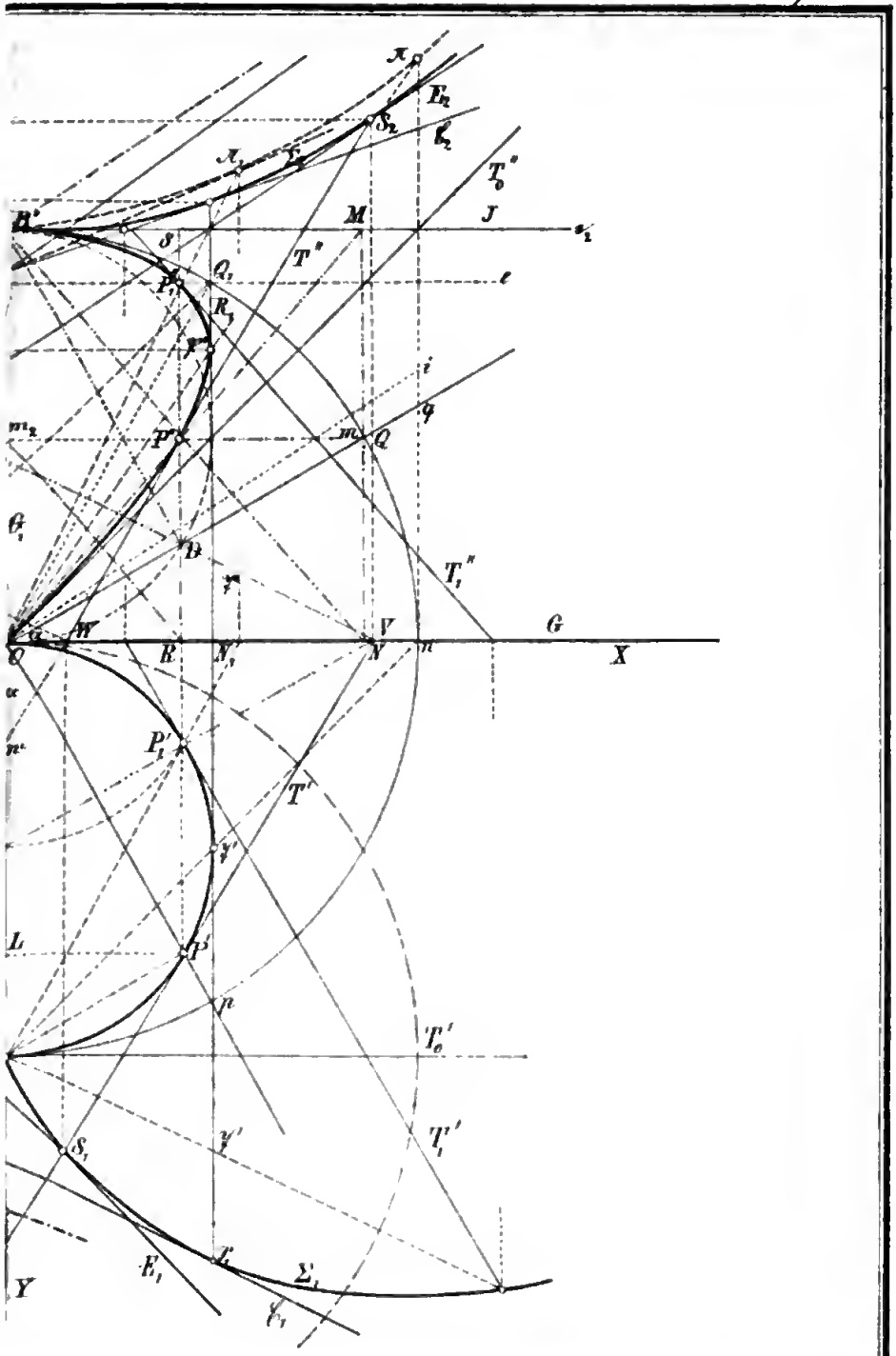
Fig. 8.



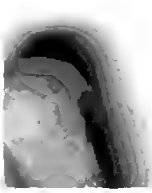
Lith. Anstalt v. F.W. Kunike, Greifswald.



VI. Schiffner: Die sphärische Schleifenlinie.



Lithogr v F.W. Kunike, Greifswald



Mathematische und physikalische Bibliographie.

XVI.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Bauernfreund, C. M., Gedächtnisssrede auf Joseph v. Fraunhofer zur Feier seines 100. Geburtstages. München, Franz'sche Verl. 80 Pf.

Bibliotheca mathematica. Zeitschrift f. Gesch. d. Mathematik. Hrsg. v. G. Eneström. Jahrg. 1887. (4 Nrn.) Nr. 1. Berlin, Mayer & M. procpit. 4 Mk.

Fortschritte, die, der Physik. Dargestellt v. d. physikal. Gesellschaft zu Berlin. G. Reimer. 34 Mk.

Hoppe, E., die Entwickelung der Lehre v. der Elektricität bis auf Hauksbee. Hamburg, Herold'sche B. 2 Mk. 50 Pf.

Jahrbuch üb. d. Fortschritte d. Mathematik, begründet v. C. Ohrtmann. Hrsg. v. M. Henoch u. E. Lampe. 16. Bd. Jahrg. 1884. 2. Hft. Berlin, G. Reimer. 6 Mk.

Mahler, E., Fortsetzg. d. Wüstenfeld'schen Vergleichungs-Tabellen der muhamedan. u. christl. Zeitrechnung v. 1300 bis 1500 d. Hedschra. Leipzig, Brockhaus' Sort. 75 Pf.

Methode und Principien.

Kerschbaum, Beweis, dass es e. Quadratur d. Kreises giebt, und dass die bisher zur Berechnung d. Kreises benutzte Ludolph'sche Zahl etwas zu klein ist. Kohurg, Riemann jr. 1 Mk.

Mach, F., der relative Bildungswert d. philolog. u. d. mathematisch-naturwissenschaftl. Unterrichtsfächer d. höh. Schulen. Vortrag. Leipzig, Freytag. 40 Pf.

Schellbach, K. H., üb. die Zukunft der Mathematik an unsern Gymnasien. Berlin, G. Reimer. 80 Pf.

Schröter, R., Beiträge z. Methodik d. Rechenunterrichts f. d. oberen Klassen der Seminare u. f. Volksschullehrer. Wittenberg, Herrosé, Verl. 1 Mk. 80 Pf.

Zimmermann, W. F. A., Naturkräfte und Naturgesetze. 4. Aft. 6. Lfg. Berlin, Dümmler's Verl. 50 Pf.

Lehrbücher.

Boyman, J. R., Lehrbuch d. Mathematik f. Gymnasien, Realschulen u. andere höhere Lehranstalten. 1. Tl. Geometrie d. Ebene. 11. Afl., besorgt v. K. Werr. Düsseldorf, Schwann's Verl. 2 Mk.; geb. 2 Mk. 30 Pf.

Enholtz, C. E., Lehrbuch d. elementaren Mathematik z. Schul- u. Selbstunterricht f. Lehrer u. Lehramtskandidaten. 1. Tl. Reine Arithmetik. 1. Lfg. Aarau, Sauerländer's Verl. 1 Mk.

Geigenmüller, R., Elemente d. höheren Mathematik. I. Algebraische Analysis. Mittweida, Polytechn. Buchh. 2 Mk.

— Elemente d. höheren Mathematik. V. Integralrechnung. I. Kurs. Ebd. 2 Mk.

Kramerius, J., Repetitorium aus d. Geometrie u. Mechanik. Wien, Pichler's W. & S. 2 Mk. 40 Pf.; geb. 2 Mk. 80 Pf.

Sachse, J. J., der praktische, geisthild. u. erziehl. Unterricht im Rechnen u. in der Raumlehre. 3. Tl. Methodik u. Didaktik d. Raumlehre. Osnabrück, Wehberg. 2 Mk. 50 Pf.

Wapienik, A., Lehrbuch d. Mathematik f. die oberen Classen d. Mittelschulen. Wien, Gräser. Geb. 3 Mk. 60 Pf.

Sammlungen.

Bardey, E., quadratische Gleichungen m. d. Lösgn. 2. Afl. Leipzig, Teubner. 1 Mk. 60 Pf.

Geerling's Rechenbuch. Hand- u. Hülfsbuch f. höh. u. Subalternbeamte, Militäranwärter u. Praktikanten, welche z. Zwecke ihrer Anstellg. od. Beförderg. in höh. Amtsstellgn. e. Rechen-Examen abzulegen haben. Frankfurt a. M., Gestewitz. 1 Mk. 50 Pf.; geb. 2 Mk.

Harms, Ch. u. A. Kallius, Rechenbuch f. Gymnasien, Realgymnasien, Ober-Realschulen etc. 13. Afl. Oldenburg, Stalling's Verl. 2 Mk. 25 Pf.

Kleyer, A., vollständ. gelöste Aufgaben-Sammlg. a. allen Theilen d. Rechenkunst etc. 324.—333. Heft. Stuttgart, Maier. à 25 Pf.

Kober, J., Aufgaben f. d. Rechenunterricht f. Gymnasien u. Realschulen. 1.—5. Hft. 4. Afl. Trier, Lintz. Kart. à 75 Pf.

Löbnitz, G. Th., Rechenbuch f. Gymnasien, Realgymnasien, Real- u. höh. Bürgerschulen. 1. Tl. 15. Afl. Hildesheim, Gerstenberg'sche B. 1 Mk.

Schlotterbeck, B., 1050 Rechenaufgaben aus Schule und Leben. 2. Afl. Langensalza, Schulbuchh. v. Gressler. 3 Mk. 30 Pf.

Steck, F. X., u. J. Bielmayr, Sammlg. v. arithmet. Aufgaben in systemat. Ordng. 9. Afl. Kösel, Kempten. 1 Mk. 30 Pf.; Resultate. 45 Pf.

Tabellen.

Angust, E. F., vollständ. logarithmische u. trigonometrische Tafeln. 15. Afl., besorgt v. F. Angust. Leipzig, Veit & Co. Geb. 1 Mk. 60 Mk.

Rex, F. G., Tables de logarithmes à cinq décimales. 2 Fascicules. Stuttgart, Metzler'sche Verl. 2 Mk.

Wittstein, Th., vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln. 2. Afl. Hannover, Hahn. 60 Pf.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Adam, Th., Regeln u. Lehrsätze aus d. Arithmetik u. Algebra f. d. Unterricht d. höh. Schulen bis Oberseknnda. Schwerin, Hildebrand. 60 Pf.

Biermann, O., Theorie der analytischen Fnnctionen. Leipzig, Teubner. 12 Mk. 80 Pf.

Bolza, O., üb. d. Redaction hyperellipt. Integrale erster Ordng. u. erster Gattg. auf elliptische, insbesondere üb. die Redaction durch e. Transformation vierten Grades. Göttingen, Vandenheeck & R. 1 Mk. 80 Pf.

Falkland, K., Einführung in d. Arithmetik u. Algebra durch e. method. Selbstunterricht. Langensalza, Schulbuchh. v. Gressler. 2 Mk. 50 Pf.; Antwortenhft. 50 Pf.

Lüroth, J., üb. die kanon. Perioden der Abel'schen Integrale. (2. Abhandlg.) München, Franz'sche Verl. 1 Mk. 30 Pf.

Renschle, C., Appareil grapho-mécaniqne pour la résolution d'équations numériques avec des explications à la portée de tons. Stuttgart, Metzler'sche Verl. In Mappe 3 Mk. 60 Pf.

Schlesinger, L., üb. lineare homogene Differentialgleichgn. vierter Ordnung, zwischen deren Integralen homogene Relationen höheren als ersten Grades bestehen. Berlin, Mayer & M. 2 Mk. 40 Pf.

Tödter, H., Anfangsgründe. d. Arithmetik u. Algebra. 2. T. Ausg. A. 2. Hft. Bielefeld, Velhagen & Kl. 80 Pf.

— Dass. 2 Tl. Asg. B. 3. Afl. Ebd. 40 Pf.

Weber, D., Leitfaden f. Unterricht im Kopfrechnen, m. Berücksichtg. d. schriftl. Rechnens. Wiesbaden, Limbarth. 2 Mk. 80 Pf.

Wertheim, G., Elemente der Zahlentheorie. Leipzig, Teubner. 8 Mk. 40 Pf.

Zillmer, A., die mathemat. Rechnungen bei Lebens- u. Renten-Versichergn., systemat. entwickelt. 2. Afl. Berlin, Nicolai'sche Verl. 10 Mk.

Geometrie.

Baer, O., Eléments de géomotrie plano à l'usago des elèves du collège royal français. Berlin, G. Reimer. Geb. 3 Mk.

Baur, M., üb. den Schnitt o. Ellipsoids u. e. m. ihm konzentrischen Kugel. Tübingen, Fues, Verl. 20 Pf.

Fink, K., üb. windschiefe Flächen in allgem. u. insbes. üb. solcho d. sechsten Grades. Ebd. 60 Pf.

Hespe, W., üb. windschiefe Flächen m. Direktorebene, deren Gencratricen zwei anfeinander u. anf d. Direktorebene senkrechte Kegelschnitte treffen. Berlin, Mayer & M. 1 Mk. 60 Pf.

Hoffmann, G., Anleitg. z. Lösg. planimetrischer Anfgaben m. Uebungsbeispielen f. Schüler höherer Lehranstalten. 2. Afl. Leipzig, Fues' Verl. Geb. 1 Mk. 80 Pf.

Kindel, P., e. reciproke Zuordnung der räuml. Elemente. Berlin, Gärtner's Verl. 1 Mk.

Klette, R., d. perspectivische Zeichnen. 3. Afl. Braunschweig, Bruhn, Verl. 80 Pf.

Köpp, G., geometr. Körpermasse z. Anfertigen v. Körpermodellen f. den Unterricht in der Geometrie. 1. Hft. Bensheim, Lehrmittelanstalt. 40 Pf.

Lobatschowsky, R., geometr. Untersuchgn. zur Theorie der Parallellinien. 2. Afl. Berlin, Mayer & M. 2 Mk.

Massny, W., üb. e. besonderen Fall quadrat. Transformation in der Ebene. Gross-Strehlitz, Wilpert. 1 Mk.

Schulze, E., Vorschule f. d. geometr. Unterricht. 1. u. 2. Tl. Bielefeld, Velhagen & Kl. 1 Mk. 40 Pf.

Soeger, H., die Elemente der Geometrie, f. d. Schulunterricht bearb. 3. Afl. Wismar, Hinstorff'sche Verl. 2 Mk. 40 Pf.

Sickenberger, Geometrie. 1. Tl. Planimetrie. 1. u. 2. Abth. München, Th. Ackermann. 1 Mk. 25 Pf.

Stroissler, J., geometrische Formenlehre. (2. Abth.) Lehr- u. Uebungsbuch d. Geometrie u. d. geometr. Zeichnens. 6. Afl. Triost, Schimpff. Geb. 2 Mk.

Trigonometrie.

Frankenbach, F. W., Lehrbuch d. Mathematik f. höh Lehranstalten. 3. Tl. Die ebene Trigonometrie. Liegnitz, Krumbhaar. 60 Pf.

Praktische Geometrie u. Geodäsie.

Ausbildung u. Prüfung d. preuss. Landmesser u. Kulturtechniker. Verordngn. u. Erlasse. Berlin, Parey. Geb. 2 Mk.

Schulze, C., prakt. Geometrie in Verbindg. m. geometr. Zeichnen, Rechnen, Feldmessen, Nivellieren u. Planzeichnen. Gotha, Behrend. 2 Mk.

Woelfer, H., die prakt. Geometrie. Lehrbuch f. den Unterricht an techn. Lehranstalten u. zum Selbststudium. Berlin, Springer. Geh. 3 Mk.

Mechanik.

Fernbach, L., d. Bewegg. e. homogen m. Masse belegten starren Geraden auf e. geradlin. Fläche. Mayer & M. 1 Mk.

Schlotke, P., Lehrbuch d. graph. Statik. Hamburg, Nestler & M's. Verl. Kart. 5 Mk.

Volkmann, P., üb. Fern- und Druckwirkungen. Berlin, Friedländer & S. 50 Pf.

Technik.

Jeep, W., das graphische Rechnen u. die Graphostatik in ihrer Anwendung auf Bankonstruktionen. Mit Atlas. Weimar, B. F. Voigt. 9 Mk.

Koch, G., der Weg zur Lösung d. Flugproblems. München, Mangelsdorf. 1 Mk.

Zenner, G., techn. Thermodynamik. 3. Afl. Der „Grundzug d. mechan. Wärmetheorie". I. Bd. Leipzig, Felix. 13 Mk.

Optik, Akustik und Elasticität.

Grosse, W., üb. Polarisationsprismen. Kiel, Lipsius & T. 1 Mk. 60 Pf.

Mache, J., üb. die Abhängigkeit der Helligkeit d. Sterne v. d. Pupillenöffnung. Halle, Schmidt's Verl. 40 Pf.

Vordet, E., Vorlesungen üb. d. Wellentheorie d. Lichtes. Deutsche Bearbeitg. v. K. Exner. 2. Bd. 3. Abth. (Schluss.) Braunschweig, Vieweg & S. 5 Mk. 30 Pf.; cplt. 2 Bde. 26 Mk.

Zech, P., elementare Behandlg. v. Linsensystemen. Tübingen, Fues, Verl. 30 Pf.

Erd- und Himmelskunde.

Beobachtungen, meteorolog., in Deutschland v. 23 Stationen. II. Ordng., sowie stündl. Aufzeichnungen von 3 Normal-Beobachtungsstationen der Seewarte u. v. Kaiserslautern; die Stürme nach den Signalstellen der Seewarte. 1884. 7. Jahrg. Hrsg. v. d. Direction der Seewarte. Hamburg, Friederichsen & Co. 3 Mk.

Bericht üb. d. Thätigkeit im kgl. sächs. meteorolog. Institut im J. 1885. v. P. Schreiber. Chemnitz, Bülz. 5 Mk.

Bredichin, Th., sur les grands comètes de 1887. Leipzig, Voss' Sort. 1 Mk.

Busch, F., I. Ueber die Dämmerung, insbesondere üb. die glänzenden Erscheingn. d. Winters 1883—84. II. Beobachtgn. üb. d. Bishop'schen Ring u. üb. das erste Purpurlicht. Arnsberg, Stein. 1 Mk. 50 Pf.

d'Engelhardt, B., Observations astronomiques faites dans son observatoire à Dresde. 1. Partie. Dresden, Baensch. 20 Mk.

Ephemeriden, astronom.-nant, f. d. J. 1888. Dtsche. Asg. Red. v. F. Anton. Triest, Schimpff. Geh. 2 Mk. 70 Pf.

Fortschritte, die, der Meteorologie. Nr. 12. 1886. Leipzig, Mayer. 2 Mk.

Herr, J. Ph., Lehrbuch d. sphär. Astronomie in ihrer Anwendg. auf geograph. Ortsbestimmung. Nach dessen Tode vollendet v. W. Tinter. Wien, Seidel & S. 16 Mk.

Hornberger, R., graphische Darstellungen f. d. meteorolog. Unterricht. 2. Lfg. Kassel, Fischer. 8 Mk.

Israel-Holzwart, K., Supplement zu den Elementen d. theoret. Astronomie. Wiesbaden, Bergmann. 1 Mk. 60 Pf.

Kiesel, G., üb. atmosphärische Elektricität. Berlin, Gärtner's Verl. 1 Mk.

Klein, H. J., Stern-Atlas f. Freunde d. Himmelsbeobachtung. 3. Lfg. Leipzig, Mayer. 1 Mk. 20 Pf.

Konkoly, N. v., Beobachtungen, angestellt am astrophysikal. Observatorium in OGyalla (Ungarn). 8. Bd. 1. Thl., enth. Beobachtgn. v. J. 1885. Halle, Schmidt's Verl. 6 Mk. 50 Pf.

Leyst, E., Katalog der meteorolog. Beobachtgn. in Russland u. Finnland. 4. Suppl.-Bd. zum Repertorium f. Meteorologie. Leipzig, Voss' Sort. 11 Mk. 70 Pf.

Luther, E., astronom. Beobachtgn. auf der Kgl. Universitäts-Sternwarte zu Königsberg. 37. Abth. 2. Thl. Königsberg, Koch & R. 10 Mk. 70 Pf.

Mohn, H., Grundzüge d. Meteorologie. Die Lehre v. Wind u. Wetter. 4. Afl. Mit 23 Karten u. 26 Holzschnitten. Berlin D. Reimer. Geb. 6 Mk.

Publikationen d. astrophysikal. Observatoriums zu Potsdam, Nr. 17. Beobachtgn. von Sonnenflecken in den Jahren 1880—1884. Bearb. v. G. Spörer. Leipzig, Engelmann. 10 Mk.

— Dass. Nr. 21. Bestimmung der Polhöhe d. Observatoriums v. P. Kempf. Ebd. 2 Mk.

Rethwisch, E., die Bewegung im Weltraum. Kritik d. Schwerkraft u. Analyse d Axendrehung. Berlin, Schneider & Co. 4 Mk. 50 Pf.

Vierteljahrsschrift der astronom. Gesellschaft. Hrsg. v. E. Schön-

feld u. H. Seeliger. 22. Jahrg. 1887. 1. Hft. Leipzig, Engelmann, 2 Mk.

Weiss, E., Bilderatlas der Sternenwelt. 1. Lfg. Esslingen, Schreiber. 1 Mk.

Wellmann, V., z. Photometrie der Jupiter-Trabanten. Berlin, Mayer & M. 3 Mk.

Wetter, das. Meteorolog. Monatsschrift f. Gebildete aller Stände. Hrsg. v. R. Assmann. 4. Jahrg. 1887. 1. Hft. Braunschweig, Salle. procplt. 6 Mk.

Wilk, E., Grundbegriffe der Meteorologie, für höhere Schulen zusammengestellt. Iserlohn, Bädeker. Kart. 1 Mk.

Zenger, K. W., die Meteorologie d. Sonne u. d. Wetterprognose d. J. 1886. Prag, Rivnac. 1 Mk. 44 Pf.

Zenker, W., Sichtbarkeit u. Verlauf d. totalen Sonnenfinsterniss in Deutschland am 19. August 1887. Berlin, Dümmler's Verl. 1 Mk. 20 Pf.

Physik.

Crüger, J., Grundzüge der Physik, m. Rücksicht auf Chemie. 22. Afl. Leipzig, Amelang. 2 Mk. 10 Pf.

Januschke, H., das Princip der Erhaltung der Energie in d. elementaren Elektricitätslehre. Leipzig, Teubner. 4 Mk.

Jochmann, E., u. O. Hermes, Grundriss d. Experimental-Physik u. Elemente d. Astronomie u. mathemat. Geographie. 10. Afl. Berlin, Winckelmann & S. Geh. 5 Mk. 30 Pf.

Kleyer, A., d. elektr. Erscheingn. u. Wirkgn. in Theorie u. Praxis 64.—69. Hft. Stuttgart, Maier. à 25 Pf.

Krehs, G., Leitfaden d. Experimental-Physik f. Gymnasien. 2. Afl. Wiesbaden, Bergmann. 4 Mk. 60 Pf.; geh. 5 Mk.

Morgenstern, F. L., Einführung in das Gebiet d. Physik. Ein Hülfsbüchlein f. d. Hand d. Lehrers u. zum Selbstunterricht. Jena, Bufleb's Verl. 3 Mk.; Frageheft dazu. Kart. 1 Mk.

Sattler, A., Leitfaden d. Physik u. Chemie. Für die oberen Klassen v. Bürger- u. höheren Mädchenschulen. 5. Afl. Braunschweig, Vieweg & S. 80 Pf.

Verhandlungen der physikal. Gesellschaft zu Berlin im J. 1886. 5. Jahrg. Red. v. E. Rosochatius. Berlin, G. Reimer. 2 Mk. 50 Pf.

Voss, A., elementare Darstellg. d. mechan. Wärmetheorie f. Gase. Berlin, Gärtner's Verl. 1 Mk.

Weinhold, A. F., physikal. Demonstrationen. Anleitg. zum Experimentiren im Unterricht an Gymnasien, Realschulen u. Gewerbeschulen. 2. Afl. 1. Lfg. Leipzig, Quandt & H. 7 Mk. 50 Pf.

Vermischte Schriften.

Denkschriften d. kais. Akademie d. Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. 51. Bd. Wien, Gerold's S. Kart. 46 Mk.

Kleyer's Encyklopädie der gesammten mathemat., techn. u. exakten Natur-Wissenschaften. 1. — 4. Lfg. Stuttgart, Maier. à 1 Mk.

Mittheilungen, mathemat. u. naturwissenschaftl., aus d. Sitzungsberichten d. kgl. preuss. Akademie d. Wissensch. zu Berlin. Jahrg. 1887. 1. Hft. Berlin, G. Reimer. procplt. 8 Mk.

Schick, J., Grundlagen einer Isogonalzentrik. Tübingen, Fues, Verl. 2 Mk.

Sitzungsberichte d. kais. Akademie d. Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. 2. Abth: Enth. d. Abhandlgn. aus d. Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mathematik, Meteorologie u. Astronomie. 94. Bd. 3.—5. Hft. Wien, Gerold's S. 7 Mk. 60 Pf.

Sitzungsberichte d. mathem.-physikal. Classe d. k. b. Akademie d. Wissensch. zu München. 1886. 3. Hft. München, Franz'sche Verl. 1 Mk. 20 Pf.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XVII.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Fortschritte, die, der Physik. Nr. 10. 1886. Leipzig, Mayer. 2 Mk.

Jahrbuch üb. die Fortschritte d. Mathematik, begründet v. C. Ohrtmann. Hrsg v. M. Henoch u. C. Lampe. 16. Bd. Jahrg. 1884. 3. Hft. Berlin, G. Reimer. 10 Mk

Rosenberger, F., die Geschichte der Physik in Grundzügen. 3. Thl. Geschichte d. Physik in d. letzten 100 Jahren. 1. Abth. Braunschweig, Vieweg & S. 6 Mk. 50 Pf.

Methode und Principien.

Ehlert, W., das analytische-synthetische Lehrverfahren. Hamburg, Nolte. 40 Pf.

Kerz, F., Plaudereien üb. die Kant-Laplace'sche Nebularhypothese. Jena, Mauke's Verl. 3 Mk.

Lolling, W. F., die Quadratur d. Zirkels. Sichere Lösg. e. bislang als Problem betrachteten wissenschaftl. Frage. Hamburg, Kramer. 1 Mk.

Schmädel, J. Ritter v., üb. moderne Graphik. München, Literar.-artist. Anstalt. 1 Mk. 50 Pf.

Zimmermann, W. F. A., Naturkräfte u. Naturgesetze. 4. Afl. 7. Lfg. Berlin, Hempel. 50 Pf.

Lehrbücher.

Wittstein, Th., Lehrbuch der Elementar-Mathematik. 1. Bd. 1. u. 2. Abth. 8. u. 14. Afl. Hannover, Hahn. à 2 Mk.

Sammlungen.

Emmerig, A., geometr. Kopfrechenaufgaben u. deren Auflösgn. Bamberg, Buchner. 1 Mk. 60 Pf.

Kleyer, A., Vollständ. gelöste Aufgaben-Sammlung a. allen Zweigen d. Rechenkunst etc. 334. — 353. Hft. Stuttgart, Maier. à 25 Pf.

Lauteschläger, G., Beispiele u. Aufgaben d. Algebra. 12. Afl., bearb. v. F. Gräfe. Darmstadt, Bergsträsser. 1 Mk. 60 Pf.

Lieber, H. u. F. v. Lühmann, geometr. Konstruktions-Aufgaben. 8. Afl. Berlin, Simion. 2 Mk. 70 Pf.; geb. 3 Mk.

Mittenzwey, L., Aufgaben f. d. geometr. Rechnen. Ausg. f. die Hand d. Lehrers. Leipzig, Klinkhardt. 1 Mk. 20 Pf.

— dass. Ausg. f. die Hand d. Schülers. Ebd. 50 Pf.

Tabellen.

Adam, V., Taschenbuch d. Logarithmen f. Mittelschulen u. höh. Lehranstalten. 14. Afl. Wien, Bermann & A. Geb. 1 Mk.

Bremiker's, C., logarithmisch-trigonometrische Tafeln m. 5 Decimalstellen. 5. Afl., besorgt v. A. Kallius. Berlin, Weidmann'sche Buchh. Geb. 1 Mk. 50 Pf.

Gauss, F. G., fünfstellige vollständige logarithm. u. trigonometr. Tafeln. 26. Aufl. Halle, Strien. 2 Mk.

Köhler, E. T., Manuale logaritmico-trigonometrico. XV. Ed. ster., VIII. della versione italiana. Leipzig, Tauchnitz. 3 Mk.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Bardey, E., Anleitung zur Auflösung eingekleideter algebraischer Aufgaben. 1. Tl. Leipzig, Teubner. 1 Mk. 50 Pf.

Braesicke, E. D., der deutsche Rechenmeister. 15. Afl. 1. u. 2. Lfg. Strassburg, Schultz & Co, Verl. à 25 Pf.

Braunmühl, A. v., Untersuchungen über p-reihige Charakteristiken, die aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind, u. d. Additionstheoreme d. zugehör. Thetafunktionen. München, Franz'sche Verl. 1 Mk. 30 Pf.

Durège, W., Theorie d. ellipt. Functionen. Versuch e. elementaren Darstellg. 4. Afl. Leipzig, Teubner. 9 Mk.

Hengel, J. van, Lehrbuch d. Algebra. Theoret.-prakt. Anleitg. z. Studium d. Arithmetik u. Algebra. Freiburg, Herder. 5 Mk.

Mandl, M., üb. die Summirung einiger Reihen. Wien, Gerold's S. 20 Pf.

Neumann, C., üb. die Methode d. arithm. Mittels. 1. Abhandlg. Leipzig, Hirzel. 3 Mk. 20 Pf.

Reiff, R., die Anfänge der Variationsrechnung. Tübingen, Fues, Verl. 20 Pf.

Schapira, H., üb. e. allg. Princip algebraischer Iterationen. Vortrag. Heidelberg, Winter. 80 Pf.

Geometrie.

Arnold, C., einige Untersuchgn. üb. quadratische Strahlencomplexe. Strassburg, Trübner. 80 Pf.

Bahnson, Leitfaden f. den Unterricht in der Geometrie. 1. Tl. 4. Afl. Hamburg, Rudolphi. 2 Mk.

Bobek, K., üb. hyperellipt. Curven. 2. u. 3. Mittheilg. Wien, Gerold's S. 50 Pf.

— üb. Curven 4. Ordnung v. Geschlechte 2, ihre Systeme berührender Kegelschnitte u. Doppeltangenten. Ebd. 1 Mk. 80 Pf.

Brill, A., üb. d. Modellsammlg. d. mathemat. Seminars d. Universität Tübingen. Tübingen, Fues, Verl. 20 Pf.

Brockmann, F. J., Lehrbuch d. elementaren Geometrie. 1. Tl. Die Planimetrie. 3. Afl. Leipzig, Teubner. 2 Mk.

Erler, W., die Elemente der Kegelschnitte in synthetischer Behandlg. 3. Afl. Leipzig, Teubner. Kart. 1 Mk. 20 Pf.

Haas, A., üb. graph. Rechnen. Tübingen, Fues, Verl. 20 Pf.

Jost, K., üb. einen Ellipsenzirkel. Wien, Gerold's S. 30 Pf.

Koch, üb. regnläre u. halbregnläre Stern-Polyeder. Tübingen, Fues, Verl. 30 Pf.

Koch, W., die conforme Abbildung d. hyperbolischen Paraboloids auf e. Ebene. Berlin, Mayer & M. 1 Mk. 20 Pf.

London, F., üb. polare Fünfflache u. Sechsflache räumlicher Reciprocitäten. Breslau, Köhler. 1 Mk.

Mittenzwey, L., Geometrie f. Volks- u. Fortbildungsschulen u. untere Klassen höh. Lehranstalten. 1. Hft. 6. Afl. Leipzig, Klinkhardt. 30 Pf.

Reichardt, W., üb. die Darstellg. d. Kummer'schen Fläche durch hyperelliptische Functionen. Leipzig, Engelmann. 5 Mk.

Schürmann, F., kleine prakt. Geometrie. 13. Afl. Mörs, Spaarmann. 1 Mk. 30 Pf.

Voss, A., üb. d. projective Centralfläche e. algebraischen Fläche e. Ordnung. München, Franz'sche Verl. 2 Mk. 40 Pf.

Zaiser, G., die geometr. Formenlehre als Grundlage d. Freihandzeichnens u. d. geometr. Rechnens. 2 Hfte. Esslingen, Langguth. 1 Mk. 25 Pf.

Mechanik.

Petersen, J., Lehrbuch d. Dynamik fester Körper. Deutsche. Asg. v. E. v. Fischer-Benzon. Kopenhagen, Höst & S., Verl. 5 Mk. 50 Pf.

Technik.

Bibliothek, elektro-technische. 1. u. 38. Bd. Wien, Hartleben. à 3 Mk., geb. à 4 Mk. 1. Die Construction der magnet-elektrischen Maschinen. Von C. Glaser de Cew. 5. Afl. v. F. Auerbach. — 38. Die Wirkungsgesetze der dynamo-elektrischen Maschinen. Von F. Auerbach.

Grünwald, F., der Bau, Betrieb u. d. Reparaturen der elektr. Beleuchtungsanlagen. Halle, Knapp. 3 Mk.

Kohlrausch, F., Leitfaden d. prakt. Physik. Mit e. Anh. Das absolute Mass-System. 6. Afl. Leipzig, Teubner. 5 Mk. 60 Pf.

Scharnweber, L., die elektr. Haustelegraphie u. d. Telephonie. 2. Afl. v. O. Goldschmidt. Berlin, Springer. 3 Mk.

Schwartze, Th., Katechismus d. Elektrotechnik. 3. Afl. Leipzig, Weber. Geb. 4 Mk. 50 Mk.

Optik, Akustik und Elasticität.

Central-Zeitung f. Optik u. Mechanik. Red.: O. Schneider. 8. Jahrg. 1887. Nr. 13. Leipzig, Gressner & Schr. Viertelj. 2 Mk.

Halsch, F., Versuche üb. d. Reflexion d. Schalles in Röhren. Wien, Gerold's S. 40 Pf.

Helmholtz, H. v., Handbuch d. physiologischen Optik. 2. Afl. 4. Lfg. Hamburg, Voss. 3 Mk.

Erd- und Himmelskunde.

Bebber, J. van, die Ergebnisse d. Wetterprognosen im J. 1886. Hamburg, Friederichsen & Co. 50 Pf.

Beobachtungen der meteorolog. Stationen im Königr. Bayern. Hrsg. durch C. Laug u. F. Erk. 9. Jahrg. 1887. 1. Hft. München, Th. Ackermann. prcplt. 18 Mk.

Holetschek, J., üb. d. Richtgn. d. grossen Axen der Kometenbahnen. Wien, Gerold's S. 60 Pf.

Jahrbuch d. meteorolog. Beobachtgn. der Wetterwarte d. Magdeburg. Zeitung. Hrsg. v. A. W. Grützmacher. 4. Jahrg. 1885. Magdeburg, Faber. Kart. 7 Mk. 50 Pf.

Jahrbuch, Berl. astronom., f. 1889 m. Ephemeriden der Planeten (1)—(258) f. 1887. Hrsg. unter Leitg. v. F. Tietjen. Berlin, Dümmler's Verl. 12 Mk.

Katzerowsky, W., die meteorolog. Aufzeichnungen d. Leitmeritzer Rathsverwandten Anton Gottfried Schmidt. Prag, Dominicus. 60 Pf.

Klein, H. J., Stern-Atlas f. Freunde d. Himmelsbeobachtung. 6. Afl. Leipzig, Mayer. 1 Mk. 20 Pf.

Körher, F., üh. den Cometen 1865. I. Breslau, Köhler. 1 Mk.

Liznar, J., üh. d. 26tägige Periode der täglichen Schwankung der erdmagnet. Elemente. Wien, Gerold's S. 25 Pf.

Lochau, v. d., Verlauf u. Sichtbarkeit der totalen Sonnenfinsterniss am 19. August f. Berlin u. Umgegend. Berlin, Kühn. 20 Pf.; Asg. m. Deckglas 30 Pf.

Nachrichten, astronom. Hrsg.: A. Krüger. 17. Bd. Nr. 1. Hamburg, Manke Söhne. prcplt. 15 Mk.

Schönfeld, E., Bonner Sternkarten. 2. Serie. Atlas der Himmelszone zwischen 1° u. 23° südl. Declination f d. Anfang d. J. 1885. Als Fortsetzg. d. Bonner Atlas d. nördlich gestirnten Himmels in d. J. 1876 his 1885 auf d. kgl. Sternwarte zu Bonn hearh. 3. Lfg. Bonn, Marcus. 12 Mk.

Schurig, R., Karte d. grossen Sonnenfinsterniss am Morgen d. 19. Aug. 1887. Leipzig, Pfau. 40 Pf.

Stern-Ephemeriden f. d. J. 1888. Berlin, Dümmler's Verl. 6 Mk.

Vierteljahrsschrift d. astronom. Gesellschaft. Hrsg. v. E. Schönfeld u. H. Seeliger. 22. Jahrg. 1887. 2. Hft. Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Weber, W., Sternkarte. (2. Afl.). Leipzig, Hinrichs'sche Sort. 50 Pf.; auf Pappe m. drehbarem Horizont u. 1 Blatt-Text. 6 Mk.

Wetter-Vorherbestimmung, prakt., am Abendhimmel von einem auf den andern Tag. Von K—t. 2. Afl. Leipzig, H. Voigt. 50 Pf.

Nautik.

Jahrbuch, nautisches, od. Ephemeriden u. Tafeln f. d. J. 1890 zur Bestimmung der Zeit, Länge u. Breite zur See nach astronom. Beobachtgn. Hrsg. vom Reichsamt des Innern. Berlin, C. Heymann's Verl. Geb. 1 Mk. 50 Pf.

Phyik.

Bennecke, F., Untersuchg. d. stationären elektr. Strömung in e. unendl. Ebene f. d. Fall, dass die Zuleitg. d. beiden verschied. Elektricitäten in zwei parallelen geradl. Strecken erfolgt. Leipzig, Engelmann. 6 Mk.

Boltzmann, L., z. Theorie d. v. Hall entdeckten elektromagnet. Phänomens. Wien, Gerold's S. 60 Pf.

— üb. d. zum theoret. Beweise d. Avogadro'schen Gesetzes erforderl. Voraussetzungen. Ebd. 60 Pf.

Ettingshausen, A. v., üb. d. Messung der Halle'schen Wirkg. m. d. Differentialgalvanometer. Ebd. 40 Pf.

Kleyer, A., d. elektr. Erscheingn. Wirkgn. in Theorie u. Praxis. 70.—74. Hft. Stuttgart, Maier. à 25 Pf.

Kohlrausch, F., die gegenwärt. Anschauungen üh. d. Elektrolyse v. Lösungen. Vortrag. Berlin, Springer. 1 Mk.

May, O., Lehrbuch d. Kontaktelektricität (Galvanismus). Bearb. nach System Kleyer. Stuttgart, Maier. 8 Mk.

Repertorium d. Physik. Hrsg. v. F. Exner. 23. Bd. (12 Hfte.). 1. Hft. München, Oldenbourg. prcplt. 24 Mk.

Waeber, R., Lehrbuch f. d. Unterricht in d. Physik m. besond. Berücksicht. d. physikal. Technologie u. d. Meteorologie. 5. Afl. Leipzig, Hirt & S. Geh. 3 Mk. 75 Pf.

— Leitfaden f. d. Unterricht in der Physik. 5. Afl. Kart. Ebd. 1 Mk. 20 Pf.

Weinhold, A. F., physikal. Demonstrationen. 2. Afl. 2. Lfg. Leipzig, Quandt & H. 7 Mk. 50 Pf.

Vermischte Schriften.

Abhandlungen d. kgl. Akademie d. Wissenschaften zu Berlin. Aus d. J. 1886. Physikalische. Berlin, G. Reimer. Kart. 4 Mk. 50 Pf.

Abhandlungen d. mathemat.-physikal. Classe d. kgl. bayer. Akademie d. Wissenschaften. 16. Bd. 1. Abth. München, Franz'sche Verl. 7 Mk.

Abhandlungen d. mathemat.-physical. Classe d. kgl. sächs. Gesellschaft d. Wissenschaften. 13. Bd. Leipzig, Hirzel. 30 Mk.

Acta mathematica. Zeitschrift, hrsg. v. G. Mittag-Leffler. 18. Bd. 1. Hft. Berlin, Mayer & M. prcplt. 12 Mk.

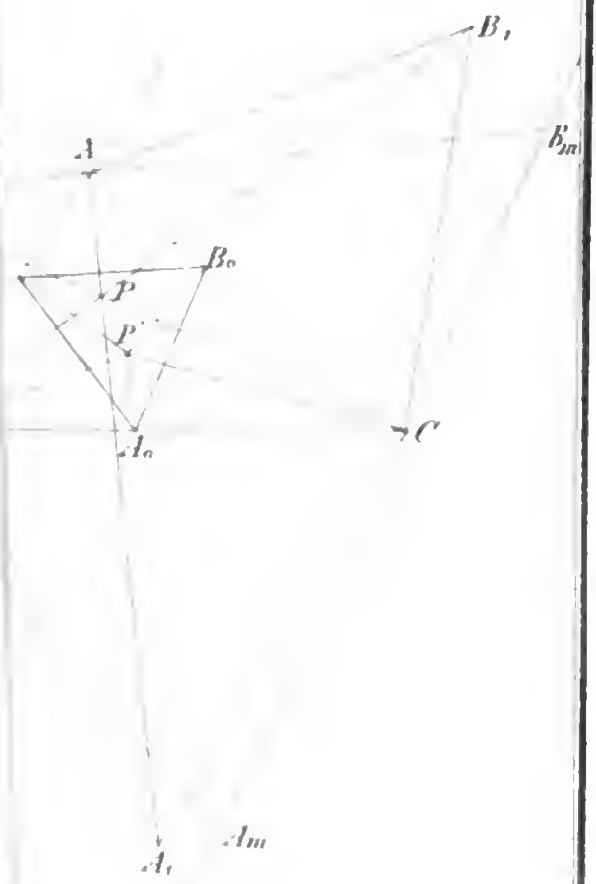
Annalen, mathematische. Hrsg. v. F. Klein u. A. Mayer. 30. Bd. (4 Hfte.). 1. Hft. Leipzig, Teubner. prcplt. 20 Mk.

Berichte, mathemat. u. naturwissenschaftl., aus Ungarn. Red. v. J. Fröhlich. 4. Bd. Berlin, Friedländer & S. 6 Mk.

Jakobsen, J., freundschaftliche Bewirthung meiner mathemat. Brüder m. e. Traktament v. 6 Gerichten. Schleswig 1790. Neu hrsg. Flensburg, Westphalen. 1 Mk.

Sitzungsberichte d. kaiserl. Akademie d. Wissenschaften. Mathematische naturwissenschaftl Classe. 2. Abth., Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematih, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie u. Astronomie. 95. Bd. 1. u. 2. Hft. Wien, Gerold's S. 5 Mk. 20 Pf.

Fig. 2.



Der Brocard'sche Winkel.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XVIII.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Harnack, Leibniz' Bedeutg. in d. Geschichte d. Mathematik. Rede. Dresden, v. Zahn u. J. 1 Mk.

Herz, N., Geschichte d. Bahnbestimg. v. Planeten u. Kometen. 1. Tl. Die Theorie d. Alterthums. Leipzig, Teubner. 5 Mk.

Mahler, E., üb. e. in e. syrischen Grabinschrift erwähnte Sonnenfinsterniss. Wien, Gerold's S. 20 Pf.

— üb. den Stern misri d. Assyrer. Ebd. 20 Pf.

Methode und Principien.

Kerz, F., weitere Ausbildg. der Laplace'schen Nebularhypothese. 2. Asg. Leipzig, Spamer. 12 Mk.

— über die Entstehung der Körper, welche sich um die Sonne bewegen. 2. Asg. Ebd. 1 Mk. 80 Pf.

Kratz, H., Reflexionen üb. den Sternenhimmel. Neuwied, Heuser's Verl. 80 Pf.

Zimmermann, W. F. A., Naturkräfte u. Naturgesetze. 4. Afl. 9. u. 10. Lfg. Berlin, Dümmler's Verl. à 50 Pf.

Lehrbücher.

Reidt, F., die Elemente der Mathematik. 3. Tl. Stereometrie. 5. Afl. Berlin, Grote'sche Verl. Geb. 1 Mk. 60 Pf.

Sammlungen.

Brenner, A., methodisch geordnete Aufgaben f. das theoretische u. prakt. Rechnen m. gleichmäss. Berücksichtg. d. mündl. u. schriftl. Rechnens. 1. u. 2. Thl. 3. Afl. Regensburg, Coppenrath. à 80 Pf.

Hirsch, M., Sammlg. v. Beispielen, Formeln u. Aufgaben aus d. Buchstabenrechng. u. Algebra. 13. Afl. v. H. Bertram. Altenburg, H. A. Pierer. 3 Mk.

Lieber, H., stereometr. Aufgaben. Berlin, Simion. 2 Mk. 40 Pf.

Rusch, M., Sammlg. v. Aufgaben aus d. Geometrie. Wien, Pichler's Wwe. & S. 1 Mk. 60 Pf.

Schlömilch, O., Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis. 1. Tl. 4. Afl. Leipzig, Teubner. 6 Mk.

Tabellen.

Grossmann, meteorolog. Divisionstafeln. Altona, Schlüter'sche B. 80 Pf.

Köhler, H. G., logarithmisch-trigonometr. Handbuch. 15. Afl. Leipzig, B. Tauchnitz. 3 Mk.

Lüling, E., mathemat. Tafeln f. Markscheider u. Bergingenieure, sowie zum Gebrauch f. Bergschulen. 2. Afl. Bonn, Behrendt. Geb. 6 Mk.

Rex, F. W., vierstellige Logarithmen-Tafeln. Schul-Ausg. Stuttgart, Metzler'sche Verl. 60 Pf.

Schram, R., Tafeln z. Berechng. der näheren Umstände d. Sonnenfinsternisse. Wien, Gerold's S. 10 Mk.

Schrön, L., siebenstellige gemeine Logarithmen d. Zahlen v. 1—108000 u. d. Sinus, Cosinus, Tangenten u. Cotangenten aller Winkel d. Quadranten v. 10 zu 10 Secunden. Taf. I. u. II. 20. Afl. Braunschweig, Vieweg u. S. 4 Mk. 20 Pf.

Stegemann, Tabelle d. wichtigsten Formeln aus d. Differential-Rechnung. 5. Afl. Hrsg. v. L. Kiepert. Hannover, Helwing'sche Verl. 50 Pf.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Braesicke, E. D., der deutsche Rechenmeister. 15. Afl. 7.—10. Lfg. Strassburg, Schultz u. Co., Verl. à 25 Pf.

Gordan's, P., Vorlesgn. üb. Invariantentheorie. Hrsg. v. G. Kerschensteiner. 2. Bd.: Binäre Formen. Leipzig, Teubner. 11 Mk. 60 Pf.

Happich, Ch., praktische Kopfrechenschule. 12. Afl. Langensalza, Schulbuchhl. v. Gressler. 2 Mk. 40 Pf.

Igel, B., zur Theorie d. Combinanten u. z. Theorie der Jerrard'schen Transformation. Wien, Gerold's S. 1 Mk. 60 Pf.

Olbricht, R., Studien üb. d. Kegel- u. Cylinderfunctionen. Leipzig, Engelmann. 4 Mk.

Stolz, üh. die Lambert'sche Reihe. Wien, Gerold's S. 45 Pf.

Winckler, A., üh. den Multiplicator der allgem. ellipt. Differentialgleichung. Ebd. 25 Pf.

Geometrie.

Beyel, Ch., Axonometrie u. Perspective in systemat. Zusammenhange dargestellt. Stuttgart, Metzler'sche Verl. 2 Mk. 40 Pf.

Biermann, O., üb. d. algebraische Gebilde $n$ter Stufe im Gebiete v. $(n+1)$ Grössen. Wien, Gerold's S. 45 Pf.

— üh. die regelmässigen Punktgruppen in Räumen höh. Dimension u. die zugehör. linearen Substitutionen mehrerer Variablen. Ebd. 50 Pf.

Bobek, K., üh. Raumcurven $m$ter Ordnung m. $(m-2)$fachen Secanten. Ebd. 20 Pf.

Börner, H., geometr. Anschauungs- u. Zeichenunterricht f. d. Quinta höh. Lehranstalten. Elberfeld, Höckner. 40 Pf.

Burmester, L., Lehrbuch d. Kinematik. 1. Bd. Die ebene Bewegung. 3. Lfg. Leipzig, Felix. 23 Mk.

Fischer, F. W., Lehrbuch d. Geometrie f. Gymnasien u. höh. Lehranstalten. 3. Tle. Freiburg, Herder. 5 Mk. 20 Pf.

Gandtner, J. O., Elemente der analyt. Geometrie. 7. Afl. Hrsg. v. E. Gruhl. Berlin, Weidmann. 1 Mk. 20 Pf.

Glinzer, E., Lehrbuch der Elementar-Geometrie. 1. Thl. Planimetrie. 3. Afl. Hamburg, Nestler u. M.'s Verl. Kart. 2 Mk.

Greve, Lehrbuch der Mathematik. 4. Kurs. 1. Tl. (Stereometrie.) Bielefeld, Velhagen u. Kl. 1 Mk. 80 Pf.

Hofmann, F., d. synthetischen Grundlagen d. Theorie d. Tetraedroid-Complexes. Leipzig, Koch's Verl. 1 Mk. 20 Pf.

— Methodik d. stetigen Deformation v. zweiblättrigen Riemann'schen Flächen. Halle, Nebert. 2 Mk.

Kohn, G, üb die zu e. allgem. Curve 4. Ordnung adjungirten Curven 9. Classe. Wien, Gerold's S. 25 Pf

— z. Theorie d. rationalen Curven 4. Ordnung. Ebd. 40 Pf.

Köstler, H., Vorschule d. Geometrie. 5. u. 6. Afl. Halle, Nebert. Kart. 50 Pf.

Mertens, F., üh. invariante Gebilde ternärer Formen. Wien, Gerold's S. 80 Pf.

Nagel, v., Lehrbuch der ebenen Geometrie z. Gebrauche bei d. Unterricht in Real- u. Gymnasialanstalten. 15. Afl. Nürnberg, Fr. Korn'sche B. 3 Mk.

Pelz, C., zum Normalproblem d. Ellipse. Wien, Gerold's S. 70 Pf.

Ransenberger, O., die Elementargeometrie d. Punktes d. Geraden n. d. Ebene. Systematisch-kritisch bearb. Leipzig, Teubner. 5 Mk.

Rndel, üb. e. Gattnng v. Körpern böherer Dimension. Fürth, Scbmittner. 40 Pf.

Salmon, G., analyt. Geometrie d. Kegelscbnitte e. besond. Berücksicbtg. der neueren Metboden. Frei bearb. v. W. Fiedler. 5. Afl. 1. Tl. Leipzig, Tenbner. 8 Mk. 80 Pf.

Samnda, F., die Quadratnr d. Hyperbel, nacb e. neuen Methode berechnet. Graz, Styria. 2 Mk.

Scbwarz, H. n. A., üb. specielle zweifacb znsammenhängende Flächenstücke, welche keinen Flächeninhalt besitzen, als alle benachbarten, v. denselben Randlinien begrenzten Flächenstücke. Göttingen, Dieterich'scbe Verl. 3 Mk.

Stelner's, J., Vorlesgn. üb. synthet. Geometrie. 1. Tl. Die Tbeorie d. Kegelscbnitte in elementarer Darstellg. Bearb. v. C. F. Geiser. 3. Afl. Leipzig, Tenbner. 6 Mk.

Ströll, E., Elementi di geometria. Wien, Hölder. 3 Mk.

— Forme geometriche. Ebd. 60 Pf.

Wälsch, C., üb. e. Strahlencongruenz beim Hyperboloid. Wien, Gerold's S. 40 Pf.

Wiener, Ch., Lehrbncb der darstell. Geometrie. (In 2 Bdn.) 2. Bd. Krumme Linien (2. Tl.) n. krnmme Flächen. Belenchtungslebre, Perspektive. Leipzig, Teubner. 18 Mk.

Witting, A., üb. e. der Hesse'scben Configuration der ebenen Curve dritter Ordnnng analoge Configuration im Raume, auf welche die Transformationstheorie der hyperelliptischen Fnnctionen ($p = 2$) führt. Göttingen, Vandenboeck n. R. 1 Mk.

Trigonometrie.

Kleyer, A., Lebrbncb d. ebenen Trigonometrie. Stuttgart, Maier. 18 Mk.

Praktische Geometrie n. Geodäsie.

Kalender f. Messkunde auf d. J. 1888. Hrsg. v. M. Clonth. 1. Tl. Tricr, Lintz. 1 Mk. 40 Pf., geb. in Leinw. 2 Mk., in Ldr. 2 Mk. 60 Pf.

Mechanik.

Dirlchlet, P. G. Lejenne-, Vorlesnngen üb. d. im nmgekebrten Verbältniss d. Qnadrats der Entfernnng wirkenden Kräfte. Hrsg. v. F. Grube. 2. Tl. Leipzig, Teubner. 4 Mk.

Harnack, A., d. Grundlagen d. Theorie d. logaritbmiscben Potentiales u. d. eindeutigen Potentialfnnktion in d. Ebene. Ebd. 4 Mk. 20 Pf.

Hünermann, J. B., e. mechan. Problem. Tübingen, Fues' Verl. 1 Mk. 50 Pf.

Klimpert, R., Lehrbuch der Statik fester Körper (Geostatik). Stuttgart, Maier. 9 Mk.

Knape, E., Untersuchung d. dritten Ampère'schen Fundamentalversuches. Göttingen, Vandenhoeck u. R. 1 Mk.

Lagrange, J. L., analytische Mechanik. Deutsch hrsg. v. H. Servus. Berlin, Springer. 16 Mk.

Neumann, E., Vorlesgn. üb. d. Theorie d. Potentials u. der Kugelfunctionen. Hrsg. v. C. Neumann. Leipzig, Teubner. 12 Mk.

Technik.

Fein, W. E., elektrische Apparate, Maschinen u. Einrichtungen. Stuttgart, J. Hoffmann. 8 Mk.

Fröhlich, O., Handbuch der Elektricität u. d. Magnetismus. Für Techniker bearbeitet. 2. Aufl. Berlin, Springer. 15 Mk., geb. 16 Mk. 20 Pf.

Grawinkel, C., u. K. Strecker, Hülfsbuch f. die Elektrotechnik. Unter Mitwirkg. v. H. Görz, F. Goppelsröder, G. Löbbecke etc. bearb. u. hrsg.. Berlin, Springer. Geb. 12 Mk.

Kalender f. Geometer u. Kulturtechniker. Hrsg. v. W. Schlebach. 2 Thle. Wien, Fromme. Geh. in Leinw. u. geh. 3 Mk.; geb. in Ldr. 3 Mk. 50 Pf.

Kalender f. Elektrotechnik pro 1888. Bearb. v. J. Krämer. Wien, Perles' Verl. Geh. in Leinw. 3 Mk., in Ldr. 4 Mk.

Rohrbeck, E., Vademecum f. Elektrotechniker. 5. Jahrg. d. Kalenders f. Elektrotechniker. 1888. Halle, Knapp. 3 Mk.

Erd- und Himmelskunde.

Annalen d. physikal. Central-Observatoriums. Hrsg. v. H. Wild. Jhg. 1886. 1. Thl. Leipzig, Voss' Sort. 10 Mk. 20 Pf.

Bidschof, F., Bestimmung der Bahn d. Kometen. 1848. I. Wien, Gerold's S. 40 Pf.

Franz, neue Berechng. v. Hartwig's Beobachtgn. d. physischen Libration d. Mondes. Vortrag. Berlin, Friedländer u. S. 30 Pf.

Hepperger, J. v., Bahnbestimmung d. Kometen. 1848. IV. (de-Vico). Wien, Gerold's S. 70 Pf.

Holborn, L., üb. die Abweichung v. Tagesmittel, welche d. Deklination u. d. Horizontal-Intensität zu verschied. Tageszeiten anweisen, u. üb. d. jährl. Periode derselben. Göttingen, Vandenhoeck u. R. 1 Mk. 40 Pf.

Digitized by Google

Instruction d. kaiserl. Akademie d. Wissenschaften f. meteorolog. Stationen. Leipzig, Voss' S. 3 Mk.

Klein, H. J., einige Ergebnisse aus d. systemat. Beobachtgn d. Cirruswolken im westl. Deutschland in d. Zeitraume v. 1. Oktbr. 1882 — 30. Septbr. 1883. Halle, Schmidt's Verl. 40 Pf.

Konkoly, N. v., Beobachtgn., angestellt am astrophysikal. Observatorium in O'Gyalla (Ungarn). 8. Bd. 2. Tl. Spectraskopische Beobachtg. der Sterne zwischen 0° u. — 15° bis zu 7. 5ter Grösse. Ebd. 4 Mk.

Kövesligethy, R. v., üb. e. neue Methode der Farbenbestimmg. der Sterne. Wien, Gerold's S. 40 Pf.

Meyer, M. W., die Lebensgeschichte d. Gestirne in Briefen an e. Freundin. Eine populäre Astronomie d. Fixsterne. Jena, Mauke's Verl. 4 Mk.; geb. 5 Mk.

Nachrichten, astronom. Hrsg.: A. Krüger. 118. Bd. (24 Nrn.) Nr. 1. Hamburg, Mauke S. prcplt. 15 Mk.

Seefeld, F. S. v., astronom. Aufsätze e. Amateurs d. Naturwissenschaft. 1. Hft. Leipzig, Landien. 80 Pf.

Sternhimmel, der, zu jeder Stunde d. Jahres. Drehbare Sternkarte. Ausg. f. Mittel-Europa. 5. Afl. Mit Erläuterg. Leipzig, Leipz. Lehrmittelanstalt. 1 Mk. 25 Pf.

Urbanitzky, A. Ritter v., d. Elektricität d. Himmels u. d. Erde. 1. u. 2. Lfg. Wien, Hartleben. à 60 Pf.

Valentiner, W., d. gestirnte Himmel. Eine gemeinverständl. Astronomie. Stuttgart, Enke. 6 Mk.

Vierteljahrsschrift, der astronom. Gesellschaft. Hrsg. v. E. Schönfeld u. H. Seeliger. 22. Jhg. 1887. 3. Hft. Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Wand-Kalender, astronom., f. d. J. 1888. Gezeichnet v. P. Manojlovits. Text v. K. Zelbr. Wien, Gerold's S. 2 Mk.

Nautik.

Kalender, Hamburger, nautischer, f. d. J. 1888. Hamburg, Eckhardt u. M. 75 Pf.

Physik.

Baenitz, C., Grundzüge f. d. Unterricht in d. Physik. 12. Afl. Bielefeld, Velhagen u. Kl. Kart. 90 Pf.

Clausius, R., die mechan. Wärmetheorie. 2. Afl. 1. Bd. Braunschweig, Vieweg u. S. 8 Mk.

Gantzer, R., Leitfaden f. d. physikal. Unterricht in höh. Lehranstalten. 2. Afl. Berlin, Weidmann. 4 Mk.

Graetz, L., Compendium d. Physik. Wien, Töplitz u. D. 7 Mk.

Verlag von Louis Nebert in Halle a./S.

Methodik

der stetigen Deformation von zweiblättrigen Riemann'schen Flächen.

Ein Uebungsbuch

für den geometrischen Teil der Functionstheorie

von

Fritz Hofmann.

Mit 85 in den Text eingedruckten Figuren.

gr. 8. geh. 2 Mark.

Im unterzeichneten Verlage erschien soeben und ist durch alle Buchhandlungen zu beziehen:

Manojlovits

Astronomischer Wandkalender

pro 1888.

Ein mehrfarbiges Tableau, 75 Ctm. breit, 53 Ctm. hoch, mit den **Himmelserscheinungen** für **jeden Monat des künftigen Jahres,** dem scheinbaren Laufe der Planeten **Venus, Mars, Jupiter** und **Saturn** vom 1. Jänner bis 31. December 1888, dem scheinbaren der **Sonne,** des **Merkur,** des **Uranus** und des **Neptun** vom 1. Jänner bis 31. December 1888 und den **Oertern** des **Voll-** und **Neumondes** unter den **Fixsternen** vom 1. Jänner bis 31. December 1888.

Für den Astronomen vom Fach sowohl als auch für den sich mit Astronomie Befassenden ist dieser gut ausgestattete billige Wandkalender von grossem Interesse.

Preis 2 Mark.

Gegen Postanweisung von 2 Mk. 50 Pf. franco.

Carl Gerold's Sohn in Wien, I., Barbaragasse 2.

Kleyer, A., d. elektr. Erscheinungn. u. Wirkgn. in Theorie u. Praxis. 75. u. 76. Hft. Stuttgart, Maier. à 25 Pf.

Koppe, K., Anfangsgründe d. Physik f. d. Unterricht in d. oberen Klassen der Gymnasien u. Realschulen. 17. Afl. bearb. v. H. Koppe. Essen, Bädeker. 4 Mk. 40 Pf.; Elnbd. 55 Pf.

Mascart, E., u. J. Joubert, Lehrbuch d. Elektricität u. d. Magnetismus. Uebers. v. L. Levy. 2. Bd. Berlin, Springer. 16 Mk.

May, O., Lehrbuch d. Elektrodynamik. (1. Tl.). Stuttgart, Maier. 3 Mk.

Ohm, G. S., die galvanische Kette, mathematisch bearb. Neudruck m. e. Vorwort v. J. Moser. Wien, Töplitz u. D. 3 Mk.

Schütte, W., physikalische Bilder. 2. Asg. Leipzig, Strübig's Verl. Kart. 4 Mk. 50 Pf.; geh. 5 Mk.

Schwartze, Th., E. Japing u. A. Wilke, die Elektricität. 2. Afl. Wien, Hartleben. Geh. 1 Mk. 50 Pf.

Thompson, S. P., elementare Vorlesungen üh. Elektricität u Magnetismus. Uebers. v. A. Himstedt. Tübingen, Laupp. 6 Mk.; geb. 7 Mk.

Weinhold, A. F., physikal. Demonstrationen. Anleitg. zum Experimentiren an Gymnasien, Realschulen u. Gewerbeschulen. 2. Afl. 3. (Schluss-)Lfg. Leipzig, Quandt u. H. 7 Mk. 50 Pf.

Zeitschrift f. d. physikal. u. chem. Unterricht. Unter besond. Mitwirkg. v. E. Mach u. H. Schwalbe, hrsg. v. F. Poske. 1. Jhg. 1887/88. 1. Hft. Berlin, Springer. prcplt. 10 Mk.

Vermischte Schriften.

Ihering, A. v., Katechismus d. mechan. Technologie. Leipzig, Weber. Geb. 4 Mk.

Journal f. die reine u. angewandte Mathematik. Hrsg. v. L. Kronecker u. K. Weierstrass. Inhalt u. Namen-Verzeichniss d. Bände 1—100. 1826—1887. Berlin, G. Reimer. 12 Mk.

— dasselbe. 102. Bd. 1. Hft. Ebd. prcplt. 12 Mk.

Mittheilungen, mathemat.-naturwissenschaftl., hrsg. v. O. Böklen. 2. Bd. 1. u. 2. Hft. Tübingen, Fues, Verl. 3 Mk.

Sitzungsberichte d. kaiserl. Akademie d Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. 2. Abth. Enth. die Abhandlgn. aus dem Gebiete d. Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie u. Astronomie. 95. Bd. 3.—5. Hft. Wien, Gerold's S. 16 Mk.

Sitzungsberichte d. mathem.-phys. Classe d. k. b. Akademie d. Wissenschaften zu München. 1887. 1. Hft. München, Franz'sche Verl. 1 Mk. 20 Pf.

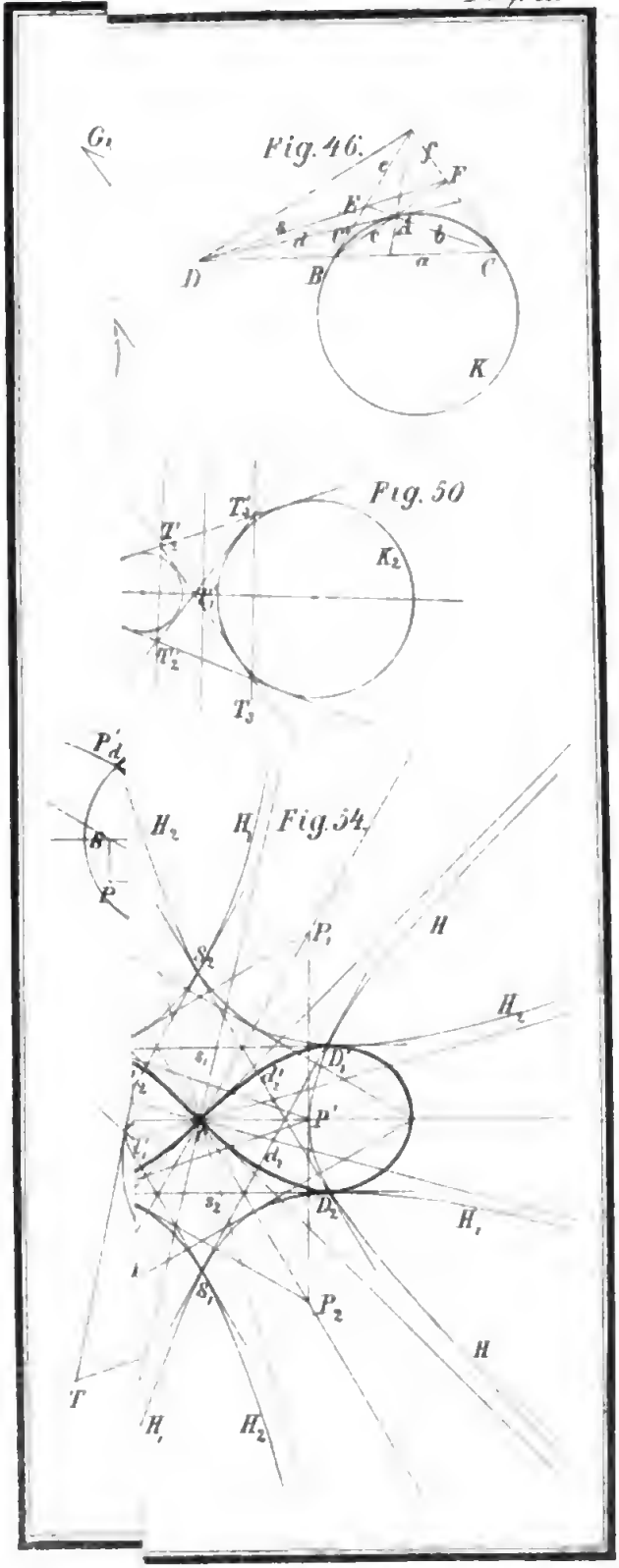


Fig. 46.
Fig. 50
Fig. 54.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XX.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Fortschritte, die, d. Physik. Nr. 11. 1887. Leipzig, E. H. Mayer. 3 Mk.

Jahrbuch üb. die Fortschritte d. Mathematik, begründet v. C. Obrtmann. Unter Mitwirkung v. J. Müller u. A. Wangerin. Hrsg. v. M. Henoch u. E. Lampe. 17. Bd. Jahrg. 1885. 2. Hft. Berlin, G. Reimer. 6 Mk

Weissenborn, H., Gerbert. Beiträge z. Kenntniss d. Mathematik d. Mittelalters. Berlin, Mayer u. M. 9 Mk.

Methode und Principien.

Beez, R., üb. Enklidische u. Nicht-Euklidische Geometrie. Plauen, Neupert's Verl. 2 Mk.

Beyda, H. F. Th., das Newton'sche Gravitationsgesetz. Lässt sich der Fall der Körper ed. die Schwere derselben aus e. Anziehungskraft d. Erdkörper erklären? Stuttgart, Metzler'sche Verl. 1 Mk.

Hunsinger, F., e. kleine Betrachtung üb. e. grossen wissenschaftl. Irrthum in d. Lehre v. der Wärme u. d. Licbte. Minden, Hufeland's Verl. 50 Pf.

Kerschbaum, G., Beweis, dass es e. Quadratur d. Kreises giebt, u. dass die bisher z. Berechnung d. Kreises benutzte Ludolphsche Zahl etwas zu klein ist. 2. Afl. Kobnrg, Riemann jr. 1 Mk.

Zimmermann, W. F. A., Naturkräfte u. Naturgesetze. 4. Afl. 14. u. u. 15.Lfg. Berlin, Dümmler's Verl. à 50 Pf.

Lehrbücher.

Beyman, J. R., Lehrbuch d. Mathematik. 1. Tl. Geometrie d. Ebene. 12. Afl., besorgt v. K. Werr. Düsseldorf, Schwann'sche Verl. 2 Mk.

Enholtz, C. E., Lehrbnch der elementaren Mathematik z. Schnl- n. Selbstnnterricht f. Lehrer n. Lehramtskandidaten. 1. Tl. Reine Arithmetik. 3. (Schlnss-)Lfg. Aaran, Sauerländer's Verl. 1 Mk. 20 Pf.

Fischer. F., Anfangsgründe d. Mathematik znm Gebranch an höheren Schnlen. 3 Tle. Leipzig, Grunow. Geb. 6 Mk. 50 Pf.

Leitfaden, mathemat., f. d. fürstl. Gymnasium zu Gera. 2. Afl. Gera, Kanitz's Verl. Kart. 2 Mk.

Sammlungen.

Brann, W., Rechenbnch f. d. oberen Klassen v. Real- u. Handelsschulen. Augsburg, Rieger. Geb. 1 Mk. 50 Pf.

Fechner, H., Anfgaben f. d. ersten Unterricht in der Buchstabenrechnnng n. Algebra. 2. Afl. Berlin, W. Schultze's Verl. 1 Mk. 20 Pf.

Genau, A., Rechenbnch f. Lehrerseminare. 2. Afl. v. A. Genan n. P. A. Tüffers. 1. Bd. Gotha, Thienemann. 1 Mk. 80 Pf.

Heis, E., Sammlg. v. Beispielen n. Aufgaben aus d. allgem. Arithmetik n. Algebra. 74. n. 75. Afl. Köln, DuMont-Schanberg. 3 Mk.

Kleyer, A., vollständ. gelöste Aufgaben-Sammlg. ans allen Zweigen d. Rechenknnst etc. 404.—431. Hft. Stuttgart, J. Maier. à 25 Pf.

Liebmann, mathemat. Formeln n. Regeln, sowie Anfgaben m. Lösgn. z. Vorbereitg. f. d. Portepee-Fähnrichs Prüfnng. Berlin, Liebel'sche B. Kart. 2 Mk. 50 Pf.

Löbnitz, G. Th., Rechenbnch f. Gymnasien, Realgymnasien, Real- u. höhere Bürgerschulen. 2. Tl. 13. Afl. Hildesheim, Gerstenberg. 1 Mk.; Antwortenhft. 10. Afl. 60 Pf.

Müller, E. R., planimetr. Constrnktionsanfgaben nebst Anleitnng zn deren Lösnng. 2. Afl. Oldenbnrg, Stalling. Kart. 1 Mk.

Reidt, F., planimetrische Aufgaben, f. d. Gebranch im Schnl-, Privat- n. Selbstunterricht. 2. Tl. 2. Afl. Breslan, Trewendt. 1 Mk. 60 Pf.

Schellen, H., Anfgaben f. d. theoret. n. prakt. Rechnen. 1. Tl. 21. Afl., bearb. v. H. Lemkes. Münster, Coppenrath. 2 Mk.

Tabellen.

Nell, A. M., fünfstellige Logarithmen der Zahlen n. der trigonometr. Fnnctionen nebst den Logarithmen f. Snmme n. Differenz zweier Zahlen, deren Logarithmen gegeben sind, sowie einigen anderen Tafeln. 6. Afl. Darmstadt, Bergsträsser. Geb. 1 Mk. 80 Pf.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Bretschneider, M., Lehr- u. Uebungsbuch der allgem. Arithmetik u. Algebra f. d. unt. Classen der Mittelschulen. 1. Tl. Stuttgart, J. Maier. 1 Mk. 40 Pf.

Hähler, Th., I. Maxima u. Minima symmetrischer Functionen. II. Betrachtgn. üb d. Determination. Grimma, Gensel. 1 Mk.

Hösch, L., üh. d. Koefficienten d. Ausdrucks $\Delta^n x^k$ u. einige m. ihnen verwandte Zahlenverbindungen. Berlin, Gärtner. 1 Mk.

Igel, B., üh. einige algebraische Reciprocitätssätze. Leipzig, Freytag. 1 Mk.

Lenzer, O. u. F. Joch, Hilfsbuch f. d. Rechenunterricht in d. unt. Semiuarklasseu. 1. Tl. Gotha, Thienemanu. 2 Mk. 60 Pf.

Mertens, F., üb. windschiefe Determinanten. Leipzig, Freytag. 24 Pf.

Nagl, A, die Rechenpfennige u. d. operative Arithmetik. Wien, Frick. 2 Mk.

Suhle, H., Leitfaden f d. Unterricht in d. Arithmetik. 1. u. 2. Hft. 2. Afl. Köthen, Schettler's Erben. 3 Mk. 50 Pf.

Wulfinghoff, R., Invarianten-Rechng. Methode z. Bestimmg. d gegenseit. Abhängigkeit der Concomitanten e. binären Form Berlin, Gärtner. 1 Mk.

Geometrie.

Baer, K., parabolische Koordinaten in d. Ebene und im Raume. Berlin, Mayer u. M. 1 Mk. 60 Pf.

Blancke, H., Raumlehre. 1. Tl. 9. Afl. Hannover, Hahn. Kart. 60 Pf.

Brener, A., constructive Geometrie d. Kegelschnitte auf Grund der Focaleigenschaften. Eisenach, Bacmeister. 1 Mk. 60 Pf.

Buka, F., projektivische Massstäbe. Ein Hülfsmittel zum Studium der synthet. Geometrie. Berlin, Winckelmann u. S. 2 Mk.

Feld, A. u. V. Serf, Leitfaden f. d. geometr. Unterricht an höheren Lehranstalten. 4. Afl. Wiesbaden, Kunze's Nachf. 1 Mk. 20 Pf.

Götting, E., Bestimmg. e. speciellen Gruppe nicht algebr. Minimalflächen, welche eine Fläche v. reellen algebr. Curven enthalten. Göttingen, Vandenhoeck u. R. 1 Mk.

Hauck, G., Lehrbuch d. Stereometrie. Auf Grund v. F. Kommerell's Lehrbuch neu bearb. 6. Afl. Tübingen, Lanpp'sche B. 2 Mk. 40 Pf.

Hermuth, Th., Textgleichgn. geometr. Inhalts. Berlin, Springer. Kart. 1 Mk. 20 Pf.

Hormann, G., Untersuchg. üh. die Grenzen, zwischen welchen Unduloide u. Nodoide, die v. zwei festen Parallelkreisflächen be-

grenzt sind, bei gegebenem Volumen e. Minimum der Oberfläche besitzen. Göttingen, Vandenhoeck u. R. 1 Mk. 40 Pf.

Kallen, W., Raumlehre f. Volksschulen, Fortbildungsschulen u. Präparanden-Anstalten. 2. Afl. Aachen, Barth. 1 Mk. 60 Pf.

Kiefer, A., üb. die geraden Kegel u. Cylinder, welche durch gegebene Punkte d. Raumes gehen od. gegebene Linien d. Raumes berühren. Frauenfeld, Huber. 1 Mk. 60 Pf.

Kohn, G., üb. Flächen dritter Ordng. m. Knotenpunkten. Leipzig, Freytag. 20 Pf.

Köstler, H., Leitfaden d. ebenen Geometrie f. höhere Lehranstalten. 2. Hft. Lehre vom Flächeninhalt. Constructionslehre. 2. Afl. Halle, Nebert. 75 Pf.; kart. 80 Pf.

Lehmann, E., De la Hire und seine sectiones conicae. 1. Tl. Leipzig, Hinrichs'sche Sort. 1 Mk. 20 Pf.

Pietsch, C., Katechismus d. Raumberechnung. 3. Afl. Leipzig, J. J. Weber. Geh. 1 Mk. 80 Pf.

Reim-Regeln zur geometr. Analysis v. Xenos. Ravensburg, Dorn. 30 Pf.

Schweder, G., Lehrbuch d. Planimetrie. 4. Afl. Riga, Kymmel. Kart. 1 Mk. 50 Pf.

Simon, M., Geometrie f. höh. Bürgerschulen (Mittelschulen) u. Lehrer-Seminarien. 3. Afl. Breslau, Hirt, Verl. Kart. 1 Mk.

Westermann, H., die analyt. Geometrie auf d. Schule u. das Rechnen m. Hülfe der Logarithmen. Riga, Kymmel. Geh. 3 Mk.

Wiedemann, G. O., die geometr. Darstellg. d. Quadratur d. Kreises. Berlin, Friedrich Nachf. 60 Pf.

Praktische Geometrie, Geodäsie.

Massny, W., üb. die Bestimmung d. Fallbeschleunigung. Einige Transformationsmethoden z. Untersuchung d. Eigenschaften ebener Curven. Gross-Strehlitz, Wilpert. 1 Mk.

Sarrazin, O. u. H. Overbeck, Taschenbuch zum Abstecken v. Kreisbögen m. u. ohne Uebergangscurven f. Eisenbahnen, Strassen u. Kanäle. 4. Afl. Berlin, Springer. Geh. 3 Mk.

Mechanik.

Poisson, F. D., Lehrbuch der analyt. Mechanik. Deutsch hrsg. v. A. Pfannstiel. 1. Lfg. Dortmund, Meyer. 2 Mk. 75 Pf.

Rausenberger, O., Lehrbuch der analytischen Mechanik. 1. Bd. Mechanik d. materiellen Punkte. Leipzig, Teubner. 8 Mk.

Wronsky, R., das Intensitätsgesetz u. d. Gleichartigkeit der analyt. Formen in der Lehre v. d. Energie. Eine elementare Einführg. in d. Energetik. Frankfurt, Harnecker u. Co. 80 Pf.

Technik.

Anleitung zum Erlernen d. Arbeitens am Hughes-Apparat. Berlin, v. Decker. 75 Pf.

Echo, elektrotechnisches. Organ f. d. Fortschritte d. angewandten Elektricitätslehre. Hrsg.: A. Berliner. 1. Jahrg. 1888. Nr. 7. Berlin, Steinitz. Viertelj. 3 Mk.

Jahrbuch f. Elektrotechnik f. d. J. 1887. Hrsg. v. G. Krebs u. C. Grawinkel. 1. Hft. Halle, Knapp. 2 Mk.

Jaumann, G., entgegengeknppelte Fadenwagen zur absoluten Kraftmessung. Leipzig, Freytag. 20 Pf.

Kreuter, F., das neue Tacheometer aus d. Reichenbach'schen mathematisch-mechan. Institute T. Ertel & Sohn in München, etc. Ein Schnellmess-Instrument etc. 2. Afl. Brünn, Winiker. 2 Mk.

Krieg, M., die Erzeugung u. Vertheilung d. Elektricität in Central-Stationen. 1. Bd. Magdeburg, Faber. 4 Mk. 50 Pf.

Stefan, J., üb. thermomagnet. Motoren. Leipzig, Freytag. 30 Pf.

Templeton's Taschenbuch f. prakt. Mechaniker v. F. Kreuter u. J. Otto. Brünn, Winiker. 5 Mk.

Optik, Akustik und Elasticität.

Grimsehl, E., Tonstärke-Messung. Hamburg, Herold. 2 Mk. 50 Pf.

Miller, A., üb. d. Grundlagen der Bestimmungsmethode des longitudinalen Elasticitätsmoduls. München, Franz'scher Verl. 1 Mk. 70 Pf.

Erd- und Himmelskunde.

Anton, F., specielle Störungen u. Ephemeriden f. den Planeten (114) Cassandra u. (154) Bertha. Leipzig, Freytag. 60 Pf.

Beobachtungen d. kaiserl. Universitäts-Sternwarte Dorpat. 17. Bd. Leipzig, Köhler. 15 Mk.

—, deutsche überseeische meteorolog. Gesammelt u. hrsg. v. d. dtschn. Seewarte. 1. Hft. Hamburg, Friederichsen u. Co. 7 Mk.

Emmerig, A., unser nächtliche Sternhimmel. Bamberg, Buchner. Kart. 2 Mk.

Ergebnisse d. meteorol. Beobachtgn. im J. 1886. Hrsg. v. dem kgl. preuss. Meteorolog. Institut durch W. v. Bezold. Berlin, Asher & Co., Verl. 18 Mk.

Gantier, R., la première comète périodique de Tempel 1867. II. Basel, Georg, Verl. 4 Mk.

Hann, J., Resultate d. I. Jahrg. der meteorolog. Beobachtgn. auf d. Sonnblick. (3095 m). Leipzig, Freytag. 60 Pf.

Fig. 1.

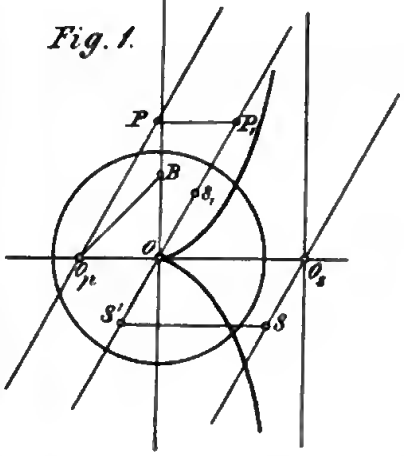
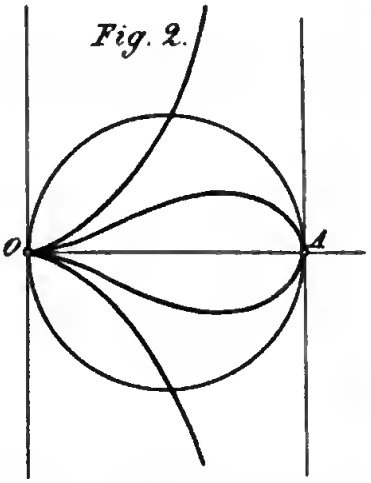


Fig. 2.



XIX. Yahradnik: *Eigenschaften gewisser Punkttripel auf der Cissoide.*

Fig. 1.

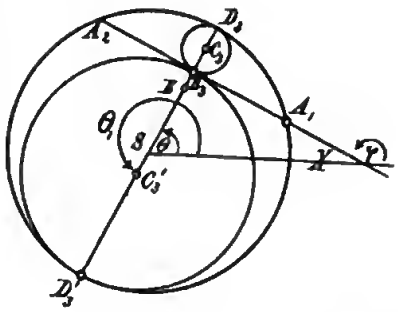


Fig. 3.

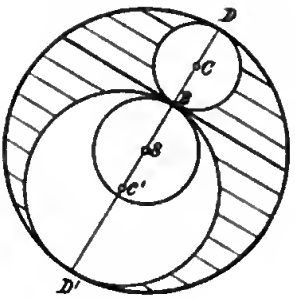
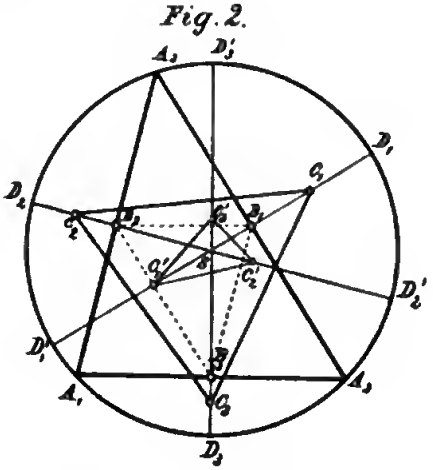
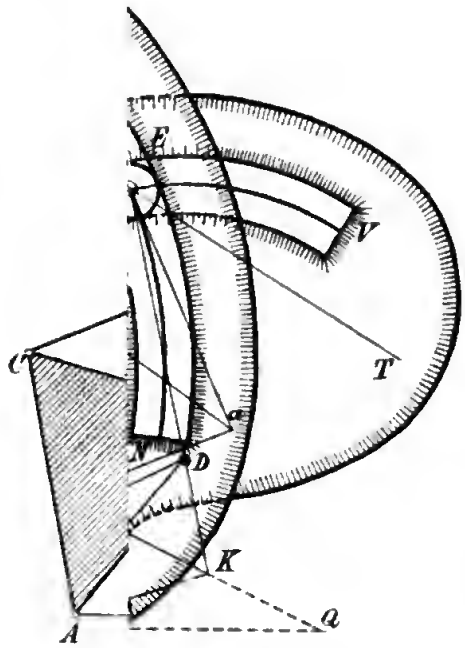


Fig. 2.



XX. Yahradnik: *Ueber einige Relationen am Dreiecke.*



XXII.

XXIII. Hermes: Punkt und Gerade im Dreieck

In Fr. Mauke's Verlag in Jena erschien und ist durch Buchhandlung oder auch direkt zu beziehen:

Die

ebensgeschichte der Gestirne

in

Briefen an eine Freundin.

Eine populäre Astronomie der Fixsterne

von

M. Wilh. Meyer.

Mit 46 Textillustr., 2 Tafeln u. 1 Titelbild.

Beste Ausstattung.

Geh. 4 Mk., eleg. geb. 5 Mk.

s **Dresdner Tageblatt** schreibt:

„Der berühmte Verfasser hat nicht etwa Wilhelm mboldts Titel nur adoptirt, sondern es ist ein so ernistiefer, liebenswürdiger Zug in dem ausgezeichn Buche vorherrschend, dass man es ungern der Hand legt und wirklich eingestehen : das ist ein geistvolles Werk, so unterend und fesselnd wie belehrend und grössere chtspunkte schaffend. *Wir empfehlen das Buch voller Verantwortung aufs wärmste.*"

---

stronomische Geographie.

ehrbuch angewandter Mathematik

von

Prof. H. C. E. Martus,

Direktor des Sophien-Realgymnasiums in Berlin.

sgabe. 2. Anflage. Mit 100 Figuren im Texte. Geh. Preis 0 Pf.

hul-Ausgabe. Mit 80 Figuren im Texte. Geh. Preis Pf.

zig. C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung.
(J. Sengbusch.)

Zur

Herstellung mathematischer etc. Werke,

auch mit Figurentafeln, halten wir den Herren Autoren und Verlegern unsere für mathematischen und Formelsatz speziell eingerichtete Offizin bestens empfohlen unter Zusicherung correcter, rascher und billiger Bedienung.

Greifswald.

F. W. Kunike,
Buch- und Steindruckerei.

INHALT.

Seite.

XVIII. Die intermediäre Bahn des Planeten (17) Thetis nach Herrn Glydén's Theorie. Von Victor Wellmann 385

XIX. Eigenschaften gewisser Punkttripel auf der Cissoide. Von K. Zahradnik . . . . . 39.

XX. Ueber einige Winkel- und Längenrelationen am Dreiecke. Von K. Zahradnik 411

XXI. Ueber magische Quadrate. Von Felix Clauss 424

XXII. Miscellen.

1. Neuer Punkt und Gerade in der Dreiecksebene. Von J. Hermes 437
2. Momentaner Bewegungszustand eines in der Praxis viel angewandten Mechanismus. Von August Ramisch 442
3. Zur Lehre der quadratischen Formen. Von J. Vályi 445
4. Zur Function $I'(x)$. Von W. Láska 448

Greifswald, gedruckt bei F. W. Kunike.

ROOM USE ONLY